

НИУ «МЭИ»

# Конспект лекций

ЭУМК по дисциплине «Физика», ИЭЭ, ИГВИЭ

О. И. Лубенченко  
4.7.2023

I СЕМЕСТР.....	13
ЛЕКЦИЯ 1 .....	13
0. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О МАТЕРИИ.....	13
0.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЗНАНИЙ.....	13
0.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.....	13
0.3. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ .....	14
0.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ.....	14
1.1. ПРЕДМЕТ МЕХАНИКИ .....	16
1.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ .....	16
1.1.2. СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ .....	16
1.1.3. КЛАССИЧЕСКАЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА .....	17
1.2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	17
1.2.1. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ.....	18
1.2.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.....	18
1.2.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ .....	20
ЛЕКЦИЯ 2 .....	22
1.2.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).....	22
1.2.4. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ .....	23
1.3. КИНЕМАТИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА .....	24
1.3.1. ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ.....	24
1.3.2. УГЛОВЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ.....	24
1.3.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	26
ЛЕКЦИЯ 3 .....	28
1.4. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	28
1.4.1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА .....	28
1.4.2. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА. ИНЕРТНОСТЬ.....	28
1.4.3. СИЛА .....	29
1.4.4. ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	30
1.4.5. НЕКОТОРЫЕ СИЛЫ .....	32
1.4.6. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ.....	34
1.4.7. ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ.....	36
1.4.8. ИМПУЛЬС. ДРУГАЯ ФОРМА II ЗАКОНА НЬЮТОНА.....	36
ЛЕКЦИЯ 4 .....	38
1.5. ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА.....	38
1.5.1. МОМЕНТ СИЛЫ .....	38
1.5.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ .....	39

1.5.3. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ.....	40
1.5.4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО ДИНАМИКЕ .....	44
ЛЕКЦИЯ 5 .....	47
1.5.5. ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА .....	47
1.5.6. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА .....	48
1.6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА.....	49
1.7. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА .....	50
1.7.1. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА .....	50
1.7.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА.....	52
ЛЕКЦИЯ 6 .....	56
1.8. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ .....	56
1.8.1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ .....	56
1.8.2. РАБОТА И МОЩНОСТЬ .....	57
1.8.3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.....	59
1.8.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	60
1.8.5. СВЯЗЬ СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ. ГРАДИЕНТ .....	63
1.8.6. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	64
ЛЕКЦИЯ 7 .....	66
1.8.7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.....	66
1.9. УДАР.....	66
1.9.1. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР .....	66
1.9.2. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР .....	68
1.10. ПОВТОРЕНИЕ: ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ .....	69
1.10.1. СРАВНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ЗАКОНОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ .....	69
1.10.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ.....	70
ЛЕКЦИЯ 8 .....	71
1.11. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ .....	71
1.11.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ.....	71
1.11.2. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАЛИЛЕЯ .....	71
1.12. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.....	73
1.12.1. 4-ПРОСТРАНСТВО .....	73
1.12.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА.....	74
1.12.3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА.....	75
ЛЕКЦИЯ 9 .....	79
1.13. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА.....	79

1.13.1. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС.....	79
1.13.2. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	80
1.13.3. ЭНЕРГИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ.....	80
1.13.4. ВЕКТОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА.....	82
2.1. ПРЕДМЕТ ТЕРМОДИНАМИКИ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ.....	84
2.1.1. ПОСТУЛАТЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ (МКТ).....	84
2.1.2. МИКРОПАРАМЕТРЫ И МАКРОПАРАМЕТРЫ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАКРОСИСТЕМ.....	85
2.1.3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ.....	86
2.2. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ.....	86
2.2.1. МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	86
2.2.2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ.....	87
ЛЕКЦИЯ 10.....	89
2.2.3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МКТ.....	89
2.2.4. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ.....	90
2.3. I НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.....	91
2.3.1. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ.....	91
2.3.2. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	91
2.3.3. РАБОТА ГАЗА.....	93
2.3.4. КОЛИЧЕСТВО ТЕПЛОТЫ. ТЕПЛОЁМКОСТЬ.....	94
2.3.5. I НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.....	94
ЛЕКЦИЯ 11.....	95
2.4. ПОЛИТРОПНЫЙ ПРОЦЕСС ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	95
2.4.1. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС ( $T = \text{CONST}$ ).....	95
2.4.2. ИЗОХОРНЫЙ ПРОЦЕСС ( $V = \text{CONST}$ ).....	95
2.4.3. ИЗОБАРНЫЙ ПРОЦЕСС ( $P = \text{CONST}$ ).....	95
2.4.4. АДИАБАТНЫЙ ПРОЦЕСС ( $\Delta Q = 0$ ).....	96
2.4.5. ПОЛИТРОПНЫЙ ПРОЦЕСС (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ) ( $C = \text{CONST}$ ).....	97
2.4.6. ЗАВИСИМОСТЬ ТЕПЛОЁМКОСТИ ГАЗА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ.....	98
2.5. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ.....	99
2.5.1. ТЕПЛОВАЯ МАШИНА (ТЕПЛОВОЙ ДВИГАТЕЛЬ).....	99
2.5.2. ХОЛОДИЛЬНАЯ МАШИНА.....	100
2.5.3. ЦИКЛ КАРНО.....	100
2.5.4. ТЕОРЕМЫ КАРНО (БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА).....	102
2.6. ЭНТРОПИЯ. II НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.....	102

2.6.1. НЕРАВЕНСТВО КЛАУЗИУСА.....	102
ЛЕКЦИЯ 12.....	104
2.6.2. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО .....	104
2.6.3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.....	104
2.6.4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЭНТРОПИИ.....	106
2.6.5. II НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ .....	106
2.6.6. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ .....	107
2.6.7. III НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ .....	108
2.7. КЛАССИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА .....	108
2.7.1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ .....	108
ЛЕКЦИЯ 13.....	111
2.7.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА).....	111
2.7.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ЭНЕРГИЯМ .....	114
2.7.4. БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА .....	115
2.7.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА–БОЛЬЦМАНА.....	116
ЛЕКЦИЯ 14.....	118
2.8. РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ.....	118
2.8.1. МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО ГАЗА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР- ВААЛЬСА.....	118
2.8.2. ИЗОТЕРМЫ РЕАЛЬНОГО ГАЗА .....	119
2.8.3. ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА.....	121
2.8.4. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ.....	121
2.9. НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ.....	122
2.9.1. ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	122
2.9.2. ЭМПИРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА .....	123
ЛЕКЦИЯ 15.....	125
2.9.3. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА (НА ПРИМЕРЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ).....	125
1.14. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ .....	127
1.14.1. ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ .....	127
1.14.2. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ (СОБСТВЕННЫЕ) КОЛЕБАНИЯ.....	127
ЛЕКЦИЯ 16.....	132
1.14.3. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ .....	132
1.14.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ .....	134
ЛЕКЦИЯ 17.....	138
1.15. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ .....	138

1.15.1. УРАВНЕНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ.....	138
1.15.2. ВОЛНОВОЙ ФРОНТ.....	138
1.15.3. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ВОЛНА.....	139
1.15.4. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ .....	141
II СЕМЕСТР .....	142
ЛЕКЦИЯ 18.....	142
3.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....	142
3.1.1. ПОЛЕ.....	142
3.1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА.....	142
3.1.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....	143
3.1.4. СИЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	145
3.1.5. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЕЙ .....	146
3.1.6. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА .....	147
3.1.7. МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	147
3.2. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	148
3.2.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ .....	148
ЛЕКЦИЯ 19.....	149
3.2.2. ЗАКОН КУЛОНА. РАСЧЁТ НАПРЯЖЁННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ СУПЕРПОЗИЦИИ .....	149
3.2.3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА ДЛЯ НАПРЯЖЁННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	153
ЛЕКЦИЯ 20.....	159
3.2.3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА ДЛЯ НАПРЯЖЁННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ) .....	159
3.2.4. ПОТЕНЦИАЛ .....	160
3.3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.....	165
3.3.1. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ. СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ ЗАРЯДЫ .....	165
3.3.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ.....	166
ЛЕКЦИЯ 21.....	169
3.3.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ .....	169
ЛЕКЦИЯ 22.....	176
3.3.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).....	176
3.3.4. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ .....	177
3.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЁМКОСТЬ .....	179
3.4.1. ЁМКОСТЬ УЕДИНЁННОГО ПРОВОДНИКА.....	179
3.4.2. ВЗАИМНАЯ ЁМКОСТЬ .....	180

3.4.3. КОНДЕНСАТОРЫ .....	180
ЛЕКЦИЯ 23.....	185
3.4.4. СПОСОБЫ СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ .....	185
3.5. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ .....	186
3.5.1. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО КОНДЕНСАТОРА .....	186
3.5.2. ОБЪЁМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	186
3.6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.....	188
3.6.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. СТОРОННИЕ СИЛЫ .....	188
3.6.2. ЗАКОН ОМА .....	190
3.6.3. СПОСОБЫ СОЕДИНЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ .....	191
3.6.4. ПРАВИЛА КИРХГОФА.....	192
ЛЕКЦИЯ 24.....	194
3.6.5. ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА.....	194
3.7. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	196
3.7.1. ЗАКОН БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА. РАСЧЁТ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ СУПЕРПОЗИЦИЙ.....	196
3.7.2. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ .....	200
ЛЕКЦИЯ 25.....	204
3.7.3. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА ДЛЯ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ .....	204
3.7.4. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ .....	205
3.8. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ЗАРЯДЫ .....	206
3.8.1. ДВИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ .....	206
3.8.2. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ .....	208
3.8.3. РАМКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ .....	209
3.8.4. РАБОТА СИЛЫ АМПЕРА.....	211
ЛЕКЦИЯ 26.....	212
3.8.4. РАБОТА СИЛЫ АМПЕРА (ПРОДОЛЖЕНИЕ) .....	212
3.9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.....	213
3.9.1. ЗАКОН ФАРАДЕЯ–МАКСВЕЛЛА.....	213
3.9.2. САМОИНДУКЦИЯ .....	215
3.9.3. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ .....	219
ЛЕКЦИЯ 27 .....	222
3.10. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	222
3.10.1. ЭНЕРГИЯ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ.....	222
3.10.2. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОВОДНИКОВ С ТОКАМИ.....	222
3.10.3. ОБЪЁМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	223

3.11. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.....	224
3.11.1. МАКРОТОКИ И МИКРОТОКИ. НАМАГНИЧЕННОСТЬ.....	224
3.11.2. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ, МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ И НАПРЯЖЁННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	225
3.11.3. СВЯЗЬ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ, НАМАГНИЧЕННОСТИ И НАПРЯЖЁННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	227
3.11.4. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ МАГНЕТИКОВ.....	227
ЛЕКЦИЯ 28.....	230
3.11.5. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ АТОМА. СПИН .....	230
3.11.6. КЛАССИФИКАЦИЯ МАГНЕТИКОВ .....	231
3.11.7. ДИАМАГНЕТИЗМ .....	231
3.11.8. ПАРАМАГНЕТИЗМ.....	233
3.11.9. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ.....	233
ЛЕКЦИЯ 29.....	238
3.12. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА .....	238
3.12.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ .....	238
3.12.2. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.....	238
3.12.3. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ...	239
3.12.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	241
3.12.5. СИЛОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ КАК 4- ТЕНЗОР .....	242
3.12.6. ОБЗОР: ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....	242
ЛЕКЦИЯ 30.....	246
3.13. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ .....	246
3.13.1. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ( $R = 0$ ) .....	246
3.13.2. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ .....	248
3.13.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ .....	251
ЛЕКЦИЯ 31.....	255
3.13.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).....	255
3.14. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ .....	257
3.14.1. ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....	257
ЛЕКЦИЯ 32.....	261
3.14.2. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ВОЛНА КАК РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ .....	261
3.14.3. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ.....	262
3.14.4. ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....	263



3.14.5. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА .....	263
ЛЕКЦИЯ 33.....	266
3.14.6. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКОВ.....	266
3.14.7. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ.....	268
III СЕМЕСТР .....	270
ЛЕКЦИЯ 34.....	270
4.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....	270
4.1.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН ОТ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ. КОГЕРЕНТНОСТЬ .....	270
4.1.2. СХЕМА ЮНГА.....	272
4.1.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЁНКАХ .....	275
4.1.4. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ И ВРЕМЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ .....	278
ЛЕКЦИЯ 35.....	280
4.2. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....	280
4.2.1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА–ФРЕНЕЛЯ.....	280
4.2.2. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ. ДИФРАКЦИЯ НА ОДНОЙ ЩЕЛИ.....	280
4.2.3. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЁТКА.....	283
4.2.4. ДИФРАКЦИЯ НА КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ.....	285
4.2.5. РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ .....	287
ЛЕКЦИЯ 36.....	289
4.3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА.....	289
4.3.1. ВИДЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ .....	289
4.3.2. ПОЛЯРИЗАТОРЫ. ЗАКОН МАЛЮ .....	289
4.3.3. ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ. ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ .....	290
4.3.4. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА .....	290
4.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ .....	291
4.4.1. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА .....	291
4.4.2. РАССЕЯНИЕ СВЕТА .....	292
4.4.3. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ СВЕТА .....	292
4.4.4. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА .....	293
4.4.5. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ .....	293
ЛЕКЦИЯ 37.....	297
5.1. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ.....	297
5.1.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОТОНОВ .....	297
5.1.2. ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ .....	298

5.1.3. ЭФФЕКТ КОМПТОНА.....	300
5.1.4. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ СВОЙСТВ СВЕТА.....	300
5.2. ГИПОТЕЗА ДЕ БРОЙЛЯ.....	301
5.3. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА.....	302
ЛЕКЦИЯ 38.....	304
5.4. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ.....	304
5.4.1. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ.....	304
5.4.2. ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ОПЕРАТОРАМИ.....	304
5.4.3. ВОЗМОЖНОСТЬ ОДНОВРЕМЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДВУХ ВЕЛИЧИН.....	305
5.4.4. КВАНТОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН.....	306
5.4.5. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА.....	307
5.5. НЕКОТОРЫЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.....	308
5.5.1. СВОБОДНАЯ ЧАСТИЦА С ЭНЕРГИЕЙ $W$ .....	308
5.5.2. ЧАСТИЦА В ОДНОМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ.....	309
ЛЕКЦИЯ 39.....	311
5.5.3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ.....	311
5.5.4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР.....	312
5.6. АТОМ ВОДОРОДА.....	313
5.6.1. МОДЕЛЬ АТОМА РЕЗЕРФОРДА–БОРА.....	313
5.6.2. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ И ЕГО РЕШЕНИЕ.....	314
ЛЕКЦИЯ 40.....	317
5.6.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР АТОМА ВОДОРОДА.....	317
5.6.4. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОНА В АТОМЕ.....	319
5.6.5. СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА В АТОМЕ.....	319
5.7. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ АТОМЫ. ПРИНЦИП ПАУЛИ.....	321
5.7.1. СПИН.....	321
5.7.2. ПРИНЦИП НЕРАЗЛИЧИМОСТИ. ПРИНЦИП ПАУЛИ.....	322
5.7.3. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ АТОМЫ.....	322
5.8. СПОНТАННОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ЛАЗЕРЫ.....	323
5.8.1. ВРЕМЯ ЖИЗНИ СОСТОЯНИЯ.....	323
ЛЕКЦИЯ 41.....	324
5.8.2. СПОНТАННОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.....	324
5.8.3. ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА.....	324
5.8.4. ОПТИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ГЕНЕРАТОР (ЛАЗЕР).....	325

6.1. МАКРОСИСТЕМЫ И СПОСОБЫ ИХ ОПИСАНИЯ. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО .....	327
6.1.1. МАКРОСИСТЕМЫ И СПОСОБЫ ИХ ОПИСАНИЯ .....	327
6.1.2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ МАКРОСИСТЕМЫ .....	327
6.1.3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ МАКРОСИСТЕМЫ .....	328
6.1.4. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ .....	328
ЛЕКЦИЯ 42.....	331
6.1.5. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ.....	331
6.1.6. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ .....	332
6.1.7. КРИТЕРИЙ ВЫРОЖДЕНИЯ ГАЗА .....	333
6.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ЭНЕРГИЯМ. ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА .....	334
ЛЕКЦИЯ 43.....	337
6.3. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОТОННЫЙ ГАЗ.....	337
6.3.1. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	337
6.3.2. ЧЁРНОЕ И СЕРОЕ ТЕЛО. ЗАКОН КИРХГОФА .....	338
6.3.3. ФОТОННЫЙ ГАЗ. ПОДСЧЁТ ЧИСЛА ФОТОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ ОТ $E$ ДО $E + DE$ .....	340
6.3.4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ЧЁРНОГО ТЕЛА .....	341
6.3.5. ЗАКОНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЁРНОГО ТЕЛА.....	342
ЛЕКЦИЯ 44.....	345
6.3.6. ОПТИЧЕСКАЯ ПИРОМЕТРИЯ .....	345
6.4. ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ В МЕТАЛЛЕ .....	346
6.4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. МОДЕЛЬ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ.....	346
6.4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ.....	346
6.4.3. ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ ПРИ $T = 0$ .....	348
6.4.4. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ .....	350
6.4.5. ТЕПЛОЁМКОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА.....	351
ЛЕКЦИЯ 45.....	353
6.5. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ .....	353
6.6. ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ .....	355
6.6.1. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКЕ.....	355
6.6.2. ЗАПОЛНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОН ПРИ $T = 0$ .....	356
6.6.3. ДЕЛЕНИЕ ТВЁРДЫХ ТЕЛ НА ПРОВОДНИКИ, ДИЭЛЕКТРИКИ И ПОЛУПРОВОДНИКИ.....	356
6.6.4. ПРОВОДНИКИ .....	357
6.6.5. ДИЭЛЕКТРИКИ.....	358

6.6.6. ПОЛУПРОВОДНИКИ.....	358
ЛЕКЦИЯ 46.....	361
6.6.6. ПОЛУПРОВОДНИКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ) .....	361
6.7. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.....	362
6.7.1. РАБОТА ВЫХОДА.....	362
6.7.2. КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ .....	362
6.7.3. КОНТАКТ ДВУХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ .....	364
6.7.4. ВНУТРЕННИЙ ФОТОЭФФЕКТ .....	366
6.7.5. ФОТОВОЛЬТАИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ .....	367
ЛЕКЦИЯ 47.....	368
6.8. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ.....	368
6.8.1. ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД.....	368
6.8.2. НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ .....	368
6.8.3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ .....	371
6.8.4. ТЛЕЮЩИЙ РАЗРЯД.....	372
6.8.5. ПЛАЗМА .....	374
ЛЕКЦИЯ 48.....	376
7.1. АТОМНОЕ ЯДРО.....	376
7.1.1. НУКЛОН .....	376
7.1.2. СОСТАВ ЯДРА.....	376
7.1.3. РАЗМЕР ЯДРА.....	377
7.1.4. СПИН ЯДРА.....	377
7.1.5. МАССА И ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ЯДРА .....	377
7.1.6. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ .....	379
7.1.7. ВИРТУАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ .....	379
7.1.8. МОДЕЛИ АТОМНОГО ЯДРА .....	379
7.2. РАДИОАКТИВНОСТЬ.....	380
7.2.1. ЗАКОН РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА .....	380
7.2.2. АЛЬФА-РАСПАД .....	381
7.2.3. БЕТА-РАСПАД.....	382
7.2.4. ГАММА-РАДИОАКТИВНОСТЬ .....	383
7.2.5. РАДИОАКТИВНЫЕ РЯДЫ.....	383
ЛЕКЦИЯ 49.....	385
7.3. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ.....	385
7.3.1. ВЫХОД ЯДЕРНОЙ РЕАКЦИИ.....	385
7.3.2. ТИПЫ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ.....	385

7.3.3. ЭНЕРГИЯ ЯДЕРНОЙ РЕАКЦИИ .....	386
7.3.4. РЕАКЦИЯ ДЕЛЕНИЯ АТОМНОГО ЯДРА.....	386
7.3.5. РЕАКЦИЯ СИНТЕЗА АТОМНОГО ЯДРА .....	387
ЛЕКЦИЯ 50.....	389
7.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ .....	389
7.4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.....	389
7.4.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ.....	389
7.4.3. АНТИЧАСТИЦЫ.....	389
7.4.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ. ФЕЙНМАНОВСКИЕ ДИАГРАММЫ .....	389
7.4.5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ .....	391
7.4.6. ЧЁТНОСТЬ. С-, Р-, Т-СИММЕТРИИ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ.....	393
7.4.7. СТАБИЛЬНЫЕ И ДОЛГОЖИВУЩИЕ АДРОНЫ.....	394
7.4.8. ЛЕПТОНЫ.....	395
ЛЕКЦИЯ 51.....	396
7.5. КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ АДРОНОВ.....	396
7.5.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФЕРМИОНЫ. ПОКОЛЕНИЯ ЛЕПТОНОВ И КВАРКОВ .....	396
7.5.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КВАРКОВ И ОБРАЗОВАНИЕ АДРОНОВ.....	396
7.5.3. ЦВЕТ.....	397
7.5.4. РАСПАД КВАРКОВ.....	398
7.6. ТЕОРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ .....	399
ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА .....	401

## I семестр

### Лекция 1

#### 0. Представление о материи

**Физика** — наука о природе.

##### 0.1. Элементы знаний

**Физический объект (ФО):** частица, тело (вещество); поле  
Современная физика не делает принципиальных различий между веществом и полем.

**Физическое явление (ФЯ):** взаимодействие ФО, изменение их состояния

**Физическая величина (ФВ):** характеристика ФО или ФЯ

**Физический закон (ФЗ):** связь между ФВ

**Научный факт (НФ):** экспериментальный факт

**Элемент теории:** гипотеза, постулат, теорема и т. п. → система знаний

Элементы знаний объединяются в систему различными способами<sup>1</sup>.

ФО существуют; ФЯ имеют место; ФВ вводятся для описания ФО и ФЯ, имеют размерность, бывают скалярные, векторные (в рамках данного курса), могут быть чему-либо равны или как-либо направлены, могут изменяться, но не существуют и не участвуют в ФЯ<sup>2</sup>; ФЗ справедливы (или не справедливы) и имеют границы применимости.

##### 0.2. Взаимодействие физических объектов

При развитии физики возникло два различных представления о взаимодействии объектов ([рис. 1.1](#)).

<sup>1</sup> Можно привести пример (ньютонова / лагранжева механика и т. п.), а также пояснить, что выбор элементов теории, представленных в настоящем курсе, обусловлен методическими соображениями и не является единственно правильным.

<sup>2</sup> Преподавателю следует, по возможности, избегать оборотов речи, подобных «сила действует», «возникает ЭДС», «перенос массы» и т. п., т. е. не путать ФО и ФЯ с их характеристиками, либо, используя подобные обороты, чётко разъяснять студентам, что на самом деле они означают. Кроме того, следует обращать внимание студентов на случаи, когда разные элементы знаний обозначаются похожими терминами (например, индукция магнитного поля / явление электромагнитной индукции / индуктивность).

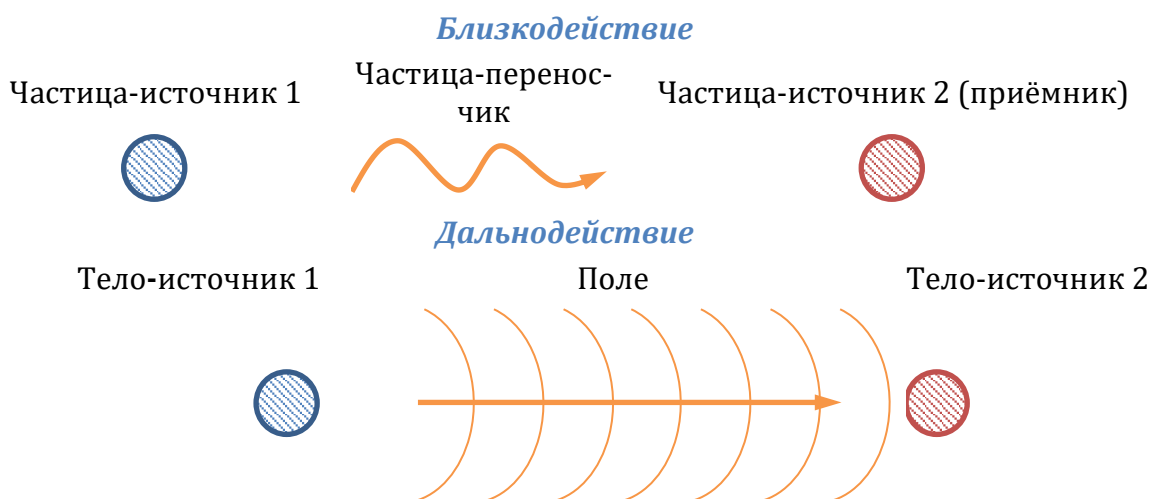


Рис. 1.1

Современная физика представляет взаимодействие частиц как близкодействие (см. [ГЛАВУ 7](#)). В первых двух семестрах, изучая классическую физику, мы будем пользоваться представлением о дальнодействии.

### 0.3. Фундаментальные взаимодействия

Все ФВ сводятся к четырём фундаментальным взаимодействиям ([ТАБЛ. 1.1](#)).

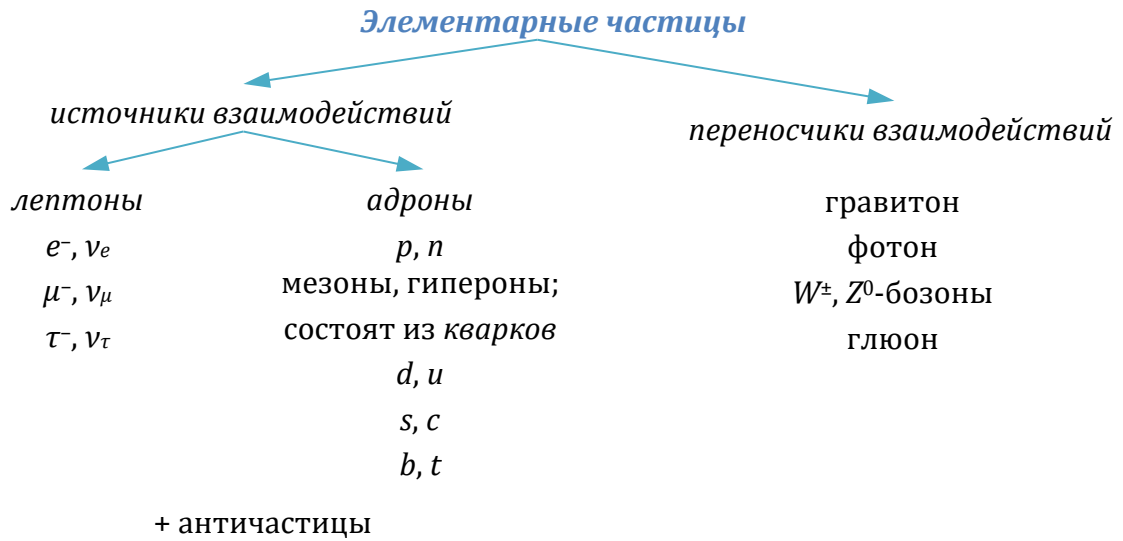
Таблица 1.1

Взаимодействие	Радиус действия	Относительная величина	Источники	Переносчик
Гравитационное	$\infty$	$10^{-40}$	все	гравитон
Электромагнитное	$\infty$	$1/137$	лептоны, адроны	фотон
Слабое	$10^{-18}$ м	$10^{-14}$	лептоны, адроны	$W^\pm, Z^0$ -бозоны
Сильное	$10^{-15}$ м	1	адроны	глюон

### 0.4. Элементарные частицы

**Элементарные частицы** — частицы, проявляющие себя в взаимодействиях как бесструктурные. Из элементарных частиц состоят<sup>3</sup> все ФО.

<sup>3</sup> Три пары лептонов (и антилептоны), а также частицы-переносчики в настоящее время считаются бесструктурными (*истинно элементарными частицами*).





# 1. Механика

## 1.1. Предмет механики

### 1.1.1. Основные понятия

1. **Пространство** и **время** — формы существования материи.
2. **Механическое движение** — изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.
3. **Механика** — раздел физики, изучающий механическое движение без рассмотрения природы его причин.
4. **Механическая система** — система тел. Объединение тел в механическую систему – произвольно, выбор объясняется условием задачи.
5. **Замкнутая система**<sup>4</sup> — такая механическая система, что все тела, входящие в эту систему, не взаимодействуют с телами, не входящими в неё.
6. **Материальная точка** — идеализированный объект — тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с другими параметрами задачи, имеющими размерность длины (т. е. тело, не имеющее размеров).
7. **Абсолютно твёрдое тело (твёрдое тело)** — идеализированный объект — тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется с течением времени (т. е. недеформируемое тело).
8. **Система отсчёта** — совокупность абсолютно твёрдого тела — **тела отсчёта**, — по отношению к которому рассматривается движение других тел, и **часов**, измеряющих время (рис. 1.2). На теле отсчёта выбирают точку — **начало отсчёта**; с телом отсчёта можно связать систему координат (см. РАЗДЕЛ 1.2.2).



Рис. 1.2

### 1.1.2. Свойства пространства и времени

Согласно *теореме Нётер*, наличие интегралов движения (т. е. не изменяющихся во времени величин) обусловлено симметрией пространства-времени. Так, три закона сохранения в механике суть проявления симметрий пространства-времени, указанных в [ТАБЛИЦЕ 1.2](#).

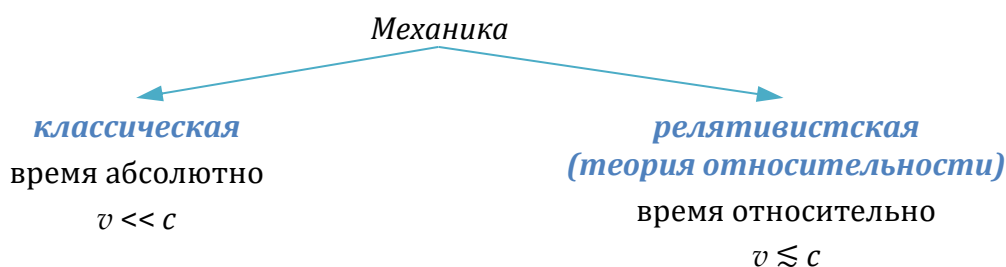
<sup>4</sup> В этом смысле часто используется термин «изолированная система», а термину «замкнутая система» придают другое значение. Мы будем использовать термин «замкнутая система» в течение всего курса именно в указанном значении.

Таблица 1.2

Однородность пространства	Изотропность пространства	Однородность времени
Ход событий в любой замкнутой системе не зависит от её параллельного переноса в пространстве.	Ход событий в любой замкнутой системе не зависит от поворота этой системы на любой угол.	Ход событий в любой замкнутой системе не зависит от того, на каком промежутке времени эти события развиваются.
$\Downarrow$ <u>ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ</u> <u>ИМПУЛЬСА</u>	$\Downarrow$ <u>ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ</u> <u>МОМЕНТА ИМПУЛЬСА</u>	$\Downarrow$ Закон сохранения энергии <sup>5</sup>

### 1.1.3. Классическая и релятивистская механика

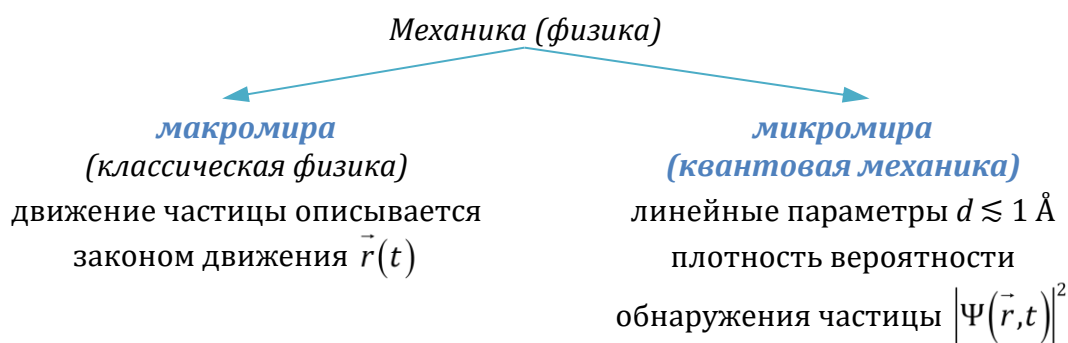
Классическая механика, которой будет посвящена половина этого семестра, справедлива не всегда и имеет границы применимости.



Здесь  $c$  — скорость электромагнитных волн в вакууме. «Абсолютно» означает, что данная физическая величина не изменяется при переходе от одной системы отсчёта к другой, «относительно» — соответственно, изменяется.

В пределе  $v \ll c$  все уравнения теории относительности переходят в соответствующие уравнения классической механики.

В масштабах микромира применяется другая механика — квантовая. Для микрочастицы невозможно точно задать все величины, характеризующие её движение (см. [РАЗДЕЛ 5.3](#)), поэтому движение микрочастицы характеризуется не детерминировано, а вероятностно.



## 1.2. Кинематика материальной точки

**Кинематика** — раздел механики, изучающий механическое движение без рассмотрения его причин.

<sup>5</sup> Здесь, конечно, имеется в виду общефизический закон сохранения энергии.

### 1.2.1. Закон движения

Приоритетным является *векторный способ* описания движения<sup>6</sup>: положение материальной точки  $M$  в пространстве характеризуется радиусом-вектором.

**Радиус-вектор** материальной точки — вектор, соединяющий начало отсчёта и материальную точку (рис. 1.3).

**Кинематический закон движения материальной точки** (закон движения):

$$\vec{r} = \vec{r}(t);$$

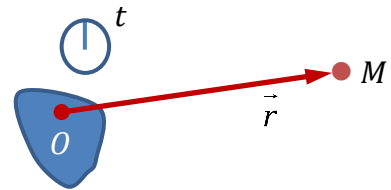


Рис. 1.3

$r = |\vec{r}|$  — модуль (абсолютная величина, длина) радиуса-вектора.

Следует соблюдать обозначения векторных и скалярных величин. В литературе векторные величины принято обозначать **полужирным** шрифтом, скалярные — *курсивом*. В настоящем ЭУМК принято следующее (табл. 1.3):

Таблица 1.3

Тип величины	Шрифт обозначения	Пример
Векторная	<i>Курсив с надстрочной стрелкой</i>	$\vec{r}$
Модуль векторной величины	<i>Курсив</i>	$r$
Проекция векторной величины на какое-либо направление	<i>Курсив с нижним индексом</i>	$r_x (= x)$
Скалярная	<i>Курсив</i>	$t$

### 1.2.2. Системы координат

#### 1. Декартова система координат

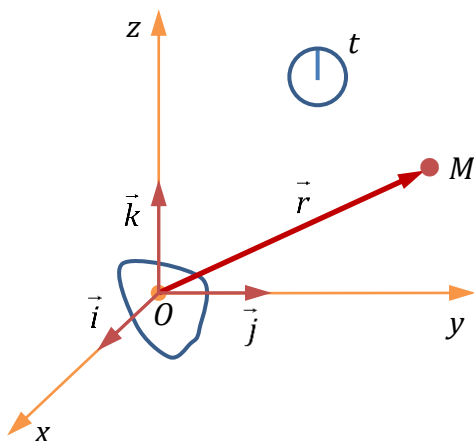


Рис. 1.4

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты декартовой системы координат (рис. 1.4); они образуют *правую тройку* векторов.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

— *кинематический закон движения материальной точки в координатной форме*.

Координатная форма закона движения удобней для вычисления, чем векторная форма.

**Длина** (модуль, абсолютная величина) радиуса-вектора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

<sup>6</sup> Кроме векторного, используют *координатный* и *естественный* способы описания движения.

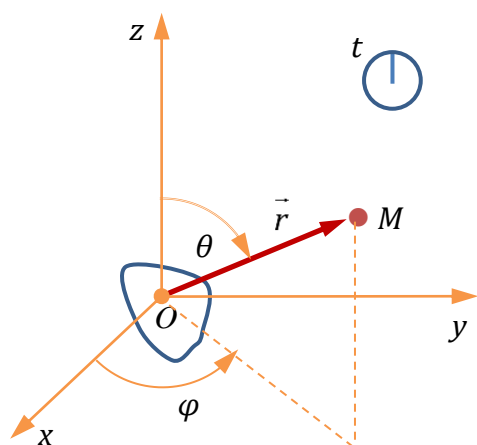
2. Сферическая система координат<sup>7</sup>

Рис. 1.5

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ \theta = \theta(t), \end{cases}$$

где  $\varphi$  — *азимутальный угол*,  $\theta$  — *полярный угол* (рис. 1.5).

Связь сферических координат с декартовыми:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

## 3. Цилиндрическая система координат

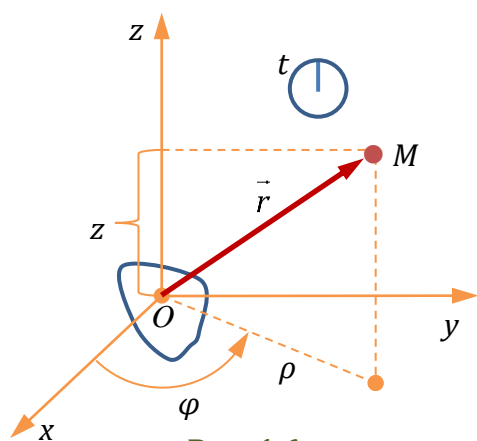


Рис. 1.6

$$\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

(рис. 1.6).

Связь цилиндрических координат с декартовыми:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

**Частный случай:** полярная система координат

[при  $z = 0$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )].

Выбор системы координат произволен и обуславливается удобством решения конкретной задачи. **Результат решения задачи не должен зависеть от выбора системы координат!**

Траектория. Уравнение траектории

**Траектория** материальной точки — кривая, описываемая точкой при её движении.

Для того чтобы найти уравнение траектории, нужно исключить время из кинематического закона движения в координатной форме:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow y = y(x).$$

<sup>7</sup> Сферическая и цилиндрическая системы координат в I семестре практически не используются, а рассматриваются здесь для применения при рассмотрении электромагнитных полей различных конфигураций в задачах II семестра.

### 1.2.3. Кинематические параметры

#### 1. Перемещение

**Перемещение (смещение)** — приращение радиуса-вектора

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

где  $\vec{r}_1$  — радиус-вектор материальной точки, совершающей движение, в момент времени  $t_1$ ,  $\vec{r}_2$  — радиус-вектор в момент времени  $t_2$  (рис. 1.7);

$$[r] = \text{м}^8.$$

**Путь**  $\Delta S$  — длина участка траектории (1-2 на рис. 1.7).

**$\Delta r \neq \Delta S!$**

#### 2. Скорость

Скорость — векторная величина, характеризующая быстроту движения.

**Средняя скорость**

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  — промежуток времени;  $\Delta t = t_2 - t_1$  на рис. 1.7;

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Мгновенная скорость**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}'_t.$$

(В этой формуле представлены различные варианты обозначения производной радиуса-вектора по времени. В последующих разделах и главах мы будем писать  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  и т. п.)

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории.

**Средняя путевая скорость**

$$v_{\text{пут}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

В дальнейшем под словом «скорость» мы будем понимать мгновенную скорость, если не оговорено иное.

Выразим вектор мгновенной скорости через проекции на оси декартовой системы координат:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k};$$

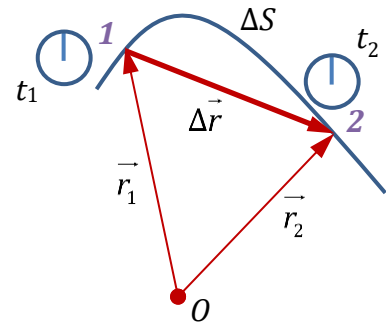


Рис. 1.7

<sup>8</sup> Здесь и далее в конспекте лекций квадратные скобки в подобном контексте означают единицы измерения данной величины в СИ.

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt}, \\ v_y = \frac{dy}{dt}, \\ v_z = \frac{dz}{dt}; \end{cases} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad v \neq \frac{dr}{dt}!$$

*Обратная задача*

Дано  $\vec{v}(t)$ , найти  $\vec{r}(t)$ .

За малое время  $dt$  материальная точка совершает перемещение  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ . Просуммируем все малые перемещения, т. е. проведём интегрирование по времени:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt. \quad (1.1)$$

Здесь  $\vec{r}_0$  — начальный радиус-вектор, т. е. радиус-вектор движущейся материальной точки в начальный момент времени.

Выражение (1.1) можно записать и в координатной форме.

## Лекция 2

### 1.2.3. Кинематические параметры (продолжение)

#### 3. Ускорение

Ускорение — векторная величина, характеризующая скорость изменения скорости материальной точки.

**Среднее ускорение:**

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t};$$

$$[a] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

**Мгновенное ускорение:**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}' = v_t' = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{r}'' = r_t''.$$

Мгновенное ускорение в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}; \end{cases} \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

**Обратная задача**

Дано  $\vec{a}(t)$ , найти  $\vec{v}(t)$  и  $\vec{r}(t)$ .

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt, \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \int_0^t dt \int_0^t \vec{a}(t) dt.$$

Здесь  $\vec{v}_0$  — начальная скорость,  $\vec{r}_0$  — начальный радиус-вектор. Эти выражения можно записать и в координатной форме.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ<sup>9</sup>**

1) *Равномерное движение:*  $\vec{v} = \text{const}$

$$\vec{a} = 0; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt = \vec{r}_0 + \vec{v}t.$$

<sup>9</sup> В этом разделе не приводится пример расчёта скорости, ускорения, модуля радиуса-вектора и т. д. из-за нехватки времени. Простые примеры на эту тему следует рассмотреть на практических занятиях.

2) *Равноускоренное движение:*  $\vec{a} = \text{const}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

#### 1.2.4. Криволинейное движение

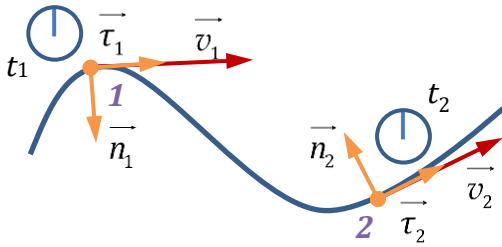


Рис. 2.1

При описании движения материальной точки по криволинейной траектории удобно ввести систему координат, связанную с траекторией материальной точки (воспользоваться *естественным способом* описания движения).

Орты этой системы координат:  $\vec{\tau}$  — единичный вектор, направленный по касательной к траектории по направлению движения мате-

риальной точки;  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по нормали к траектории в сторону её вогнутости (см. [рис. 2.1](#)).

