§5. Гармонический осциллятор

Гармон. осц-ор в классич. физике – система, совершающая гармонич. колебания в поле упругой силы.

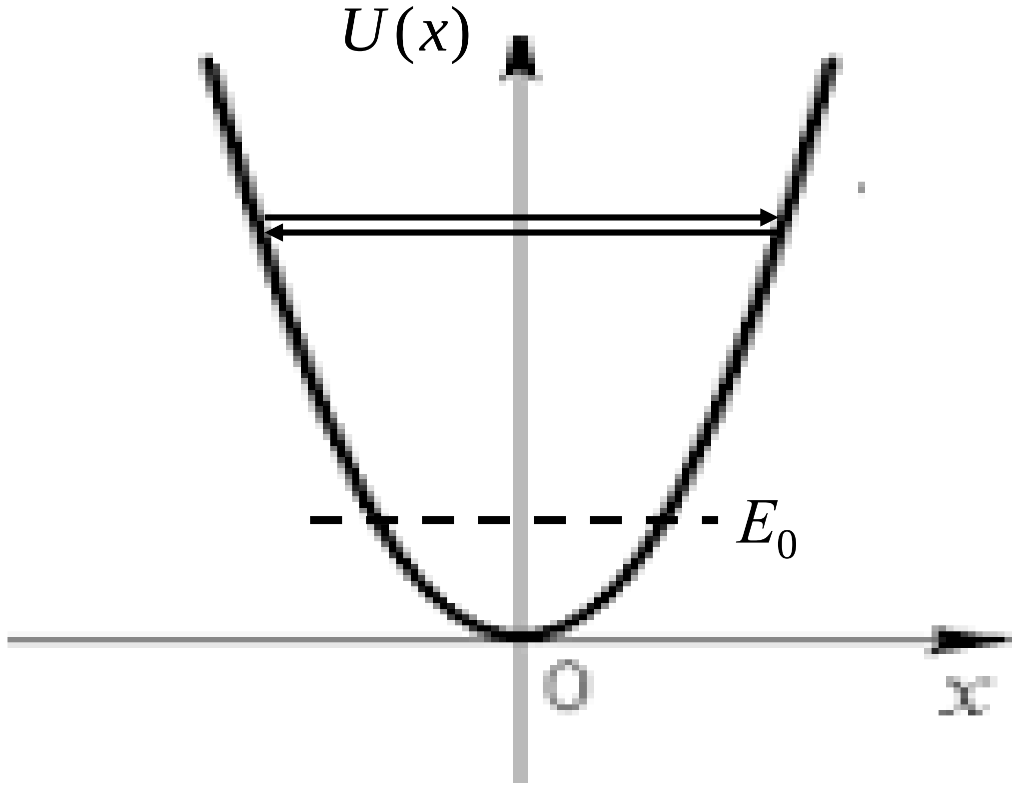
Потенциальная энергия

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – частота колебаний

Полная энергия (функция Гамильтона)

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$



$U(x)$
E_0
O
x

Гамильтониан квантового осциллятора:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

Движение квантовой частицы финитно (ограничено в прос-ве) – стационарные состояния квантуются (спектр энергии дискретен)

Движение одномерно– стационарные состояния характеризуются одним квантовым числом.

Принцип неопределенности: ∃ состояние с наименьшей энергией $E_0 > 0$.

Преобразование гамильтониана:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega} + \frac{m\omega\hat{x}^2}{\hbar}\right)$$

Лестничные операторы:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}_x\right)$$ *оператор уничтожения*

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}_x\right)$$ *оператор рождения*

Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^{+}$ эрмитово сопряжены.

$$\hat{a}\hat{a}^{+} = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}^2 - \frac{i}{\hbar}\hat{x}\hat{p}_x + \frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\hat{x} + \frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{x}, \hat{p}_x\right]\right)$$

Коммутатор.

Основное коммутационное соотношение

$$\left[\hat{x}, \hat{p}_x\right] = i\hbar$$

$$\hat{a}\hat{a}^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega} + 1\right)$$

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega} - 1\right)$$

$$\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega} + \frac{m\omega\hat{x}^2}{\hbar}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$|n\rangle$ – стац-ое состояние с энергией E_n

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

n – собственное значение эрмитового оператора $\hat{a}^+\hat{a}$
(дискретный параметр)

$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Все векторы $|n\rangle$ нормированы $\langle n|n\rangle = 1 \quad \forall n$

Обозначим

$$|n-\rangle = \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{a}^{+}\hat{a}|n-\rangle = \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^{+}-1)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle) - \hat{a}|n\rangle =$$
$$= \hat{a}n|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle = (n-1)|n-\rangle$$