Разложим векторы скорости и ускорения по осям естественной системы координат:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_{\tau} \vec{\tau} + 0 \vec{n} = v \vec{\tau}; \\ \vec{a} &= a_{\tau} \vec{\tau} + a_n \vec{n}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Но, по определению

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (2.2)$$

Разберёмся, чему равны слагаемые в формуле (2.2). Любую кривую в любой её точке можно представить как дугу окружности радиуса  $\rho$  — **радиуса кривизны траектории** ([рис. 2.2](#)).

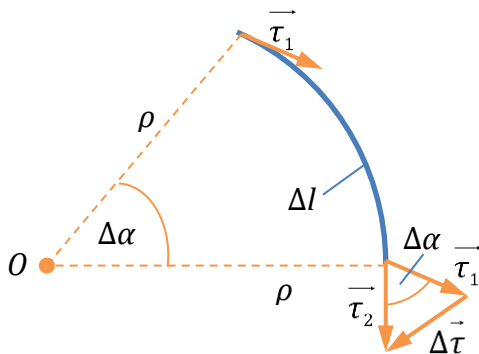


Рис. 2.2

$$\begin{aligned} \Delta l &= \rho \Delta \alpha; \quad \Delta \vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1, \quad \Delta \tau = \tau \Delta \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta \tau = \frac{\Delta l}{\rho}, \quad \Delta \vec{\tau} = \frac{\Delta l}{\rho} \vec{n}^{10}. \end{aligned}$$

$$\text{При } \Delta t \rightarrow 0 \quad d\vec{\tau} = \frac{dl}{\rho} \vec{n}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dl}{\rho dt} \vec{n} = \frac{v}{\rho} \vec{n}.$$

Подставляя эти выражения в (2.2) и сравнивая с (2.1), получим

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}; \quad a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad (2.3)$$

$a_{\tau}$  — **тангенциальное (касательное) ускорение**,  $a_n$  — **нормальное (центростремительное) ускорение**;

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

<sup>10</sup> Следует помнить, что на [рис. 2.2](#) угол  $\Delta \alpha$  мал. При малом  $\Delta \alpha$   $\Delta \vec{\tau}$  практически параллелен  $\vec{n}$ .



### 1.3. Кинематика твёрдого тела

#### 1.3.1. Виды движения

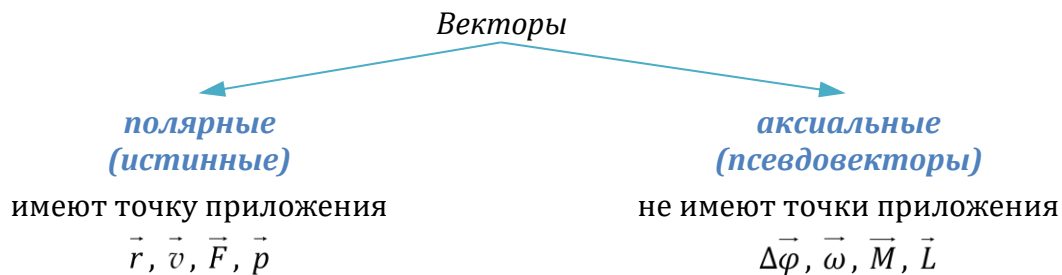
1. **Поступательное движение** — движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки движущегося тела, перемещается параллельно самой себе.
2. **Вращение вокруг неподвижной оси (вращательное движение)** — движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, лежащим в параллельных плоскостях, таким, что центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой **осью вращения**.
3. **Плоское движение** — движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях.  
Плоское движение = поступательное движение + вращательное движение (см. разделы [1.7.1](#) и [1.8.1](#)).
4. **Сферическое движение (вращение вокруг неподвижной точки)** — движение, при котором все точки тела движутся по сферам, центры которых находятся в одной точке, называемой **центром вращения**.
5. Другие случаи – **сложное движение**<sup>11</sup>.

**Демонстрации**<sup>12</sup>: 1) Поступательное и вращательное движение  
 2) Направление линейной скорости при вращательном движении (Искры от точила)  
 3) Циклоида. Траектория светящихся лампочек, расположенных на ободе и оси колеса, при его качении  
 4) Прецессия гироскопа<sup>13</sup>

Введённых нами **ВЫШЕ** кинематических величин недостаточно для описания движения твёрдого тела (кроме поступательного).

#### 1.3.2. Угловые кинематические параметры

Введём величины, характеризующие вращательное движение твёрдого тела *в целом*, а не отдельных его точек. Такие величины будут **аксиальными векторами**.



(Здесь  $\vec{F}$  — сила,  $\vec{p}$  — импульс,  $\vec{M}$  — момент силы,  $\vec{L}$  — момент импульса.)

<sup>11</sup> На практических занятиях рассматривается поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси и плоское движение. Сферическое движение и общий случай сложного движения и в лекционном курсе будут затронуты мало.

<sup>12</sup> Здесь и далее названия демонстраций приведены по Списку демонстраций демонстрационного кабинета МЭИ, ауд. Б-101.

<sup>13</sup> Движение гироскопа демонстрируется не как пример выполнения закона сохранения момента импульса, а лишь как пример сферического движения твёрдого тела.

## 1. Угловое перемещение

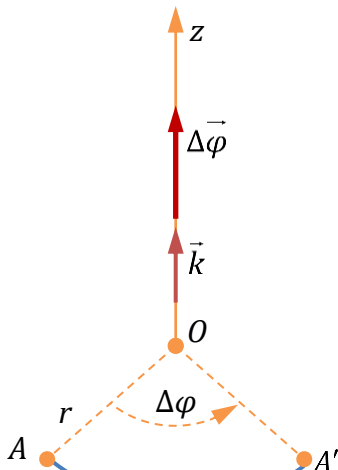


Рис. 2.3

Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси  $z$ . Точка  $A$  этого тела находится на расстоянии  $r$  от оси вращения (рис. 2.3). За некоторое время тело повернулось так, что точка  $A$  переместилась по дуге окружности радиуса  $r$  в положение  $A'$ . При этом отрезок  $OA$  (точка  $O$  – центр окружности, по которой движется точка  $A$ ) повернулся на угол  $\Delta\varphi$ .

Это движение характеризует **вектор углового перемещения**  $\Delta\vec{\varphi} \parallel \vec{k}$  ( $\vec{k}$  — орт оси вращения  $z$ ). Векторная величина  $\Delta\vec{\varphi}$  вводится лишь для малых угловых перемещений. Направление  $\Delta\vec{\varphi}$  выбирается по правилу правого винта.

Можно записать

$$\Delta\vec{\varphi} = \Delta\varphi_z \vec{k},$$

$$\Delta\varphi_z \geq 0.$$

Любой поворот твёрдого тела можно характеризовать скалярной величиной — **углом**  $\varphi$ . Можно задать закон вращательного движения твёрдого тела

$$\varphi_z = \varphi_z(t).$$

Единица измерения углового перемещения в СИ

$$[\varphi] = \text{рад} \text{ (радиан — безразмерная величина)};$$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$  рад. (При проведении численных расчётов следует обращать внимание на единицы измерения углового перемещения!)

## 2. Угловая скорость

**Угловая скорость** — векторная величина, характеризующая быстроту и направление вращения;

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt};$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

## 3. Угловое ускорение

**Угловое ускорение** — векторная величина, характеризующая быстроту и направление изменения угловой скорости;

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2};$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}.$$

При вращении вокруг неподвижной оси  $\Delta\vec{\varphi} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{\varepsilon} \parallel \vec{k}$ ; знаки проекций этих векторов на ось вращения могут быть различны.

## 4. Частота

**Частота** вращения — скалярная положительная величина, характеризующая быстроту вращения, равная числу оборотов тела вокруг оси вращения за единственный промежуток времени;

$$v = \frac{\omega}{2\pi};$$

$$[v] = \frac{\text{об}}{с} = с^{-1}.$$

## 5. Период

**Период** вращения — скалярная положительная величина, характеризующая быстроту вращения, равная времени, за которое вращающееся тело совершает один полный оборот вокруг оси вращения;

$$T = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$[T] = с.$$

Период вводится только при равномерном вращении, т. е. при вращении с постоянной угловой скоростью.

## 1.3.3. Связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами

Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  и угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$ . Точка  $M$  отстоит от оси вращения на расстояние  $r$ ; её скорость равна  $\vec{v}$  (рис. 2.4А).

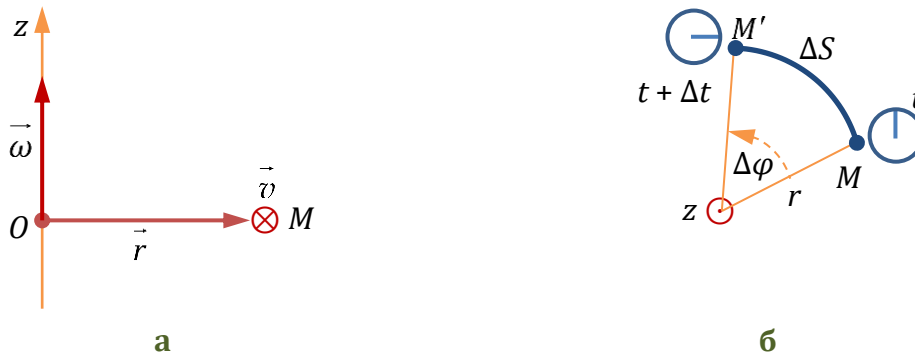


Рис. 2.4

(Значки  $\odot$ ,  $\otimes$  на рис. 2.4 означают направление вектора, перпендикулярного плоскости чертежа, — соответственно «на нас» и «от нас».)

За время  $\Delta t$  точка  $M$  переместилась в положение  $M'$  по дуге длиной  $\Delta S$  (рис. 2.4Б). Тело за это время совершило угловое перемещение  $\Delta\varphi$ ;

$$\Delta S = r\Delta\varphi, \quad v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = \langle\omega\rangle r,$$

где  $\langle\omega\rangle$  — среднее значение модуля угловой скорости за время  $\Delta t$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$

$$v = \omega r,$$

а соответствующее векторное равенство

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}] \quad (2.4)$$

(направление можно проверить по [рис. 2.4А](#)). Здесь квадратные скобки означают *векторное произведение* векторов. (Следует помнить о том, что **векторное произведение антикоммутитивно!**)

Формула [\(2.4\)](#) справедлива и в произвольном случае сложного движения. Тогда

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}).$$

Выразим компоненты линейного ускорения (т. е. ускорения точки  $M$ ), воспользовавшись формулой [\(2.3\)](#):

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dr}{dt} = \varepsilon_2 r,$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r.$$

Полное ускорение

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + \left[ \vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right],$$

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{v}] = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]. \quad (2.5)$$

Для сложного движения твёрдого тела

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega} (\vec{r} - \vec{r}_c)],$$

где  $\vec{r}_c$  — радиус-вектор центра масс тела (см. [РАЗДЕЛ 1.4.4](#)),  $\vec{v}_c$  — скорость центра масс.

## Лекция 3

### 1.4. Динамика материальной точки

**Динамика** — раздел механики, изучающий влияние взаимодействия тел на механическое движение.

#### 1.4.1. Законы Ньютона

**I закон Ньютона:** существуют такие системы отсчёта, в которых материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие других объектов не выведет её из этого состояния.

**II закон Ньютона:** ускорение материальной точки совпадает по направлению с силой, с которой действуют на неё другие тела, и равно отношению этой силы к массе точки:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

(см. [рис. 3.1](#)).

**III закон Ньютона:** две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю, противоположными по направлению и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(см. [рис. 3.2](#)).

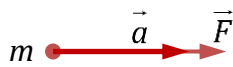


Рис. 3.1



Рис. 3.2

**Демонстрация:** Демонстрация II и III закона Ньютона (Тележки)

#### 1.4.2. Инерциальные системы отсчёта. Инертность

С точки зрения физики покой и равномерное прямолинейное движение суть одно и то же.

**Инерциальная система отсчёта (ИСО)** — система отсчёта, относительно которой материальная точка, не испытывающая внешних воздействий, движется равномерно и прямолинейно.

**I закон Ньютона** можно сформулировать так: инерциальные системы отсчёта существуют.

Примеры систем отсчёта, которые можно считать инерциальными в условии большинства задач:



Все тела обладают **инертностью** — свойством сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения в отсутствие внешних воздействий.

**Масса** — скалярная физическая величина — характеристика тела, являющаяся мерой его инертности;

$$[m] = \text{кг}.$$

### 1.4.3. Сила

**Сила** — векторная величина — мера воздействия на данное тело другого объекта. Каждая сила описывает действие какого-либо объекта;

$$[F] = \text{Н (ньютон)}.$$

**Линия действия силы** — прямая, вдоль которой направлена сила.

**Силовая линия** — кривая, касательные к которой в каждой её точке совпадают по направлению с силой.

#### ПРИМЕР

Силовые линии гравитационного поля Земли (рис. 3.3)

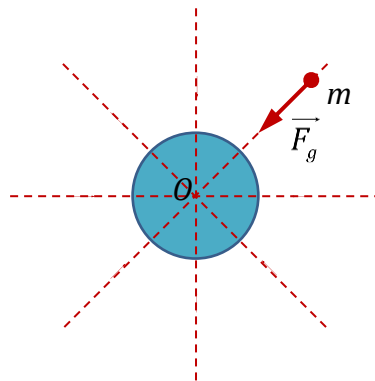


Рис. 3.3

**Главный вектор<sup>14</sup> сил** — векторная сумма всех сил, описывающих действие на данное тело других объектов:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

(здесь  $n$  — число воздействующих объектов,  $\vec{F}_i$  — сила, описывающая воздействие  $i$ -го объекта на данную точку).

**Принцип независимости действия сил:** если на материальную точку одновременно действует  $n$  объектов, то ускорение этой точки

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m},$$

где  $m$  — масса материальной точки.

<sup>14</sup> Вводится ещё понятие **равнодействующей силы** — силы, эквивалентной данной системе сил, т. е. силы, описывающей такое воздействие на данную механическую систему, под которым система будет двигаться так же, как под воздействием всех  $n$  объектов. Не для каждой системы сил можно подобрать равнодействующую. Для материальной точки понятия равнодействующей и главного вектора сил эквивалентны.

Так как  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ , II закон Ньютона можно записать в виде

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

— **дифференциальное уравнение движения материальной точки** ( $\vec{F}$  — главный вектор сил, с которыми другие объекты действуют на данную точку). В проекции на оси декартовой системы координат это уравнение представляется в виде трёх дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \end{cases}$$

#### 1.4.4. Центр масс механической системы

**Внешние силы** — силы, описывающие действие объектов, не входящих в данную механическую систему, на тела, входящие в неё. Будем обозначать такие силы  $\vec{F}^e$ <sup>15</sup>.

**Внутренние силы** — силы, описывающие взаимодействие тел, входящих в данную механическую систему (обозначение  $\vec{F}^i$ ).

Для любой механической системы из III закона Ньютона следует, что сумма внутренних сил равна нулю:

$$\sum \vec{F}^i = 0.$$

Рассмотрим механическую систему из  $N$  материальных точек.

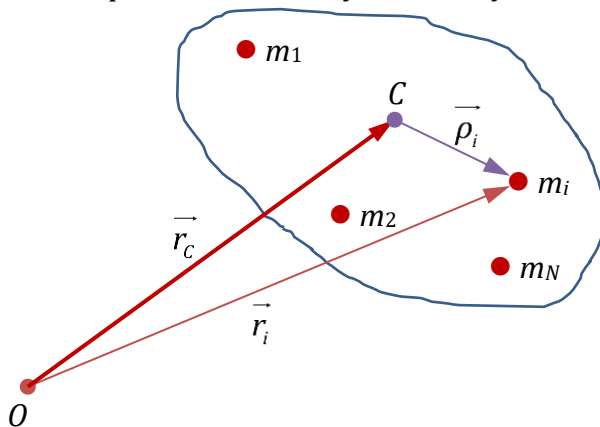


Рис. 3.4

**Центр масс** механической системы — точка, для которой

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = 0,$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -ой материальной точки,  $\vec{\rho}_i$  — радиус-вектор, соединяющий центр масс с  $i$ -ой материальной точкой,  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -ой материальной точки,  $\vec{r}_c$  — радиус-вектор центра масс. (На [рис. 3.4](#) точка  $C$  — центр масс,  $O$  — начало отсчёта.)

Как найти положение центра масс системы? Из определения центра масс следует

<sup>15</sup> В «живой» лекции лучше использовать обозначения русскими буквами:  $\vec{F}^{\text{внеш}}$  и т. п.

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{r}_c \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M},$$

где  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  — масса механической системы. В декартовой системе координат

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M}. \quad (3.1)$$

### ПРИМЕР

Нахождение центра масс системы двух материальных точек

Две материальные точки массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 3.5). Где находится центр масс системы?

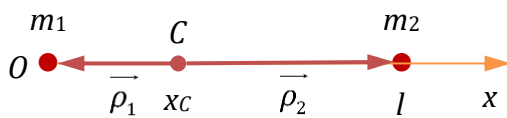


Рис. 3.5

Центр масс  $C$  системы, очевидно, должен находиться на прямой между материальными точками. Радиусы-векторы, соединяющие центр масс и материальные точки, показаны на рис. 3.5. Введём ось  $x$ , как показано на рисунке, и совместим начало отсчёта с материальной точкой массы  $m_1$ ; тогда координата точки массой  $m_2$  равна  $l$ . Из формулы (3.1) получим

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Если тело (механическая система) центральносимметрично, то его центр масс совпадает с центром симметрии. Если же тело осесимметрично, то центр масс лежит на оси симметрии.

**Теорема о движении центра масс:** центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе,

$$M \vec{a}_c = \vec{F}^e.$$

### Доказательство

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  материальных точек. Дифференциальное уравнение движения  $i$ -ой точки

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^e + \sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ki}^i, \quad (3.2)$$

где  $\vec{F}_i^e$  — равнодействующая внешних сил, приложенных к  $i$ -ой точке;  $\vec{F}_{ki}^i$  — внутренняя сила, с которой  $k$ -я точка действует на  $i$ -ую точку.

Просуммируем равенства (3.2) по всем  $N$  точкам системы:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ki}^i = 0 \quad (3.3)$$



Второе слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как оно равно сумме всех внутренних сил, описывающих взаимодействие тел, входящих в рассматриваемую систему. Первое слагаемое есть главный вектор внешних сил  $\vec{F}^e$ .

Преобразуем левую часть равенства (3.3), учитывая, что  $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$  (рис. 3.4):

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{\rho}_i}{dt^2} = \vec{F}^e,$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i + \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i = \vec{F}^e.$$

Но  $\frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \vec{a}_C$  — ускорение центра масс,  $\sum_{i=1}^N m_i = M$  — масса системы, а  $\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i = 0$ , так как точка  $C$  — центр масс системы. Поэтому  $M \vec{a}_C = \vec{F}^e$ , ч. т. д.

#### 1.4.5. Некоторые силы<sup>16</sup>

##### 1. Гравитационная сила

Сила, описывающая гравитационное воздействие материальной точки<sup>17</sup> массой  $m_1$  на материальную точку массы  $m_2$ , находящуюся на расстоянии  $r$  от точки массой  $m_1$  (рис. 3.6):

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12} \quad (3.4)$$

— *закон всемирного тяготения*;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$  — *гравитационная постоянная*. Знак «-» означает, что тела притягиваются.

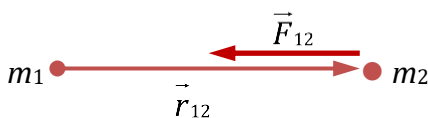


Рис. 3.6

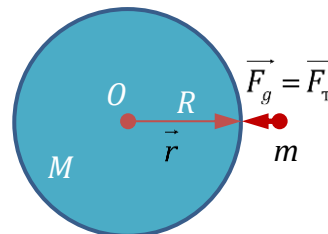


Рис. 3.7

#### Частный случай

*Сила тяжести* — гравитационная сила вблизи поверхности Земли

$$\vec{F}_T = m \vec{g}.$$

Действительно, пусть материальная точка массы  $m$  находится вблизи поверхности Земли, т. е. на расстоянии от центра Земли, равном радиусу  $R$  Земли (рис. 3.7). По закону всемирного тяготения (3.4)

$$\vec{F}_g = \vec{F}_T = -G \frac{mM}{R^3} \vec{r},$$

<sup>16</sup> В данном разделе рассматриваются силы, фигурирующие в задачах I семестра.

<sup>17</sup> В этом определении можно заменить слова «материальная точка» на «тело» с поправкой, что  $r$  — это расстояние между центрами масс тел.

здесь  $M$  — масса Земли. Модуль этой силы

$$F_{\tau} = G \frac{M}{R^2} m = mg,$$

где  $g = G \frac{M}{R^2} \approx 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ <sup>18</sup> — **ускорение свободного падения** (вернее, модуль этого ускорения). По II закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g},$$

вектор  $\vec{g}$  направлен к центру Земли. Центры масс всех тел, падающих свободно (т. е. без каких-либо внешних воздействий, кроме гравитационного) вблизи поверхности Земли, движутся с ускорением  $\vec{g}$ .

## 2. Сила упругости

**Упругая деформация** — деформация тела, которая полностью исчезает после прекращения взаимодействия, являющегося её причиной. Воздействие деформированного тела на тело, вызвавшее деформацию, описывается **силой упругости**.

Линейная деформация подчиняется **закону Гука**:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\Delta\vec{l},$$

где  $\Delta\vec{l}$  — вектор деформации (рис. 3.8А),  $k$  — **коэффициент упругости (жесткость)** деформируемого тела. Знак «-» означает, что деформированное тело сопротивляется деформации — пытается восстановить форму.

На рис. 3.8 представлены разные типы деформируемых тел: А) пружина, Б) нить (**сила натяжения**  $\vec{T}$ ) и В) опорная поверхность (**сила реакции опоры**  $\vec{N}$ ).

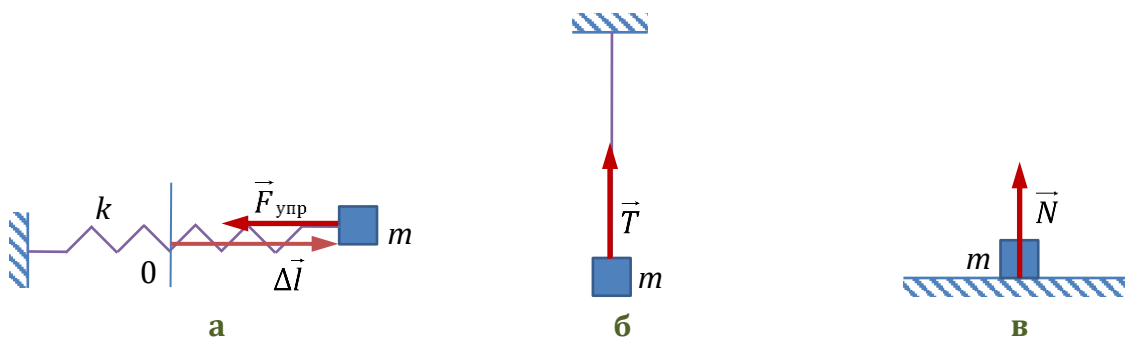


Рис. 3.8

(На рис. 3.8  $m$  — масса груза, 0 — положение конца недеформированной пружины.)

Сила реакции опоры всегда направлена перпендикулярно опорной поверхности от неё, а сила натяжения — вдоль натянутой нити от натягивающего её тела.

**Вес** тела — сила, описывающая действие тела на опору или подвес; по модулю равен силе упругости (по III закону Ньютона  $\vec{P} = -\vec{T}$  или  $\vec{P} = -\vec{N}$ ).

Природа упругости — в межмолекулярном, т. е. электромагнитном взаимодействии (см. РАЗДЕЛ 0.3), однако, при изучении механики это для нас не имеет значения.

<sup>18</sup> При необходимости проведения вычислений с достаточно высокой точностью следует учитывать, что **ускорение свободного падения зависит от географической широты**. На широте Москвы  $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$ .

**Демонстрация:** Измерение сил с помощью динамометра

### 3. Сила сухого трения

**Сила трения** — составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, параллельная поверхности их контакта (рис. 3.9А). Наличие этой составляющей обусловлено неупругими деформациями тел.

Мы рассматриваем сухое трение, т. е. обе соприкасающиеся поверхности являются твёрдыми (в смысле агрегатного состояния; вязкое трение рассматривается в РАЗДЕЛЕ 2.9.2).

**Закон сухого трения (закон Кулона):**

$$F_{\text{тр max}} = \mu N$$

где  $F_{\text{тр max}}$  — максимальное значение модуля силы трения — **сила трения скольжения**,  $N$  — модуль силы реакции опоры,  $\mu$  — **коэффициент трения** — безразмерная величина, зависящая от материала и состояния соприкасающихся поверхностей. Направлена же сила трения скольжения всегда против скорости тела относительно опорной поверхности.

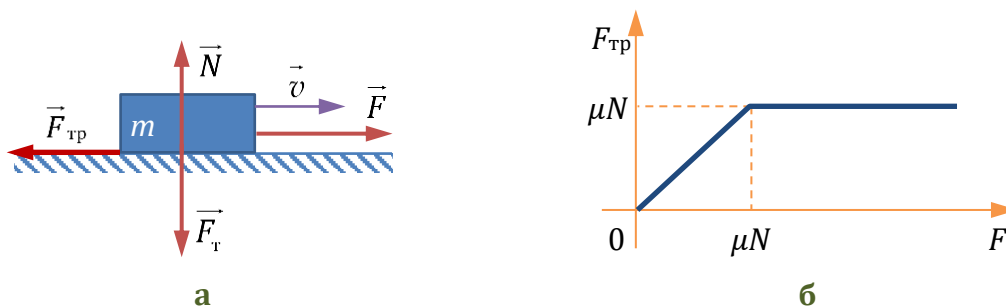


Рис. 3.9

График зависимости модуля силы трения от модуля силы  $\vec{F}$  представлен на рис. 3.9Б. До тех пор пока  $F < \mu N$ , тело покоится относительно опорной поверхности, а  $F = F_{\text{тр}}$  (наклонный участок на графике). При  $F \geq \mu N$  тело начинает скользить и  $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр max}} = \mu N$ .

**Демонстрация:** Сила трения покоя и скольжения. Перемещение тела по столу с помощью динамометра

Трение также имеет электромагнитную природу.

#### 1.4.6. Кинематические связи

**Кинематическая связь** — ограничение, накладываемое на движение тела.

##### 1. Координатная связь

**Координатная связь** — ограничение, накладываемое на координаты точек и их производные при движении тела.

##### ПРИМЕР

Тело скользит по горизонтальному прямому рельсу.

Перемещение, скорость и ускорение тела должны быть направлены вдоль рельса (рис. 3.10):

$$\vec{r} = x\vec{i}; \quad y, z = 0;$$

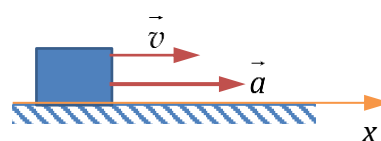


Рис. 3.10

$$\vec{v} = v_x \vec{i}; v_y, v_z = 0;$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i}; a_y, a_z = 0.$$

## 2. Нить

При решении многих задач нити полагаются невесомыми и нерастяжимыми.

### а) Невесомая нить

Во всех точках натянутой нити модуль силы натяжения одинаков:

$$T = \text{const}.$$

#### Доказательство

Рассмотрим участок натянутой нити **1-2** (рис. 3.11). По условию невесомости масса этого участка  $\Delta m = 0$ . Участки нити, находящиеся по обе стороны от данного участка, действуют на него с силами  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ .

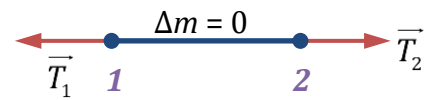


Рис. 3.11

Применим к этому участку нити теорему о движении центра масс:

$$\Delta m \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow \vec{T}_2 = -\vec{T}_1 \Rightarrow T_1 = T_2, \text{ ч. т. д.}$$

### б) Нерастяжимая нить

Модуль скорости всех точек натянутой нити одинаков:

$$v = \text{const}.$$

#### Доказательство

Будем отсчитывать координаты точек нити по её длине от некоторой точки (например, одного из концов нити). Рассмотрим участок нити **1-2** (рис. 3.12). Координата точки **1** равна  $l_1$ , координата точки **2** соответственно равна  $l_2$ . По условию нерастяжимости длина этого участка должна оставаться постоянной:  $\Delta l = l_2 - l_1 = \text{const}$ .

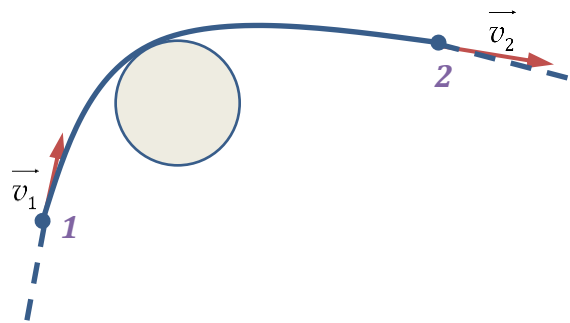


Рис. 3.12

Модули скоростей точек **1** и **2**

$$v_1 = \frac{dl_1}{dt}, v_2 = \frac{dl_2}{dt};$$

$$v_2 - v_1 = \frac{dl_2}{dt} - \frac{dl_1}{dt} = \frac{d(l_2 - l_1)}{dt} = 0 \Rightarrow v_2 = v_1, \text{ ч. т. д.}$$

Из этого следует, что равны и тангенциальные ускорения всех точек нити:

$$a_{\tau 2} = a_{\tau 1}.$$

#### 1.4.7. План решения задач по динамике<sup>19</sup>

1. Выбор объекта исследования и его модели: материальная точка, твёрдое тело, механическая система (указать, какие тела в неё входят)
2. Выбор системы отсчёта (в большинстве случаев — лабораторная)
3. Рисунок (или несколько рисунков)
4. Определение воздействующих объектов. Расстановка обозначений на рисунке: сил, ускорений и т. д.
5. Запись II закона Ньютона (теоремы о движении центра масс) в векторной форме
6. Выбор системы координат (можно вводить разные системы координат для разных тел)
7. Запись закона в проекциях на оси системы координат
8. Подсчёт числа уравнений и числа неизвестных. Запись дополнительных уравнений (другие законы, уравнения связей и т. п.)
9. Решение полученной системы уравнений в общем виде
10. Анализ результата и проверка размерностей<sup>20</sup>
11. Численный расчёт и оценка его результата

#### 1.4.8. Импульс. Другая форма II закона Ньютона

Преобразуем выражение II закона Ньютона:

$$\left. \begin{array}{l} m\vec{a} = \vec{F} \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

$$\boxed{\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}} \quad (3.5)$$

— II закон Ньютона в дифференциальной форме.

В этом выражении под знаком дифференциала стоит векторная физическая величина, характеризующая инертность и движение тела — **импульс материальной точки**

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}};$$

$$[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Из (3.5) получим

$$\boxed{d(m\vec{v}) = \vec{F}dt},$$

<sup>19</sup> Аналогичный план подходит и для решения задач по динамике вращательного движения, в т. ч. с использованием законов сохранения. Различия — в законе, на котором основано решение задачи. Подробное обсуждение этого плана и обучение решению задач проводится на практических занятиях.

Пример решения задачи по динамике рассматривается на [следующей лекции](#).

<sup>20</sup> Рекомендуется контролировать размерности в течение всего решения задачи.

$\vec{F}dt$  — **импульс силы**. Из закон Ньютона можно сформулировать так: изменение импульса материальной точки равно импульсу силы.

По определению, **импульс механической системы** равен сумме импульсов тел (материальных точек), входящих в эту систему:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i.$$

Импульс механической системы равен произведению массы  $M$  системы на скорость  $\vec{v}_c$  её центра масс:

$$\vec{P} = M\vec{v}_c.$$

### Доказательство

Исходя из определения импульса механической системы,

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i$$

(см. [рис. 3.4](#))<sup>21</sup>,  $\vec{v}_i$  — скорость  $i$ -ой материальной точки. В обозначениях этого рисунка  $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i$ . Поэтому

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} \left( \sum m_i \vec{r}_c + \sum m_i \vec{\rho}_i \right) = \left( \sum m_i \right) \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M\vec{v}_c, \text{ ч. т. д.}$$

Преобразуем выражение теоремы о движении центра масс:

$$M\vec{a}_c = \vec{F}^e \Rightarrow M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^e \Rightarrow \frac{d(M\vec{v}_c)}{dt} = \vec{F}^e,$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e.$$

Если система замкнута, то  $\vec{F}^e = 0$  и

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const}$$

— **закон сохранения импульса механической системы**: импульс замкнутой системы остаётся неизменным с течением времени.

На самом деле закон сохранения импульса не выводится, а следует из свойств пространства-времени (см. [РАЗДЕЛ 1.1.2](#)).

Более подробно закон сохранения импульса будет рассмотрен в [ПАРАГРАФЕ 1.6](#).

<sup>21</sup> Разумеется, в «живой» лекции этот рисунок нужно сделать заново.

## Лекция 4

### 1.5. Динамика твёрдого тела

#### 1.5.1. Момент силы

Момент силы<sup>22</sup> — векторная (псевдовекторная) величина, характеризующая взаимодействие тел.

##### 1. Момент силы относительно точки

**Момент силы относительно точки:**

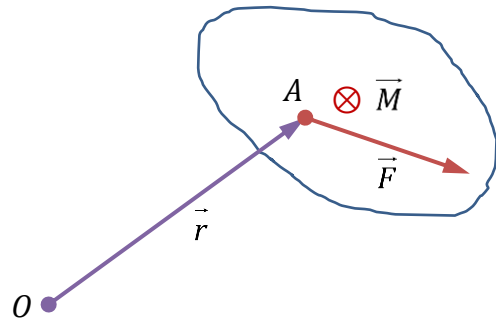
$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}];$$

точка, относительно которой определяется момент, — **полюс**;

$$M = rF \sin(\vec{r}, \vec{F});$$

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

На [рис. 4.1](#):  $O$  — полюс,  $A$  — точка приложения силы;  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  лежат в плоскости рисунка,  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости рисунка.



**Рис. 4.1**

##### 2. Момент силы относительно оси

**Момент силы относительно оси:**

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]_z \vec{k}, \quad (4.1)$$

вектор<sup>23</sup> момента силы относительно оси всегда направлен вдоль этой оси; направление определяется по правилу правого винта.

Один из способов определения момента произвольно направленной силы относительно оси показан на [рис. 4.2](#). На этом рисунке изображено трёхмерное твёрдое тело и вектора и линии, лежащие в трёхмерном пространстве. Здесь  $z$  — ось, относительно которой рассчитывается момент силы;  $\vec{k}$  — орт этой оси;  $A$  — точка приложения силы  $\vec{F}$ ; плоскость  $xy$  — плоскость, проведённая через точку  $A$  перпендикулярно оси  $z$ ;  $O$  — точка пересечения плоскости  $xy$  с осью  $z$ , т. е. ближайшая к точке приложения силы точка на оси; радиус-вектор  $\vec{r}$  восстановлен из точки  $O$  в точку приложения силы;  $\vec{F}_{xy}$  — вектор, являющийся проекцией вектора силы  $\vec{F}$  на плоскость  $xy$ ;  $M = rF_{xy} \sin(\vec{r}, \vec{F}_{xy})$ .

Можно пользоваться не этим способом, а напрямую определением [\(4.1\)](#). Тогда  $\vec{r}$  — это радиус-вектор, проведённый из любой точки на оси в точку приложения силы.

<sup>22</sup> Следует обратить внимание студентов на то, что момент силы, а также момент инерции и момент импульса всегда определяется относительно какой-либо точки или оси.

<sup>23</sup> В большинстве курсов общей физики момент силы, момент импульса относительно оси, а также кинематические величины, характеризующие вращение вокруг неподвижной оси, вводятся как скалярные алгебраические величины. В нашем же курсе это аксиальные векторы.

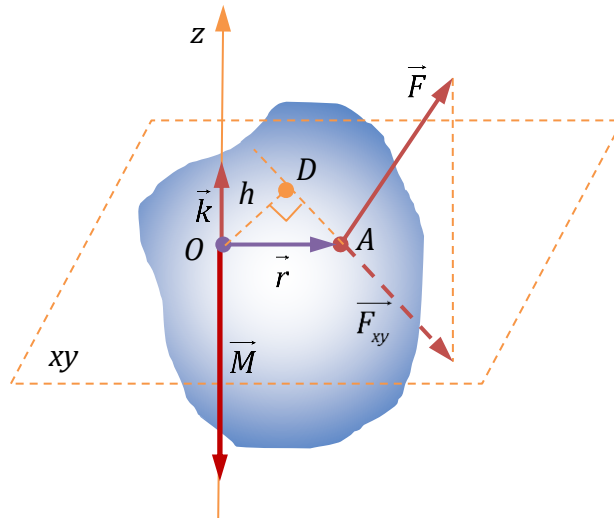


Рис. 4.2

**Плечо силы** — скалярная величина — кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы (отрезок  $OD = h$  на [рис. 4.2](#));

$$h = r \sin(\vec{r}, \vec{F}_{xy}), \quad M = hF_{xy}.$$

Если линия действия силы  $\vec{F}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  (т. е.  $\vec{F} = \vec{F}_{xy}$ ), то получим соотношение, известное из школьного курса физики:  $M = hF$ .

### 1.5.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$  (с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$ ). Разобьём тело на элементарные (малые) фрагменты массами  $\Delta m_i$  ([рис. 4.3](#)); расстояние каждого фрагмента от оси вращения равно  $r_i$ . Запишем II закон Ньютона для  $i$ -ого фрагмента:

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki}^i. \quad (4.2)$$

Здесь  $\vec{a}_i$  — ускорение  $i$ -ого фрагмента;  $\vec{F}_i^e$  — главный вектор внешних сил, с которыми другие тела действуют на  $i$ -ый фрагмент;  $\vec{F}_{ki}^i$  — внутренняя сила, описывающая действие  $k$ -ого фрагмента на  $i$ -ый фрагмент.

Умножим равенство [\(4.2\)](#) на  $\vec{r}_i$  слева векторно:

$$\Delta m_i [\vec{r}_i \vec{a}_i] = [\vec{r}_i \vec{F}_i^e] + \sum_{k \neq i} [\vec{r}_i \vec{F}_{ki}^i]. \quad (4.3)$$

В правой части этого уравнения  $[\vec{r}_i \vec{F}_i^e] = \vec{M}_i^e$  — главный вектор момента внешних сил, приложенных к  $i$ -ому фрагменту;  $\sum_{k \neq i} [\vec{r}_i \vec{F}_{ki}^i] = \sum_{k \neq i} \vec{M}_{ki}^i$  — сумма моментов внутренних сил, приложенных к нему же.

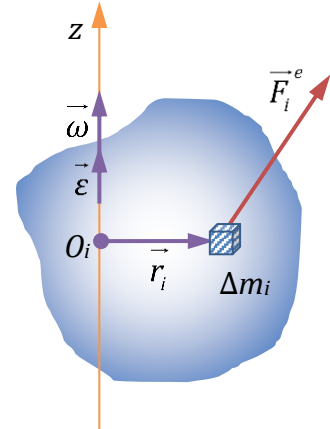


Рис. 4.3



Преобразуем векторное произведение в левой части уравнения (4.3), используя выражение для ускорения материальной точки (2.5)

$$\vec{a}_i = [\vec{\varepsilon} r_i] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} r_i]].$$

Для этого воспользуемся известной из векторного анализа формулой двойного векторного произведения

$$[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}) : \quad \vec{0}, \text{ т. к. } \vec{\omega}, \vec{\varepsilon} \perp \vec{r}_i$$

$$[\vec{r}_i \vec{a}_i] = [\vec{r}_i [\vec{\varepsilon} r_i]] + [\vec{r}_i [\vec{\omega} [\vec{\omega} r_i]]] = \vec{\varepsilon} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\varepsilon} r_i) + [\vec{r}_i \{ \vec{\omega} (\vec{\omega} r_i) - r_i \omega^2 \}] = \vec{\varepsilon} r_i^2 + \omega^2 [\vec{r}_i r_i] = \vec{\varepsilon} r_i^2.$$

Подставляя этот результат в (4.2), получим

$$\Delta m_i r_i^2 \vec{\varepsilon} = \vec{M}_i^e + \sum_{k \neq i} \vec{M}_{ki}^i.$$

Просуммируем эти равенства по всем фрагментам твёрдого тела — по  $i$ :

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 \vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i^e + \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{M}_{ki}^i \rightarrow \vec{0}$$

(равенство последнего слагаемого — суммы моментов всех внутренних сил — нулю студентам следует **доказать самостоятельно**),

$$\vec{\varepsilon} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \vec{M}_i^e.$$

Сумма в левой части этого равенства не зависит от взаимодействий, а определяется только геометрией тела и расположением оси вращения. Введём величину

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (4.4)$$

— **момент инерции тела относительно оси**. Получим

$$\boxed{I \vec{\varepsilon} = \vec{M}}$$

— **основное уравнение динамики вращательного движения**. Здесь  $\vec{M}$  — главный вектор моментов внешних сил.

Основное уравнение динамики вращательного движения можно записать и относительно подвижной оси, проходящей через центр масс тела (**доказать самостоятельно**).

**Демонстрация:** Момент силы. Равновесие при вращательном движении

### 1.5.3. Момент инерции

Если в определении (4.4) положить  $\Delta m_i \rightarrow 0$ , то **момент инерции тела относительно оси**

$$I = \int_0^M r^2 dm;$$

$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2;$$

здесь  $r$  — расстояние от оси до элемента  $dm$ ;  $M$  — масса тела.

**Момент инерции** — мера инертности тела во вращательном движении — скалярная физическая величина, зависящая от формы и размеров тела. Момент инерции — аддитивная величина.

**Момент инерции тела относительно точки:**

$$I = \int_0^M r^2 dm;$$

здесь  $r$  — расстояние от точки (полюса) до элемента  $dm$ ;  $M$  — масса тела.

**Момент инерции тела относительно оси:**

$$I = \int_0^M r^2 dm.$$

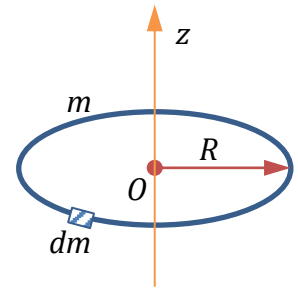
**ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА МОМЕНТА ИНЕРЦИИ**

**1. Тонкое кольцо (полый цилиндр)**

Найти момент инерции тонкого однородного кольца массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно его оси, т. е. относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 4.4).

Разобьём кольцо на бесконечно малые элементы — дуги массой  $dm$ . Каждый элемент  $dm$  находится на расстоянии  $R$  от оси  $z$ . Элементарный момент инерции  $dl = dm \cdot R^2$ . Проинтегрируем по всей массе кольца:

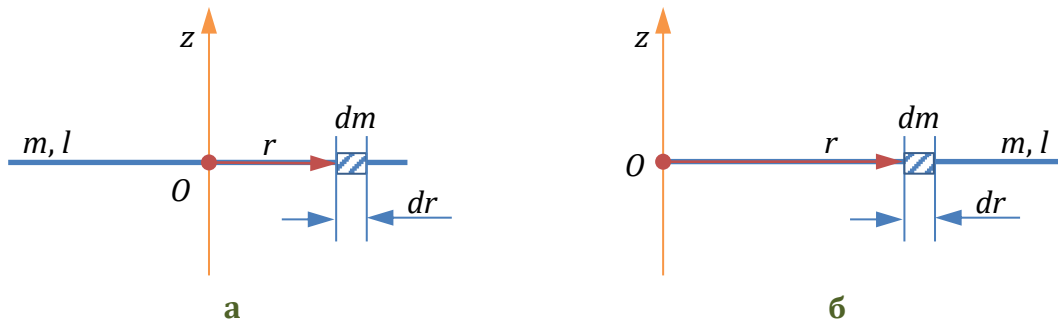
$$I = \int_0^m R^2 dm = mR^2.$$



**Рис. 4.4**

**2. Тонкий стержень**

Найти момент инерции тонкого однородного стержня массы  $m$  и длины  $l$  относительно оси: а) проходящей через середину стержня перпендикулярно ему, б) проходящей через один из концов стержня перпендикулярно ему (рис. 4.5).



**Рис. 4.5**

Разобьём стержень на бесконечно малые элементы — отрезки длиной  $dr$ . Каждый такой отрезок будет иметь массу  $dm = \tau dr$ , где  $\tau = \frac{m}{l}$  — линейная плотность стержня (она постоянна по длине стержня, так как стержень однородный). Элементарный момент инерции  $dl = dm \cdot r^2 = \frac{m}{l} r^2 dr$ , где  $r$  — расстояние от оси  $z$  до элемента  $dm$ .

В случае **а)** момент инерции

$$I = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{2m}{l} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{2ml^3}{3l \cdot 8} = \frac{ml^2}{12}.$$

Расчёт в случае Б) отличается пределами интегрирования:

$$I = \int_0^l \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{m}{l} \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \frac{ml^3}{3l} = \frac{ml^2}{3}.$$

### 3. Однородный диск (сплошной цилиндр)

Найти момент инерции однородного диска массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно его оси (рис. 4.6).

Воспользуемся результатом решения задачи о МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО КОЛЬЦА. Разобьём диск на бесконечно тонкие кольца толщиной  $dr$ . Момент инерции кольца радиуса  $r$  и толщиной  $dr$ :  $dI = dm \cdot r^2$ , где масса бесконечно тонкого кольца  $dm = \sigma \cdot dS$ ,  $dS = 2\pi r dr$  — площадь этого кольца, а  $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$  — *поверхностная плотность* диска, т. е. масса единичного участка поверхности диска. Получим

$$dI = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 dr,$$

$$I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}.$$

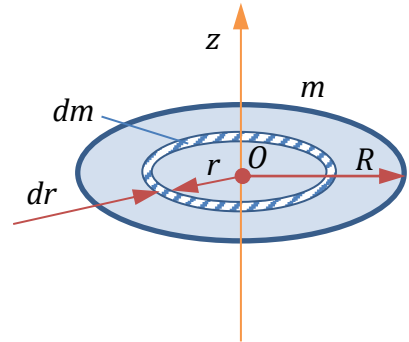


Рис. 4.6

### 4. Однородная сфера

Найти момент инерции однородной сферы массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через её центр (рис. 4.7).

Разобьём сферу на малые участки массой  $dm$ . Момент инерции такого участка относительно оси  $z$

$$dI_z = dm \cdot r^2 = dm(x^2 + y^2).$$

Аналогично

$$dI_x = dm(y^2 + z^2), \quad dI_y = dm(x^2 + z^2).$$

Момент инерции элемента  $dm$  относительно центра сферы — точки  $O$

$$dI_0 = dm \cdot R^2 = dm(x^2 + y^2 + z^2).$$

Найдём моменты инерции всей сферы:

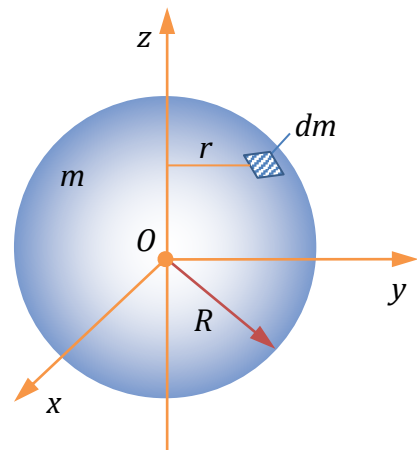


Рис. 4.7

$$\begin{cases} I_z = \int_0^m (x^2 + y^2) dm, \\ I_x = \int_0^m (y^2 + z^2) dm, \\ I_y = \int_0^m (x^2 + z^2) dm; \end{cases}$$

$$I_0 = \int_0^m (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} \int_0^m (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dm =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\int_0^m (x^2 + y^2) dm}_{I_z} + \underbrace{\int_0^m (y^2 + z^2) dm}_{I_x} + \underbrace{\int_0^m (x^2 + z^2) dm}_{I_y} \right] = \frac{3}{2} I_z,$$

так как  $I_z = I_x = I_y$  из-за сферической симметрии. Но  $I_0 = mR^2$ , поэтому

$$I_z = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} mR^2.$$

### 5. Однородный шар

Найти момент инерции однородного шара массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через его центр.

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

**(доказать самостоятельно, используя результат [ПРЕДЫДУЩЕЙ ЗАДАЧИ](#)).**

### Теорема Гюйгенса–Штейнера

Момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + md^2.$$

### Доказательство

Пусть  $z$  — ось, относительно которой нужно найти момент инерции тела массы  $m$ ; точка  $C$  — центр масс тела;  $z_0$  — ось, проходящая через точку  $C$  параллельно оси  $z$ ;  $d$  — расстояние между этими осями ([РИС. 4.8А](#)). Разобьём тело на малые фрагменты массы  $dm$ .

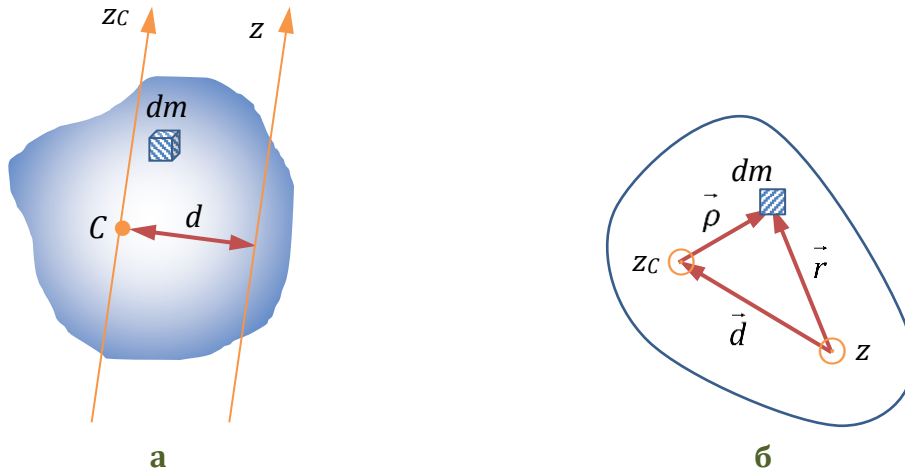


Рис. 4.8

Для удобства сделаем второй рисунок — [рис. 4.8Б](#), на котором оси  $z$  и  $z_c$  направлены перпендикулярно плоскости рисунка. По построению

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{d}.$$

Момент инерции элемента  $dm$  относительно оси  $z$

$$dI = r^2 dm^{24},$$

относительно оси  $z_0$

$$dI_c = \rho^2 dm;$$

поэтому

$$dI = (\vec{\rho} + \vec{d})^2 dm = (\rho^2 + 2\vec{\rho}\vec{d} + d^2) dm = \rho^2 dm + d^2 dm + 2\vec{\rho}\vec{d} \cdot dm.$$

Проинтегрируем по всей массе тела:

$$I = \int_0^m \rho^2 dm + d^2 \int_0^m dm + 2\vec{d} \int_0^m \rho dm = I_c + md^2, \text{ ч. т. д.}$$

$I_c \leftarrow 0$ , т. к.  $C$  — центр масс

#### 1.5.4. Пример решения задачи по динамике

##### Маятник Обербека

*Маятник Обербека* — тело вращения сложной формы — маховик с несколькими шкивами и четырьмя радиально направленными спицами, на которые надеваются небольшие грузы, положение которых можно изменять ([рис. 4.9](#)).

На шкив радиуса  $R$  намотана нить, на конце которой прикреплён груз массы  $M$ . Масса грузов на спицах равна  $m$ , они расположены на расстоянии  $r$  от оси маятника; момент инерции маховика со спицами относительно оси маятника равен  $I_0$ . Груз массы  $M$  поднимают на расстояние  $h$  над полом и отпускают. Через какое время груз коснётся пола?

Выделим два объекта исследования: груз массы  $M$  — материальная точка и маятник с грузами массы  $m$  — твёрдое тело.

<sup>24</sup> Это упрощённое доказательство, так как мы проводим интегрирование только по тем элементам  $dm$ , которые лежат в плоскости, проходящей через центр масс тела перпендикулярно обеим осям. Полное доказательство (с интегрированием по всему объёму тела) даёт тот же результат.

Будем работать в инерциальной системе отсчёта — лабораторной.

На груз действует Земля с силой тяжести  $\vec{F}_{\tau 1}$  и нить с силой натяжения  $\vec{T}_1$ , при этом груз движется с ускорением  $\vec{a}$ , направленным вниз; на маятник действует Земля с силой тяжести  $\vec{F}_{\tau 2}$ , вал с силой реакции  $\vec{N}$  и нить с силой натяжения  $\vec{T}_2$ , маятник вращается вокруг своей оси с угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$ .

Будем решать задачу на основании законов динамики: для груза — II закон Ньютона (4.5), для маятника — теорема о движении центра масс (4.6)<sup>25</sup> и основное уравнение динамики вращательного движения (4.7):

$$M\vec{a} = \vec{F}_{\tau 1} + \vec{T}_1, \quad (4.5)$$

$$0 = \vec{F}_{\tau 2} + \vec{N} + \vec{T}_2, \quad (4.6)$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{F_{\tau 2}} + \vec{M}_N + \vec{M}_{T_2}. \quad (4.7)$$

Здесь  $I$  — момент инерции маятника с грузами массы  $m$  относительно его оси; левая часть уравнения (4.6) равна нулю, так как центр масс маятника находится на неподвижной оси и, следовательно, его ускорение равно нулю.

Представим эти законы в скалярном виде: спроецируем уравнения (4.5) и (4.6) на вертикальную ось  $y$ , а уравнение (4.7) — на ось  $z$  маятника (произвольно выберем направление оси  $y$  вниз, а оси  $z$  — «от нас»):

$$\begin{cases} Ma = F_{\tau 1} - T_1, \\ 0 = F_{\tau 2} - N + T_2, \\ I\varepsilon = T_2 R. \end{cases} \quad (4.8)$$

Эта система содержит 3 уравнения с 7 неизвестными. Запишем дополнительные соотношения:

$$F_{\tau 1} = Mg \quad (\text{из закона всемирного тяготения}),$$

$$T_2 = T_1 = T \quad (\text{нить невесома}),$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad (\text{нить нерастяжима и не проскальзывает по шкиву}),$$

$$I = I_0 + 4mr^2.$$

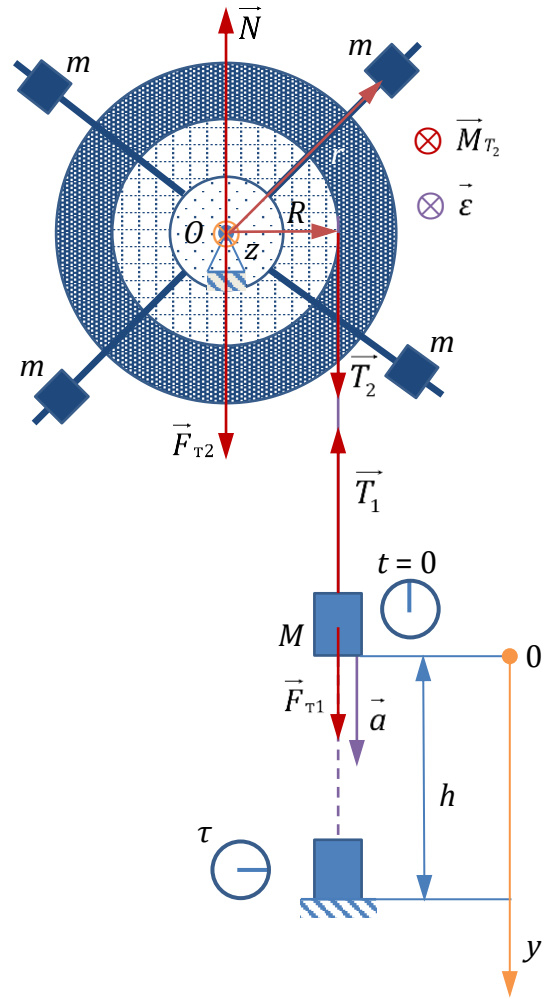


Рис. 4.9

<sup>25</sup> Уравнение (4.6) не содержит информации, нужной для решения данной задачи; оно здесь записывается потому, что теорема о движении центра масс часто бывает необходима при решении задач по динамике твёрдого тела.

Второе уравнение в системе (4.8) содержит две неизвестные  $F_{T2}$  и  $N$ , которые не нужны для получения ответа данной задачи, мы далее не будем его записывать. Подставив дополнительные соотношения в систему (4.8), получим

$$\begin{cases} Ma = Mg - T, \\ (I_0 + 4mr^2) \frac{a}{R} = TR. \end{cases}$$

Эта система содержит 2 уравнения с 2 неизвестными  $a$  и  $T$  и имеет одно и только одно решение. Исключим  $T$ :

$$T = M(g - a), \quad (I_0 + 4mr^2)a = MgR^2 - MaR^2;$$

$$a = \frac{MgR^2}{I_0 + 4mr^2 + MR^2}. \quad (4.9)$$

Для нахождения времени движения груза решим кинематическую задачу. Запишем закон равноускоренного движения материальной точки

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

здесь  $\vec{r}$  — радиус-вектор груза массы  $M$ . Спроецируем это уравнение на ось  $y$ :

$$y(t) = \frac{at^2}{2}$$

(начальная координата и скорость груза по условию равны нулю). В искомый момент времени  $\tau$  груз будет иметь координату  $h$ :

$$y(\tau) = h = \frac{a\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Подставляя сюда результат (4.9), получим

$$\tau = \sqrt{\frac{2h(I_0 + 4mr^2 + MR^2)}{MgR^2}}.$$

Проанализируем ответ задачи. При увеличении расстояния  $r$  грузов массы  $m$  от оси маятника время опускания груза увеличивается, а при увеличении массы  $M$  наматывании нити на шкив большего радиуса  $R$  — уменьшается. Это можно проверить экспериментально.

**Демонстрация:** Маятник Обербека

## Лекция 5

### 1.5.5. Динамика плоского движения твёрдого тела

**Качение без проскальзывания** — плоское движение, при котором скорость точек тела, соприкасающихся с опорной поверхностью, относительно этой поверхности, равна нулю. Ось, проходящая через эти точки, неподвижна и называется **мгновенной осью вращения** (ось  $z$  на [рис. 5.1](#)). (**Ускорения точек мгновенной оси не равны нулю!**) Качение без проскальзывания можно представить как вращение вокруг мгновенной оси.

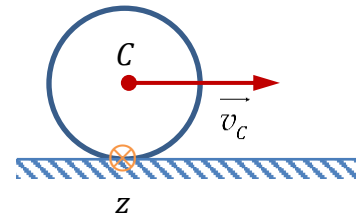


Рис. 5.1

Качение без проскальзывания возможно благодаря трению. Оно характеризуется *силой трения покоя*<sup>26</sup> (так как точки, соприкасающиеся с поверхностью, не движутся относительно неё).

**Демонстрация:** Скатывание цилиндров с различными моментами инерции с наклонной плоскости

#### ПРИМЕР

Скатывание цилиндра с наклонной плоскости

Цилиндр массы  $m$  и радиуса  $R$ , момент инерции которого относительно его оси равен  $I_c$ , скатывается без проскальзывания с плоскости, наклонённой к горизонту под углом  $\alpha$  ([рис. 5.2](#)). Найти ускорение центра масс цилиндра.

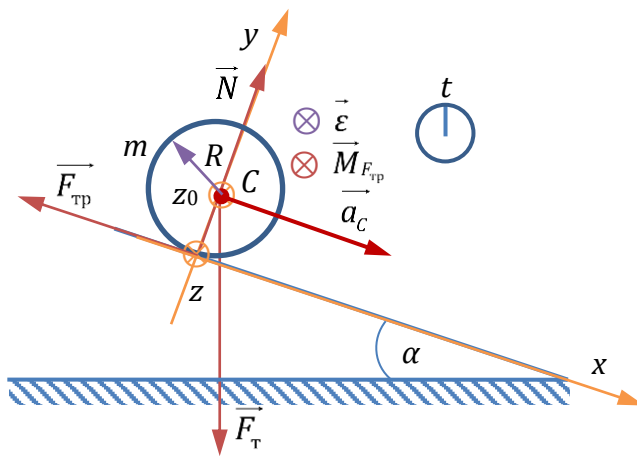


Рис. 5.2

Объект исследования — цилиндр — твёрдое тело.

Система отсчёта — лабораторная.

На цилиндр действуют: Земля с силой тяжести  $\vec{F}_T$ , наклонная плоскость с силами реакции опоры  $\vec{N}$  (упругая составляющая) и трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (неупругая составляющая). Цилиндр совершает плоское движение, вращаясь с угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$ , при этом его центр масс движется с ускорением  $\vec{a}_c$ .

Запишем законы динамики — теорему о движении центра масс [\(5.1\)](#) и основное уравнение динамики вращательного движения [\(5.2\)](#):

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (5.1)$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{F_T} + \vec{M}_N + \vec{M}_{F_{\text{тр}}}, \quad (5.2)$$

<sup>26</sup> Т. н. *сила трения качения* в нашем курсе не рассматривается. Трение качения обусловлено наличием ненулевого момента силы реакции опоры (её упругой и неупругой составляющих) относительно оси, проходящей через центр масс тела, и приводит к замедлению вращения катящегося тела. Трение качения возможно, лишь если опорная поверхность не является абсолютно твёрдой; в задачах нашего курса всегда по умолчанию полагается обратное.



здесь  $I$  — момент инерции цилиндра относительно оси.

Спроецируем векторные уравнения на координатные оси: уравнение (5.1) — на оси  $x$  (направлена вдоль наклонной плоскости) и  $y$  (направлена перпендикулярно наклонной плоскости); уравнение (5.2) — либо на ось  $z_0$ , проходящую через центр масс цилиндра, либо на ось  $z$  — мгновенную ось вращения. Выберем ось  $z_0$ ;

$$\begin{cases} ma_c = F_T \sin \alpha - F_{тр}, \\ 0 = N - F_T \cos \alpha, \\ I_c \varepsilon = F_{тр} R. \end{cases} \quad (5.3)$$

Эта система содержит 3 уравнения с 5 неизвестными. Запишем дополнительные соотношения:

$$F_T = mg,$$

$$\varepsilon = \frac{a_c}{R} \quad (\text{кинематическая связь — отсутствие проскальзывания}).$$

После их подстановки в систему (5.3) получится система уравнений

$$\begin{cases} ma_c = mg \sin \alpha - F_{тр}, \\ I_c \frac{a_c}{R} = F_{тр} R. \end{cases}$$

(Отсюда мы исключили второе уравнение в системе (5.3), так как оно содержит лишнюю неизвестную  $N$ .) Решив эту систему уравнений относительно  $a_c$ , получим

$$a_c = \frac{mgR^2 \sin \alpha}{I_c + mR^2}.$$

Чем больше момент инерции цилиндра, тем меньше ускорение его центра масс и, следовательно, конечная скорость, что мы и наблюдали в эксперименте. В частности, для полого цилиндра  $I_c = mR^2$  и  $a_c = \frac{g \sin \alpha}{2}$ , а для сплошного цилиндра  $I_c = \frac{mR^2}{2}$

и  $a_c = \frac{2g \sin \alpha}{3}$ . Сплошной цилиндр скатывается быстрее полого.

### 1.5.6. Момент импульса

Преобразуем основное уравнение динамики вращательного движения с учётом

того, что по определению  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  ( $\vec{\omega}$  — угловая скорость тела):

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \Rightarrow I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M},$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

— *основное уравнения динамики вращательного движения в дифференциальной форме*, где

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}} \quad (5.4)$$

— *момент импульса твёрдого тела относительно оси*;

$$[L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

При  $\vec{M} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

— **закон сохранения момента импульса:** момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной оси не изменяется с течением времени.

На самом деле закон сохранения момента импульса ниоткуда не выводится, а является выражением свойств пространства-времени (см. [РАЗДЕЛ 1.1.2](#)).

Более подробно закон сохранения момента импульса рассмотрим [ДАЛЕЕ](#).

### 1.6. Закон сохранения импульса

Законы сохранения позволяют найти связь между характеристиками механической системы до и после взаимодействия, не вдаваясь в подробности произошедшего процесса. Сначала подробно рассмотрим закон сохранения импульса.

Вспомним основные соотношения (см. [РАЗДЕЛ 1.4.8](#)):

Импульс материальной точки:  $\vec{p} = m\vec{v}$

Импульс механической системы:  $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = M\vec{v}_c$

Теорема о движении центра масс:  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e$

Если система замкнута, то

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const}.$$

**Закон сохранения импульса:** импульс замкнутой системы остаётся неизменным с течением времени.

Замкнутых систем в строгом смысле этого слова в природе не бывает, но во многих случаях импульс системы можно считать сохраняющимся:

1. Внешние силы скомпенсированы:  $\sum \vec{F}^e = 0$ .
2. Движение системы рассматривается в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}^e, \quad \Delta \vec{P} = \vec{F}^e \Delta t.$$

Если  $\Delta t$  мало, то и  $\Delta \vec{P}$  мало и им можно пренебречь. С чем сравнивать эти величины? Речь идёт о влиянии взаимодействий, описываемых внешними и внутренними силами, на движение *отдельных тел*, входящих в рассматриваемую механическую систему, при *взрыве, ударе* и т. п. Изменение импульса этих тел под действием внутренних сил велико по сравнению с изменением импульса под действием внешних сил тогда, когда модуль главного вектора внутренних сил, приложенных к какому-либо телу, входящему в систему, много больше модуля равнодействующей внешних сил, приложенных к этому же телу:  $F^i \gg F^e$ .

3. Внешние силы не скомпенсированы  $\left(\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e \neq 0\right)$ , но проекция главного вектора внешних сил на какое-либо направление равна нулю:

$$F_x^e = 0 \Rightarrow \frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow P_x = \text{const}$$

— проекция импульса механической системы на это направление (ось  $x$ ) остаётся неизменной с течением времени.

### ПРИМЕР

#### Пружинная пушка

Пушка массы  $M$  стоит на горизонтальных рельсах и стреляет в горизонтальном направлении снарядом массы  $m$ , вылетающим со скоростью  $v$  (рис. 5.3). Найти скорость пушки после выстрела.

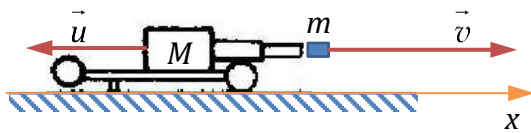


Рис. 5.3

Рассмотрим механическую систему пушка-снаряд. Будем работать в лабораторной системе отсчёта.

Считаем, что в момент выстрела сохраняется проекция импульса системы на горизонтальное направление ( $P_x = \text{const}$ ); изменением импульса системы под действием трения пушки о рельсы пренебрежём. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось  $x$ :

$$0 = mv - Mu;$$

получим

$$u = \frac{mv}{M}.$$

Чем массивнее снаряд, тем больше начальная скорость пушки и расстояние, на которое она откатится после выстрела. Проверим это экспериментально.

- Демонстрации:**
- 1) Отдача при выстреле. Пружинная пушка
  - 2) Передача импульса одним шаром. Скатывание шарика на тележку с гладкой и шероховатой поверхности
  - 3) Одновременное скатывание двух шариков в тележку с песком. Передача импульса двумя шарами

## 1.7. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

### 1.7.1. Момент импульса

**Момент импульса** — векторная величина (псевдовектор), характеризующая инертность тела в движении.

1. Момент импульса материальной точки относительно точки

**Момент импульса материальной точки относительно точки** (полюса) равен векторному произведению радиуса-вектора этой точки на её импульс (рис. 5.4):

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}].$$

## 2. Момент импульса материальной точки относительно оси

**Момент импульса материальной точки относительно оси:**

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]_z \vec{k}$$

Вектор момента импульса относительно оси всегда направлен вдоль этой оси; направление определяется по правилу правого винта. (На [рис. 5.5](#)  $\vec{p}$  лежит не в плоскости чертежа.)

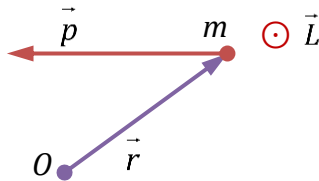


Рис. 5.4

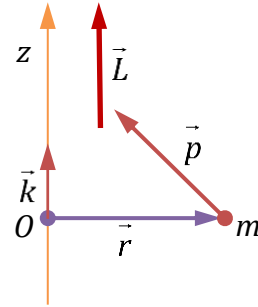


Рис. 5.5

## 3. Момент импульса механической системы

**Момент импульса механической системы** равен сумме моментов импульсов тел (материальных точек), составляющих эту систему:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i \quad (5.5)$$

## 4. Момент импульса твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

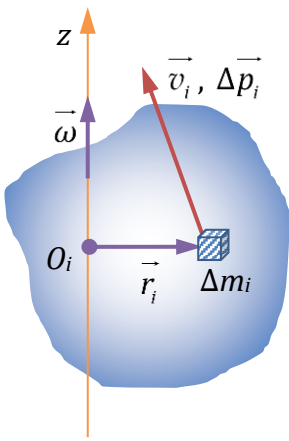


Рис. 5.6

Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  ([рис. 5.6](#)). Разобьём тело на малые фрагменты массами  $\Delta m_i$ , отстоящие от оси  $z$  соответственно на расстояния  $r_i$  и имеющие скорости  $\vec{v}_i$  и импульсы  $\Delta \vec{p}_i$ . Момент импульса  $i$ -го фрагмента

$$\Delta \vec{L}_i = [\vec{r}_i, \Delta \vec{p}_i].$$

Момент импульса тела по определению [\(5.5\)](#)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum \Delta \vec{L}_i = \sum [\vec{r}_i, \Delta \vec{p}_i] = \sum [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i] = \sum [\vec{r}_i, \Delta m_i [\vec{\omega} \vec{r}_i]] = \\ &= \sum \Delta m_i \{ \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \vec{r}_i) \} = \vec{\omega} \sum \Delta m_i r_i^2 = I \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \vec{r}_i]$ . Мы получили результат, совпадающий с определением [\(5.4\)](#).

## 5. Момент импульса твёрдого тела, совершающего плоское движение

$$\vec{L} = [\vec{r}_c \vec{P}] + \vec{L}_c,$$

где  $\vec{r}_c$  — радиус-вектор центра масс тела,  $\vec{P}$  — импульс тела;  $\vec{L}_c = I_c \vec{\omega}$  — момент импульса, соответствующий вращению тела вокруг оси, проходящей через центр

масс тела перпендикулярно плоскости его движения,  $I_C$  — момент инерции тела относительно этой оси.

### Доказательство

Разобьём тело на малые фрагменты массами  $\Delta m_i$ . По определению (5.5)

$$\vec{L} = \sum \Delta \vec{L}_i = \sum [\vec{r}_i, \Delta \vec{p}_i] = \sum [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i],$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го фрагмента,  $\vec{v}_i$  — его скорость,  $\Delta \vec{p}_i$  — его импульс. Представим (ср. рис. 3.4)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{u}_i,$$

где  $\vec{r}_C$  — радиус-вектор центра масс тела,  $\vec{\rho}_i$  — радиус-вектор, проведённый из центра масс к  $i$ -му фрагменту,  $\vec{v}_C$  — скорость центра масс,  $\vec{u}_i = \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]$  — скорость  $i$ -го фрагмента относительно центра масс,  $\vec{\omega}$  — угловая скорость тела. Таким образом,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum [\vec{r}_C + \vec{\rho}_i, \Delta m_i (\vec{v}_C + \vec{u}_i)] = \sum \Delta m_i \{ [\vec{r}_C \vec{v}_C] + [\vec{r}_C \vec{u}_i] + [\vec{\rho}_i \vec{v}_C] + [\vec{\rho}_i \vec{u}_i] \} = \\ &= [\vec{r}_C \vec{v}_C] \sum \Delta m_i + [\vec{r}_C, \sum \Delta m_i \vec{u}_i] + \underbrace{[\sum \Delta m_i \vec{\rho}_i, \vec{v}_C]}_0, \text{ т. к. точка } C \text{ — центр масс} + \sum [\vec{\rho}_i, \Delta m_i \vec{u}_i] = \\ &= [\vec{r}_C, M \vec{v}_C] + \left[ \vec{r}_C, \sum \Delta m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \right] + \sum \Delta m_i [\vec{\rho}_i, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]] = \\ &= [\vec{r}_C \vec{P}] + \left[ \vec{r}_C, \frac{d}{dt} (\sum \Delta m_i \vec{\rho}_i) \right] + \sum \Delta m_i \vec{\omega} \rho_i^2 = [\vec{r}_C \vec{P}] + \vec{\omega} \sum \Delta m_i \rho_i^2 = \\ &= [\vec{r}_C \vec{P}] + I_C \vec{\omega}, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

Здесь  $M$  — масса тела.

### 1.7.2. Закон сохранения момента импульса

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e,$$

где  $\vec{M}^e$  — главный вектор моментов внешних сил. Если механическая система замкнута, то

$$\vec{M}^e = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной оси (либо точки) не изменяется с течением времени.

Если система не является замкнутой, но  $\vec{M}^e = 0$  относительно некоторой оси — моменты внешних сил равны нулю либо скомпенсированы, то момент импульса системы относительно этой оси не изменяется с течением времени.

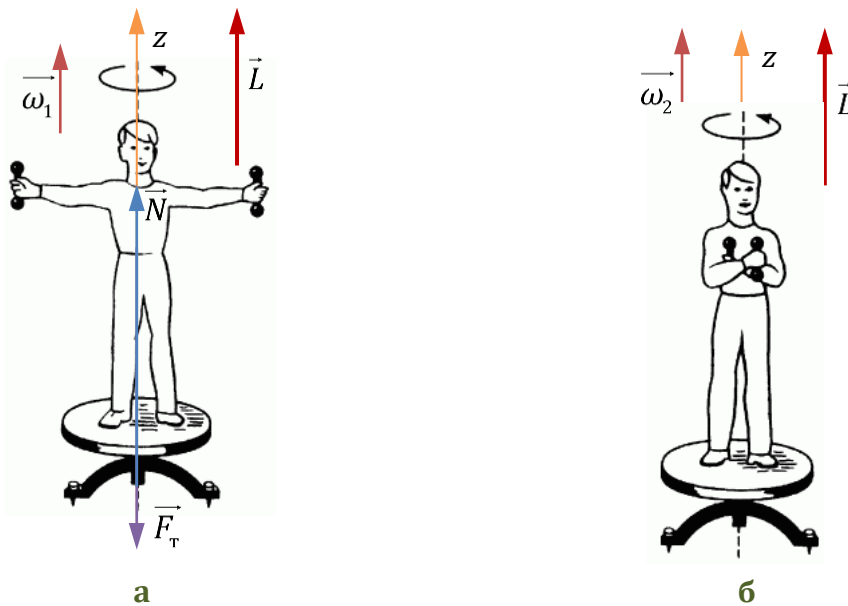
**ПРИМЕР****Скамья Жуковского**

Скамья Жуковского представляет собой диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси — оси симметрии — почти без трения. На скамье может стоять (или сидеть) человек и выполнять различные действия. Рассмотрим два опыта.

**Демонстрация:** Скамья Жуковского

**Опыт 1**

Экспериментатор стоит на скамье Жуковского, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}_1$  (рис. 5.7А). В разведённых в стороны руках экспериментатор держит гантели. Затем экспериментатор сводит руки так, что расстояние от гантелей до оси уменьшается (рис. 5.7Б). Как изменится угловая скорость системы?



**Рис. 5.7**

На систему человек-скамья-гантели воздействуют следующие внешние объекты: Земля с силой тяжести  $\vec{F}_T$  и опорная поверхность с силой реакции  $\vec{N}$ . Обе эти силы имеют нулевые моменты относительно вертикальной оси  $z$ :  $\vec{M}^e = 0$ . Следовательно, момент импульса рассматриваемой механической системы относительно этой оси сохраняется:  $\vec{L} = \text{const}$ .

Момент импульса системы в начальном состоянии

$$\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1,$$

где  $I_1$  — момент инерции системы относительно оси  $z$  в начальном состоянии (с разведёнными руками и гантелями).

Момент импульса системы в конечном состоянии

$$\vec{L}_2 = I_2 \vec{\omega}_2,$$

где  $I_2$  — момент инерции системы относительно оси  $z$  в конечном состоянии (со сведёнными руками и гантелями),  $\vec{\omega}_2$  — конечная угловая скорость.

Так как  $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \vec{L}$ ,

$$I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2.$$

В проекции на ось  $z$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1 \omega_1}{I_2}.$$

Так как  $I_2 < I_1$  (в конечном положении гантели находятся ближе к оси), угловая скорость системы увеличивается.

### Опыт 2

Экспериментатор стоит на неподвижной скамье Жуковского. Ему в руки дают ось колеса, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , направленную вертикально вверх (рис. 5.8А). Затем экспериментатор поворачивает ось колеса вниз (рис. 5.8Б). С какой угловой скоростью начнёт вращаться скамья?

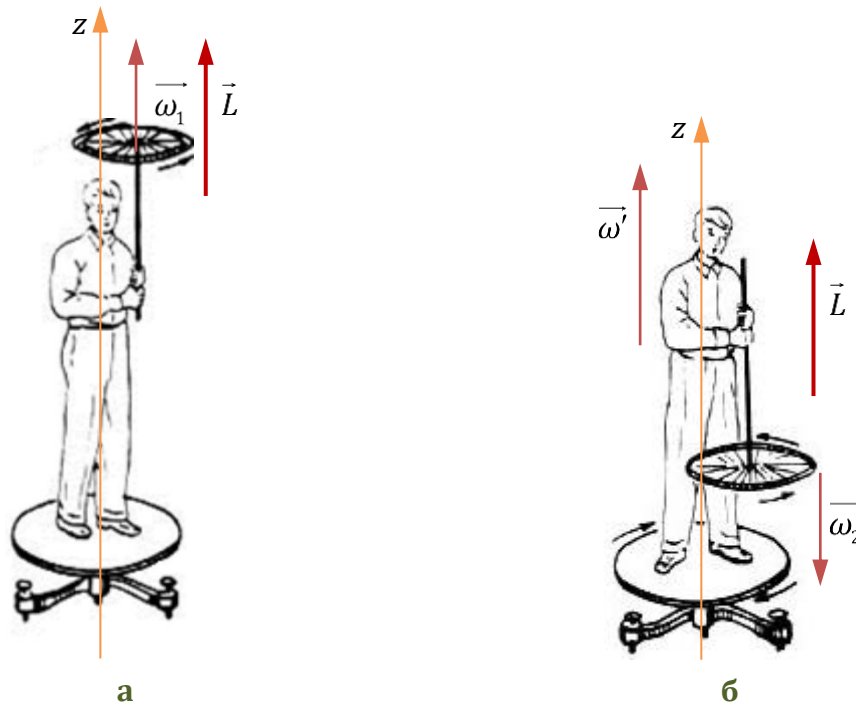


Рис. 5.8

Момент импульса системы человек-скамья-колесо относительно вертикальной оси сохраняется по той же причине, что и В ПРЕДЫДУЩЕМ ОПЫТЕ.

Момент импульса системы в начальном состоянии

$$\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1,$$

где  $I_1$  — момент инерции колеса относительно его оси;  $\vec{\omega}_1$  — вектор начальной угловой скорости колеса,  $\omega_1 = \omega$ .

Момент импульса системы в конечном состоянии

$$\vec{L}_2 = I_1 \vec{\omega}_2 + I_2 \vec{\omega}',$$

где  $I_2$  — момент инерции человека и скамьи относительно оси  $z$ ,  $\vec{\omega}_2$  — вектор конечной угловой скорости колеса,  $\vec{\omega} = \omega$ ,  $\vec{\omega}'$  — конечная угловая скорость скамьи. Так как  $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ ,

$$I_1 \vec{\omega}_1 = I_1 \vec{\omega}_2 + I_2 \vec{\omega}'.$$

В проекции на ось  $z$

$$I_1 \omega = -I_1 \omega + I_2 \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{2I_1 \omega}{I_2}.$$

Скамья будет вращаться в направлении, совпадающем с начальным направлением вращения колеса.



## Лекция 6

### 1.8. Работа и энергия

#### 1.8.1. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия — энергетическая характеристика движения;

$$[W_k] = \text{Дж (джоуль)}.$$

#### 1. Кинетическая энергия материальной точки

**Кинетическая энергия материальной точки** равна произведению массы материальной точки на квадрат её скорости, делённый пополам:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

#### 2. Кинетическая энергия механической системы

**Кинетическая энергия механической системы** равна сумме кинетических энергий тел (материальных точек), составляющих эту систему:

$$W_k = \sum W_{ki}; \quad (6.1)$$

$$W_k \neq \frac{Mv_c^2}{2} \quad (M — \text{масса системы, } v_c — \text{скорость центра масс)!}$$

Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение:  $W_k = \frac{mv^2}{2}$ ,

где  $m$  — масса тела,  $v$  — модуль его скорости.

#### 3. Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

**Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси**, равна произведению момента инерции тела на квадрат его угловой скорости, делённый пополам:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

### Доказательство

Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (рис. 5.6). Разобьём тело на малые фрагменты массой  $\Delta m_i$ . Вычислим кинетическую энергию по определению (6.1) (с учётом того, что  $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \vec{r}_i]$ ):

$$W_k = \sum \Delta W_{ki} = \sum \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

#### 4. Кинетическая энергия твёрдого тела, совершающего плоское<sup>27</sup> движение

**Теорема Кёнига:** кинетическая энергия твёрдого тела, совершающего плоское движение, равна сумме кинетической энергии поступательного движения этого

<sup>27</sup> Можно сформулировать эту теорему для общего случая сложного движения, если рассматривать второе слагаемое как кинетическую энергию вращения вокруг центра масс.

тела со скоростью, равной скорости центра масс тела, и вращения тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения:

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$

### Доказательство

Пусть твёрдое тело массы  $m$  совершает плоское движение. Разобьём тело на малые фрагменты массой  $\Delta m_i$ . Вычислим кинетическую энергию тела по определению (6.1):

$$W_k = \sum \Delta W_{ki} = \sum \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i (\vec{v}_c + \vec{u}_i)^2,$$

где скорость  $i$ -го фрагмента  $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{u}_i$ ,  $\vec{u}_i$  — скорость этого фрагмента относительно центра масс тела (см. [ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТВЁРДОГО ТЕЛА, СОВЕРШАЮЩЕГО ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ](#)). Продолжим преобразования:

$$W_k = \frac{1}{2} \left( \sum \Delta m_i v_c^2 + 2 \sum \Delta m_i \vec{v}_c \vec{u}_i + \sum \Delta m_i u_i^2 \right) = \frac{v_c^2}{2} \sum \Delta m_i + \vec{v}_c \sum \Delta m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} + \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \omega^2 \rho_i^2,$$

здесь  $\vec{\rho}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го фрагмента, проведённый из центра масс, и  $\vec{u}_i = \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}$ ;

$\vec{\omega}$  — угловая скорость тела. Очевидно,  $\sum \Delta m_i = m$  — массе тела. Далее:

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \vec{v}_c \frac{d}{dt} \left( \sum \Delta m_i \vec{\rho}_i \right) + \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i \rho_i^2 = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

0, т. к. точка  $C$  — центр масс  $I_c$

### 1.8.2. Работа и мощность

*Работа* — скалярная физическая величина — энергетическая характеристика взаимодействия<sup>28</sup>;

$$[A] = \text{Дж}.$$

#### 1. Элементарная работа

*Элементарная работа* равна скалярному произведению силы на элементарное (бесконечно малое) перемещение точки приложения этой силы ([рис. 6.1](#)):

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = F_l dl.$$

Вектор элементарного перемещения всегда направлен по касательной к траектории;  $F_l$  — проекция вектора силы на это направление.

#### 2. Работа

*Работа* равна сумме (интегралу) элементарных работ по траектории точки приложения силы:

<sup>28</sup> Так как работа — это характеристика взаимодействия, допустимо говорить «работа такого-то объекта», т. е. источника этого взаимодействия, и «работа силы», т. е. характеристики этого взаимодействия (первый вариант предпочтительнее); например, «работа гравитационного поля Земли» или «работа силы тяжести».

$$A = \int_l dA = \int_l \vec{F} d\vec{l} = \int_l F_l dl$$

Здесь  $l$  — траектория точки  $B$  приложения силы (кривая 1-2 на [РИС. 6.1](#));

Графический смысл работы: площадь под кривой  $F_l(l)$  равна модулю работы силы  $\vec{F}$  при перемещении точки приложения этой силы по траектории  $l$  ([РИС. 6.2](#)).