Вектор $|n-\rangle$ – собственный вектор оператора $\hat{a}^{+}\hat{a}$, принадлежащий собственному значению $n-1$:

$$|n-\rangle = \gamma_n |n-1\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \gamma_n |n-1\rangle$$

$$\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle = \langle n|\left(\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle\right) = \langle n|n|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n$$

$$\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^{+}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \gamma_n\langle n|\hat{a}^{+}|n-1\rangle = \gamma_n\langle n-1|\hat{a}|n\rangle^{*} =$$

$$= \gamma_n\gamma_n^{*}\langle n-1|n-1\rangle = |\gamma_n|^2$$

$$|\gamma_n|^2 = n$$

Коэф-ент γ_n можно выбрать действительным и равным

$$\gamma_n = \sqrt{n}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Можно показать $\quad \hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

Вместе с каждым квантовым числом n ряду собственных значений принадлежат все числа, отличающиеся от n на целое значение:

$$n, n \pm 1, n \pm 2, n \pm 3, \ldots$$

Пусть n_0 – минимальное число ряда, отвечающее минимальной энергии E_0:

$$\hat{a}\left|n_0\right\rangle = 0$$

$$\hat{a}\left|n_0\right\rangle = \sqrt{n_0}\left|n_0 - 1\right\rangle \qquad \Rightarrow n_0 = 0$$

Стационарное состояние гармонического осциллятора определяется квантовым числом n, принимающем целые неотрицательные значения.

Правило квантования энергии гармонического осциллятора:

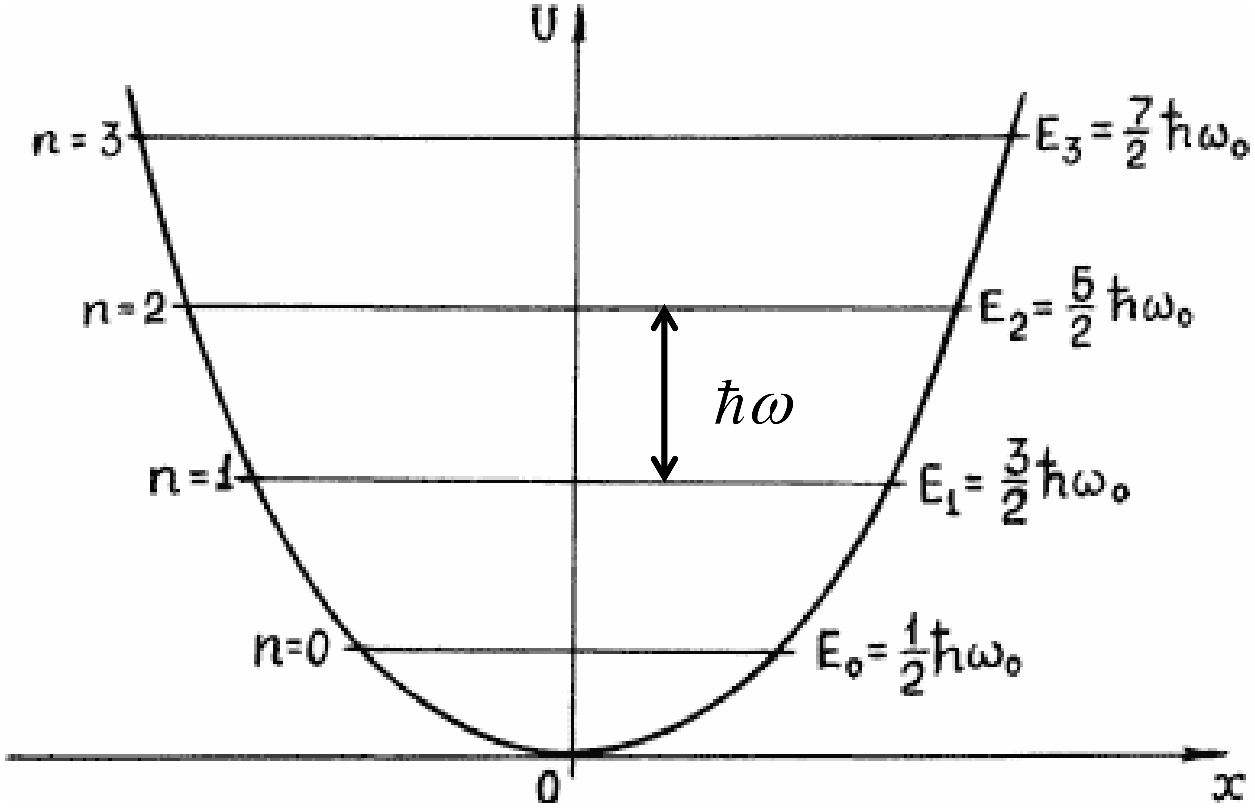
$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right)$$

Разрешенные значения энергии образуют *эквидистантную* систему уровней.