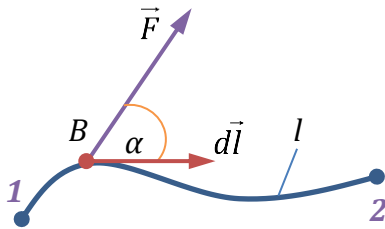


Рис. 6.1

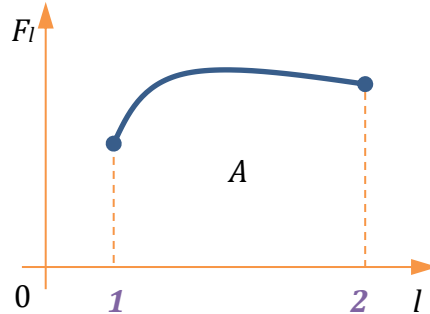


Рис. 6.2

### 3. Работа при вращательном движении твёрдого тела

Пусть сила  $\vec{F}$  приложена к точке  $B$  твёрдого тела, находящейся на расстоянии  $r$  от оси вращения  $z$  ([РИС. 6.3А](#)). Элементарная работа, которую совершает эта сила, когда тело совершает элементарное угловое перемещение  $d\vec{\varphi}$ ,

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha$$

(см. [РИС. 6.3Б](#)).

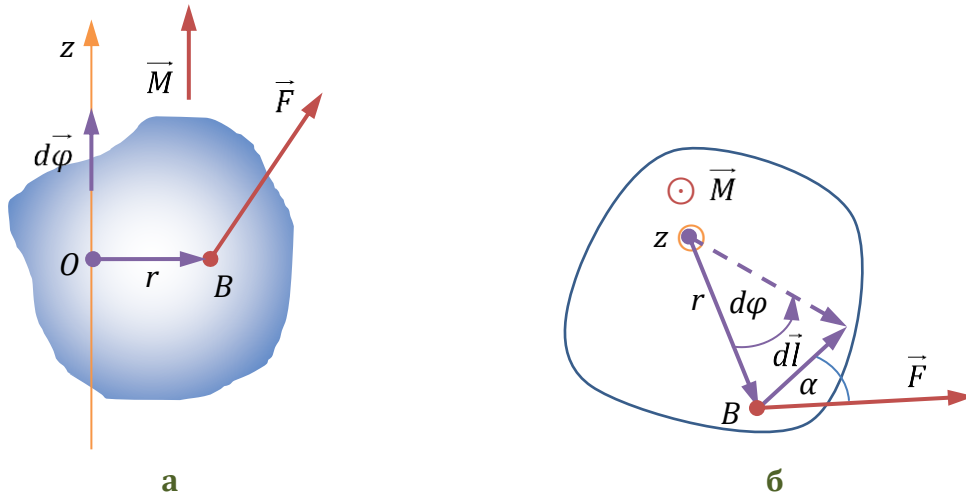


Рис. 6.3

Модуль линейного перемещения точки  $B$  — длина малой дуги

$$dl = r \cdot d\varphi;$$

$$dA = Fr \cos \alpha \cdot d\varphi = Fr \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot d\varphi = M_z d\varphi;$$

$$dA = \vec{M} d\vec{\varphi}$$

#### 4. Мощность

**Мощность** — энергетическая характеристика взаимодействия (или тела, совершающего работу), равная скорости совершения работы;

$$[N] = \text{Вт (ватт)}.$$

**Средняя мощность** равна отношению работы к промежутку времени, за который эта работа совершена:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

**Мгновенная мощность** равна мгновенной скорости совершения работы — производной работы по времени

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Преобразуем это выражение с учётом определения элементарной работы:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\vec{v};$$

$$N = \vec{F}\vec{v},$$

где  $\vec{v}$  — скорость точки приложения силы.

#### 1.8.3. Теорема об изменении кинетической энергии

Изменение кинетической энергии механической системы равно сумме работ внешних и внутренних сил:

$$\Delta W_k = A^e + A^i.$$

#### Доказательство

Рассмотрим материальную точку массы  $m$ , которая испытывает воздействие, описываемое силой  $\vec{F}$ . Точка движется по кривой 1-2 (рис. 6.4). Элементарная работа на перемещении  $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F}d\vec{l}.$$

С учётом того, что  $d\vec{l} = \vec{v}dt$ , где  $\vec{v}$  — скорость материальной точки, работа по перемещению точки по траектории 1-2

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\vec{v}dt,$$

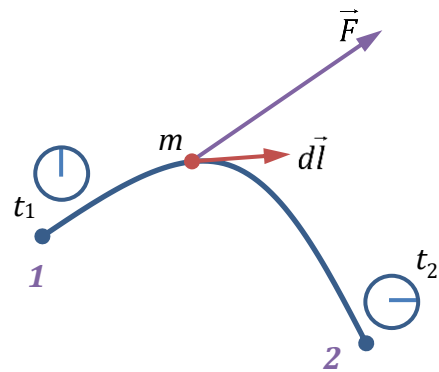


Рис. 6.4

где  $t_1$  и  $t_2$  — моменты времени, в которые материальная точка проходит соответственно положения 1 и 2.

По II закону Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$ , а ускорение  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , поэтому

$$A = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a}\vec{v}dt = m \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v}d\vec{v} = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k$$

(здесь  $v_1, v_2$  — модули скорости материальной точки соответственно в положениях **1** и **2**).

Теперь рассмотрим механическую систему. Для  $i$ -ой материальной точки, входящей в эту систему,

$$A_i = W_{к2i} - W_{к1i}.$$

Просуммируем это выражение по всем точкам:

$$A = \sum A_i = \sum W_{к2i} - \sum W_{к1i} = W_{к2} - W_{к1} = \Delta W_k, \text{ ч. т. д.}$$

В этом доказательстве мы не делали никаких различий между внешними и внутренними силами и их работами, поэтому подразумевается, что  $A = A^e + A^i$ .

#### 1.8.4. Потенциальная энергия материальной точки

**Поле** (в математике) — величина как функция радиуса-вектора (или координат). Задать силу как функцию радиуса-вектора материальной точки, воздействие на которую описывается этой силой, значит задать силовое поле.

Поле в физике — физический объект (см. [РАЗДЕЛ 0.1](#) и, более подробно, [3.1.1](#)).

Поле **потенциально** (сила потенциальна), если работа поля при перемещении материальной точки по любой замкнутой траектории равна нулю (иначе говоря, циркуляция силы по произвольному замкнутому контуру равна нулю):

$$A_{1 \rightarrow 1} = 0, \quad \oint_i \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

В этом случае работа поля по перемещению материальной точки не зависит от формы её траектории, а зависит только от начального и конечного положения точки.

#### Доказательство

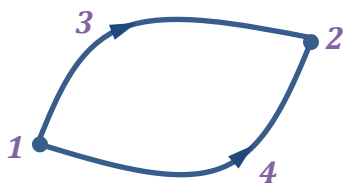


Рис. 6.5

Пусть в потенциальном поле материальная точка перемещается из положения **1** в положение **2** сначала по траектории **1-3-2**, а затем по траектории **1-4-2** (рис. 6.5). Работа по замкнутой траектории **1-3-2-4-1**

$$A_{13241} = 0$$

по определению потенциального поля. Но, согласно определению работы,

$$A_{13241} = A_{132} + A_{241} = A_{132} - A_{142} \Rightarrow A_{132} = A_{142}, \text{ ч. т. д.}$$

**Изменением потенциальной энергии материальной точки** при перемещении точки из положения **1** в положение **2** называется работа потенциального поля, совершаемая при этом перемещении, взятая с обратным знаком:

$$\Delta W_{n12} = -A_{12}^n.$$

**Потенциальная энергия материальной точки** — работа потенциального поля по перемещению материальной точки в данное положение из точки, где потенциальная энергия принята равной нулю, взятая с обратным знаком:

$$W_n = -A^n = - \int_{(W_n=0)}^1 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^{(W_n=0)} \vec{F} d\vec{l}.$$

Физический смысл имеет изменение потенциальной энергии. Сама же по себе потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. При ответе на вопрос, чему равна потенциальная энергия, нужно обязательно указывать, где выбрано начало её отсчёта (*нулевой уровень*).

### ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА РАБОТЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

#### 1. Работа силы сухого трения

Пусть материальная точка  $B$  скользит по шероховатой плоской поверхности по траектории  $l$ , соединяющей начальную и конечную точки  $1$  и  $2$  (рис. 6.6). Сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  постоянна по модулю ( $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр max}}$ , см. РАЗДЕЛ 1.4.5) и всегда направлена противоположно элементарному перемещению  $d\vec{l}$ , т. е.  $(\vec{F}_{\text{тр}}, d\vec{l}) = \pi$ . Элементарная работа

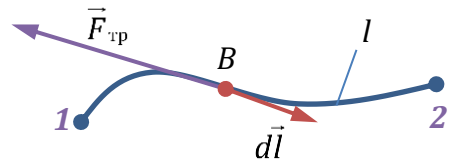


Рис. 6.6

$$dA = \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{l} = F_{\text{тр}} dl \cos \pi = -F_{\text{тр}} dl,$$

работа при перемещении из точки  $1$  в точку  $2$

$$A = -\int_l F_{\text{тр}} dl = -F_{\text{тр}} l.$$

Видно, что работа силы трения зависит от длины траектории, соединяющей начальную и конечную точки, следовательно, сила трения не является потенциальной.

#### 2. Работа силы упругости

Пусть пружина жёсткостью  $k$  растягивается из состояния с деформацией  $x_1$  до деформации  $x_2$  (рис. 6.7). В промежуточном положении  $x$  сила упругости  $\vec{F}_{\text{упр}} = -kx\vec{i}$ . Элементарная работа при увеличении деформации на  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i}$

$$dA = \vec{F}_{\text{упр}} d\vec{l} = -kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -kxdx;$$

полная работа при растягивании пружины от  $x_1$  до  $x_2$

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = -\frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = -\left( \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right).$$

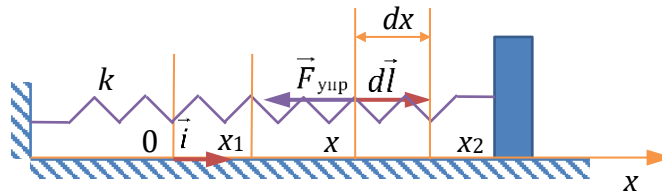


Рис. 6.7

Эта работа не зависит от того, каким образом пружина переходит от деформации  $x_1$  к деформации  $x_2$ , значит, сила упругости потенциальна. Изменение потенциальной энергии

$$\Delta W_{\text{п12}} = -A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Положим начало отсчёта потенциальной энергии в положении недеформированной пружины:  $W_n(0) = 0$ ; при этом потенциальная энергия деформированной пружины

$$W_n = \frac{kx^2}{2}.$$

### 3. Работа силы тяжести

Пусть материальная точка массы  $m$  перемещается из точки **1** в точку **2** по траектории  $l$  (рис. 6.8). Элементарная работа силы тяжести  $\vec{F}_T = m\vec{g}$  на малом перемещении  $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F}_T d\vec{l} = F_T dl \cos \alpha = -F_T dh = -mg dh$$

(знак «-» появляется из-за того, что изменение высоты отрицательно). Полная работа

$$A = -\int_{h_1}^{h_2} mg dh = -mg(h_2 - h_1),$$

где  $h_1$  — высота точки **1** над нулевым уровнем,  $h_2$  — высота точки **2**. Эта работа не зависит от формы траектории  $l$ , а определяется только высотой начального и конечного положений материальной точки массой  $m$ , следовательно, сила тяжести потенциальна. Аналогично, любое однородное поле будет потенциальным.

Изменение потенциальной энергии

$$\Delta W_{n12} = mg(h_2 - h_1).$$

Положим начало отсчёта потенциальной энергии на нулевом уровне:  $W_n = 0$  при  $h = 0$ , тогда потенциальная энергия тела массы  $m$  в однородном гравитационном поле (поле тяжести)

$$W_n = mgh^{29}.$$

### 4. Поле центральных сил

**Центральная сила** — сила, модуль которой зависит только от расстояния от точки, называемой **силовым центром (центром силы)**, направленная вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр силы с точкой приложения силы:

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Пусть материальная точка  $B$  движется в поле центральной силы  $\vec{F}$  (силовой центр — точка  $O$ ) от точки **1** к точке **2** по траектории  $l$  (рис. 6.9). Работа силы  $\vec{F}$

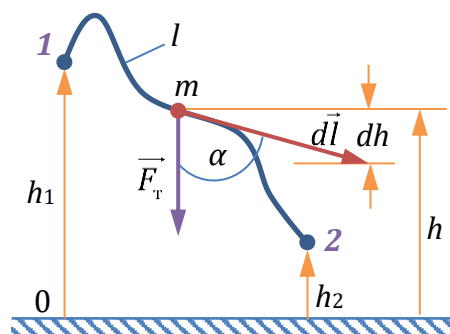


Рис. 6.8

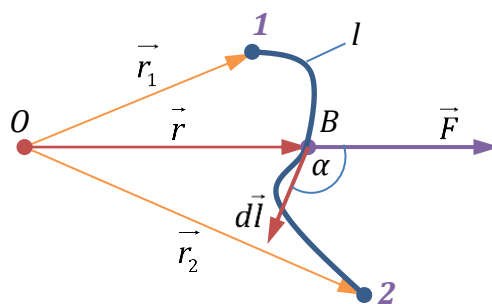


Рис. 6.9

<sup>29</sup> Это выражение не является определением потенциальной энергии, как ошибочно полагают многие студенты.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F dl \cos \alpha = \int_1^2 F_r dr.$$

Эта величина может зависеть только от  $r_1$  и  $r_2$ , поэтому центральное поле потенциально. Потенциальная энергия

$$W_{\text{п}} = \int_r^{(W_{\text{п}}=0)} F_r(r) dr. \quad (6.2)$$

### Частный случай

Гравитационное поле (см. [РАЗДЕЛ 1.4.5](#))

Пусть материальная точка массы  $m$  находится в гравитационном поле тела массы  $M$  на расстоянии  $r$  от его центра масс ([рис. 6.10](#)). По закону всемирного тяготения

$$F_r(r) = -\frac{GMm}{r^2},$$

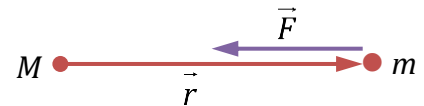


Рис. 6.10

$G$  — гравитационная постоянная. Положим начало отсчёта потенциальной энергии в бесконечно удалённой точке:  $W_{\text{п}}(\infty) = 0$ . Согласно [\(6.2\)](#),

$$W_{\text{п}} = -\int_{\infty}^r F_r dr = \int_{\infty}^r \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} \Big|_{\infty}^r = -\frac{GMm}{r}.$$

### 1.8.5. Связь силы и потенциальной энергии. Градиент

Из определения потенциальной энергии

$$dW_{\text{п}} = -dA = -\vec{F} d\vec{l}.$$

В декартовых координатах

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k};$$

$$dW_{\text{п}} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz.$$

Отсюда

$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z},$$

$\frac{\partial}{\partial x}$  — частная производная функции трёх переменных  $(x, y, z)$  по  $x$  и т. д.;

$$\vec{F} = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z} \vec{k}.$$

Это записывается как

$$\vec{F} = -\nabla W_{\text{п}} = -\text{grad} W_{\text{п}}.$$

$\nabla$  — оператор «набла» — оператор векторного дифференцирования, в декартовых координатах

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$



**Градиент** — произведение вектора  $\nabla$  на скалярную функцию — векторная функция скалярного аргумента; в декартовых координатах

$$\text{grad} W_{\text{п}} = \nabla W_{\text{п}} = \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z} \vec{k}. \quad (6.3)$$

Направление градиента совпадает с направлением наиболее быстрого возрастания скалярной функции. Из II закона Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a}, \\ \vec{F} = -\text{grad} W_{\text{п}} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \parallel (-\text{grad} W_{\text{п}})$$

(здесь  $\vec{a}$  — ускорение материальной точки,  $m$  — её масса). Материальная точка ускоряется в направлении, противоположном градиенту потенциальной энергии. В точках, где  $\text{grad} W_{\text{п}} = 0$ ,  $\vec{a} = 0$  и материальная точка находится в положении равновесия. *Устойчивое равновесие* имеет место в точках, соответствующих минимуму потенциальной энергии.

#### ПРИМЕР

Дана зависимость потенциальной энергии материальной точки в некотором поле от декартовых координат:  $W_{\text{п}} = axyz$ , где  $a$  — постоянная. Найти силу, с которой поле действует на материальную точку, как функцию координат.

Из (6.3) получим

$$\vec{F} = -\text{grad} W_{\text{п}} = -\left( \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z} \vec{k} \right) = -a(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}).$$

Видно, что  $\vec{F} = 0$  в любой точке на всех трёх осях декартовой системы координат — там имеет место равновесие (устойчивое при  $a > 0$  и неустойчивое при  $a < 0$ ).

#### 1.8.6. Потенциальная энергия механической системы

Если механическая система находится во внешних потенциальных полях и/или взаимодействие тел, входящих в эту систему, описывается потенциальными силами, то можно характеризовать состояние системы потенциальной энергией. **Потенциальная энергия механической системы** равна работе внешних и внутренних потенциальных сил при переходе системы из данной конфигурации в конфигурацию, где потенциальная энергия системы принята равной нулю (*конфигурация системы* — это совокупность координат тел (материальных точек), входящих в эту систему):

$$W_{\text{п}} = A_{\rightarrow(W_{\text{п}}=0)} = -A_{(W_{\text{п}}=0)\rightarrow}.$$

#### ПРИМЕР

Потенциальная энергия системы двух гравитирующих тел

Рассмотрим систему из двух тел массами  $M$  и  $m$ , взаимодействующих гравитационно. Расстояние между центрами масс этих тел равно  $r$  (рис. 6.10). Найти потенциальную энергию системы.

Единственная сила, которая здесь учитывается, гравитационная сила — внутренняя и **ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ**. Положим начало отсчёта потенциальной энергии в беско-

нечно удалённой точке:  $W_{\text{п}}(\infty) = 0$ . Найдём работу гравитационной силы при удалении тела массой  $m$  (или тела массой  $M$ ) в бесконечность. Она будет равна потенциальной энергии системы

$$W_{\text{п}} = A_{r \rightarrow \infty} = \int_r^{\infty} F_r(r) dr = - \int_r^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} \Big|_r^{\infty} = - \frac{GMm}{r},$$

здесь  $G$  — гравитационная постоянная.

## Лекция 7

### 1.8.7. Закон сохранения и изменения механической энергии

Рассмотрим механическую систему; тела, входящие в эту систему, претерпевают внешние и внутренние воздействия, описываемые потенциальными и непотенциальными силами, и конфигурация системы изменяется. Изменение кинетической энергии системы (см. [РАЗДЕЛ 1.8.3](#)) равно сумме работ внешних и внутренних сил:

$$\Delta W_k = A^{e\ n} + A^{e\ нп} + A^{i\ n} + A^{i\ нп},$$

где  $A^{e\ n}$  — сумма работ внешних потенциальных сил,  $A^{i\ нп}$  — сумма работ внутренних непотенциальных сил и т. п. Перенесём работу потенциальных сил в левую часть этого равенства:

$$\Delta W_k - \underbrace{A^{e\ n} - A^{i\ n}}_{\Delta W_{п}} = A^{e\ нп} + A^{i\ нп}. \quad (7.1)$$

В левой части равенства (7.1) стоит сумма изменений кинетической и потенциальной энергии системы. Введём величину

$$W = W_k + W_{п}$$

— **механическая энергия** системы — сумма кинетической и потенциальной энергии. Соответственно левая часть уравнения (7.1) равна изменению механической энергии системы. Т. е.

$$\Delta W = A^{e\ нп} + A^{i\ нп}$$

— **закон изменения механической энергии**: изменение механической энергии системы равно сумме работ внешних и внутренних непотенциальных сил.

**Закон сохранения механической энергии**: механическая энергия системы не изменяется с течением времени, если сумма работ внешних и внутренних непотенциальных сил равна нулю, а все внешние потенциальные силы *стационарны* (т. е. не зависят явным образом от времени).

**Консервативные силы** — потенциальные силы и непотенциальные силы, работа которых равна нулю.

**Диссипативные силы** — непотенциальные силы, работа которых меньше нуля.

При наличии взаимодействий, описываемых диссипативными силами, происходит **диссипация** энергии — переход энергии упорядоченных процессов (в данном случае — механической энергии) в энергию неупорядоченных процессов (внутреннюю энергию).

**Демонстрации:** 1) Маятник Максвелла  
2) «Мёртвая петля»

## 1.9. Удар

### 1.9.1. Абсолютно неупругий удар

**Абсолютно неупругий удар** — удар, после которого соударяющиеся тела движутся как единое целое.

При неупругом ударе импульс системы соударяющихся тел сохраняется, а механическая энергия — нет. Происходит диссипация энергии.

Рассмотрим *абсолютно неупругое центральное соударение* двух шаров. (*Центральное соударение* — соударение, перед которым центры шаров движутся по прямой, их соединяющей.) Массы шаров равны  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости до соударения — соответственно  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  (рис. 7.1). Найдём скорость  $\vec{u}$  шаров после удара.

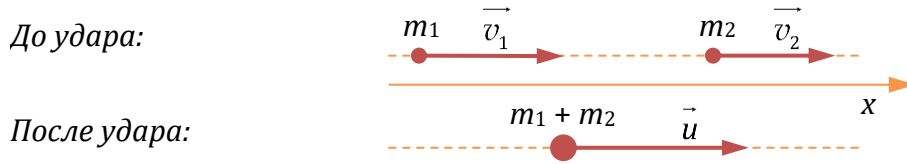


Рис. 7.1

Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

Спроецируем это равенство на ось  $x$  (вдоль направления движения шаров):

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x.$$

Отсюда получим

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

В этой формуле содержится информация о модуле и о направлении скоростей шаров;  $u = |u_x|$ .

Найдём долю  $\eta$  механической энергии, перешедшей во внутреннюю при ударе:

$$\eta = \frac{|\Delta W_k|}{W_{k1}} = \frac{W_{k1} - W_{k2}}{W_{k1}} = 1 - \frac{W_{k2}}{W_{k1}},$$

здесь  $W_{k1}$  — кинетическая энергия системы до удара,  $W_{k2}$  — после удара,  $\Delta W_k$  — изменение кинетической энергии при ударе;

$$W_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

$$W_{k2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{2(m_1 + m_2)},$$

$$\eta = 1 - \frac{(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}.$$

Если до соударения шары двигались в одну сторону, то  $v_{1x} = v_1$ ,  $v_{2x} = v_2$  и

$$\eta = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}.$$

Если же шары двигались в разные стороны, то

$$\eta = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}.$$

При  $v_2 = 0$

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

### 1.9.2. Абсолютно упругий удар

**Абсолютно упругий удар** — удар, при котором соударяющиеся тела испытывают упругую деформацию.

При абсолютно упругом ударе сохраняется и импульс, и механическая энергия системы соударяющихся тел.

Рассмотрим *абсолютно упругое центральное соударение* двух шаров. Массы шаров равны  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости до соударения — соответственно  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  (рис. 7.2).

Найдём скорости  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  шаров после удара.

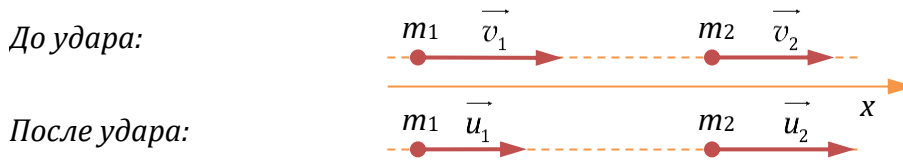


Рис. 7.2

Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (7.2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (7.3)$$

Спроецируем векторное равенство (7.2) на ось  $x$  (вдоль направления движения шаров), преобразуем уравнение (7.3) (подставим  $v_1^2 = v_{1x}^2$  и т. п.) и запишем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \\ m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 = m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2. \end{cases}$$

Решим эту систему самым быстрым способом:

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} - m_1 u_{1x} = m_2 u_{2x} - m_2 v_{2x}, \\ m_1 v_{1x}^2 - m_1 u_{1x}^2 = m_2 u_{2x}^2 - m_2 v_{2x}^2; \end{cases}$$

затем разделим нижнее уравнение на верхнее и исключим  $u_{2x}$ :

$$\frac{v_{1x}^2 - u_{1x}^2}{v_{1x} - u_{1x}} = \frac{v_{2x}^2 - u_{2x}^2}{v_{2x} - u_{2x}} \Rightarrow v_{1x} + u_{1x} = v_{2x} + u_{2x} \Rightarrow u_{2x} = v_{1x} - v_{2x} + u_{1x},$$

$$m_1 v_{1x} - m_1 u_{1x} = m_2 v_{1x} - m_2 v_{2x} + m_2 u_{1x} - m_2 v_{2x},$$

$$m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + 2m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_{1x},$$

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \quad (7.4)$$

### Частные случаи

#### 1. Упругое соударение шаров одинаковой массы

При  $m_1 = m_2 = m$  из (7.4) получим

$$u_{1x} = v_{2x}, \quad u_{2x} = v_{1x}.$$

Соударяющиеся тела обмениваются скоростями.

#### 2. Удар шара об упругую плиту

Масса плиты намного больше массы шара ( $m_2 \gg m_1$ ); в лабораторной системе отсчёта плита покоится ( $v_2 = 0$ ). Из (7.4) получим

$$u_{1x} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_{1x}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = -v_{1x} \quad (\text{рис. 7.3}).$$

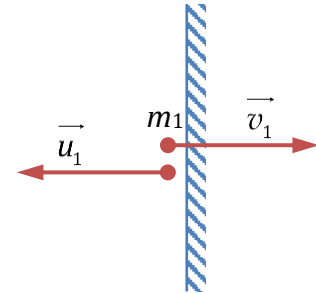


Рис. 7.3

- Демонстрации:**
- 1) Удар двух неупругих шаров
  - 2) Упругий удар двух и многих шаров
  - 3) Упругий удар шара о плиту

### 1.10. Повторение: Поступательное и вращательное движение

Цель данного параграфа — обобщение материала, касающегося механики точки (поступательного движения твёрдого тела) и вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси, который отрабатывается на практических занятиях в I семестре.

#### 1.10.1. Сравнение физических величин и законов поступательного и вращательного движения

Таблица 7.1

Величина / закон	Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение	Перемещение $\vec{\Delta r}$	Угловое перемещение $\Delta \vec{\varphi}$
Скорость	Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
	$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$ $\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$	

Таблица 7.1 (продолжение)

Величина / закон	Поступательное движение	Вращательное движение
Закон движения	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\varphi = \varphi(t)$
Частные случаи:		
Равномерное движение	$\vec{v} = \text{const}$ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$	$\vec{\omega} = \text{const}$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_z t$
Равноускоренное движение	$\vec{a} = \text{const}$ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$	$\vec{\varepsilon} = \text{const}$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$
Мера инертности	Масса $m$	Момент инерции $I$
Мера взаимодействия	Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Основной закон динамики	Теорема о движении центра масс $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Мера инертности и движения	Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Основной закон динамики в дифференциальной форме	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
Условие сохранения	Условие сохранения импульса $\vec{P} = \text{const}$ при $\vec{F} = 0$	Условие сохранения момента импульса $\vec{L} = \text{const}$ при $\vec{M} = 0$
Элементарная работа	$dA = \vec{F}d\vec{r}$	$dA = \vec{M}d\vec{\varphi}$
Кинетическая энергия	$W_k = \frac{mv^2}{2}$	$W_k = \frac{I\omega^2}{2}$

## 1.10.2. Методы решения задач по механике

## Методы решения задач

## через основной закон динамики

Найти:  $t, \vec{a}, \vec{F}, \dots$ 

Важно знать закон изменения искомой величины со временем.

## через законы сохранения

Найти:  $v, \omega, S, \dots$ 

Важно знать характеристики начального и конечного состояния системы, процесс перехода от начального к конечному состоянию не имеет значения.

## Лекция 8

### 1.11. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея

**Принцип относительности Галилея (принцип эквивалентности):** все инерциальные системы отсчёта эквивалентны. Никакими опытами, поставленными внутри ИСО, нельзя определить, движется ли она или покоится.

#### 1.11.1. Преобразования Галилея

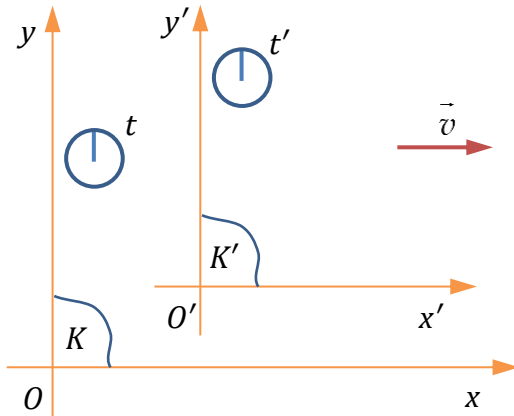


Рис. 8.1

Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта  $K$  и  $K'$ . Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 8.1).

Зная координаты и время в системе отсчёта  $K$ , найдём координаты и время в системе  $K'$  и наоборот, т. е. найдём связь между  $x, y, z, t$  и  $x', y', z', t'$  (табл. 8.1).

В классической механике время во всех системах отсчёта течёт одинаково.

Таблица 8.1

Преобразования Галилея

$K' \rightarrow K$	$K \rightarrow K'$
$x = x' + vt'$	$x' = x - vt$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = t'$	$t' = t$

#### 1.11.2. Следствия из преобразований Галилея

**Инвариант преобразований** — физическая величина, которая не изменяется при переходе из одной системы отсчёта к другой, т. е. величина, значения которой одинаковы во всех системах отсчёта.

##### 1. Абсолютность одновременности

События, одновременные в одной системе отсчёта, одновременны и в другой:

$$t'_1 = t'_2 \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Это следует из того, что время является инвариантом преобразований Галилея.

##### 2. Инвариантность длины отрезка

Пусть отрезок **1-2** покоится относительно системы отсчёта  $K'$  (рис. 8.2). Его длина в этой системе отсчёта равна  $l'$ . Выразим  $l'$  через координаты концов отрезка в системе  $K$ :



$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}.$$

Свяжем координаты концов стержня в системе отсчёта  $K'$  с координатами в системе отсчёта  $K$  через преобразования Галилея:

$$\begin{aligned} l' &= \sqrt{(x_2 - vt - x_1 + vt)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l \end{aligned}$$

— длина отрезка в системе отсчёта  $K$  (измерение координат концов отрезка происходит в один и тот же момент времени  $t$ ). Это означает, что длина отрезка — инвариант преобразований Галилея:

$$l = l' = \text{inv}.$$

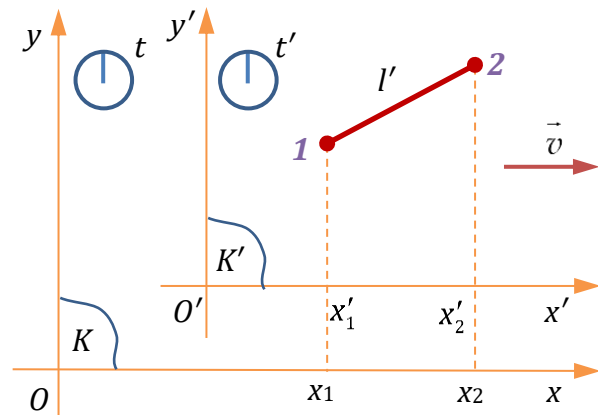


Рис. 8.2

### 3. Инвариантность интервала времени

Пусть интервал времени между двумя событиями **1** и **2** в системе отсчёта  $K'$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Интервал времени между теми же событиями в системе отсчёта  $K$

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Так как  $t_1 = t'_1$  и  $t_2 = t'_2$ ,

$$\Delta t = \Delta t' = \text{inv}.$$

### 4. Классический закон сложения скоростей

Пусть материальная точка движется со скоростью  $\vec{u}'$  относительно системы отсчёта  $K'$ . Тогда её скорость в системе отсчёта  $K$

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}.$$

#### Доказательство

По определению скорости

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}.$$

Выразим  $u_x$  через координату и время в системе отсчёта  $K'$ :

$$u_x = \frac{dx' + v dt'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + v = u'_{x'} + v.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{dy}{dt}, \quad u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} \Rightarrow u_y = u'_{y'}; \\ u_z &= u'_{z'}. \end{aligned}$$

### 5. Инвариантность ускорения

По определению, ускорение материальной точки в системе отсчёта  $K'$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt'}$$

в системе отсчёта  $K$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

(здесь мы используем те же обозначения, что в [ПРЕДЫДУЩЕМ ПОДРАЗДЕЛЕ](#)).

Воспользуемся классическим законом сложения скоростей:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{a}' = \frac{d(\vec{u} - \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a};$$

$$\vec{a} = \vec{a}' = \text{inv}.$$

## 6. Инвариантность массы и силы

Постулируется, что масса и сила — инварианты преобразований Галилея:

$$m = m' = \text{inv}, \quad \vec{F} = \vec{F}' = \text{inv}.$$

II закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F}' = m'\vec{a}' \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

## 1.12. Специальная теория относительности

### 1.12.1. 4-пространство

Время относительно, как и пространство. Введём **4-пространство** — линейное риманово (неевклидово) пространство координат и времени.

**4-радиус-вектор:**

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

здесь  $c$  — константа, имеющая размерность скорости;  $i$  — мнимая единица. Модуль 4-радиуса-вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2} = \text{inv}$$

(доказательство см. [«ИНВАРИАНТНОСТЬ ИНТЕРВАЛА»](#)).

**Мировая точка** — точка в 4-пространстве.

**Мировая линия** — кривая в 4-пространстве.

### ПРИМЕР

Материальная точка покоится в 3-пространстве. Мировая линия — траектория этой материальной точки в 4-пространстве (вернее, двумерная её проекция) — изображена на [рис. 8.3](#).



Рис. 8.3

### 1.12.2. Преобразования Лоренца

II закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея, а уравнения Максвелла (см. 3.1.6) — нет. Надо получить другие преобразования, опираясь на свойства симметрии пространства-времени<sup>30</sup> (см. 1.1.2).

Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта  $K$  и  $K'$ . Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 8.2). В момент совмещения начал координат часы синхронизированы:  $x = x' = y = y' = z = z', t = t'$ .

Искомые преобразования должны иметь вид

$$\begin{cases} x' = f(x, t, v), \\ t' = g(x, t, v), \end{cases}$$

где  $f$  и  $g$  — функции, которые нужно найти.

При сдвиге координаты в системе отсчёта  $K$  на  $\Delta x$  и времени на  $\Delta t$  соответствующие сдвиги в системе  $K'$

$$\begin{cases} \Delta x' = f(x + \Delta x, t + \Delta t, v) - f(x, t, v), \\ \Delta t' = g(x + \Delta x, t + \Delta t, v) - g(x, t, v). \end{cases}$$

Это возможно только тогда, когда  $f$  и  $g$  — линейные функции  $x$  и  $t$ :

$$\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 vt, \\ t' = \frac{a_3}{v} x + a_4 t. \end{cases}$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  безразмерны. Их можно найти с помощью элементарных преобразований. В результате получаются преобразования Лоренца, приведённые в [ТАБЛИЦЕ 8.2](#).

<sup>30</sup> Полностью данный вывод приведён в [ПРИЛОЖЕНИИ](#). Делать его на лекции не рекомендуется из-за громоздкости элементарных алгебраических преобразований.

## Преобразования Лоренца

$K' \rightarrow K$	$K \rightarrow K'$
$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Здесь  $c = \text{const}$ . Видно, что  $v < c$ , т. е.  $c$  — предельная скорость. Из опыта известно, что  $c$  — скорость света в вакууме.

При  $v \ll c$  преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

Подчеркнём, что преобразования Лоренца выводятся из свойств симметрии пространства-времени и не требуют других допущений. Однако, во многих учебниках (например, [1]) преобразования Лоренца выводятся другим способом — через постулаты Эйнштейна.

Постулаты Эйнштейна

1. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ
2. Скорость распространения взаимодействий инвариантна относительно преобразований.

## 1.12.3. Следствия из преобразований Лоренца

1. Инвариантность интервала

**Интервал**  $\Delta S_{12}$  между событиями 1 и 2:

$$\Delta S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

Интервал — инвариант преобразований Лоренца:

$$\Delta S_{12} = \text{inv}.$$

**Доказательство**

Докажем, что малый интервал — дифференциал интервала  $dS_{12}$  — инвариант преобразований Лоренца:

$$dS_{12}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad dS_{12}'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Выразим  $dS_{12}'^2$  через время и координаты в системе отсчёта  $K$ :

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz;$$

$$dS_{12}'^2 = \frac{c^2 dt^2 + \frac{v^2}{c^2} dx^2 - 2v dx dt - dx^2 - v^2 dt^2 + 2v dx dt}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2 =$$

$$= \frac{(c^2 - v^2) dt^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dS_{12}^2,$$

ч. т. д.

## 2. Сокращение длины движущегося отрезка (лоренцево сокращение)

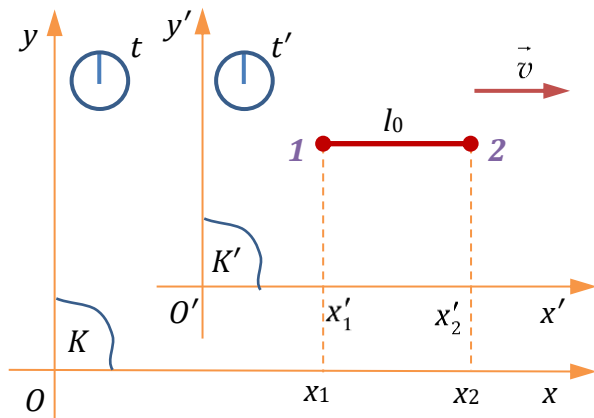


Рис. 8.4

Пусть отрезок **1-2** покоится относительно системы отсчёта  $K'$ ; для простоты расположим его вдоль оси  $x'$  (рис. 8.4). Длина отрезка в системе отсчёта, в которой он покоится, — **собственная длина отрезка**

$$l_0 = l'.$$

Выразим длину отрезка в системах отсчёта  $K'$  и  $K$  через координаты его концов:

$$\begin{cases} l_0 = x'_2 - x'_1, \\ l = x_2 - x_1. \end{cases}$$

Выразим  $l_0$  через координаты и время в системе отсчёта  $K$ :

$$l_0 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

время  $t$  в обоих слагаемых этой формулы одно и то же, так как измерение координат  $x_1$  и  $x_2$  проводится одновременно. Получается, что

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$l < l_0$  — длина движущегося отрезка меньше длины покоящегося.

## 3. Замедление хода движущихся часов

Имеются часы с пружинным (или другим) маятником, точка подвеса которого покоится относительно системы отсчёта  $K'$  (рис. 8.5). Период колебаний маятника в системе отсчёта, относительно которой точка подвеса маятника покоится ( $x'_1 = x'_2$ ), — **период собственных колебаний**

$$T_0 = T',$$

$T' = t'_2 - t'_1$  [события **1** и **2** — два последовательных прохождения маятником положения равновесия (или любой другой фазы колебаний)]. В системе отсчёта  $K$  события **1** и **2** происходят в точках с разными координатами  $x_1$  и  $x_2$ , период колебаний маятника

$$T = t_2 - t_1.$$

Выразим эту величину через координаты и время в системе отсчёта  $K'$ :

$$T = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$T > T_0$  — ход движущихся часов замедляется.

#### 4. Относительность одновременности

Если события **1** и **2** в системе отсчёта  $K'$  происходят в одно и то же время ( $t'_2 = t'_1$ ), но в разных местах ( $x'_2 \neq x'_1$ ), то  $t_2 \neq t_1$  — эти события не одновременны в системе отсчёта  $K$ . Это следует из преобразований Лоренца.

При  $t'_2 > t'_1$  и  $x'_2 < x'_1$  возможно  $t_2 < t_1$ . Однако, если между событиями **1** и **2** имеется причинно-следственная связь, то она не нарушается и  $t_2 > t_1$ .

#### 5. Релятивистский закон сложения скоростей

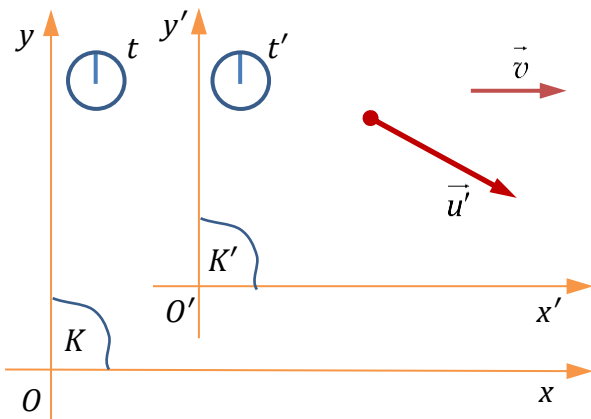


Рис. 8.6

Пусть материальная точка  $M$  движется со скоростью  $\vec{u}'$  относительно системы отсчёта  $K'$  (рис. 8.6). Найдём её скорость в системе отсчёта  $K$ .

По определению, проекции скорости в системе отсчёта  $K'$

$$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'};$$

в системе отсчёта  $K$

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Выразим эти проекции через координаты и скорости в системе отсчёта  $K'$ :

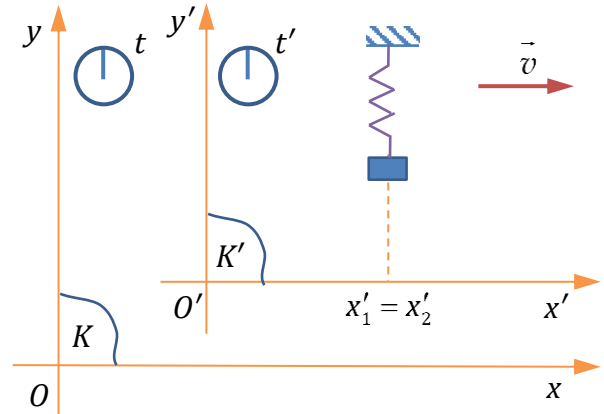


Рис. 8.5

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$u_x = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_y = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Итак,

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Ускорение не является инвариантом преобразований Лоренца. Формулы для преобразования компонент ускорений можно получить аналогичным образом — исходя из определения и преобразований Лоренца:

$$a_x = \frac{du_x}{dt}, \quad a'_x = \frac{du'_x}{dt'} \Rightarrow \dots$$

## Лекция 9

## 1.13. Релятивистская динамика

## 1.13.1. Релятивистский импульс

Рассмотрим замкнутую механическую систему — два груза одинаковой массы  $m_0$ , соединённых пружиной (рис. 9.1). В системе отсчёта  $K'$  центр масс данной механической системы покоится. В начальном состоянии пружина сжата, затем она разжимается и грузы движутся со скоростями  $\vec{u}'_1 = \vec{u}'$  и  $\vec{u}'_2 = -\vec{u}'$ .

Должен выполняться закон сохранения импульса: импульс данной замкнутой механической системы должен сохраняться в любой инерциальной системе отсчёта.

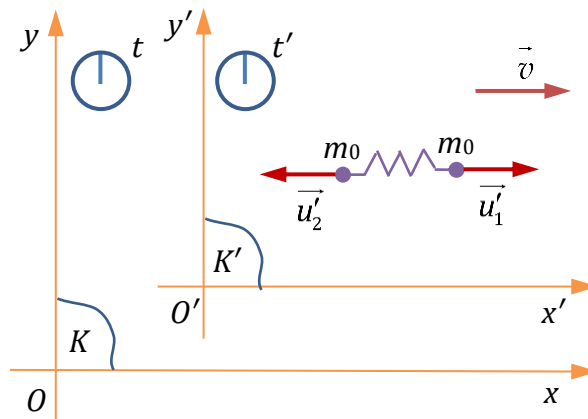


Рис. 9.1

Определим импульс материальной точки, как в классической механике:

$$\vec{p} = m_0 \vec{u}.$$

Используя РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ, получим в системе отсчёта  $K$ : проекция начального импульса системы на ось  $x$

$$P_{1x} = 2m_0 v,$$

проекция конечного импульса

$$P_{2x} = m_0 \frac{v + u'}{1 + \frac{v}{c^2} u'} + m_0 \frac{v - u'}{1 - \frac{v}{c^2} u'}.$$

Видно, что  $P_{1x} \neq P_{2x}$ . Получается, что в системе отсчёта  $K$  закон сохранения не выполняется, чего не может быть.

Подберём такое выражение для импульса, чтобы  $p'_y = p_y$ . (В классической механике

$p_y = m_0 \frac{dy}{dt}$ ; так как  $dy = dy'$ , а  $dt \neq dt'$ , при таком определении  $p'_y \neq p_y$ .) Возьмём в качестве элементарного промежутка времени собственное время  $d\tau = dt'$ . Тогда

$$p'_{y'} = m_0 \frac{dy'}{d\tau} = m_0 \frac{dy}{d\tau} = p_y.$$

Но  $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ , поэтому



$$p_y = \frac{m_0 dy}{d\tau} = \frac{m_0 dy}{dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

аналогично

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

в векторной форме

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Запишем это определение в виде, аналогичном формуле классической механики:

$$\vec{p} = m \vec{u},$$

здесь  $m$  — *релятивистская масса*:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

### 1.13.2. Релятивистское уравнение динамики материальной точки

Если материальная точка изолирована, то её импульс  $\vec{p} = m\vec{u} = \text{const}$ . Если на точку действуют другие объекты, то мера взаимодействия — сила  $\vec{F}$ . Запишем уравнение динамики:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$$

или, подставляя выражение для релятивистского импульса,

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \vec{F}$$

— *релятивистское уравнение динамики материальной точки*.

Так как  $\vec{F} = f(u, t)$  и ни время, ни скорость не являются инвариантами преобразований Лоренца, то и сила не является релятивистским инвариантом. Поэтому полученное уравнение динамики малополезно для решения задач.

### 1.13.3. Энергия в релятивистской механике

Пусть тело (материальная точка) движется под воздействием других объектов, которое описывается силой  $\vec{F}$ , направленной параллельно перемещению  $\Delta \vec{l}$  (рис. 9.2). Тело разгоняется от начальной скорости  $\vec{u}_0 = 0$  до скорости  $\vec{u}$ .

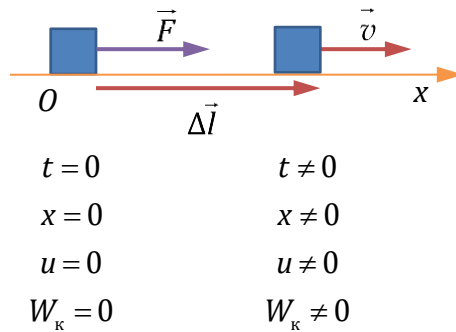


Рис. 9.2

По теореме об изменении кинетической энергии работа силы  $\vec{F}$

$$A = \Delta W_{\kappa} = W_{\kappa}.$$

Найдём работу и, соответственно, кинетическую энергию тела. Элементарная работа на малом перемещении  $d\vec{l}$  ( $dl = dx$ )

$$\delta A = \vec{F}d\vec{l} = Fdx \cos 0 = Fdx;$$

так как из релятивистского уравнения динамики  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , релятивистский импульс  $\vec{p} = m\vec{u}$

$$\delta A = \frac{d(mu)}{dt} dx = u d(mu).$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\begin{aligned} A = W_{\kappa} &= \int_0^u u d(mu) = u \cdot mu - \int_0^u m u du = mu^2 + \frac{c^2}{2} \int_0^u \frac{m_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (-2u) du = \\ &= mu^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1/2} \Big|_0^u = mu^2 + m_0 \frac{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \\ &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2, \\ &\boxed{W_{\kappa} = mc^2 - m_0 c^2}. \end{aligned}$$

При  $u \ll c$

$$W_{\kappa} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{u^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 u^2}{2}$$

— результат классической механики.

**Полная энергия**

$$W = mc^2$$

Представим

$$W = mc^2 = W_k + m_0c^2.$$

При  $u = 0$   $W = W_0 = m_0c^2$ ;

$$W_0 = m_0c^2$$

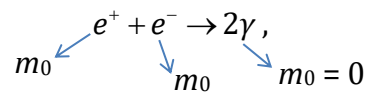
— *энергия покоя*.

Энергия покоя может переходить в другие виды энергии.

### ПРИМЕРЫ

#### 1) Реакция аннигиляции

При взаимодействии частицы и её античастицы они *аннигилируют* (взаимно уничтожаются) с образованием фотонов. Например, реакция электрона и позитрона



$\gamma$  — фотон рентгеновского излучения. Массы покоя электрона и позитрона одинаковы ( $m_0$ ), а масса покоя фотона равна нулю. Энергия покоя электрона и позитрона переходит в энергию фотона (энергию электромагнитного поля).

#### 2) Дефект масс

Атомные ядра состоят из *нуклонов* — протонов и нейтронов (см. [РАЗДЕЛ 7.1.1](#)). Массы покоя протона и нейтрона в свободном состоянии соответственно равны  $m_p$  и  $m_n$ ; масса покоя ядра —  $m_{\text{я}}$ .

Всегда масса ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов:

$$m_{\text{я}} < Zm_p + (A - Z)m_n,$$

здесь  $Z$  — число протонов в ядре — заряд ядра,  $A$  — массовое число,  $(A - Z)$  — число нейтронов в ядре. Разность

$$\Delta m_0 = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} > 0,$$

— *дефект масс*.

Рассмотрим *реакцию синтеза атомного ядра* (см. [РАЗДЕЛ 7.3.5](#)) — реакцию получения ядра из отдельных нуклонов. Изменение энергии системы нуклонов

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta(m_0c^2) = \Delta W_k + c^2\Delta m_0.$$

В замкнутой системе  $\Delta W = 0$ . Поэтому

$$\Delta W_k = -c^2\Delta m_0 \Rightarrow \Delta m_0 = -\frac{\Delta W_k}{c^2}.$$

#### 1.13.4. Вектор энергии-импульса

В 4-пространстве оперируют физическими величинами — 4-векторами.

#### 4-вектор энергии-импульса

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} i \frac{W}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

Найдём модуль вектора энергии-импульса:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ \vec{p} &= \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p}{W} = \frac{u}{c^2}, \frac{u}{c} = \frac{cp}{W};$$

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{c^2 p^2}{W^2}}} \Rightarrow \boxed{W^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4 = \text{inv}}$$

— модуль вектора энергии-импульса является релятивистским инвариантом.

## 2. Молекулярная физика и термодинамика

### 2.1. Предмет термодинамики и статистической физики. Молекулярно-кинетическая теория. Уравнение состояния

#### 2.1.1. Постулаты молекулярно-кинетической теории (МКТ)

1. Все тела состоят из мельчайших частиц (*молекул*).
2. Эти частицы находятся в непрерывном хаотическом (*тепловом*) движении и взаимодействии.

#### ПРИМЕРЫ

##### 1. Броуновское движение

**Броуновское движение** — беспорядочное движение частиц, взвешенных в жидкости или газе. Под микроскопом видно, что частицы дрожат.

Это явление объясняется тем, что взвешенная частица (большое пятно неправильной формы на [рис. 9.3](#)) испытывает беспорядочные столкновения с молекулами жидкости или газа (изображены на [рис. 9.3](#) мелкими кружками), которые в микроскоп не видны. В результате этих столкновений взвешенной частице передаётся импульс  $\Delta\vec{p}$ ; эта величина изменяется непрерывно и хаотически — частица дрожит.

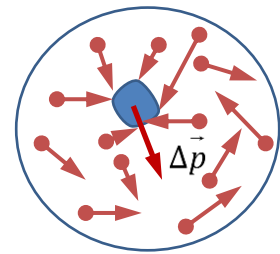


Рис. 9.3

**Демонстрация:** Прибор Эйхенвальда

##### 2. Явления переноса

Кинетические явления — *диффузия, теплопроводность и внутреннее трение* — объясняются только из молекулярно-кинетических представлений (см. [РАЗДЕЛ 2.9.3](#)).

**Взаимодействие молекул** носит характер притяжения и отталкивания, в зависимости от расстояния между молекулами. График зависимости потенциальной энергии  $W_p$  взаимодействия двух молекул от расстояния  $r$  между их центрами представлен на [рис. 9.4](#). «Радиус молекулы»  $r_0 \approx 10^{-10}$  м.

**Демонстрация:** Сцепление свинцовых цилиндров

**Количество вещества** — мера числа частиц;

$$[v] = \text{моль}.$$

В 1 моле содержится  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  (моль<sup>-1</sup>) частиц — **число Авогадро**;

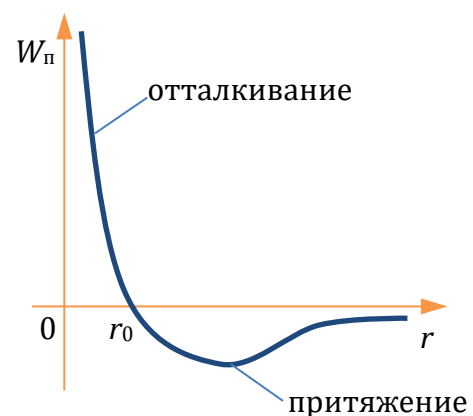


Рис. 9.4

$$v = \frac{N}{N_A},$$

где  $N$  — число молекул.

**Молярная масса** — масса 1 моля вещества;

$$[\mu] = \frac{\text{КГ}}{\text{МОЛЬ}};$$

$$\mu = \frac{m}{\nu},$$

где  $m$  — масса вещества. Молярную массу легко вычислить по таблице Менделеева, зная химическую формулу вещества:

$$\mu = 10^{-3} \frac{m_0}{m_1} \text{ (кг);}$$

↙ масса молекулы  
↘ а. е. м.

1 атомная единица массы (а. е. м.)  $m_1 = 1,6606 \cdot 10^{-27}$  кг.

### 2.1.2. Микропараметры и макропараметры. Статистический и термодинамический методы исследования макросистем

**Термодинамическая система (макросистема)** — совокупность (коллектив) большого числа частиц.

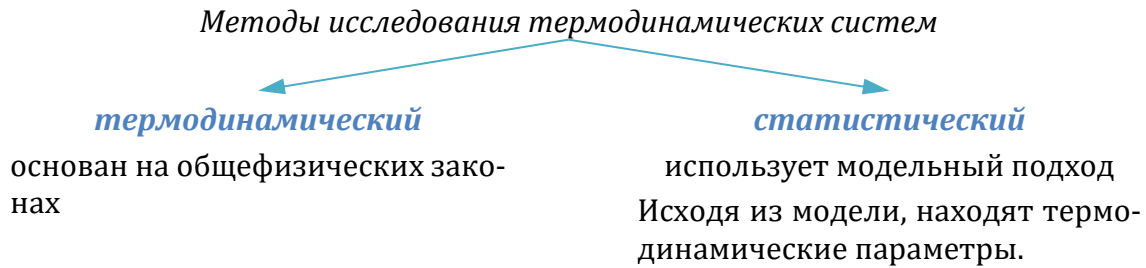
Пусть термодинамическая система состоит из  $N$  частиц. **Микросостояние** системы характеризуется  $6N$  **микропараметров** — 3 координатами и 3 проекциями скорости каждой частицы  $(x_i, y_i, z_i; v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$ <sup>31</sup>. Эти параметры можно найти, решив систему из  $N$  дифференциальных уравнений движения материальной точки, задав начальные условия —  $6N$  параметров. Это практически невозможно из-за большого числа параметров. Более того, термодинамическая система является **стохастической**, т. е. её движение неустойчиво по отношению к изменению начальных условий. Поэтому разработаны методы описания состояния системы без решения уравнений динамики.

**Термодинамические параметры** — параметры, описывающие термодинамическую систему в целом:  $p, T, S, V, U$ <sup>32</sup> и т. д. (Так, **температура**  $T$  — это мера нагретости тела.)

**Микросостояние** системы характеризуется совокупностью термодинамических параметров.

<sup>31</sup> Число микропараметров, исчерпывающе описывающих микросостояние термодинамической системы, равно  $6N$ , если молекула считается материальной точкой. Если же молекула имеет структуру, то число этих микропараметров больше (см. ТАБЛ. 10.1). Можно вводить и другие микропараметры.

<sup>32</sup> Каждое из этих обозначений разъяснено далее в тексте данной главы.



### 2.1.3. Термодинамический процесс. Уравнение состояния

**Термодинамический процесс** — изменение макросостояния термодинамической системы.

**Равновесное состояние** (состояние **термодинамического равновесия**) — макросостояние, которое сохраняется сколь угодно долго при неизменных внешних условиях. Имеет смысл вводить термодинамические параметры только для равновесных состояний.

**Равновесный процесс** — термодинамический процесс, при котором макросистема проходит через ряд последовательных равновесных состояний. Равновесный процесс должен быть **квазистатическим** — протекать бесконечно медленно.

**Уравнение состояния** — уравнение, связывающее термодинамические параметры системы (как правило, давление  $p$ , объём  $V$  и температуру  $T$ ):

$$f(p, V, T) = \text{const}.$$

Такое уравнение можно аналитически точно записать только для одной термодинамической системы — *идеального газа*.

## 2.2. Идеальный газ

### 2.2.1. Модель идеального газа

Идеальный газ — коллектив огромного числа молекул:

1. Среднее расстояние между молекулами намного больше их линейных размеров<sup>33</sup> и собственным объёмом молекул можно пренебречь по сравнению с объёмом, занимаемым газом.
2. Молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении.
3. Молекулы взаимодействуют между собой и со стенками сосуда посредством абсолютно упругого удара. Между соударениями молекулы не взаимодействуют.

На [рис. 9.5](#) показано, как модель идеального газа аппроксимирует экспериментальную зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух молекул от расстояния между их центрами ([рис. 9.4](#)).

<sup>33</sup> Хотя размеры молекул малы, молекулы сталкиваются друг с другом. Можно показать это путём численной оценки.

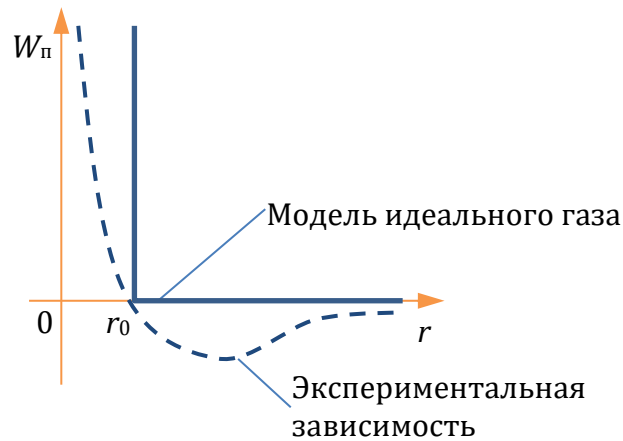


Рис. 9.5

## 2.2.2. Уравнение состояния идеального газа. Газовые законы

Уравнение состояния идеального газа:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}.$$

Это уравнение является обобщением экспериментальных фактов.

**Частные случаи (газовые законы):**

1.  $T = \text{const}$ :  $pV = \text{const}$  — **закон Бойля-Мариотта**
2.  $p = \text{const}$ :  $\frac{V}{T} = \text{const}$  — **закон Гей-Люссака**
3.  $V = \text{const}$ :  $\frac{p}{T} = \text{const}$  — **закон Шарля**

Уравнение состояния идеального газа можно представить в виде

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

— **уравнение Менделеева-Клапейрона**,  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — **универсальная газовая постоянная**.

Преобразуем уравнение Менделеева-Клапейрона, подставив  $\nu = \frac{m}{\mu}$ :

$$pV = \nu RT = \frac{N}{N_A} RT = NkT, \quad (9.1)$$

$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  — **постоянная Больцмана**.

**Концентрация молекул** — характеристика макросистемы, равная числу частиц в единичном объёме:

$$n = \frac{N}{V};$$

$$[n] = \text{м}^{-3}.$$



Из (9.1) получим

$$p = \frac{N}{V} kT,$$

$$\boxed{p = nkT}. \quad (9.2)$$

**Закон Дальтона:** давление смеси газов равно сумме парциальных давлений компонент смеси:

$$\boxed{p = \sum p_i}.$$

**Доказательство**

Запишем уравнение (9.2) для  $i$ -ой компоненты смеси:

$$p_i = n_i kT. \quad (9.3)$$

Общая же концентрация смеси

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\sum N_i}{V} = \sum \frac{N_i}{V} = \sum n_i,$$

где  $N_i$  — число молекул  $i$ -ой компоненты. Теперь просуммируем выражения (9.3) по всем компонентам смеси:

$$\sum p_i = \sum n_i kT = kT \sum n_i = nkT,$$

что, согласно (9.1), равно давлению  $p$  смеси.

Хотя идеальный газ — это модель, газовые законы хорошо работают в условиях, близких к нормальным.

**Нормальные условия:**  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па;  $T_0 = 273$  К.

**Демонстрация:** Магдебургские полушария

## Лекция 10

### 2.2.3. Основное уравнение МКТ

Рассмотрим равновесный идеальный газ, состоящий из одинаковых молекул массой  $m_0$ . Все молекулы имеют разные по модулю и направлению скорости. Давление газа обусловлено ударами молекул о стенку сосуда.

#### 1. Удар одной молекулы

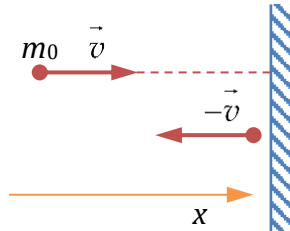


Рис. 10.1

Пусть молекула массой  $m_0$  движется перпендикулярно стенке со скоростью  $\vec{v}$  и испытывает абсолютно упругий удар (рис. 10.1). После удара молекула отскакивает со скоростью  $-\vec{v}$  (см. «УДАР ШАРА ОБ УПРУГУЮ ПЛИТУ»). По II закону Ньютона изменение импульса молекулы при ударе

$$\Delta(m_0 \vec{v}) = \vec{f}^* \tau,$$

где  $\vec{f}^*$  — сила, с которой стенка действует на молекулу,  $\tau$  — длительность удара. Спроецируем это равенство на ось  $x$ :

$$-m_0 v - m_0 v = -f^* \tau.$$

По III закону Ньютона сила, с которой молекула действует на стенку,

$$\vec{f} = -\vec{f}^* \Rightarrow f = f^*,$$

$$f = \frac{2m_0 v}{\tau}.$$

#### 2. Число ударов о стенку за время $\Delta t \gg \tau$

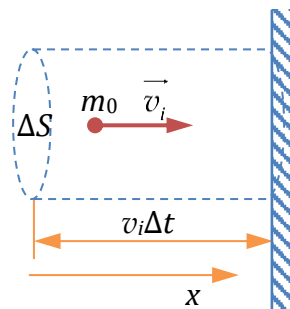


Рис. 10.2

Рассмотрим  $i$ -ю скоростную группу молекул, т. е. молекулы со скоростями  $v = (v_i, v_i \pm \Delta v)$ . Выделим прямой цилиндр, одно из оснований которого площадью  $\Delta S$  прилегает к стенке сосуда, а высота равна  $v_i \Delta t$  (рис. 10.2). Число молекул внутри этого цилиндра, которые долетят до стенки за время  $\Delta t$ ,

$$\Delta N_i = \frac{n_i}{6} v_i \Delta t \Delta S,$$

где  $n_i$  — концентрация молекул  $i$ -ой скоростной группы; коэффициент  $1/6$  обусловлен тем, что из всех молекул  $1/3$  движется вдоль оси  $x$ , из них  $1/2$  движется в направлении стенки.

#### 3. Импульс, полученный стенкой от молекул $i$ -ой скоростной группы за время $\Delta t$

Средний импульс, переданный стенке молекулами  $i$ -ой скоростной группы, равен сумме импульсов ударов отдельных молекул этой группы (все выражения далее записываем в проекции на ось  $x$ ):

$$\langle F_i \Delta t \rangle = \sum f_i \tau = \sum 2m_0 v_i = \Delta N_i \cdot 2m_0 v_i = \frac{n_i}{6} v_i \Delta t \Delta S \cdot 2m_0 v_i = \frac{m_0}{3} n_i v_i^2 \Delta t \Delta S,$$

здесь  $F_i$  — модуль суммарной силы, с которой молекулы  $i$ -ой скоростной группы действуют на стенку (участок площадью  $\Delta S$ ). Давление молекул  $i$ -ой скоростной группы

$$p_i = \frac{\langle F_i \rangle}{\Delta S} = \frac{m_0 n_i v_i^2}{3}.$$

4. Учёт давления всех скоростных групп молекул

По закону Дальтона

$$\begin{aligned} p &= \sum p_i = \frac{m_0}{3} \sum n_i v_i^2 = \frac{m_0}{3} \sum n_i v_i^2 \frac{n}{n}; \\ n &= \sum n_i; \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + \dots + n_i v_i^2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots + n_i + \dots} = \frac{\sum n_i v_i^2}{n}; \\ p &= \frac{m_0 n}{3} \langle v^2 \rangle. \end{aligned} \quad (10.1)$$

$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{\text{кв}}$  — *средняя квадратичная скорость* молекулы идеального газа.

Преобразуем результат (10.1):

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle$$

— *основное уравнение МКТ идеального газа*;

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle \quad (10.2)$$

— *основное уравнение МКТ идеального газа для энергии*. Здесь  $\langle \varepsilon \rangle$  — средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа (поступательного движения).

#### 2.2.4. Молекулярно-кинетическое толкование абсолютной температуры

Из выражений (9.2) и (10.2) следует

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle \\ p &= nkT \end{aligned} \right\} \Rightarrow kT = \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Абсолютная температура пропорциональна средней кинетической энергии поступательного движения, приходящейся на 1 молекулу.

*Энергетическая температура*

$$\theta = kT = \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle;$$

$$[\theta] = \text{Дж}.$$

Среднеквадратичная скорость молекулы идеального газа

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{2 \langle \varepsilon \rangle}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{2} kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}};$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

### Численная оценка

При  $t = 27^\circ\text{C}$  ( $T = 300\text{ K}$ ) для кислорода ( $\mu = 3,2 \cdot 10^{-2}\text{ кг/моль}$ ):

$$\theta = 4,2 \cdot 10^{-21}\text{ Дж};$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^2}{3,2 \cdot 10^{-2}}} = 10^2 \cdot 3 \sqrt{2,6} = 483 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

## 2.3. I начало термодинамики

### 2.3.1. Внутренняя энергия

**Внутренняя энергия** термодинамической системы — это сумма следующих составляющих:

1. Кинетическая энергия теплового движения молекул (поступательного, вращательного и колебательного)
2. Потенциальная энергия взаимодействия молекул
3. Потенциальная энергия взаимодействия атомов в молекуле
4. Энергия атомных оболочек
5. Внутрядерная энергия

### 2.3.2. Внутренняя энергия идеального газа

**Внутренняя энергия идеального газа** — кинетическая энергия поступательного и вращательного движения молекул.

Для одноатомного газа с учётом того, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$ , получим выражение для внутренней энергии

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}vN_A kT = \frac{3}{2}vRT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

**Число степеней свободы**  $i$  механической системы — наименьшее число независимых координат, с помощью которых определяется положение системы в пространстве.

Число степеней свободы молекул указано в [ТАБЛИЦЕ 10.1](#).

**Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы:** в любой термодинамической системе на одну степень свободы молекулы приходится энергия, в среднем равная  $\frac{kT}{2}$ .

### Доказательство

Для поступательного движения  $\langle \varepsilon_{\text{поступ}} \rangle = \frac{3}{2}kT$  и

$$\langle \varepsilon_{\text{поступ}} \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{m_0}{2} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{m_0 \langle v_x^2 \rangle}{2} + \frac{m_0 \langle v_y^2 \rangle}{2} + \frac{m_0 \langle v_z^2 \rangle}{2} = 3 \langle \varepsilon_1 \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{kT}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

Внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движения всех молекул газа:

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} N k T = \frac{i}{2} \nu N_A k T = \frac{i}{2} \nu R T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R T,$$

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R T.$$

Таблица 10.1

Одноатомная молекула	Двухатомная молекула	Многоатомная молекула
$i=3$	$i=5$	$i=6$
3 степени свободы, соответствующие поступательному движению	3 степени свободы, соответствующие поступательному движению, + 2 степени свободы, соответствующие вращательному движению	3 степени свободы, соответствующие поступательному движению, + 3 степени свободы, соответствующие вращательному движению

Внутренняя энергия — функция состояния термодинамической системы.

Изменение внутренней энергии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 (см. диаграмму [рис. 10.3](#))

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Изменение внутренней энергии термодинамической системы не зависит от способа перехода системы из одного состояния в другое, а определяется только начальным и конечным состояниями системы.

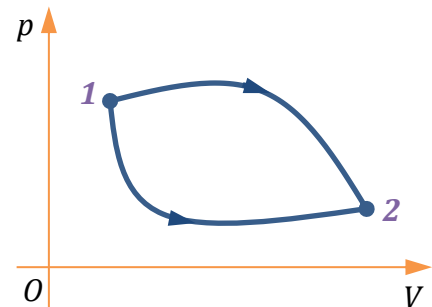


Рис. 10.3

### 2.3.3. Работа газа

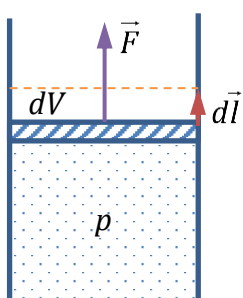


Рис. 10.4

Пусть газ находится под подвижным поршнем под давлением  $p$  (рис. 10.4). Поршень совершает малое перемещение  $d\vec{l}$ , при этом объем газа изменяется на  $dV$ . Газ действует на поршень с силой  $\vec{F}$ ,  $F = pS$ , где  $S$  — площадь поршня. Найдём работу газа  $\delta A$  при элементарном расширении:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{l} = Fdl = pSdl = pdV,$$

$$\delta A = pdV.$$

Работа газа

$$A = \int_1^2 pdV.$$

Графический смысл работы — площадь под графиком  $p(V)$  (рис. 10.5).

Работа — характеристика не макросостояния термодинамической системы, а термодинамического процесса, она зависит от способа перехода из начального в конечное состояние. Поэтому элементарная работа не является полным дифференциалом какой-либо величины — функции состояния. По этой причине малое приращения работы (и других величин, не являющихся полными дифференциалами) принято обозначать буквой  $\delta$ , а малое приращение температуры, объема, внутренней энергии и т. п. — знаком дифференциала  $d$ .

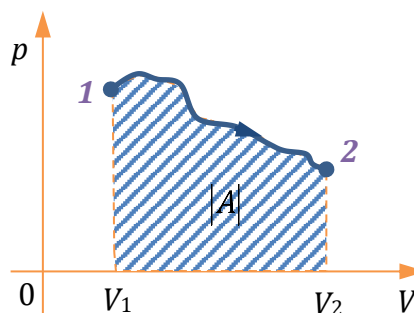


Рис. 10.5

#### ПРИМЕР

Работа при изотермическом расширении идеального газа

Идеальный газ расширяется при постоянной температуре от объема  $V_1$  при давлении  $p_1$  до объема  $V_2$ . Найти работу газа.

Из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \text{const} \Rightarrow pV = p_1V_1,$$

$$p(V) = \frac{p_1V_1}{V}.$$

График<sup>34</sup> этой функции представлен на рис. 10.6. Вычислим работу:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1V_1 \frac{dV}{V} = p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

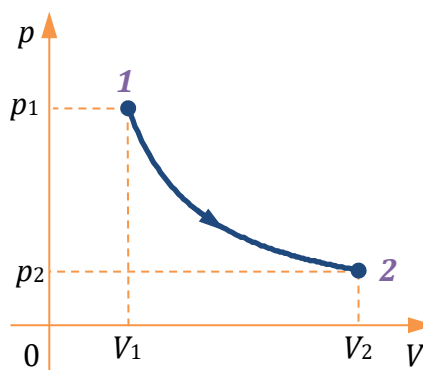


Рис. 10.6

<sup>34</sup> На графиках термодинамических процессов следует обозначать начальное и конечное состояния и направление процесса.

### 2.3.4. Количество теплоты. Теплоёмкость

**Количество теплоты** — характеристика термодинамического процесса — энергия, передаваемая термодинамической системе без совершения работы.

**Теплоёмкость системы (тела)** — характеристика термодинамической системы и совершаемого ею процесса, равная количеству теплоты, которое необходимо передать системе для нагревания её на один градус:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}; [C] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Удельная теплоёмкость вещества** — теплоёмкость вещества единичной массы:

$$c = \frac{\delta Q}{mdT}; [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**Молярная теплоёмкость вещества** — теплоёмкость одного моля вещества:

$$C_{\mu} = \frac{\delta Q}{\nu dT}; [C_{\mu}] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Следует понимать, что удельные и молярные теплоёмкости одного и того же вещества различаются в зависимости от термодинамического процесса.

### 2.3.5. I начало термодинамики

I начало термодинамики — закон сохранения энергии в применении к термодинамическим процессам.

**I начало термодинамики:** количество теплоты, переданное термодинамической системе, равно сумме изменения внутренней энергии системы и работы, совершённой системой;

**в интегральной форме:**

$$Q = \Delta U + A;$$

**в дифференциальной форме:**

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

## Лекция 11

### 2.4. Политропный процесс идеального газа

#### 2.4.1. Изотермический процесс ( $T = \text{const}$ )

Уравнение процесса

$$pV = \text{const}.$$

График процесса в координатах ( $p, V$ ) показан на [рис. 10.6<sup>35</sup>](#).

Так как  $T = \text{const}$ ,  $\Delta U = 0$ .

И начало термодинамики запишется как

$$Q = A.$$

Молярная теплоёмкость

$$C_T = \frac{\delta Q}{dT} \rightarrow \infty$$

$\searrow$   
0

(все формулы этого параграфа записываются для  $\nu = 1$  моль).

#### 2.4.2. Изохорный процесс ( $V = \text{const}$ )

График процесса показан на [рис. 11.1](#).

Так как  $V = \text{const}$ ,  $\Delta V = 0$ ,  $A = 0$ .

И начало термодинамики:

$$Q = \Delta U.$$

Так как  $U = \frac{i}{2}RT$ , молярная теплоёмкость

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2}R.$$

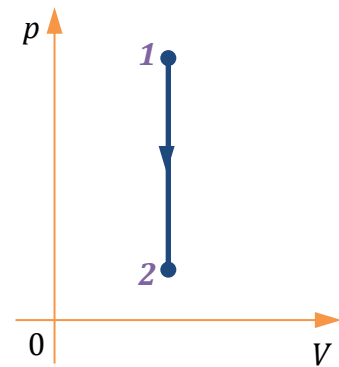


Рис. 11.1

#### 2.4.3. Изобарный процесс ( $p = \text{const}$ )

График процесса показан на [рис. 11.2](#).

В этом процессе  $\Delta U \neq 0$  и  $A \neq 0$ .

И начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Молярная теплоёмкость

$$C_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT} = \frac{i}{2}R + \frac{pdV}{dT}.$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона  $pV = RT$ , поэтому

$$pdV = RdT \Rightarrow \frac{pdV}{dT} = R;$$

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R.$$

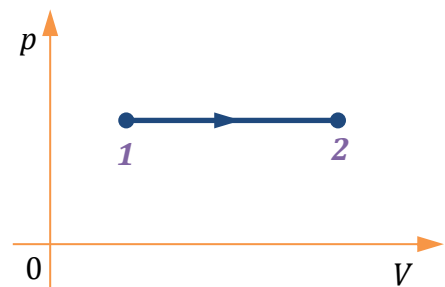


Рис. 11.2

<sup>35</sup> В «живой» лекции [РИСУНОК 10.6](#) нужно воспроизвести.



Всегда  $C_p > C_V$ ;

$$C_p - C_V = R$$

— *формула Майера*. Отношение

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

Смысл этого соотношения разъясняется в [РАЗДЕЛЕ 2.4.4](#).

#### 2.4.4. Адиабатный процесс ( $\delta Q = 0$ )

**Адиабатный процесс** — процесс в теплоизолированной системе.

И начало термодинамики:

$$0 = \Delta U + A \Rightarrow A = -\Delta U.$$

Молярная теплоёмкость

$$C_{\text{ад}} = \frac{\overset{0}{\delta Q}}{dT} = 0.$$

Найдём уравнение адиабатного процесса идеального газа:

$$\delta A = -dU;$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta A = pdV = \frac{RT}{V} dV \\ dU = \frac{i}{2} R dT \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{RT}{V} dV = -\frac{i}{2} R dT;$$

разделим переменные в этом дифференциальном уравнении:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{i}{2} \frac{dT}{T},$$

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\frac{i}{2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

(здесь  $V_1, T_1$  и  $V_2, T_2$  — параметры соответственно начального и конечного состояний системы),

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = -\frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{i}{2}} \Rightarrow V_1 T_1^{\frac{i}{2}} = V_2 T_2^{\frac{i}{2}};$$

$$VT^{\frac{i}{2}} = \text{const}$$

— *уравнение адиабаты (уравнение Пуассона)* в координатах  $(V, T)$ .

Преобразуем это уравнение в координаты  $(p, V)$ :  $T \sim pV$ ,

$$V p^{\frac{i}{2}} V^{\frac{i}{2}} = \text{const} \Rightarrow p^{\frac{i}{2}} V^{\frac{i+1}{2}} = \text{const} \Rightarrow p V^{\frac{i+2}{i}} = \text{const},$$

$$pV^\gamma = \text{const},$$

$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{C_p}{C_v}$  — **показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)**. Для одноатомного газа  $\gamma = \frac{5}{3}$ , для двухатомного —  $\gamma = \frac{7}{5}$ .

График адиабатного процесса представлен на [рис. 11.3](#). Для сравнения на этой же диаграмме показан график изотермического процесса. Давление при адиабатном расширении убывает быстрее, чем при изотермическом расширении ( $\gamma > 1$ ). [Студенты **самостоятельно** выводят уравнение Пуассона в координатах  $(p, T)$ .]

**Демонстрация:** Охлаждение воздуха при адиабатном процессе (расширении).  
Образование тумана

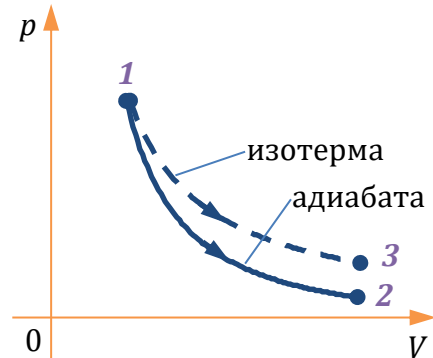


Рис. 11.3

Адиабатными можно считать процессы, протекающие достаточно быстро, когда теплообмен с окружающей средой не успевает произойти, например, при распространении звуковой волны.

#### 2.4.5. Политропный процесс (общий случай) ( $C = \text{const}$ )

**Политропный процесс** — термодинамический процесс, при котором теплоёмкость системы остаётся неизменной:

$$C = \text{const} \Rightarrow \frac{\delta Q}{dT} = C = \text{const}.$$

И начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A;$$

$$\left. \begin{aligned} \delta A = pdV = \frac{RT}{V}dV \\ dU = \frac{i}{2}RdT \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta Q = \frac{i}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV;$$

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{i}{2}R + \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT}.$$

Разделим переменные в этом уравнении:

$$C - \frac{i}{2}R = \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \left( \frac{C}{R} - \frac{i}{2} \right) \frac{dT}{T},$$

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \left( \frac{C}{R} - \frac{i}{2} \right) \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

(здесь  $V_1, T_1$  и  $V_2, T_2$  — параметры соответственно начального и конечного состояний системы),

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{C}{R} - \frac{i}{2} \right) \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{C}{R} - \frac{i}{2}} \Rightarrow V_1 T_1^{\frac{i-C}{R}} = V_2 T_2^{\frac{i-C}{R}}, \quad VT^{\frac{i-C}{R}} = \text{const}.$$

Преобразуем это уравнение в координаты  $(p, V)$ :  $T \sim pV$ ,

$$V p^{\frac{i-C}{2R}} V^{\frac{i-C}{2R}} = \text{const} \Rightarrow p V^{\frac{\frac{i-C}{2R}+1}{\frac{i-C}{2R}}} = \text{const},$$

$$\boxed{pV^n = \text{const}},$$

— **уравнение политропы**;  $n$  — **показатель политропы**. Выразим молярную теплоёмкость через показатель политропы:

$$n = \frac{\frac{i-C}{2R}+1}{\frac{i-C}{2R}} \Rightarrow \frac{i}{2}n - n\frac{C}{R} = \frac{i-C}{2} + 1 \Rightarrow \frac{C}{R}(1-n) = \frac{i}{2} + 1 - \frac{i}{2}n,$$

$$C = R \frac{\frac{i}{2}(1-n)+1}{1-n} = \frac{i}{2}R + \frac{R}{1-n} = C_V + \frac{R}{1-n},$$

$$\boxed{C = C_V - \frac{R}{n-1}}.$$

Возможно  $C \geq 0$ .

#### 2.4.6. Зависимость теплоёмкости газа от температуры

##### 1. Теоретическая зависимость



Рис. 11.4

Классическая теория даёт для двухатомного газа  $C_V = \frac{5}{2}R$  (см. [РАЗДЕЛ 2.4.2](#)). График зависимости представлен на [РИС. 11.4](#).

##### 2. Экспериментальная зависимость

С квантовой точки зрения закон равнораспределения (см. [РАЗДЕЛ 2.3.2](#)) неверен. При низких температурах ( $T < 50$  К) вращательные степени свободы молекул не реализуются. Это происходит потому, что энергия поглощается порциями — *квантами*.

При высоких же температурах начинают реализовываться колебательные степени свободы (которые мы не учитывали ранее). Молекулы не являются жёсткими — атомы в молекуле колеблются около положения равновесия. Энергия колебаний также квантована (см. [РАЗДЕЛ 5.5.4](#)). Колебания молекул начинают вносить заметный вклад в теплоёмкость тогда, когда величина  $kT$  становится сравнимой с квантом энергии колебаний.

При  $T \rightarrow 0$   $C_V \rightarrow 0$  по [III НАЧАЛУ ТЕРМОДИНАМИКИ](#).

Примерный ход экспериментальной зависимости молярной теплоёмкости при постоянном объёме от температуры представлен на [РИС. 11.5](#).

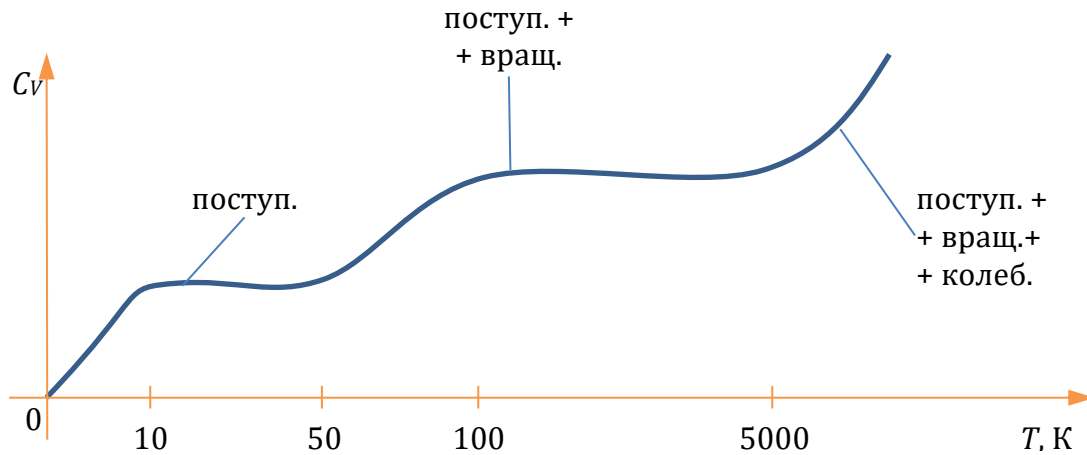
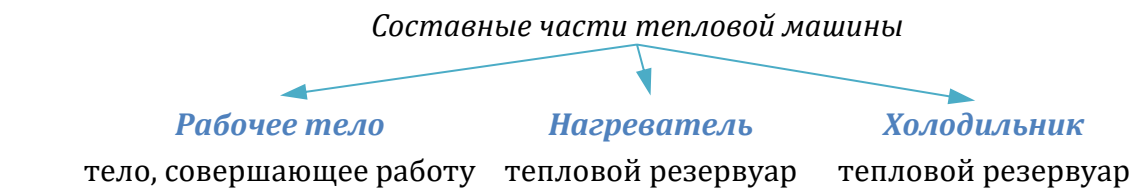


Рис. 11.5

## 2.5. Тепловые машины

### 2.5.1. Тепловая машина (тепловой двигатель)

**Тепловой двигатель** — устройство, предназначенное для периодического совершения работы за счёт внутренней энергии теплового резервуара (за счёт подведённого тепла).



**Тепловой резервуар** — тело с большой по сравнению с рабочим телом теплоёмкостью.

Рабочее тело совершает **круговой процесс (цикл)** — процесс, при котором термодинамическая система возвращается в исходное состояние.

Этапы кругового процесса (диаграмма [рис. 11.6](#)):

**1-2:** Подвод тепла к рабочему телу от нагревателя:

$$Q_1 = Q_{12} > 0; A_{12} > 0$$

— работа рабочего тела.

**2-1:** Отвод тепла от рабочего тела к холодильнику:

$$Q_2 = Q_{21} < 0, A_{21} < 0$$

— работа совершается внешними телами над рабочим телом.