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$$

Минимальная энергия (энергия нулевых колебаний)

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$


U
n = 3
n = 2
n = 1
n = 0
$E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega_0$
$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega_0$
$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$
$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$
$\hbar\omega$
0
x

Координатное представление

$\psi_n(x)$ – стац-ая в.ф. n- го состояния

У. Ш.:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\psi_n$$

Гамильтониан:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}_x\right)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}_x\right)$$

В координатном представлении

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)$$

Безразмерная координата

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\psi_n(\xi)$$

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_n(\xi)\right|^2 d\xi = 1$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)$$

Основное состояние $n = 0$:

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0$$

$$\hat{a}\psi_0 = 0$$

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_0 = 0$$

$$\frac{d\psi_0}{d\xi} = -\xi\psi_0$$

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

Остальные в.ф. из рекуррентного соотношения:

$$\hat{a}^+\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}^+\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\psi_n$$

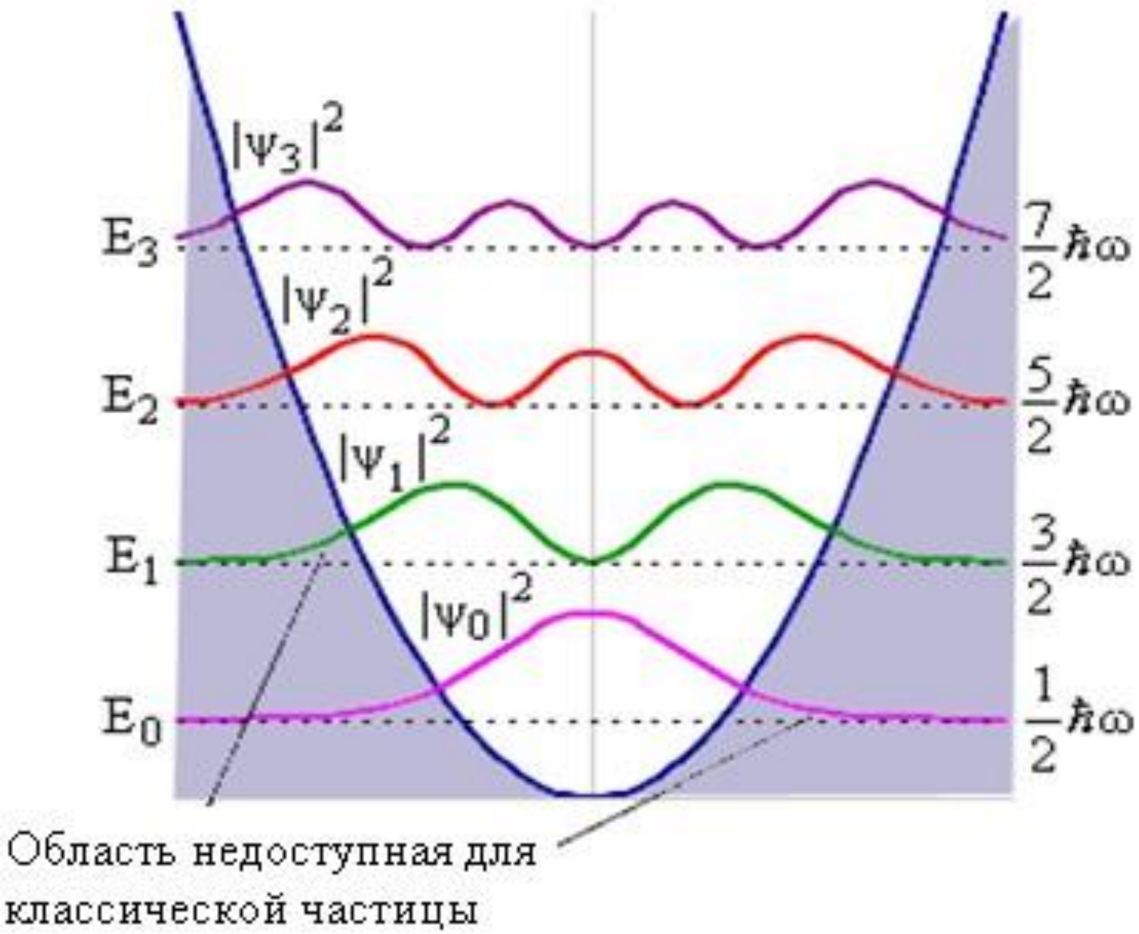
Например

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}\;\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

Для произвольного *n*:

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$ – полиномы Эрмита



Волновые функции экспоненциально затухают в классически запрещенной области.