### Полезная работа

$$A = A_{12} + A_{21} = A_{12} - |A_{21}|.$$

**Коэффициент полезного действия (КПД)** — безразмерная характеристика двигателя, равная отношению полезной работы к затраченной энергии. Для теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

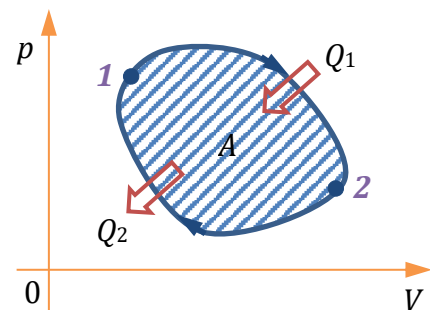


Рис. 11.6

Запишем I начало термодинамики для цикла, совершаемого рабочим телом:

$$Q = \Delta U + A; \quad \rightarrow 0$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2| \Rightarrow Q_1 - |Q_2| = A,$$

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}.$$

### 2.5.2. Холодильная машина

**Холодильная машина** — устройство, предназначенное для охлаждения теплового резервуара путём передачи его внутренней энергии другому резервуару.

Этапы кругового процесса (диаграмма [рис. 11.7](#)):

**1-2:** Подвод тепла к рабочему телу от холодильника:

$$Q_2 = Q_{12} > 0; \quad A_{12} > 0$$

— работа рабочего тела.

**2-1:** Отвод тепла от рабочего тела к нагревателю:

$$Q_1 = Q_{21} < 0, \quad A_{21} < 0$$

— работа совершается внешними телами над рабочим телом.

Работа рабочего тела

$$A = A_{12} + A_{21} = A_{12} - |A_{21}| < 0.$$

I начало термодинамики для рабочего тела:

$$Q = A;$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_2 - |Q_1|, \quad A = -|A| \Rightarrow Q_2 - |Q_1| = -|A|,$$

$$|Q_1| = Q_2 + |A|.$$

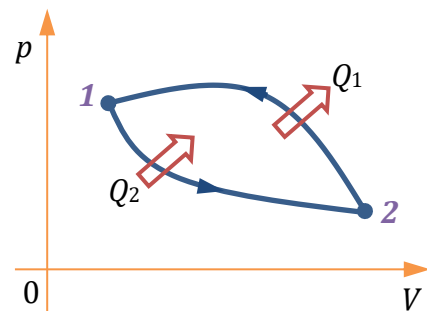


Рис. 11.7

### 2.5.3. Цикл Карно

**Обратимый термодинамический процесс** — процесс, при котором термодинамическая система проходит через один и тот же ряд последовательных равновесных состояний в прямом и обратном направлении.

Процесс, при котором тепло передаётся от более нагретого тела к менее нагретому, необратим (см. [РАЗДЕЛ 2.6.5](#)). Поэтому, чтобы процесс был обратимым, контакт рабочего тела с тепловым резервуаром должен происходить только при постоянной температуре — квазистатический изотермический процесс.

Другой обратимый процесс — это квазистатический адиабатический процесс, т. е. бесконечно медленный процесс в теплоизолированной системе.

**Цикл Карно** — единственно возможный обратимый цикл, осуществляемый при помощи двух тепловых резервуаров с разными температурами.

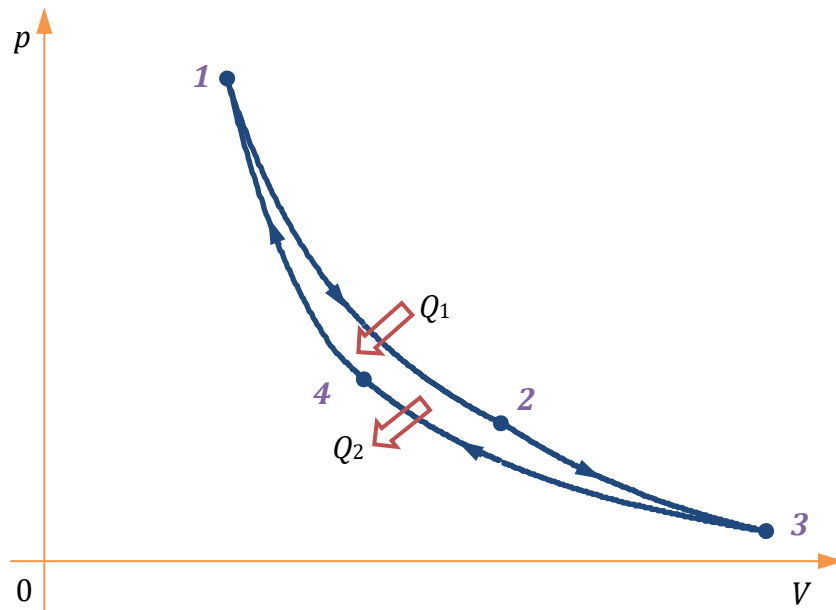


Рис. 11.8

Соответственно, цикл Карно состоит из квазистатических изотермических и адиабатных процессов (см. диаграмму [рис. 11.8](#)):

$1-2$  } — изотермические процессы,  
 $3-4$  }  
 $2-3$  } — адиабатные процессы.  
 $4-1$  }

Найдём КПД теплового двигателя, рабочее тело которого совершает цикл Карно. Рабочее тело — идеальный газ.

По определению

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}.$$

Рабочее тело сообщается с нагревателем на этапе  $1-2$ :

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где  $T_1$  — температура нагревателя (см. [ПРИМЕР РАСЧЁТА РАБОТЫ](#); по уравнению Менделеева-Клапейрона в процессе  $1-2$   $pV = \nu RT_1$ ),  $V_1$  и  $V_2$  — соответственно объёмы газа в состояниях  $1$  и  $2$ ;

а с холодильником — на этапе  $3-4$ :

$$Q_2 = Q_{34} = A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4},$$

где  $T_2$  — температура холодильника,  $V_3$  и  $V_4$  — соответственно объёмы газа в состояниях  $3$  и  $4$ .

Найдём связь между отношениями объёмов через уравнение адиабаты в координатах  $(V, T)$ :

$$VT^{\frac{i}{2}} = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} V_2 T_1^{\frac{i}{2}} = V_3 T_2^{\frac{i}{2}}, \\ V_1 T_1^{\frac{i}{2}} = V_4 T_2^{\frac{i}{2}}. \end{cases}$$

Разделим верхнее уравнение на нижнее:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Подставим эти результаты в выражение для КПД:

$$\eta = 1 - \frac{\cancel{\nu}RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\cancel{\nu}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

всегда  $\eta < 1$ .

#### 2.5.4. Теоремы Карно (без доказательства)

1. КПД теплового двигателя, рабочее тело которого совершает цикл Карно, не зависит от природы рабочего тела и равен отношению разности максимальной и минимальной температур к максимальной температуре рабочего тела:

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}.$$

2. КПД любого теплового двигателя, рабочее тело которого совершает обратимый цикл, не превосходит КПД теплового двигателя, рабочее тело которого совершает цикл Карно:

$$\eta_{\text{обрат}} \leq \eta_{\text{Карно}}.$$

3. КПД теплового двигателя, рабочее тело которого совершает необратимый цикл, меньше КПД теплового двигателя, рабочее тело которого совершает обратимый цикл, при прочих равных условиях (при тех же максимальной и минимальной температурах рабочего тела):

$$\eta_{\text{необрат}} < \eta_{\text{обрат}}.$$

Из трёх теорем Карно следует, что

$$\eta_{\text{необрат}} < \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}.$$

## 2.6. Энтропия. II начало термодинамики

### 2.6.1. Неравенство Клаузиуса

Пусть некоторое рабочее тело совершает цикл между двумя тепловыми резервуарами с температурами  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Из теорем Карно

$$\eta \leq \eta_{\text{Карно}} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow \cancel{1} - \frac{|Q_2|}{Q_1} \leq \cancel{1} - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}$$

(так как  $Q_2 < 0$ ; здесь использованы обозначения [ПРЕДЫДУЩЕГО ПАРАГРАФА](#));

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

— *неравенство Клаузиуса*;  $\frac{Q}{T}$  — *приведённая теплота*.

В этих уравнениях знак « $\Rightarrow$ » соответствует обратимому циклу, « $\Leftarrow$ » — необратимому.

Сумма приведённых теплот, полученных рабочим телом за цикл, равна нулю, если цикл обратимый, и меньше нуля, если цикл необратимый.

Если имеется бесконечное множество тепловых резервуаров, то между ними можно совершить бесконечное множество обратимых циклов. Соответственно, любой цикл можно разбить на бесконечное множество обратимых циклов ([рис. 11.9](#)). Запишем неравенство Клаузиуса для каждого из этих циклов и просуммируем эти неравенства:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta Q_{11}}{T_{11}} + \frac{\Delta Q_{21}}{T_{21}} \leq 0, \\ \dots, \\ \frac{\Delta Q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\Delta Q_{2i}}{T_{2i}} \leq 0, \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \sum \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

— *неравенство Клаузиуса*: количество приведённого тепла, полученного рабочим телом в обратимом цикле, равно нулю, а в необратимом цикле — меньше нуля. Теперь пусть  $\Delta Q_i \rightarrow 0$ . Тогда при обратимом цикле

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Подынтегральное выражение — функция состояния термодинамической системы;

$$dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обрат}},$$

$S$  — *энтропия*;

$$[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Приращение энтропии равно количеству приведённого тепла, полученного системой в обратимом процессе.

При необратимом процессе  $dS > \frac{\delta Q}{T}$ .

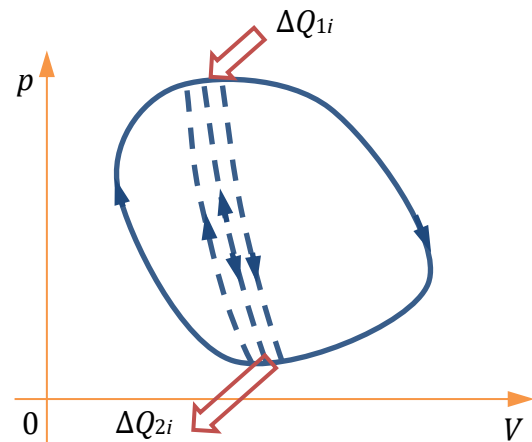


Рис. 11.9



## Лекция 12

### 2.6.2. Фазовое пространство

Состояние частицы определяется 6 микропараметрами:  $x_i, y_i, z_i; v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}$  (рис. 12.1). Микросостояние системы определяется  $6N$  микропараметрами ( $N$  — число частиц в системе).

**Фазовое пространство** — 6-мерное пространство координат и проекций скоростей (импульсов). Фазовое пространство можно разбить на области (**фазовые ячейки**). Размер ячейки не детерминирован в классической физике, но определён в квантовой механике (см. РАЗДЕЛ 6.1.5).

**Изобразительная точка** — точка в фазовом пространстве, эквивалентная молекуле.

В классической физике тождественные частицы различимы — изобразительные точки можно пронумеровать.

*Микросостояние* задаётся распределением изобразительных точек (по номерам) по фазовым ячейкам.

*Макросостояние* задаётся количеством изобразительных точек в каждой фазовой ячейке.

### 2.6.3. Термодинамическая вероятность

**Термодинамическая вероятность (статистический вес)  $W$**  макросостояния — число микросостояний, которым может быть реализовано данное макросостояние. Термодинамическая вероятность — функция состояния системы.

Все микросостояния считаются равновероятными. Вероятность  $i$ -го макросостояния

$$P_i = \frac{W_i}{W_0},$$

где  $W_0$  — *статистический вес макросистемы* — число возможных микросостояний данной макросистемы.

*Равновесному состоянию* соответствует макросостояние, которое реализуется наибольшим числом микросостояний (статистический вес  $W_{\max}$ ).

Любая замкнутая термодинамическая система стремится к состоянию с максимальной термодинамической вероятностью. Любой самопроизвольный термодинамический процесс идёт в сторону возрастания термодинамической вероятности.

#### ПРИМЕРЫ

1) Распределение четырёх изобразительных точек по двум фазовым ячейкам

Число изобразительных точек (молекул)  $N = 4$ , число фазовых ячеек  $n = 2$

Распределение показано в ТАБЛ. 12.1.

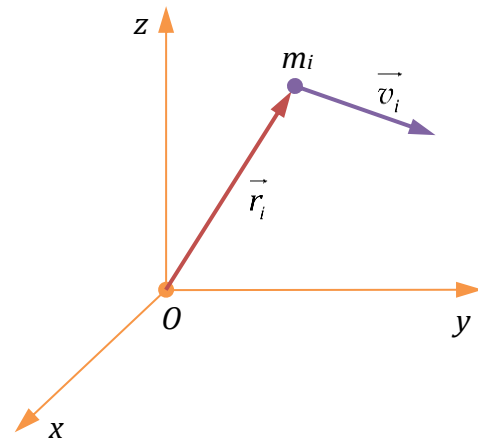
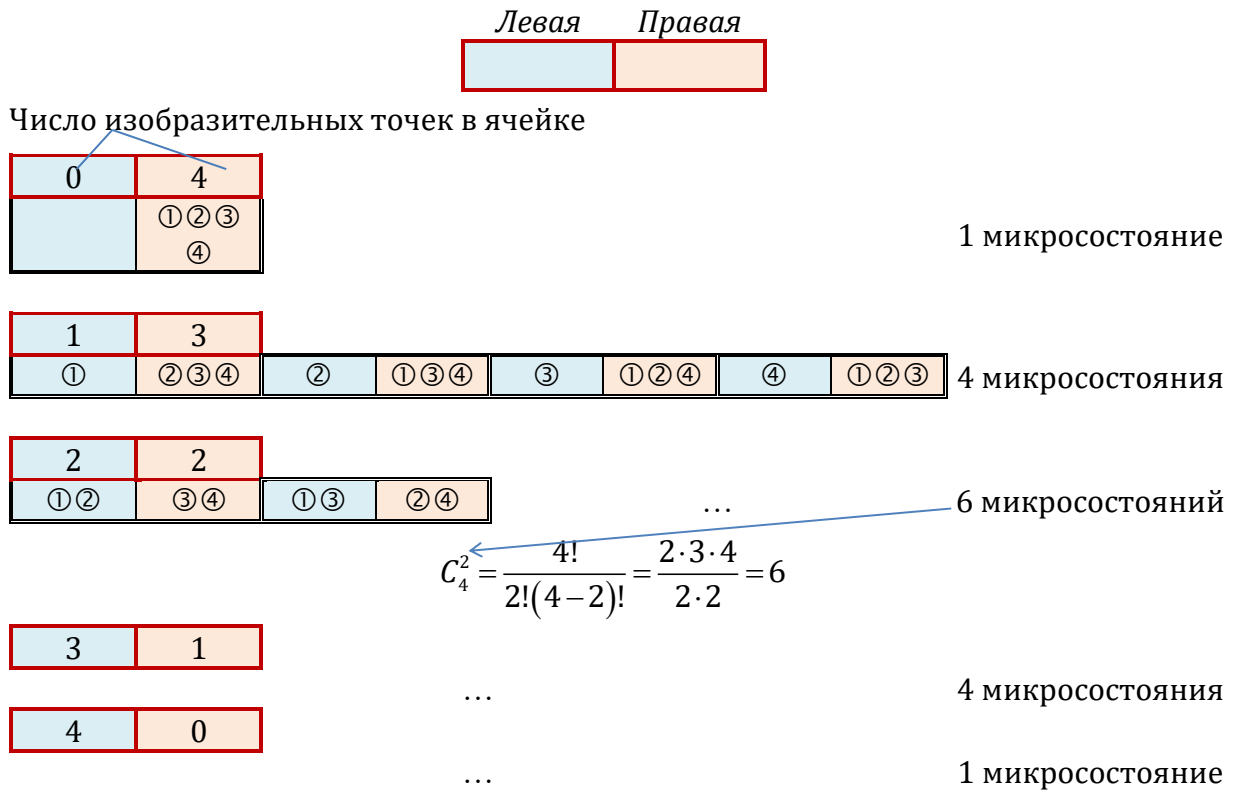


Рис. 12.1

Таблица 12.1



Макросостояние		Число микросостояний = = статистический вес макросостояния	Вероятность макросостояния
левая ячейка	правая ячейка		
0	4	1	1/16
1	3	4	1/4
2	2	6	3/8
3	1	4	1/4
4	0	1	1/16

Статистический вес макросистемы

$$W_0 = 16 = 2^4 = n^N.$$

Видно, что наиболее упорядоченные макросостояния (0 и 4, 4 и 0) наименее вероятны, а наименее упорядоченное (5 и 5) — наиболее вероятно.

2) Распределение десяти изобразительных точек по двум фазовым ячейкам

$$N = 10, n = 2$$

Статистический вес макросистемы

$$W_0 = 2^{10} = 1024.$$

Наиболее вероятное макросостояние:



Статистический вес этого макросостояния

$$W_{5,5} = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252.$$

Наименее вероятные макросостояния:

0	10		10	0
---	----	--	----	---

Статистический вес этих макросостояний

$$W_{0,10} = W_{10,0} = 1.$$

3) Распределение  $10^{25}$  изобразительных точек по двум фазовым ячейкам

$$N = 10^{25}, n = 2$$

Статистический вес макросистемы

$$W_0 = 2^{10^{25}}.$$

(Студентам предлагается **самостоятельно** найти вероятности отдельных макросостояний в [ПРИМЕРЕ 2](#), вероятность наименее вероятного состояния в [ПРИМЕРЕ 3](#).)

#### 2.6.4. Статистический смысл энтропии

Пусть имеются две термодинамические системы, имеющие статистические веса  $W_1$  и  $W_2$ . Объединим эти системы в одну. Статистический вес объединённой системы

$$W = W_1 \cdot W_2$$

— термодинамическая вероятность не обладает свойством аддитивности. Аддитивная величина — логарифм термодинамической вероятности:

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2.$$

#### Энтропия

$$S = k \ln W$$

— мера неупорядоченности термодинамической системы.

Можно доказать, что два определения энтропии — термодинамическое (см. [РАЗДЕЛ 2.6.1](#)) и статистическое — эквивалентны.

#### 2.6.5. II начало термодинамики

**II начало термодинамики** указывает *направление* протекания термодинамических процессов. Оно не следует из фундаментальных физических законов.

Существует много формулировок II начала термодинамики, все они эквивалентны. Приведём три из этих формулировок.

1. В замкнутой (изолированной) термодинамической системе все процессы идут в сторону возрастания энтропии.
2. Невозможен термодинамический процесс, единственным результатом которого была бы передача тепла от менее нагретого тела к более нагретому.
3. Невозможен *вечный двигатель II рода*<sup>36</sup>, т. е. двигатель, который превращал бы всё подведённое к нему тепло в работу без каких-либо изменений в других телах.

Возможны (но маловероятны) самопроизвольные отклонения термодинамических систем от равновесного состояния — **флуктуации**.

<sup>36</sup> *Вечный двигатель I рода* — двигатель, совершающий работу без подвода энергии.

### 2.6.6. Изменение энтропии в термодинамических процессах

В неизолированной системе энтропия может как возрастать, так и убывать.

Обратимые процессы идут при максимальной энтропии, причём  $dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обрат}}$  или

$$S_2 - S_1 = \left(\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обрат}}.$$

В необратимом процессе  $dS > \frac{\delta Q}{T}$ , так как приращение энтропии обусловлено двумя процессами — подводом тепла и переходом системы к равновесному состоянию.

Равновесный адиабатный процесс — **изоэнтропический** процесс ( $\delta Q = 0 \rightarrow dS = 0$ ).

#### ПРИМЕР

##### Изменение энтропии идеального газа

Идеальный газ переходит из состояния с параметрами  $p_1, V_1, T_1$  в состояние с параметрами  $p_2, V_2, T_2$ . Найти изменение энтропии газа.

Так как энтропия — функция состояния системы, то результат не должен зависеть от того, каким способом происходит переход из начального в конечное состояние. Перейдём из состояния **1** в состояние **2** обратимым образом. Как обсуждалось **РАНЕЕ**, возможны два обратимых процесса — квазистатический адиабатный и изотермический процессы. Поэтому точки **1** и **2** на диаграмме **РИС. 12.2А** мы соединим изотермой и адиабатой через промежуточное состояние **3**:

**1-3** — изотермический процесс,

**3-2** — адиабатный процесс.

На **РИС. 12.2Б** изображены графики тех же процессов в координатах  $(T, S)$ .

Рассчитаем изменение энтропии:

$$\Delta S_{12} = \left(\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обрат}} = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T_1} + \int_3^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

В изотермическом процессе **1-3**  $\delta Q = \delta A = pdV$ , а  $pV = p_1V_1 \Rightarrow p = \frac{p_1V_1}{V}$ ;

$$\Delta S_{12} = \int_1^3 \frac{pdV}{T_1} = \frac{p_1V_1}{T_1} \int_1^3 \frac{dV}{V} = \frac{p_1V_1}{T_1} \ln \frac{V_3}{V_1}. \quad (12.1)$$

Найдём  $V_3$  из уравнений адиабатного и изотермического процессов:

$$\begin{cases} p_1V_1 = p_3V_3, \\ p_2V_2^\gamma = p_3V_3^\gamma. \end{cases}$$

Разделим нижнее уравнение на верхнее:

$$V_3^{\gamma-1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{V_2^\gamma}{V_1} \Rightarrow V_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{V_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{V_1^{\frac{1}{\gamma-1}}}.$$

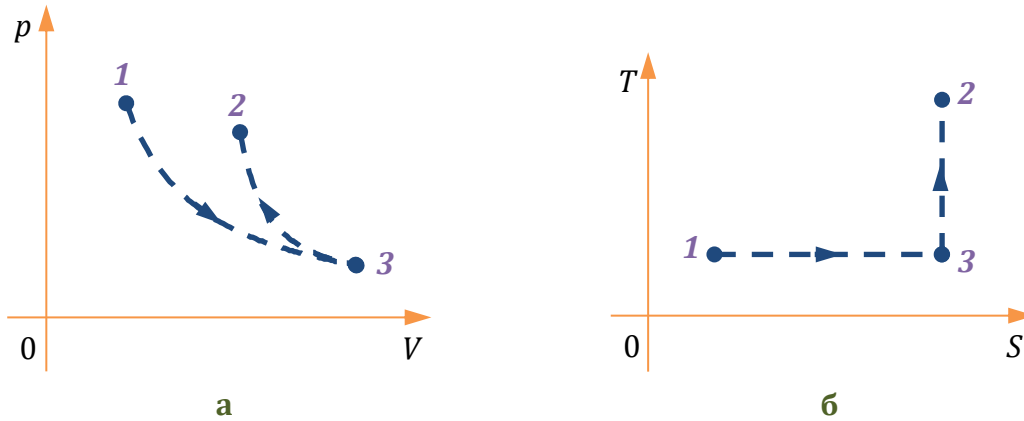


Рис. 12.2

Выразим показатель адиабаты  $\gamma$  через число степеней свободы  $i$  молекулы:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{i+2}{i} - 1 = \frac{2}{i}, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{(i+2)i}{i \cdot 2} = \frac{i+2}{2};$$

$$V_3 = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{i}{2}} \frac{V_2^{\frac{i+2}{2}}}{V_1^{\frac{i}{2}}}.$$

Подставим это выражение в формулу (12.1):

$$\Delta S_{12} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{i}{2}} \frac{V_2^{\frac{i+2}{2}}}{V_1^{\frac{i}{2}+2}} \right] = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left( \frac{i}{2} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{i+2}{2} \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Так как из уравнения Менделеева-Клапейрона  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \nu R$ ,

$$\Delta S_{12} = \nu \left( C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left( C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

### 2.6.7. III начало термодинамики

**III начало термодинамики (тепловой закон Нернста):** при стремлении к нулю термодинамической температуры энтропия термодинамической системы стремится к нулю.

Другая формулировка: абсолютный нуль недостижим.

Из закона Нернста следует, что для любой термодинамической системы

$$C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_{T \rightarrow 0} = 0.$$

## 2.7. Классические распределения частиц идеального газа

### 2.7.1. Функция распределения

Пусть имеется термодинамическая система из  $N$  частиц;  $\xi$  — величина, характеризующая частицу. Вероятность того, что величина  $\xi$  будет иметь значение  $\xi_i$ ,

$$P_i = \frac{N_i}{N},$$

где  $N_i$  — количество частиц, для которых  $\xi = \xi_i$ .

**Условие нормировки:**

$$\sum P_i = 1$$

(так как то, что величина  $\xi$  примет какое-нибудь значение из области определения, есть достоверное событие).

**Среднее значение** величины  $\xi$ :

$$\langle \xi \rangle = \frac{\sum N_i \xi_i}{N} = \sum P_i \xi_i.$$

Если величина  $\xi$  изменяется непрерывно, то вероятность того, что  $\xi = (\xi, \xi + d\xi)$

$$dP = f(\xi) d\xi,$$

где  $f(\xi)$  — **функция распределения вероятности (плотность вероятности)**.

#### ПРИМЕР

Распределение Гаусса

Распределение Гаусса — это функция вида

$$f(\xi) = A e^{-\alpha(\xi - \xi_0)^2},$$

где  $\xi_0$  — постоянная,  $\alpha$  — положительная постоянная; коэффициент  $A$  находится из условия нормировки (см. [НИЖЕ](#)). График распределения Гаусса показан на [рис. 12.3](#).

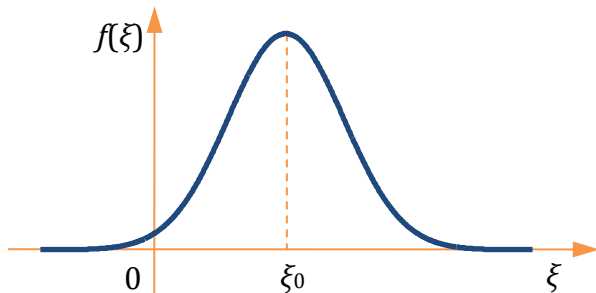


Рис. 12.3

По такому закону распределяются результаты серии большого числа случайных измерений<sup>37</sup>.

**Демонстрация:** Доска Гальтона

Свойства функции распределения<sup>38</sup>

1. Определённость и непрерывность во всей области определения  $\xi(a, b)$
2. Дифференцируемость во всей области определения
3. Интегрируемость во всей области определения
4. Условие нормировки (нормируемость):

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = 1.$$

Зная функцию распределения, можно найти среднее значение любого параметра, зависящего от  $\xi$ .

<sup>37</sup> Результаты серии небольшого числа случайных измерений ( $N \lesssim 10$ ) подчиняются распределению Стьюдента (см. [ВВОДНУЮ ГЛАВУ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА](#)).

<sup>38</sup> В «живой» лекции эти свойства можно записать математическими значками.

Вероятность того, что величина  $\xi$  принимает значение от  $\xi_1$  до  $\xi_2$ ,

$$P(\xi_1, \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi.$$

*Среднее значение  $\xi$*

$$\langle \xi \rangle = \int_a^b \xi f(\xi) d\xi.$$

*Среднее значение квадрата  $\xi$*

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_a^b \xi^2 f(\xi) d\xi.$$

*Среднее значение функции  $\varphi(\xi)$*

$$\langle \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(\xi) f(\xi) d\xi.$$

*Наиболее вероятное значение  $\xi$*

$$\left. \frac{df(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{\text{вер}}} = 0 \Rightarrow \xi_{\text{вер}}.$$

***Дополнительное задание***

Найти по РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ГАУССА ( $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ ): нормировочный множитель  $A$ ,  $\langle \xi \rangle$ ,  $\langle \xi^2 \rangle$ ,  $\xi_{\text{вер}}$ .

## Лекция 13

## 2.7.2. Распределение молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла)

Молекулы идеального газа движутся хаотически, но в этом хаосе есть закономерности. Рассмотрим идеальный газ из  $N$  частиц.

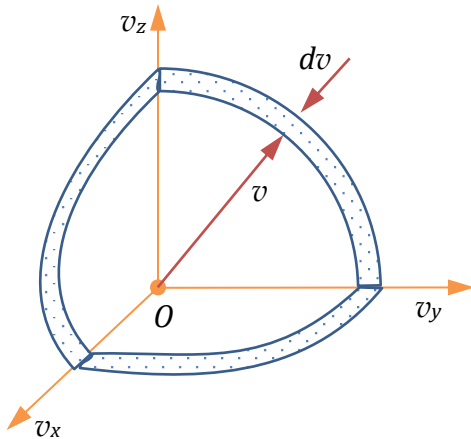


Рис. 13.1

Теперь случайная величина  $\xi$  — это модуль скорости  $v$  молекул идеального газа. Найдём функцию распределения  $f(v)$ .

Рассмотрим подпространство фазового пространства — *пространство скоростей* ( $v_x, v_y, v_z$ ). Плотность изобразительных точек в этом пространстве будет равна  $Nf(v)$ .

Количество точек в сферическом слое радиуса  $v$  толщиной  $dv$  (рис. 13.1)

$$dN = Nf(v)4\pi v^2 dv.$$

Вероятность попадания изобразительной точки в этот слой

$$dP = \frac{dN}{N} = f(v)4\pi v^2 dv;$$

плотность вероятности

$$F(v) = \frac{dP}{dv} = f(v)4\pi v^2.$$

Так как все направления равноправны,

$$f(v) = \varphi_1(v_x)\varphi_2(v_y)\varphi_3(v_z), \quad (13.1)$$

функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  одинаковы:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ . Прологарифмируем выражение (13.1):

$$\ln f(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z). \quad (13.2)$$

Продифференцируем это выражение по  $v_x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_x} &= \frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x}; \\ \frac{\partial v}{\partial v_x} &= \frac{\partial(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2})}{\partial v_x} = \frac{2v_x}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}; \\ \frac{1}{f(v)} f'_v \frac{v_x}{v} &= \frac{1}{\varphi(v_x)} \varphi'_{v_x} \Rightarrow \frac{f'_v}{vf(v)} = \frac{\varphi'_{v_x}}{v_x \varphi(v_x)}. \end{aligned}$$

Аналогично, продифференцировав (13.2) по  $v_y, v_z$ , получим

$$\frac{f'_v}{vf(v)} = \frac{\varphi'_{v_y}}{v_y \varphi(v_y)}, \quad \frac{f'_v}{vf(v)} = \frac{\varphi'_{v_z}}{v_z \varphi(v_z)}.$$



Получается, что  $\frac{f'_v}{vf(v)} = \text{const}$ . Положим  $\frac{f'_v}{vf(v)} = -\alpha$ . Тогда

$$\frac{1}{v_x \varphi(v_x)} \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x} = -\alpha.$$

Решим это дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{d\varphi(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x dv_x \Rightarrow \ln \varphi(v_x) = -\frac{\alpha v_x^2}{2} + \text{const} \Rightarrow \varphi(v_x) = A e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}.$$

Аналогично

$$\varphi(v_y) = A e^{-\frac{\alpha v_y^2}{2}}, \quad \varphi(v_z) = A e^{-\frac{\alpha v_z^2}{2}}.$$

По формуле (13.1)

$$f(v) = A^3 e^{-\frac{\alpha}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = A^3 e^{-\frac{\alpha v^2}{2}}. \quad (13.3)$$

Выразим коэффициент  $A$  из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_y) dv_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_z) dv_z = 1 \Rightarrow A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x = 1.$$

Определённый интеграл в последнем выражении поддаётся вычислению в элементарных функциях; в результате получим  $A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$ . Подставим этот коэффициент в выражение для  $f(v)$  (13.3):

$$f(v) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha v^2}{2}}.$$

Найдём  $\alpha$ . С одной стороны,

$$\frac{m_0 \langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} kT \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m_0}$$

(ср. РАЗДЕЛ 2.3.2), здесь  $m_0$  — масса молекулы. С другой стороны,

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x.$$

Отсюда можно получить

$$\alpha = \frac{m_0}{kT}.$$

Итак,

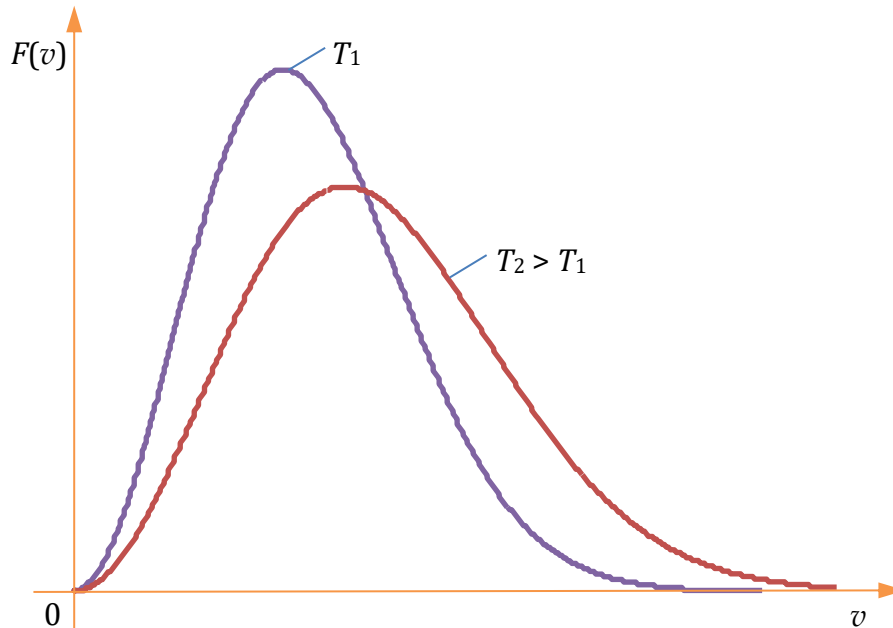
$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}},$$

аналогичные выражения для  $\varphi(v_y)$ ,  $\varphi(v_z)$ ;

$$f(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}; \quad (13.4)$$

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

— **функция распределения Максвелла**. График этой функции представлен на [рис. 13.2](#).



**Рис. 13.2**

Физический смысл площади под этой кривой на участке  $(v_1, v_2)$  — доля молекул со скоростями от  $v_1$  до  $v_2$

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} F(v) dv.$$

При нагревании доля молекул с большими скоростями возрастает, а доля молекул с малыми скоростями убывает.

**Наивероятнейшая скорость** молекулы идеального газа — скорость, соответствующая максимуму функции распределения  $F(v)$ . Вычислим её:

$$\left. \frac{dF(v)}{dv} \right|_{v=v_{\text{вер}}} = 0 \Rightarrow 2v_{\text{вер}} e^{-\frac{m_0 v_{\text{вер}}^2}{2kT}} + v_{\text{вер}}^2 \left( -\frac{m_0 2v_{\text{вер}}}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v_{\text{вер}}^2}{2kT}} = 0,$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

**Средняя скорость** молекулы идеального газа:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

**Средняя квадратичная скорость** молекулы идеального газа:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m_0},$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Видно, что  $v_{\text{вер}} < \langle v \rangle < v_{\text{кв}}$  (рис. 13.3).

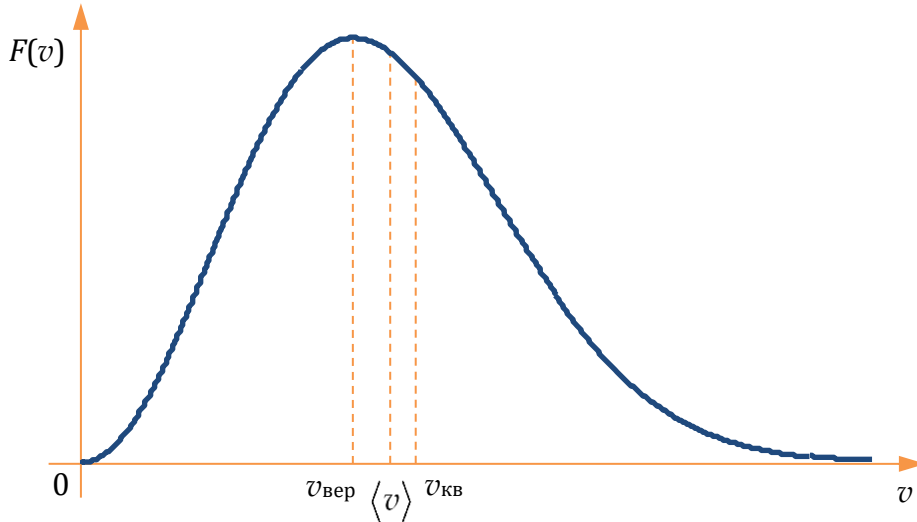


Рис. 13.3

### 2.7.3. Распределение молекул идеального газа по энергиям

Найдём функцию распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям  $\varepsilon$  —  $F(\varepsilon)$  (здесь имеется в виду кинетическая энергия поступательного движения). Число молекул с энергиями от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$

$$dN_\varepsilon = NF(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (13.5)$$

Эти энергии соответствуют скоростям молекул от  $v$  до  $v + dv$ . Число молекул  $dN_\varepsilon$  можно выразить и через функцию распределения Максвелла  $F(v)$ <sup>39</sup>:

$$dN_\varepsilon = NF(v)dv. \quad (13.6)$$

Приравняв (13.5) и (13.6), получим

$$F(\varepsilon)d\varepsilon = F(v)dv;$$

$$F(\varepsilon) = F(v) \frac{dv}{d\varepsilon}. \quad (13.7)$$

Для того чтобы найти  $F(\varepsilon)$ , выразим скорость молекулы и функцию распределения Максвелла через кинетическую энергию:

$$\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}}, \quad \frac{dv}{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2m_0}\sqrt{\varepsilon}};$$

$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \frac{2\varepsilon}{m_0} e^{-\frac{m_0}{2kT} \frac{2\varepsilon}{m_0}} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi}{m_0} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{2kT}}.$$

<sup>39</sup> Функции  $F(v)$  и  $F(\varepsilon)$  — это разные функции. Принято обозначать их одним символом.

Из (13.7) получим

$$F(\varepsilon) = \frac{m_0^{3/2} 2^3 \pi}{2^{3/2} \pi^{3/2} (kT)^{3/2} m_0} \varepsilon \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{2^{1/2} m_0^{1/2} \sqrt{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

$$F(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

График этой функции показан на рис. 13.4.

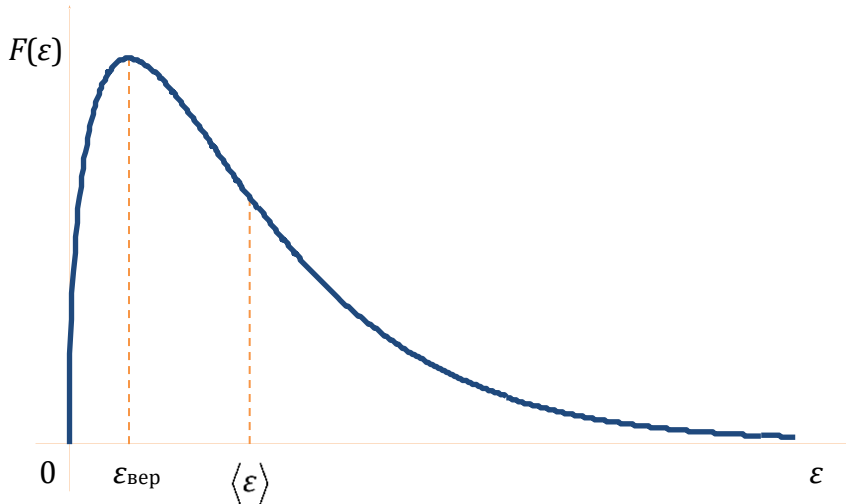


Рис. 13.4

### Дополнительное задание

Доказать, что наиболее вероятное значение кинетической энергии молекулы  $\varepsilon_{\text{вер}} = \frac{kT}{2}$ , среднее значение энергии  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3kT}{2}$ .

### 2.7.4. Барометрическая формула

Рассмотрим столб идеального газа (молярная масса равна  $\mu$ ) в однородном гравитационном поле (ускорение свободного падения  $\vec{g}$ ) при постоянной температуре  $T$  (изотермическая атмосфера). Найдём зависимость давления и концентрации газа от высоты.

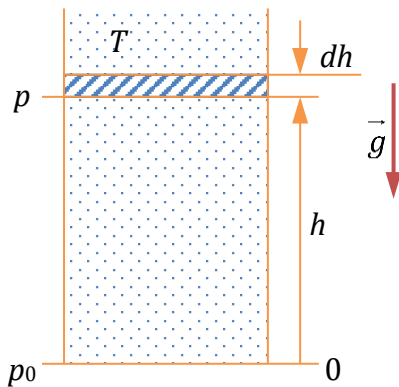


Рис. 13.5

Выделим тонкий слой газа толщиной  $dh$  на высоте  $h$  (рис. 13.5). Давление этого слоя

$$dp = -\rho g dh,$$

$\rho$  — плотность газа, знак «-» означает, что давление уменьшается с ростом высоты.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} \Rightarrow dp = -\frac{p\mu g}{RT} dh.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g h}{RT},$$

$p_0$  — давление столба газа на нулевом уровне,

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

— **барометрическая формула**. Можно записать эту формулу в виде

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

где  $\rho_0$  — плотность газа на нулевом уровне, и, учитывая, что  $p = nkT$ ,

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

$n_0$  — концентрация молекул газа на нулевом уровне.

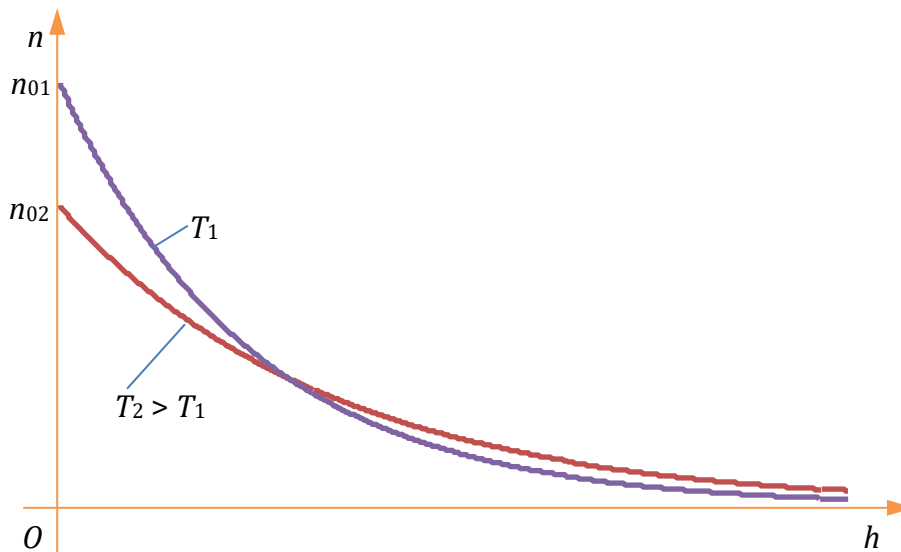
Эти формулы можно также представить через массу молекулы  $m_0$ :

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}, \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}, \quad n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}$$

или через потенциальную энергию молекулы  $\varepsilon_{\text{п}} = m_0 gh$  (см. [РАЗДЕЛ 1.8.4](#)):

$$p = p_0 e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}}, \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}}, \quad n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}}.$$

Графики зависимости концентрации газа от высоты при двух разных температурах и одинаковом давлении на нулевом уровне показаны на [РИС. 13.6](#).



**Рис. 13.6**

**Демонстрация:** Модель распределения молекул по высоте в поле силы тяжести

### 2.7.5. Распределение Максвелла–Больцмана

**Распределение Больцмана:**

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}},$$

здесь  $\varepsilon_{\text{п}}$  — потенциальная энергия молекулы,  $n_0$  — концентрация молекул газа на нулевом уровне потенциальной энергии. Эту формулу мы вывели в [ПРЕДЫДУЩЕМ РАЗДЕЛЕ](#) для однородного гравитационного поля, но можно показать, что распределение Больцмана справедливо для любого потенциального поля.

Между распределениями Максвелла в форме (13.4) и Больцмана есть большое сходство, так как  $\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{\varepsilon_k}{kT}$ ,  $\varepsilon_k$  — кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

*Распределение Максвелла:*

$$dN_{\varepsilon_k} = N \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

*Распределение Больцмана:*

$$dN_{\varepsilon_n} = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} dx dy dz.$$

***Закон Максвелла-Больцмана:***

$$dN = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n_0 e^{-\frac{\varepsilon_k + \varepsilon_n}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$$

— число частиц в элементе объёма фазового пространства  $(dx, dy, dz, dv_x, dv_y, dv_z)$ .

## Лекция 14

## 2.8. Реальный газ. Фазовые переходы

## 2.8.1. Модель реального газа Ван-дер-Ваальса. Уравнение Ван-дер-Ваальса

**Модель реального газа** (в отличие от идеального газа):

1. Молекулы имеют конечный объём.
2. Молекулы притягиваются на не слишком больших расстояниях друг от друга ( $r < r_1$ ). Здесь  $r_1$  — **радиус молекулярного действия**, сфера радиуса  $r_1$  — **сфера молекулярного действия**.

Аппроксимация экспериментальной зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул моделью реального газа показана на [РИС. 14.1](#).

Получим уравнение состояния реального газа, основываясь на этих двух положениях, исходя из уравнения состояния идеального газа — уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV_\mu = RT$$

(для 1 моля), здесь  $V_\mu$  — **молярный объём** — объём, занимаемый 1 молем газа.

1. При переходе к модели реального газа

$$V_\mu \rightarrow V_\mu - b,$$

где  $b$  — объём, занимаемый молекулами 1 моля газа;

$$[b] = \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

2. Внесём поправку на силы притяжения на межмолекулярных расстояниях порядка радиуса молекулярного действия. В слое толщиной  $r_1$  межмолекулярное притяжение оттягивает молекулы от стенки сосуда ([рис. 14.2](#)). Слой, прилегающий к стенке сосуда, оттягивается от неё с силой  $\bar{F}'$ . Модуль этой силы пропорционален произведению числа молекул в этом слое и числа молекул в слое, который его притягивает, т. е. квадрату общего числа  $N$  молекул:

$$F' \sim N^2 \sim n^2 \sim \frac{1}{V_\mu^2}$$

( $n$  — концентрация молекул газа), а поправка к давлению пропорциональна модулю этой силы:

$$p \rightarrow p + \frac{a}{V_\mu^2},$$

$$[a] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}.$$

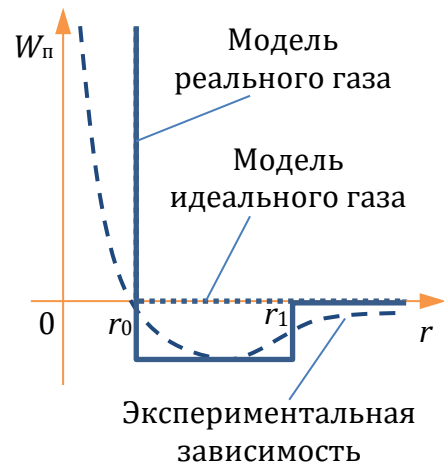


Рис. 14.1

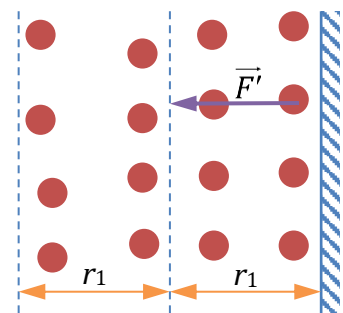


Рис. 14.2

**Уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа):**

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT, \quad (14.1)$$

$a$  и  $b$  — **постоянные Ван-дер-Ваальса** — характеристики газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для  $\nu$  молей газа:

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT.$$

**Внутренняя энергия реального газа**

$$U = \frac{i}{2} \nu RT - \frac{a\nu^2}{V}.$$

Поправка  $-\frac{a\nu^2}{V}$  обусловлена потенциальной энергией притяжения молекул.

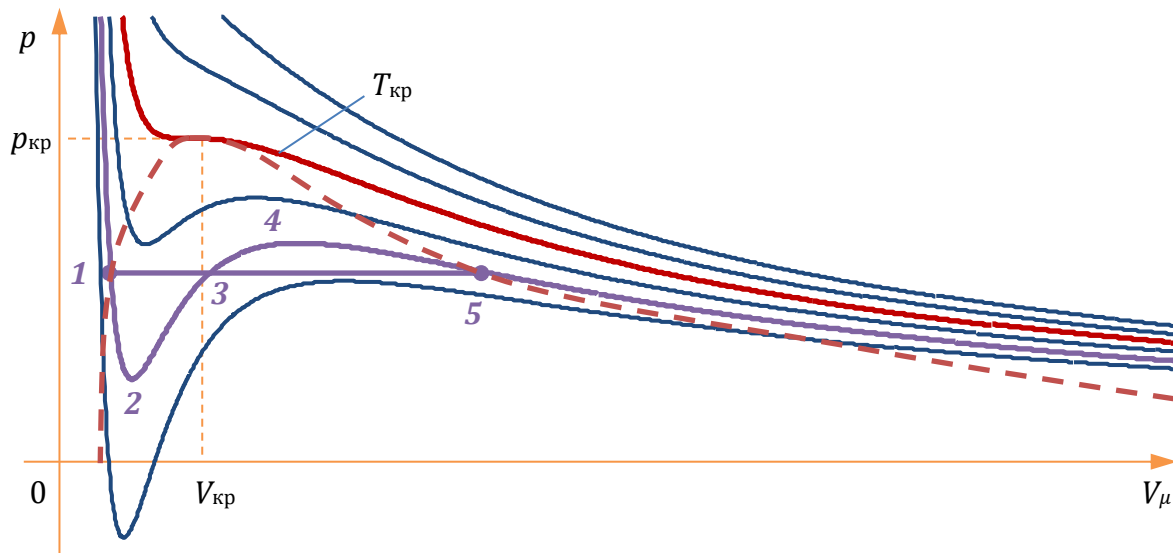
### 2.8.2. Изотермы реального газа

**Фаза** в термодинамике — совокупность однородных, одинаковых по всем своим свойствам частей термодинамической системы.

Представим уравнение Ван-дер-Ваальса (14.1) в виде явной зависимости  $p(V_\mu)$ :

$$p = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2}.$$

Графики этой зависимости при разных температурах представлены на [рис. 14.3](#).



**Рис. 14.3**

Видно, что при низких температурах кривая  $p(V_\mu)$  имеет по два экстремума, а при более высоких — зависимость  $p(V_\mu)$  монотонна. Пограничная изотерма — **критическая** — имеет один горизонтальный перегиб (кривая красного цвета на [рис. 14.3](#)). Состояние газа с параметрами, соответствующими этой точке, называется **критическим**. Параметры критического состояния можно найти из условий



$$\begin{cases} \frac{dp}{dV_\mu} = 0, \\ \frac{d^2p}{dV_\mu^2} = 0. \end{cases}$$

Проведя преобразования, получим

$$V_{\text{кр}} = 3b, T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}, p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}.$$

В реальности зависимости давления от объёма с двумя экстремумами не наблюдаются. Вещество, в котором давление растёт с ростом объёма при постоянной температуре, не может быть стабильным. В таких областях вещество становится неоднородным и расслаивается на две фазы.

Состояния, в которых с ростом давления растёт объём, нестабильны и не реализуются (участок **2-3-4** одной из кривых на [рис. 14.3](#)). Их заменяет прямой участок **1-5**.

Перечислим, в каком состоянии находится вещество на разных участках изотермы Ван-дер-Ваальса:

**1-5** — *насыщенный пар* — газ, находящийся в термодинамическом равновесии со своей жидкостью, и *жидкость*;

**1-2** — *перегретая жидкость*;

**4-5** — *пересыщенный пар*<sup>40</sup>.

Критическая температура — это температура, при которой стирается различие между жидкостью и газом<sup>41</sup>. При температуре больше критической принципиально невозможно перевести газ в жидкое состояние.

Критическая температура воды:  $t_{\text{кр}} = 374^\circ\text{C}$ .

На [рис. 14.4](#) показано, в какой фазе находится вещество на разных участках диаграммы ( $p, V$ ). Обозначения: **Г** — газ, **Ж** — жидкость, **П** — пар, **К** — критическая точка.

<sup>40</sup> Перегретую жидкость и пересыщенный пар можно получить, если нагревать жидкость (или, соответственно, охлаждать пар) очень осторожно, так чтобы в жидкости (паре) не образовывались зародыши газообразной (жидкой) фазы, т. е. в среде должны отсутствовать неоднородности, а также следует избегать механических возмущений.

<sup>41</sup> Термин «пар» используется для обозначения газообразного состояния при температурах ниже критической, а «газ» — при температурах, соответственно, выше критической.

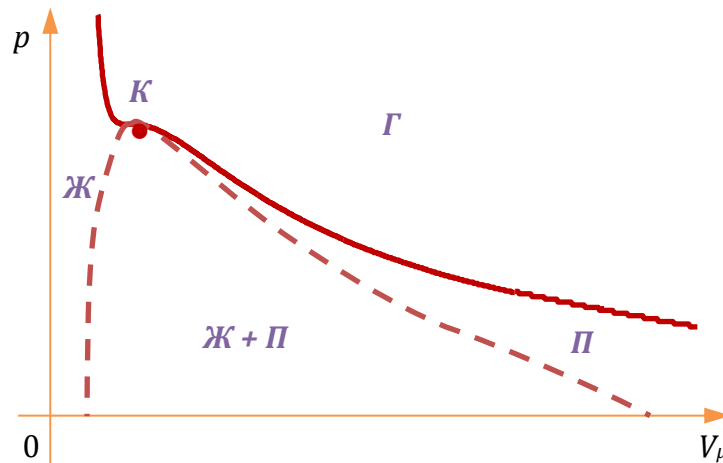


Рис. 14.4

**Демонстрация:** Критическое состояние эфира

### 2.8.3. Диаграммы состояния вещества

Разные фазы одного и того же вещества могут находиться в термодинамическом равновесии друг с другом. При этом каждому значению давления соответствует своё значение температуры. Совокупность равновесных состояний двух и более фаз изображается на диаграммах ( $p, T$ ) (рис. 14.5).

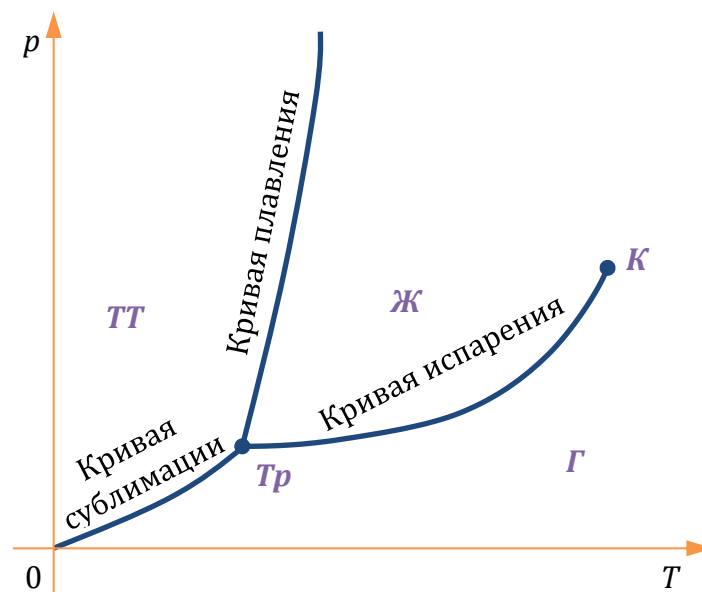


Рис. 14.5. Фазовая диаграмма вещества

Обозначения на рис. 14.5: Г — газ, Ж — жидкость, ТТ — твёрдая фаза, К — критическая точка, Тр — тройная точка.

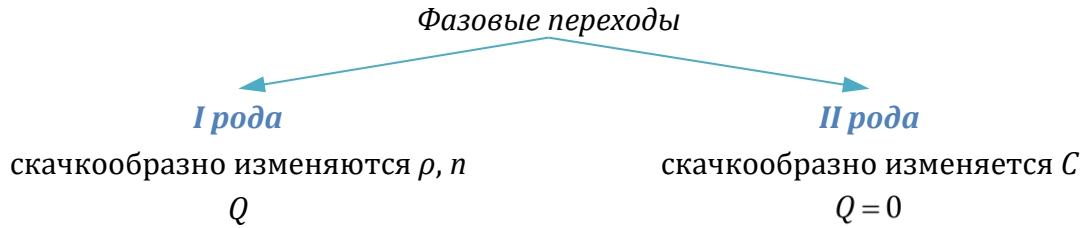
**Тройная точка** — единственная точка на фазовой диаграмме, в которой три фазы вещества находятся в термодинамическом равновесии.

Для воды  $p_{\text{тр}} = 6,4 \cdot 10^2 \text{ Па} = 5 \text{ мм рт. ст.}$ ;  $T_{\text{тр}} = 273,15 \text{ К}$  (точно<sup>42</sup>).

### 2.8.4. Фазовые переходы

**Фазовой переход** — переход вещества из одной фазы к другой.

<sup>42</sup> Единственность тройной точки делает её удобной для установления эталона температуры.

**ПРИМЕРЫ:**

сублимация, кипение, переход вещества из одной кристаллической модификации в другую, переход вещества из сверхпроводящего состояния в нормальное

**ПРИМЕРЫ:**

переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, из нормального состояния в сверхпроводящее

**Теплота фазового перехода**  $Q$  (характеризует переходы I рода) — количество теплоты, выделяемое (поглощаемое) веществом при фазовом переходе.

**Удельная теплота фазового перехода** — теплота фазового перехода, приходящаяся на вещество единичной массы:

$$\lambda = \frac{Q}{m},$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

## 2.9. Неравновесные процессы

### 2.9.1. Длина свободного пробега молекулы идеального газа

Молекулы идеального газа — это упругие шарики. Двигаясь хаотически, они сталкиваются между собой.

Размер этих шариков — **эффективный диаметр молекулы** (рис. 14.6);  $d = d(T)$  — слабая функция температуры. **Эффективное сечение молекулы**

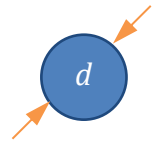


Рис. 14.6

$$\sigma = \frac{\pi d^2}{4}.$$

**Средняя длина свободного пробега** молекулы идеального газа — среднее расстояние, которое молекула проходит между двумя последовательными соударениями.

Найдём эту величину. Будем считать молекулы неподвижными, движется только «тень» одной молекулы. «Тень» столкнётся со всеми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра диаметром  $2d$  (рис. 14.7). Число этих молекул  $\Delta N$  равно числу столкновений «тени»

$$\Delta N = \pi d^2 \Delta l \cdot n,$$

здесь  $n$  — концентрация молекул газа,  $\Delta l$  — длина цилиндра. Средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\Delta l}{\Delta N} = \frac{1}{\pi d^2 n}.$$

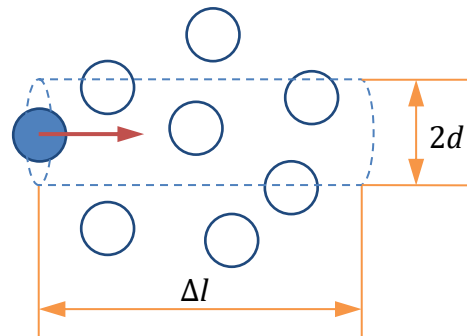


Рис. 14.7

На самом деле молекулы не неподвижны. Теперь рассмотрим движение молекулы относительно других молекул. Относительная скорость молекулы

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

$$v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Усредним:

$$\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle v^2 \rangle - 2 \langle v_1 v_2 \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rangle = 2 \langle v^2 \rangle.$$

Среднеквадратичные скорости пропорциональны среднеарифметическим, поэтому

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle \sim \sqrt{\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle} = \sqrt{2} v_{\text{кв}} \sim \sqrt{2} \langle v \rangle;$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

*Среднее время между двумя последовательными соударениями молекулы*

$$\langle \tau \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle}.$$

*Среднее число столкновений молекулы в единичный промежуток времени*

$$\langle z \rangle = \frac{1}{\langle \tau \rangle} = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle} = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

### Численная оценка

$$d = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}; n = 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \Rightarrow \langle \lambda \rangle = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$\text{при } T = 300 \text{ К } \langle v \rangle = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \langle z \rangle = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^9 (\text{с}^{-1}); \langle \tau \rangle = 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

### 2.9.2. Эмпирические уравнения явлений переноса

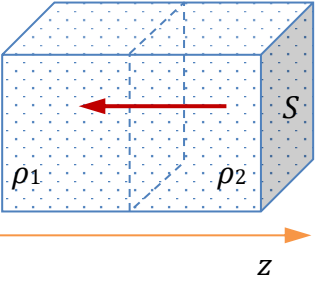
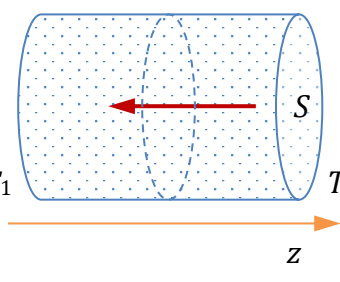
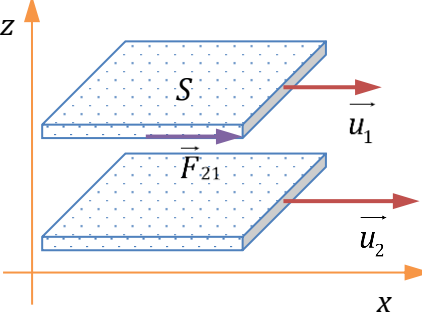
**Явления переноса (кинетические явления)** — явления, происходящие в процессе установления термодинамического равновесия в макросистеме.

Три основных кинетических явления, их эмпирические уравнения с выводом и соответствующие характеристики сред представлены в [ТАБЛИЦЕ 14.1](#).

**Таблица 14.1**

#### Явления переноса

<i>Диффузия</i>	<i>Теплопроводность</i>	<i>Вязкость (внутреннее трение)</i>
выравнивание концентраций (плотности) в смеси нескольких веществ, обусловленное тепловым движением молекул — перенос массы	выравнивание температур, обусловленное тепловым движением молекул — перенос энергии	выравнивание скоростей упорядоченного движения слоёв жидкости или газа, обусловленное тепловым движением молекул — перенос импульса

 <p style="text-align: center;"><math>(\rho_2 &gt; \rho_1)</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>(T_2 &gt; T_1)</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>(u_2 &gt; u_1)</math></p>
<p><math>\Delta m</math> — масса вещества, переносимого через площадку <math>S</math>;</p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta m \sim S,</math> <math>\Delta m \sim \Delta t,</math></p> <p><math>\Delta t</math> — время;</p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta m \sim  \text{grad } \rho ;</math></p> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\Delta m = -D \frac{\partial \rho}{\partial z} S \Delta t</math> </div> <p>— <b>закон Фика.</b></p> <p>Знак «-» означает, что перенос вещества происходит в сторону уменьшения плотности (концентрации).</p>	<p><math>\Delta Q</math> — энергия, переносимая через площадку <math>S</math>;</p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta Q \sim S,</math> <math>\Delta Q \sim \Delta t,</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta Q \sim  \text{grad } T ;</math></p> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\Delta Q = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial z} S \Delta t</math> </div> <p>— <b>закон Фурье.</b></p> <p>Знак «-» означает, что поток тепла идёт в сторону уменьшения температуры.</p>	<p><math>f_x</math> — модуль силы, с которой один слой площадью <math>S</math> действует на другой;</p> <p style="text-align: center;"><math>f_x \sim S,</math> <math>f_x \sim  \text{grad } u ;</math></p> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">f_x = \eta \left  \frac{\partial u}{\partial z} \right  S</math> </div> <p>— <b>закон Ньютона.</b></p>
<p><math>D</math> — <b>коэффициент диффузии;</b></p> <p style="text-align: center;"><math>[D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.</math></p>	<p><math>\varkappa</math> — <b>коэффициент теплопроводности;</b></p> <p style="text-align: center;"><math>[\varkappa] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.</math></p>	<p><math>\eta</math> — <b>коэффициент вязкости;</b></p> <p style="text-align: center;"><math>[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.</math></p>
<p>Для идеального газа:</p>		
$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$	$\varkappa = \frac{1}{3} c_v \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$	$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$
<p><b>Численная оценка</b></p>		
<p><math>\langle \lambda \rangle = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \langle v \rangle = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \rho = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \mu = 2,8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}</math></p>		
$D = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} = 7 \cdot 10^{-5} \left( \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right)$	$\varkappa = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{2,8 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-2} \left( \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right)$	$\eta = \frac{1}{3} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 7 \cdot 10^{-5} (\text{Па} \cdot \text{с})$

**Демонстрации:** 1) Теплопроводность твёрдых тел (медь и железо в парафине)  
2) Внутреннее трение в воздухе (два диска)

## Лекция 15

## 2.9.3. Молекулярно-кинетическая теория явлений переноса (на примере внутреннего трения)

Рассмотрим два слоя газа, расстояние между которыми равно  $2\langle\lambda\rangle$ , движущихся параллельно друг другу со скоростями  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  ( $u_1, u_2 \ll \langle v \rangle$ ) (рис. 15.1).

Благодаря тепловому движению молекулы переходят из одного слоя в другой, соударяются друг с другом и обмениваются импульсами (см. «АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР»), в т. ч. компонентами импульса, соответствующими упорядоченному движению, поэтому импульсы упорядоченного движения слоёв выравниваются.

Среднее расстояние между точками, в которых происходят последовательные столкновения молекулы, равно  $\langle\lambda\rangle$ . Поэтому положим  $u_1 = u(z - \langle\lambda\rangle)$ ,  $u_2 = u(z + \langle\lambda\rangle)$ .

Потери импульса слоя **1** за время  $\Delta t$

$$\Delta p_1' = -\Delta N_{12} m_0 u_1,$$

где  $m_0$  — масса молекулы,  $\Delta N_{12}$  — число молекул, перешедших из слоя **1** в слой **2**; импульс, приобретённый слоем **1**,

$$\Delta p_1'' = \Delta N_{21} m_0 u_2,$$

где  $\Delta N_{21}$  — число молекул, перешедших из слоя **2** в слой **1**. Изменение импульса слоя **1**

$$\Delta p_1 = -\Delta N_{12} m_0 u_1 + \Delta N_{21} m_0 u_2.$$

Найдём  $\Delta N_{12}$  и  $\Delta N_{21}$ :

$$\Delta N_{12} = \frac{n}{6} S \langle v \rangle \Delta t = \Delta N_{21}$$

(ср. 2.2.3),  $n$  — концентрация молекул газа,  $\Delta N = \text{const}$ . Из этого следует, что

$$\Delta p_1 = \frac{m_0 n}{6} S \langle v \rangle (u_2 - u_1) \Delta t;$$

так как  $m_0 n = \rho$  — плотность газа,

$$f_x = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} S \langle v \rangle \rho (u_2 - u_1);$$

$$u_2 - u_1 = \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z,$$

$\Delta z = 2\langle\lambda\rangle$ , поэтому

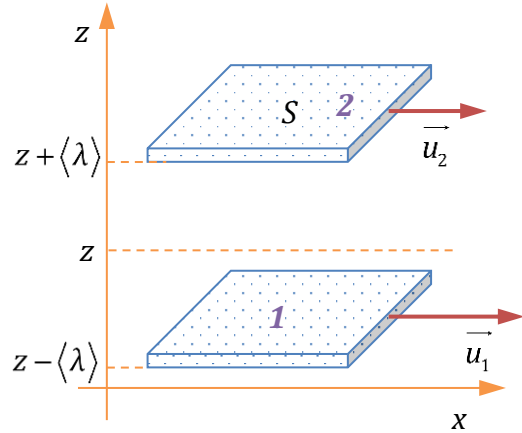


Рис. 15.1

$$f_x = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| S.$$

По закону Ньютона  $f_x = \eta \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| S$ , откуда

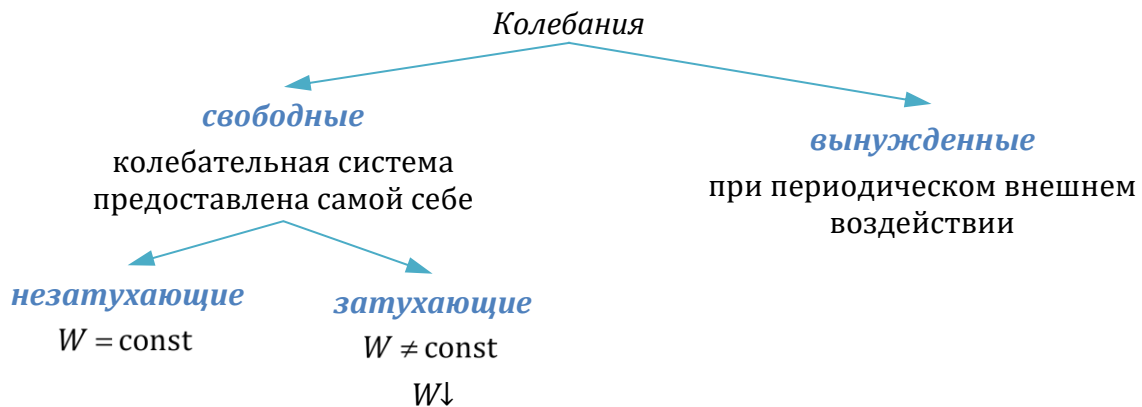
$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle.$$

# 1. Механика<sup>43</sup>

## 1.14. Механические колебания<sup>44</sup>

### 1.14.1. Виды колебаний

**Колебания** — периодические изменения какой-либо физической величины во времени. Система тел, в которой происходят колебания, — **колебательная система**. Колебания могут иметь разную физическую природу, но схожее математическое описание. Сейчас мы будем рассматривать механические колебания.



### 1.14.2. Свободные незатухающие (собственные) колебания

Рассмотрим свободные колебания *пружинного маятника* (трения нет) в горизонтальном направлении. Груз — материальная точка массы  $m$  — колеблется на пружине жёсткостью  $k$  (рис. 15.2), после того как его вывели из положения равновесия (точка  $O$ ) и предоставили систему самой себе.

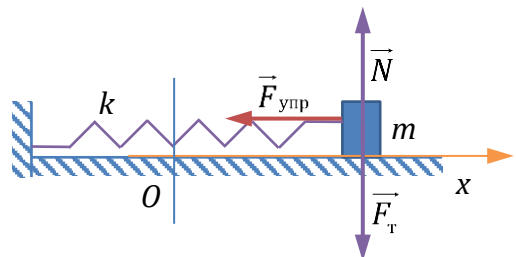


Рис. 15.2

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}}.$$

Спроецируем это уравнение на ось  $x$ . Так как  $F_{\text{упр}x} = -kx$ ,

$$ma_x = -kx.$$

По определению,  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Получим дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Обозначим

<sup>43</sup> Материал параграфов 1.14 и 1.15 выносится на конец I семестра.

<sup>44</sup> Материал параграфов 1.14 и 1.15 входит в экзаменационную программу II семестра. Материал лекций 15 (раздел «Механические колебания»), 16 и 17 может быть, по обстоятельствам, прочитан во II семестре перед темой «**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ**» или параллельно материалу этой темы.



$$\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (15.1)$$

— *дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний.*

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение<sup>45</sup>

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (15.2)$$

содержит две произвольные константы  $A$  и  $\varphi$ . Данные константы определяются из начальных условий.

Пусть при  $t = 0$   $x = x_0$ ,  $v_x = 0$  (груз оттянули на  $x_0$  и отпустили без начальной скорости). Первая производная функции (15.2) — проекция скорости груза на ось  $x$

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (15.3)$$

Подставим начальные условия в функции (15.2) и (15.3) и найдём константы  $A$  и  $\varphi$ :

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = A \cos \varphi, \\ v_x(0) = -A\omega_0 \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 = A \cos \varphi, \\ 0 = -A\omega_0 \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0, \\ A = x_0. \end{array} \right.$$

Частное решение дифференциального уравнения (15.1) при данных начальных условиях

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t;$$

проекции скорости и ускорения на ось  $x$

$$v_x(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t, \quad a_x(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t.$$

Графики функций  $x(t)$ ,  $v_x(t)$ ,  $a_x(t)$  представлены на рис. 15.3. Решение (15.2) — *гармоническая функция.*

В общем решении (15.2):

$A$  — *амплитуда* колебаний — максимальное отклонение колеблющейся величины от равновесного значения;

$\omega_0$  — *циклическая частота*;

выражение в скобках (аргумент косинуса) — *фаза* колебаний;

$\varphi$  — *начальная фаза.*

Введём другие характеристики гармонических колебаний:

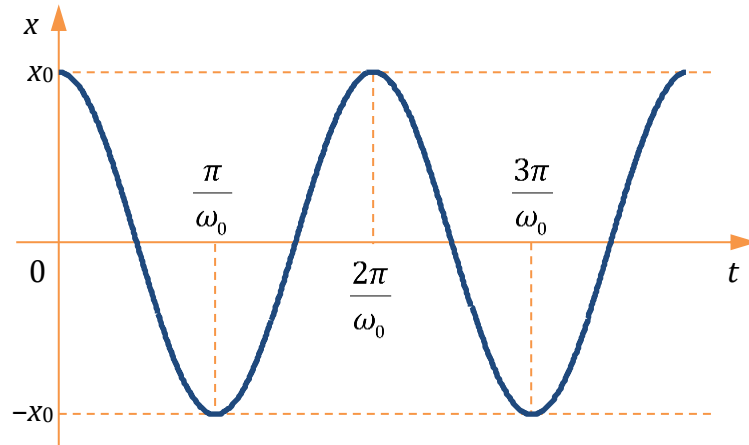
*период*  $T_0$  — время, за которое колебательная система совершает одно полное колебание;

*частота*  $\nu_0$  — число полных колебаний в единичный промежуток времени;

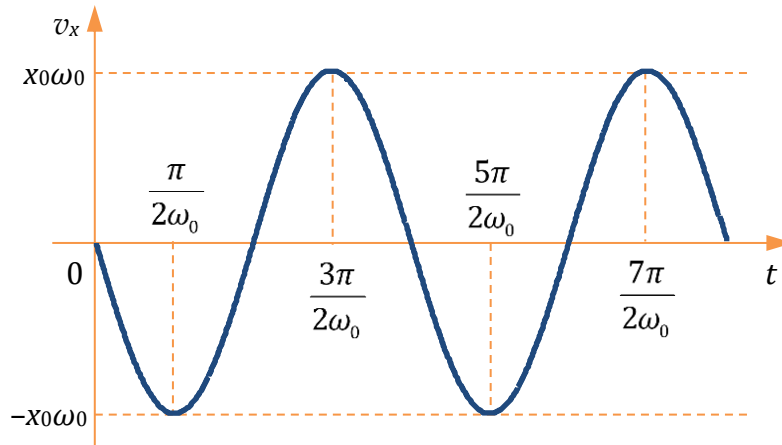
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0};$$

<sup>45</sup> Студентам предлагается проверить *самостоятельно*, является ли формула (15.2) общим решением дифференциального уравнения (15.1).

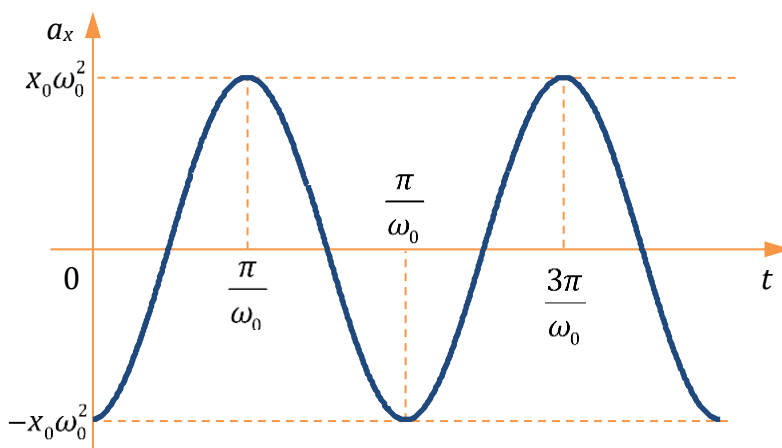
$$[\omega_0] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}, [\nu_0] = \text{Гц (герц)}.$$



а



б



в

Рис. 15.3

Энергия колебаний (механическая энергия колебательной системы)

$$W = W_k + W_n = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$$

(студенты проверяют выполнение этого равенства *самостоятельно*).

**Демонстрация:** Сравнение периодов колебаний двух грузов на пружинах

### ПРИМЕРЫ

#### 1. Математический маятник

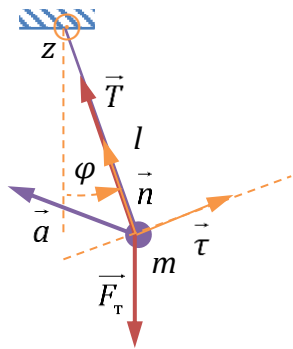


Рис. 15.4

**Математический маятник** — материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в однородном гравитационном поле.

Найдём период колебаний математического маятника массы  $m$  на нити длиной  $l$  (рис. 15.4). Запишем II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{T}.$$

Спроецируем это уравнение на оси естественной системы координат:

$$ma_n = T - F_T \cos \varphi,$$

$$ma_\tau = -F_T \sin \varphi. \quad (15.4)$$

Груз вращается вокруг оси  $z$  по окружности радиуса  $l$ . Выразим тангенциальное ускорение маятника через угловое ускорение:

$$a_\tau = \varepsilon_z l, \quad (15.5)$$

а по определению

$$\varepsilon_z = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (15.6)$$

Подставим (15.5) и (15.6), а также  $F_T = mg$  в уравнение (15.4):

$$m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} l = -mg \sin \varphi,$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

При *малых углах*  $\sin \varphi \approx \varphi$  и это дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

— дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период колебаний математического маятника  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

зависит только от его длины.

## 2. Физический маятник

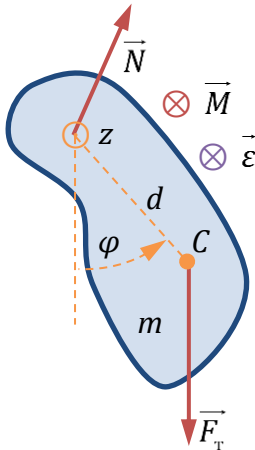


Рис. 15.5

**Физический маятник** — твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точки этого тела, не являющиеся его центром масс, в однородном гравитационном поле.

Пусть масса маятника равна  $m$ , его момент инерции относительно оси маятника равен  $I$ , расстояние между центром масс маятника и его осью  $z$  равно  $d$  (рис. 15.5). Найдём период колебаний маятника.

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{F_T} + \vec{M}_N$$

( $\vec{N}$  — сила реакции оси маятника). Спроецируем это уравнение на ось маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd \sin\varphi.$$

При малых углах  $\varphi \sin\varphi \approx \varphi$  и

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0.$$

Обозначив

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}},$$

получим дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний. Период колебаний  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

**Приведённая длина** физического маятника — длина математического маятника с периодом собственных колебаний, равным периоду собственных колебаний данного физического маятника.

**Демонстрация:** Физический маятник

Из приведённых выше примеров видно, что свободные незатухающие механические колебания будут гармоническими лишь при малых изменениях колеблющейся величины.

## Лекция 16

### 1.14.3. Свободные затухающие колебания

Рассмотрим пружинный маятник (см. 1.14.2), введя силу сопротивления в виде  $\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{v}$  — сила вязкого трения,  $r$  — положительная константа. Колебательная система изображена на [рис. 16.1](#).

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}.$$

В проекции на ось  $x$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Обозначим  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и

$$\frac{r}{m} \equiv 2\beta,$$

$\beta$  — коэффициент затухания;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (16.1)$$

— дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

Это также однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Вид его общего решения<sup>46</sup> зависит от величины коэффициента затухания.

1. Сильное затухание ( $\beta \geq \omega_0$ )

Общее решение дифференциального уравнения (16.1)

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

— аperiодическое решение, здесь  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные, определяемые из начальных условий. Колебаний нет, имеет место аperiодический процесс. Примерный график аperiодического процесса показан на [рис. 16.2](#).

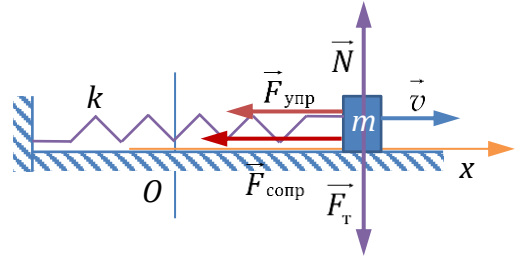


Рис. 16.1

<sup>46</sup> Можно провести решение дифференциального уравнения (16.1) через характеристическое уравнение.

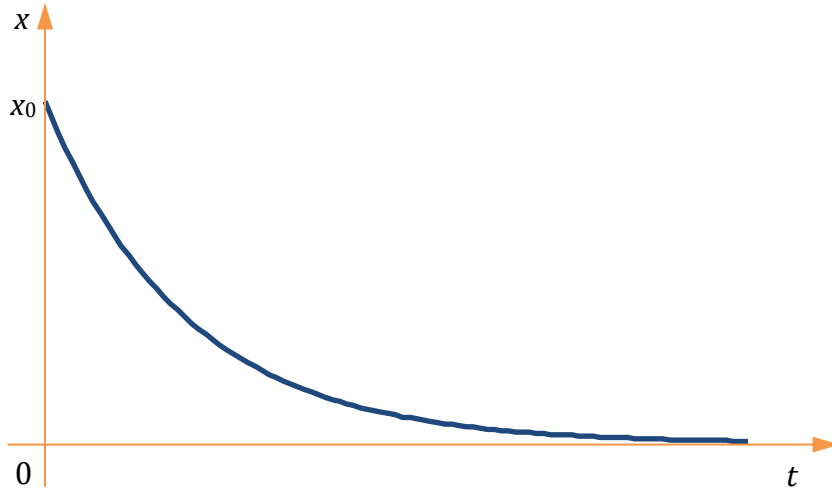


Рис. 16.2

## 2. Слабое затухание ( $\beta < \omega_0$ )

Общее решение дифференциального уравнения (16.1)

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (16.2)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

— *циклическая частота затухающих колебаний*.

Величины  $A_0$  и  $\varphi$  в решении (16.2) — это постоянные, определяемые из начальных условий. Заметим, что затухающие колебания не являются колебаниями в строгом смысле этого слова (см. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ**).

*Амплитуда затухающих колебаний*

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t};$$

*период затухающих колебаний*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

С другими характеристиками свободных затухающих колебаний познакомимся во II семестре (**РАЗДЕЛ 3.13.2**).

График решения (16.2) при  $\varphi = 0$  показан на **рис. 16.3**.

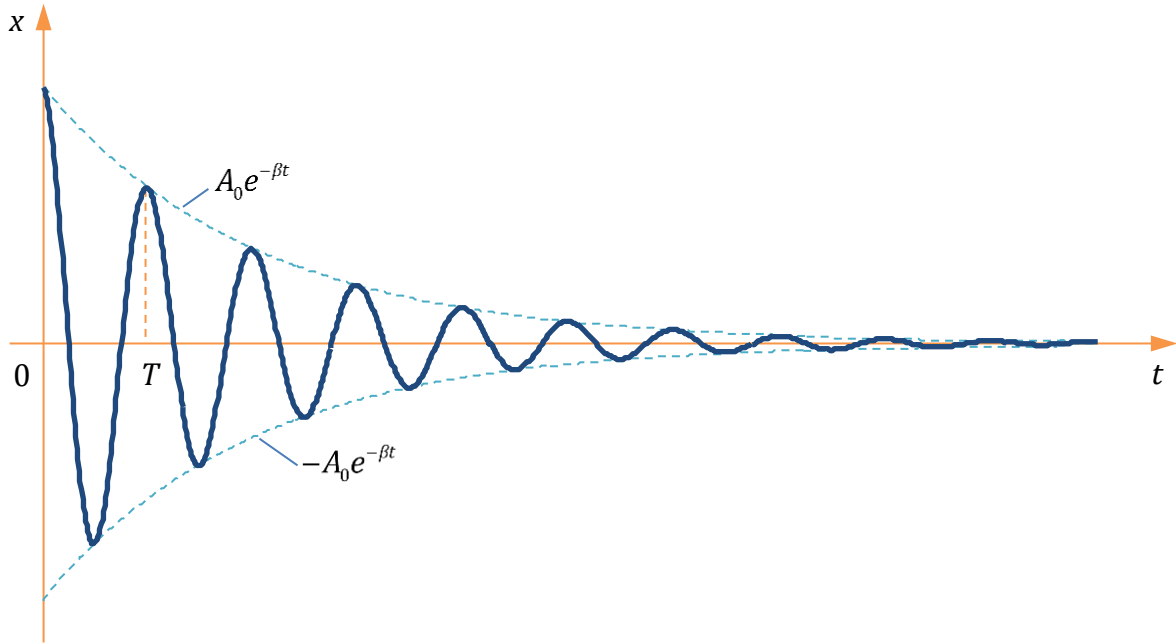


Рис. 16.3

**Демонстрация:** Запись незатухающих и затухающих колебаний маятника с песком

#### 1.14.4. Вынужденные колебания

Пусть пружинный маятник — механическая система, описанная в [РАЗДЕЛЕ 1.14.2](#), при наличии сопротивления, находится под воздействием, описываемым периодической силой

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \Omega t,$$

$\Omega$  — циклическая частота вынуждающей силы. Сила  $\vec{F}$  направлена горизонтально ([РИС. 16.4](#)).

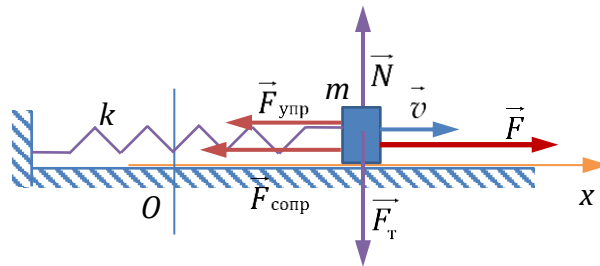


Рис. 16.4

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}.$$

В проекции на ось  $x$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t,$$

так как  $F_{\text{упр}x} = -kx$ ,  $F_{\text{сопр}x} = -rv_x$ . Получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

Обозначим  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{r}{m} = 2\beta$  и

$$\frac{F_0}{m} \equiv f_0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (16.3)$$

— *дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний.*

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение — сумма общего решения однородного уравнения (16.1) и частного решения неоднородного уравнения (16.3) (ищем решение при слабом затухании —  $\beta < \omega_0$ )

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t);$$

общее решение
частное решение  
ОДУ
НДУ

$$x_1(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi);$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (16.4)$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ;  $A_1$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования;  $A_2$  и  $\varphi_0$  найдём подстановкой решения (16.4) в дифференциальное уравнение (16.3).

Общее решение  $x_1(t)$  быстро затухает. В результате циклическая частота вынужденных колебаний будет равна циклической частоте  $\Omega$  вынуждающей силы.

Производные функции  $x_2(t)$

$$\frac{dx_2}{dt} = -A_2 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -A_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Подставим эти производные в исходное дифференциальное уравнение (16.3):

$$-\Omega^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta \Omega A_2 \sin(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \cos \Omega t. \quad (16.5)$$

Это равенство должно соблюдаться при любом  $t$ , в т. ч. тогда, когда  $\cos(\Omega t + \varphi_0) = 0$  либо  $\sin(\Omega t + \varphi_0) = 0$ . Преобразуем правую часть уравнения (16.3):

$$f_0 \cos \Omega t = f_0 \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_0) = f_0 [\cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \varphi_0 + \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin \varphi_0].$$

Подставим это выражение в (16.5) и приравняем нулю сначала  $\cos(\Omega t + \varphi_0)$ , а затем  $\sin(\Omega t + \varphi_0)$ :

$$\begin{cases} -\Omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = f_0 \cos \varphi_0, \\ -2\beta \Omega A_2 = f_0 \sin \varphi_0. \end{cases} \quad (16.6)$$

Разделив нижнее равенство на верхнее, получим

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на  $\varphi_0$ .

Найдём амплитуду  $A_2$  вынужденных колебаний из первого уравнения системы (16.6):



$$A_2 = \frac{f_0 \cos \varphi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}},$$

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (16.7)$$

Исследуем зависимость  $A_2(\Omega)$ . Значения функции на границах области определения

$$A_2(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad A_2(\infty) \rightarrow 0.$$

Функция (16.7) должна иметь максимум. Условие экстремума

$$\frac{dA_2}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{f_0 \left[ 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2)\Omega + 8\beta^2 \Omega^2 \right]}{\left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right]^{3/2}} = 0,$$

$$2\beta^2 \Omega - \Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) = 0 \Rightarrow \Omega(2\beta^2 - \omega_0^2 + \Omega^2) = 0;$$

при  $\Omega = 0$  функция  $A_2(\Omega)$  имеет минимум, а при

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (16.8)$$

— **резонансной циклической частоте** — максимум. Имеет место **резонанс** — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте.

Графики зависимостей  $A_2(\Omega)$  — **резонансные кривые** — при разных коэффициентах затухания изображены на [рис. 16.5](#).

Из формулы (16.8) и [рис. 16.5](#) видно, что  $\Omega_{\text{рез}} < \omega < \omega_0$ . При  $\beta \rightarrow 0$   $A_2 \rightarrow \infty$  — амплитуда вынужденных колебаний в системе без затухания неограниченно возрастает.

- Демонстрации:**
- 1) Резонанс на маятниках (шары)
  - 2) Резонанс на камертонах
  - 3) Колебания двигателя, закреплённого на пружине

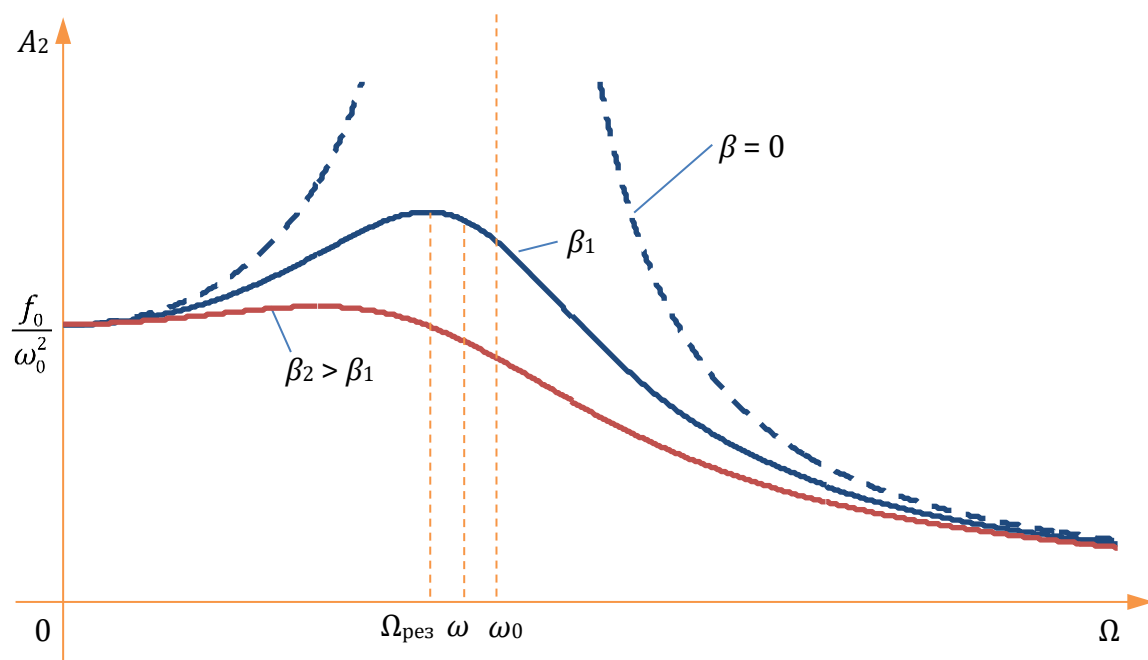


Рис. 16.5

Лекция 17<sup>47</sup>

## 1.15. Механические волны

## 1.15.1. Уравнение бегущей волны

**Волна** — любое распространяющееся в пространстве возмущение, т. е. изменение какой-либо физической величины с течением времени.

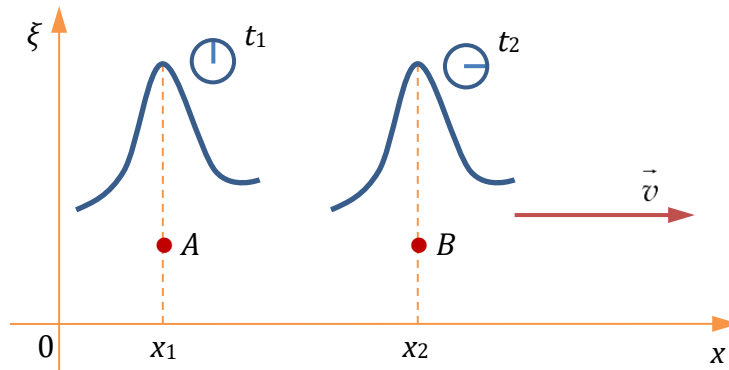


Рис. 17.1

Пусть величина  $\xi$  зависит от времени и это возмущение распространяется со скоростью  $\vec{v}$  — **скоростью распространения волны**;  $\xi = \xi(x, t)$ . Из точки  $A$  в точку  $B$  волна придёт через время  $t_2 - t_1$  (рис. 17.1):

$$\xi(x_2, t_2) = \xi(x_1, t_1) \Rightarrow \xi(x_2, t_2) = \xi\left(x_1, t_2 - \frac{x_2 - x_1}{v}\right). \quad (17.1)$$

Положим  $x_1 = 0$ . Тогда в уравнении (17.1)  $x_2 \rightarrow x$ ,  $t_2 \rightarrow t$ ,  $t_1 \rightarrow t - \frac{x}{v}$ :

$$\xi(0, t) = f(t), \quad \xi(x, t) = \xi\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t - \frac{x}{v}\right);$$

$$\boxed{\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)} \quad (17.2)$$

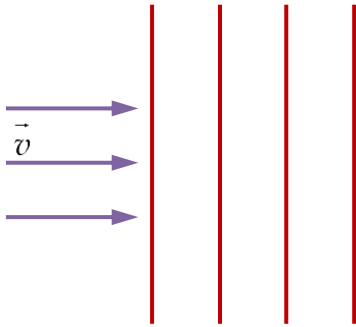
— **уравнение бегущей волны**;  $t - \frac{x}{v}$  — **фаза** волны.

## 1.15.2. Волновой фронт

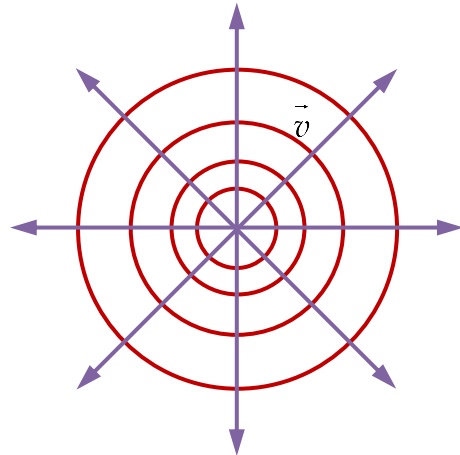
**Волновой фронт (волновая поверхность)** — геометрическое место точек, в которых в один и тот же момент времени колебания происходят в одинаковой фазе.

Часто встречающиеся примеры — плоский и сферический волновой фронт — показаны на рис. 17.2.

<sup>47</sup> Данная лекция «лишняя» в I семестре, так как действующим календарным графиком предусмотрено 16 лекций в семестре. Материал лекций 14–17 можно дать за три лекции или дать материал лекции 17 студентам на **самостоятельное изучение**. В будущих изданиях данного конспекта распределение материала по лекциям I семестра будет изменено.

**Плоская волна**

волновая поверхность — плоскость

**Сферическая волна**

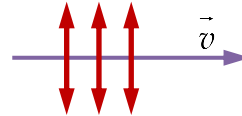
волновая поверхность — сфера

**Рис. 17.2****Волны****продольные**

колебания в направлении распространения волны

**поперечные**

колебания в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны

**ПРИМЕРЫ**

Звуковая волна

Электромагнитная волна

Волны на шнуре

Волны на поверхности жидкости

- Демонстрации:**
- 1) Распространение импульса по резиновой трубке
  - 2) Распространение волн на воде
  - 3) Волновая машина. Модель образования волны (поперечной и продольной)

**1.15.3. Гармоническая волна**

**Гармоническая (монохроматическая, синусоидальная) волна** — процесс распространения гармонических колебаний в пространстве.

Уравнение гармонических колебаний

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Уравнение бегущей волны

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right],$$

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \quad (17.3)$$

— уравнение плоской бегущей гармонической волны.

Характеристики гармонической волны

Скорость  $v$

Начальная фаза  $\varphi_0$

Циклическая частота  $\omega$

$$\text{Период } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Частота } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Амплитуда  $A$  — максимальное значение колеблющейся величины.

**Длина волны** — расстояние, которое волна проходит за время одного полного колебания:

$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}$$

**Волновое число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}, [k] = \text{м}^{-1}.$$

Запишем уравнение (17.9) через волновое число:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

«Мгновенная фотография» гармонической волны

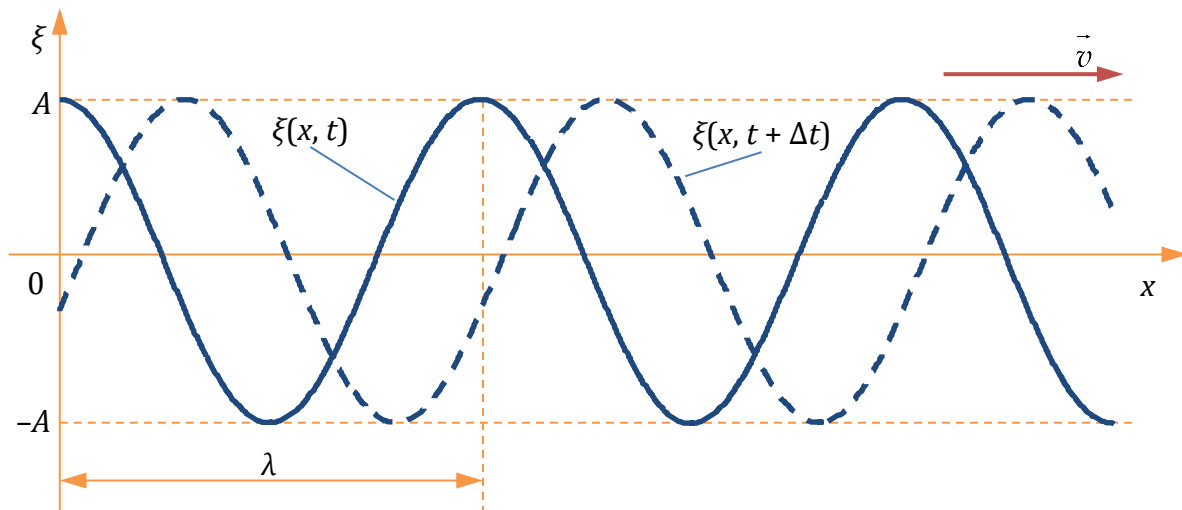


Рис. 17.3

В общем случае (при произвольной форме волнового фронта) уравнение бегущей гармонической волны

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

$\vec{k}$  — *волновой вектор*;  $\vec{k} \parallel \vec{v}$ .

#### 1.15.4. Волновое уравнение

Продифференцируем дважды уравнение плоской бегущей волны (17.2) по  $x$ , затем по  $t$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} f', \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f'';$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = f', \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f'';$$

сравнивая вторые производные по  $x$  и  $t$ , получим дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \quad (17.4)$$

— *волновое уравнение*.

Общее решение волнового уравнения:

$$\boxed{\xi(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)}$$

прямая волна

обратная волна

Вид функций  $f_1$  и  $f_2$  определяется начальными условиями.

## II семестр

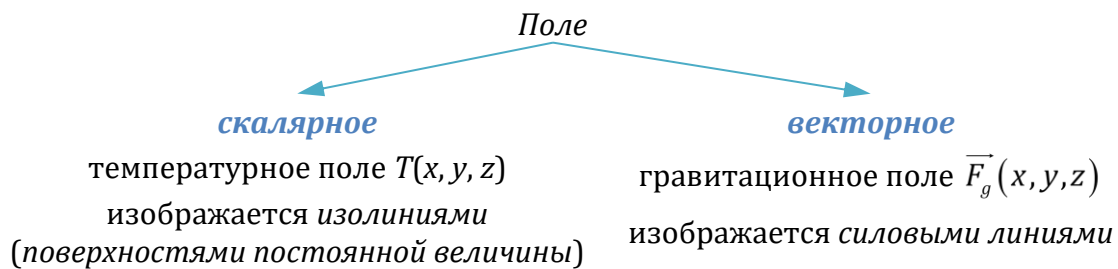
## Лекция 18

## 3. Электродинамика

## 3.1. Электромагнитное поле

## 3.1.1. Поле

**Поле** — любая изменяющаяся в пространстве физическая величина.



Силовые линии строят так, чтобы их густота была пропорциональна модулю векторного поля.

## 3.1.2. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

**Электрический заряд** — квантовое число, характеризующее частицу как источник электромагнитного взаимодействия (см. 0.3 и 7.4.2).

В классической физике электрический заряд — скалярная алгебраическая величина — характеристика электрически заряженного тела, т. е. тела, на которое действует электрическое поле (см. 3.1.3);

$$[q] = \text{Кл (кулон)}.$$

Также электрическим зарядом часто называют саму заряженную частицу (тело).

**Элементарный заряд** — минимальный (по модулю) электрический заряд частиц, наблюдаемых в свободном состоянии<sup>48</sup>;

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

**Электрически изолированная система** — система тел, для которой сумма электрических зарядов частиц, появившихся в этой системе, равна нулю.

**Закон сохранения электрического заряда:** суммарный электрический заряд любой электрически изолированной системы не изменяется в любых процессах, происходящих в этой системе:

$$q = \text{const}.$$

**Линейная плотность электрического заряда** — заряд, приходящийся на единичный участок протяжённого заряженного тела:

<sup>48</sup> Кварки, электрический заряд которых по модулю равен  $\frac{1}{3}e$  и  $\frac{2}{3}e$  (см. 7.5.1), в свободном состоянии не наблюдаются.

$$\tau = \frac{dq}{dl}; [\tau] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

**Поверхностная плотность электрического заряда** — заряд, приходящийся на единичный участок поверхности заряженного тела:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}; [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

**Объёмная плотность электрического заряда** — заряд, приходящийся на участок заряженного тела единичного объёма:

$$\rho = \frac{dq}{dV}; [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}.$$

Электрический заряд тела выражается через плотности заряда следующим образом:

$$q = \int_l \tau dl = \int_S \sigma dS = \int_V \rho dV,$$

здесь  $l, S, V$  — соответственно длина, площадь поверхности и объём заряженного тела.

**Электрический ток** — упорядоченное движение электрически заряженных частиц.

### 3.1.3. Электромагнитное поле

**Электромагнитное поле** — физический объект — действует на электрически заряженные частицы.

Для того чтобы характеризовать электромагнитное поле в какой-либо точке пространства, мысленно вносим в эту точку пробный заряд.

**Пробный заряд** — материальная точка, имеющая положительный электрический заряд, настолько малый, чтобы не искажать электромагнитное поле, т. е. не изменять расположение заряженных тел, создающих это поле.

На частицу с зарядом  $q_0$  (пробный заряд), движущуюся со скоростью  $\vec{v}$ , электромагнитное поле действует с силой

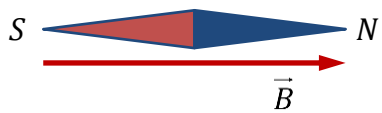
$$\vec{F} = \vec{F}_1(q_0, \text{поле}) + \vec{F}_2(q_0, \vec{v}, \text{поле}).$$

Здесь  $\vec{F}_1$  — составляющая силы, которая не зависит от скорости пробного заряда, а  $\vec{F}_2$  зависит в т. ч. от скорости пробного заряда.

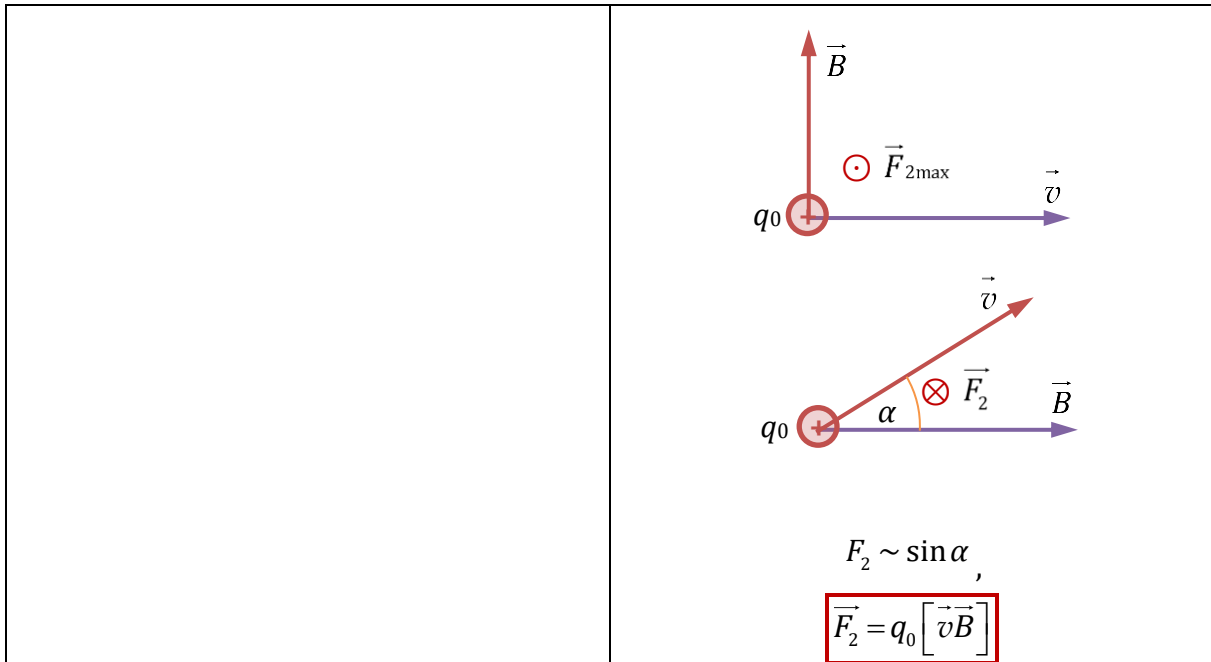
Попробуем ввести характеристики, которые определяли бы поле и не зависели бы от свойств заряженного тела, помещённого в это поле. Для этого рассмотрим две ситуации, в одной из которых  $\vec{F}_2 = 0$ , а в другой  $\vec{F}_1 = 0$  (ТАБЛ. 18.1).



Таблица 18.1

$\vec{F}_2 = 0$	$\vec{F}_1 = 0$
<p>Все заряды неподвижны:</p> $\vec{F}_2 = 0, \vec{F} = \vec{F}_1(q_0, \text{поле}).$ <p>Рассмотрим отношение <math>\vec{F}_1/q_0</math>. Оно определяется только величиной поля и является одной из характеристик поля:</p> $\vec{E} = \frac{\vec{F}_1}{q_0}$ <p>— <b>напряжённость электрического поля</b> (электрическая компонента электромагнитного поля).</p> <p><b>Демонстрации:</b> 1) Демонстрация полей с помощью султанов 2) Электрические поля в проекции<sup>49</sup></p> <p>Сила, с которой электромагнитное поле действует на неподвижный пробный заряд</p> $\vec{F}_1 = q_0 \vec{E}.$	<p>Создадим такие условия, при которых поле действует только на движущийся заряд:</p> $\vec{F}_1 = 0, \vec{F} = \vec{F}_2(q_0, \vec{v}, \text{поле}).$ <p>Из опыта:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>F_2 \sim q_0</math>;</li> <li>2) <math>F_2 \sim v</math>;</li> <li>3) <math>F_2</math> зависит от направления <math>\vec{v}</math> и изменяется от 0 до <math>F_{\max}</math>;</li> <li>4) <math>F_2 \sim</math> полю.</li> </ol> <p>Отношение модуля максимальной силы, с которой поле действует на пробный заряд, к величине этого заряда и модулю его скорости — характеристика только поля:</p> $B = \frac{F_{2\max}}{q_0 v},$ <p><math>\vec{B}</math> — <b>индукция магнитного поля</b> (магнитная компонента электромагнитного поля).</p> <p>Направление <math>\vec{B}</math> совпадает с ориентацией магнитной стрелки, помещённой в данную точку пространства:</p>  <p><b>Демонстрации:</b> 1) Опыт Эрстеда 2) Магнитные поля токов (с помощью опилок в проекции)</p> <p><b>Обратная задача:</b> найти <math>\vec{F}_2</math>.</p> <p>Зная <math>\vec{B}</math>, можно найти силу, с которой электромагнитное поле действует на движущийся пробный заряд. Оказывается, что <math>\vec{F}_2 \perp \vec{v}</math>, <math>\vec{F}_2 \perp \vec{B}</math>.</p>

<sup>49</sup> Демонстрации «Электрические поля в проекции» и «Магнитные поля токов» рекомендуется показывать последовательно одну за другой.



Общий случай:

$$\vec{F}(q_0, \vec{v}) = q_0 \vec{E} + q_0 [\vec{v}\vec{B}]$$

— формула Лоренца,  $\vec{F}$  — сила Лоренца ( $\vec{F}_1 \neq 0$  и  $\vec{F}_2 \neq 0$ ).

### 3.1.4. Силовые характеристики электромагнитного поля

Для того чтобы охарактеризовать электромагнитное поле как единый объект, нужно ввести два вектора —  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Основные силовые характеристики электромагнитного поля

Напряжённость электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_1}{q_0}$$

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Индукция магнитного поля

$$\vec{B}, B = \frac{F_{2\text{max}}}{q_0 v}$$

$$[B] = \text{Тл (тесла)}$$

Вспомогательные силовые характеристики электромагнитного поля

Электрическое смещение

$$\vec{D}$$

$$[D] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{в вакууме})$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

— *электрическая постоянная*

Напряжённость магнитного поля

$$\vec{H}$$

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{в вакууме})$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$$

— *магнитная постоянная*

Электрическая и магнитная постоянные не имеют физического смысла, они — константы СИ. Физический смысл имеет величина

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

— *скорость электромагнитных волн в вакууме.*

Вспомогательные силовые характеристики нужны для описания электромагнитного поля в веществе (см. 3.3.3 и 3.11.2).

### 3.1.5. Принцип суперпозиции полей

Этот принцип следует из опыта.

**Принцип суперпозиции полей:** { напряжённость электрического поля, создаваемого системой заряженных частиц, индукция магнитного поля движущихся заряженных частиц (токов), равна сумме

{ напряжённостей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности. { индукций полей, создаваемых каждым из этих токов

Для дискретного распределения { зарядов, токов

$$\begin{cases} \vec{E} = \sum \vec{E}_i, \\ \vec{B} = \sum \vec{B}_i. \end{cases}$$

Для непрерывного распределения { зарядов, токов

$$\begin{cases} \vec{E} = \int d\vec{E}, \\ \vec{B} = \int d\vec{B}. \end{cases}$$

### 3.1.6. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла — основные уравнения классической электродинамики — постулируются. Они — обобщение опытных фактов — законов электродинамики. Мы рассмотрим каждый из этих законов в дальнейшем.

*Уравнения Максвелла в интегральной форме*<sup>50</sup>

$$\text{I.} \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\text{II.} \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\text{III.} \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

$$\text{IV.} \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Здесь  $\rho$  — объёмная плотность заряда;

$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{n} = \frac{dq}{dt dS} \vec{n}$  — *плотность тока*

(см. рис. 18.1) ( $I$  — сила тока,  $dS$  — элементарная площадка, перпендикулярная направлению движения зарядов,  $t$  — время).

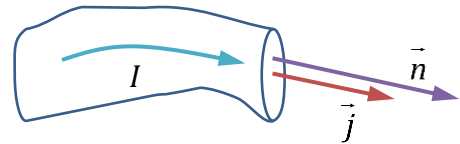


Рис. 18.1

Имеются в виду *свободные заряды* — заряды, нарушающие электронейтральность вещества, и *макротоки* — упорядоченное движение заряженных частиц, при котором они перемещаются на расстояния, много большие межмолекулярных расстояний.

В уравнениях I, II  $L$  — произвольная замкнутая кривая,  $S$  — произвольная поверхность, ограниченная этой кривой.

В уравнениях III, IV  $S$  — произвольная замкнутая поверхность,  $V$  — объём, ограниченный этой поверхностью.

### 3.1.7. Материальные уравнения

**Материальные уравнения** — уравнения, связывающие основные и вспомогательные характеристики электромагнитного поля:  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Их вид зависит от природы вещества, в котором существует электромагнитное поле.

Вещество состоит из молекул, в которых заряженные частицы (*связанные заряды*) движутся друг относительно друга (*микротоки*) и создают собственное электромагнитное поле, которое накладывается на поле свободных зарядов и макротоков.

Для изотропных диэлектриков, несегнетоэлектриков<sup>51</sup>

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

где  $\epsilon$  — *относительная диэлектрическая проницаемость* вещества. В вакууме  $\epsilon = 1$ .

Для изотропных магнетиков, неферромагнетиков

<sup>50</sup> Более подробно об уравнениях Максвелла — в ПАРАГРАФЕ 3.12. Элементы векторного анализа, использующиеся в уравнениях Максвелла, рассмотрим в течение семестра.

<sup>51</sup> Сведения о сегнетоэлектриках см., например, в книге [3].

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu},$$

где  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость вещества. В вакууме  $\mu = 1$ .

### 3.2. Постоянное электрическое поле в вакууме

#### 3.2.1. Электростатическое поле в вакууме

В этом случае  $\vec{B} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ .

Уравнения Максвелла:

$$\text{I. } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\text{III. } \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_s}{\epsilon_0} \left( \int_V \rho dV = Q_s \right)$$

## Лекция 19

## 3.2.2. Закон Кулона. Расчёт напряжённости электрического поля методом суперпозиции

**Закон Кулона:** сила взаимодействия двух точечных зарядов

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

(см. [рис. 19.1](#); на этом рисунке заряды  $q_1$  и  $q_2$  одного знака).

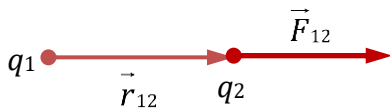


Рис. 19.1

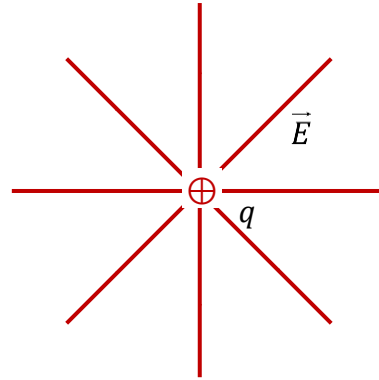


Рис. 19.2

**Демонстрация:** Качественная демонстрация закона Кулона на приборе со стрелкой (прибор Второва Е. Н.)

Напряжённость электрического поля точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Силовые линии электрического поля точечного заряда представлены на [рис. 19.2](#).

Любую систему заряженных тел можно разбить на точечные заряды (или заряды другой формы, поле которых легко рассчитать) и затем просуммировать (проинтегрировать) напряжённости полей этих зарядов.

**ПРИМЕРЫ**

1) Электрическое поле равномерно заряженного тонкого кольца  
По тонкому кольцу радиуса  $R$  равномерно распределён заряд  $Q > 0$  (рис. 19.3). Найти  $\vec{E}(z)$  ( $z$  — координата на оси кольца, отсчитываемая от его центра).

Находим напряжённость электрического поля в точке  $A$  на оси кольца ( $OA = z$ ). Разобьём кольцо на точечные заряды  $dq$  (на рис. 19.3 показаны два малых заряда  $dq$  и  $dq'$ , равные по модулю и расположенные диаметрально противоположно). По принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = \int d\vec{E},$$

$d\vec{E}$  — напряжённость электрического поля малого заряда  $dq$ . Векторы напряжённости электрического поля каждого из этих зарядов одинаковы по модулю (если одинаковы все заряды  $dq$ ) и направлены так, что концы этих векторов образуют конус с вершиной в точке  $A$  (на рис. 19.3 штриховой линией показано основание этого конуса). Проекции этих векторов на плоскость кольца компенсируются, поэтому суммарный вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $z$ :

$$E = E_z \text{ (при } z > 0\text{)}.$$

Вычислим  $E_z$ . Напряжённость поля точечного заряда

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3};$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta,$$

угол  $\theta$  показан на рис. 19.3. Величины  $r$  и  $\theta$  одинаковы для всех элементов  $dq$ :

$$r = \sqrt{R^2 + z^2},$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Подставим эти формулы в выражение для  $dE_z$ :

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

В этом выражении все величины — постоянные, кроме  $dq$ . Проинтегрируем по  $q$ :

$$E_z = \int_0^Q \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**Предельные случаи**

а)  $z = 0 \Rightarrow E = 0$ .

б)  $z \rightarrow \infty \Rightarrow E = 0$ .

в)  $z \gg R \Rightarrow E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$  — поле точечного заряда.

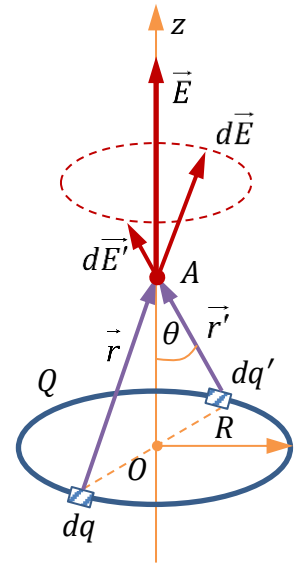


Рис. 19.3

## 2) Электрическое поле равномерно заряженного тонкого прямого стержня

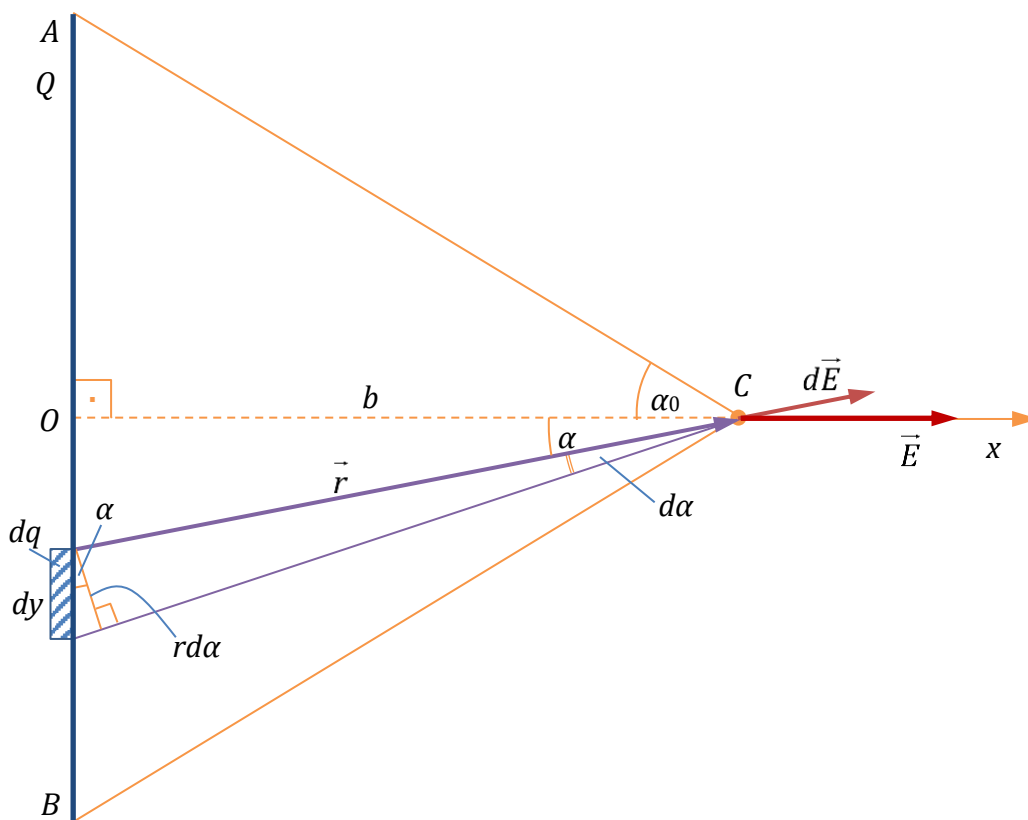
Тонкий стержень длиной  $AB = l$  имеет заряд  $Q > 0$ , равномерно распределённый по длине стержня. Найти напряжённость электрического поля в точке, находящейся на перпендикуляре к стержню, проходящем через его середину, на расстоянии  $b$  (точка  $C$  на [рис. 19.4](#)).

Разобьём стержень на малые отрезки, имеющие малый заряд  $dq$ . Напряжённость поля точечного заряда

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

по принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = \int d\vec{E}.$$



**Рис. 19.4**

Суммарный вектор напряжённости электрического поля будет направлен перпендикулярно стержню, так как вследствие симметрии распределения заряда проекции  $d\vec{E}$  на направление стержня компенсируют друг друга. Поэтому

$$E = E_x.$$

Найдём  $E_x$ :

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{dq \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

угол  $\alpha$  показан на [рис. 19.4](#). Это выражение нельзя интегрировать, так как в нём присутствуют три зависящих друг от друга переменные:  $q$ ,  $r$ ,  $\alpha$ . Свяжем их друг с другом; для интегрирования будет удобнее всё выразить через  $\alpha$ .



Расстояние от элемента  $dq$  до точки  $C$

$$r = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Выразим заряд  $dq$ . Этот заряд занимает участок стержня длиной  $dy$ ;

$$dq = \tau dy,$$

$\tau$  — линейная плотность заряда стержня. Так как стержень заряжен равномерно,

$$\tau = \frac{Q}{l}.$$

Выразим длину элементарного отрезка  $dy$  через угол  $d\alpha$ , под которым этот отрезок виден из точки  $C$ :

$$dy = \frac{rd\alpha}{\cos \alpha} = \frac{bd\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставим выражения для  $r$  и  $dl$  в выражение для  $dE_x$ :

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \frac{bd\alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot b^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 lb} \cos \alpha d\alpha.$$

Проинтегрируем по  $\alpha$ :

$$E_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 lb} \cos \alpha d\alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 lb} \sin \alpha \Big|_{-\alpha_0}^{\alpha_0} = \frac{Q \sin \alpha_0}{2\pi\epsilon_0 lb}$$

(стержень виден из точки  $C$  под углом  $2\alpha_0$ ). Из [рис. 19.4](#)

$$\sin \alpha_0 = \frac{l}{2\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4b^2}};$$

$$E = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0 lb\sqrt{l^2 + 4b^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 b\sqrt{l^2 + 4b^2}}.$$

### **Предельные случаи**

а)  $b \gg l \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 b \cdot 2b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}$  — поле точечного заряда.

б)  $b \ll l \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 bl} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 b}$  — поле длинной нити. Эту формулу мы получим другим способом [ПОЗЖЕ](#).

### 3.2.3. Поток векторного поля. Теорема Остроградского–Гаусса для напряжённости электрического поля

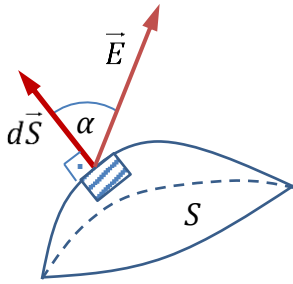


Рис. 19.5

#### Элементарный поток

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S},$$

$d\vec{S}$  направлен по внешней<sup>52</sup> нормали к малому участку  $dS$ ;

$$d\Phi = E dS \cos \alpha = E_n dS$$

(см. [рис. 19.5](#)).

Полный **поток** вектора  $\vec{E}$  сквозь поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S}.$$

**Теорема Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$ :** поток вектора напряжённости электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, охваченной этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{(\sum q)_S}{\epsilon_0}.$$

**Доказательство<sup>53</sup>** (вывод из закона Кулона)

Рассмотрим точечный заряд  $q$  и его электрическое поле. Окружим заряд произвольной замкнутой поверхностью  $S$  ([рис. 19.6А](#)). По закону Кулона напряжённость электрического поля точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Элементарный поток

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = \frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS.$$

*Телесный угол*, под которым из точки, где находится заряд  $q$ , видна площадка  $dS$

$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}$$

(см. [рис. 19.6Б](#)). Выразим элементарный поток через телесный угол:

$$d\Phi = \frac{q d\Omega}{4\pi\epsilon_0}.$$

<sup>52</sup> Если поверхность  $S$  не замкнута, то выбор одного из двух направлений нормали произволен, при этом направление нормали для всех участков  $dS$  должно быть одинаковым.

<sup>53</sup> Мы строим курс, постулируя уравнения Максвелла. Это доказательство даётся для того, чтобы продемонстрировать связь уравнений Максвелла с эмпирическими законами электромагнетизма: в данном случае — III уравнения Максвелла (теорема Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$ ) и закона Кулона, и не входит в экзаменационную программу.

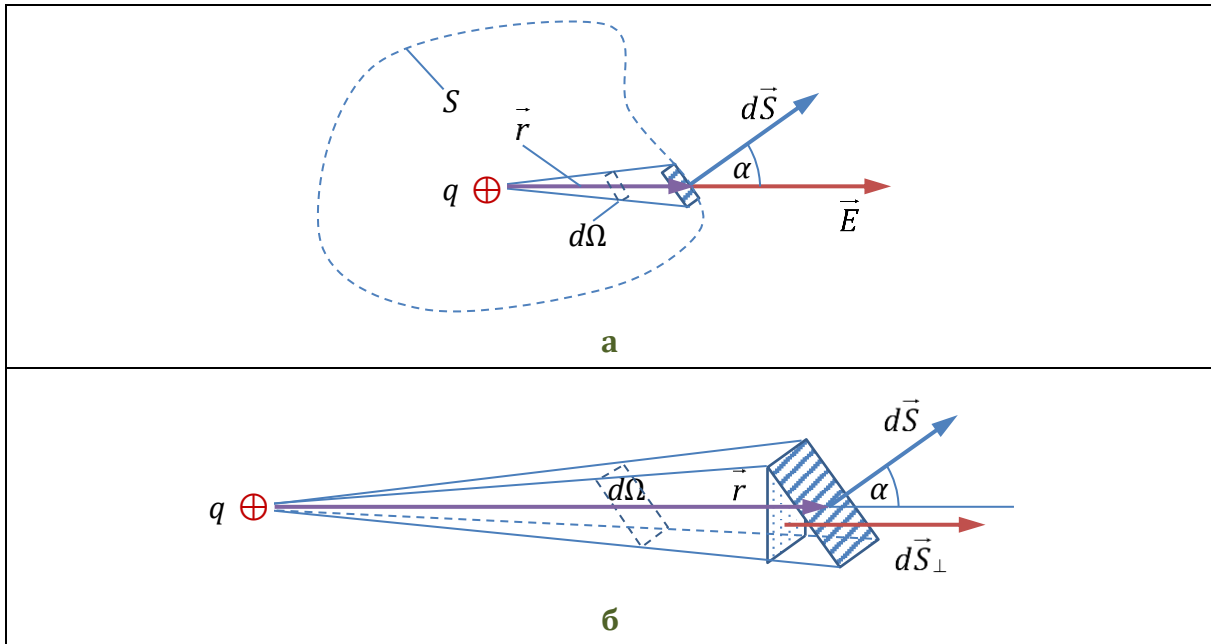


Рис. 19.6

Проинтегрируем по полному телесному углу:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_0^{4\pi} \frac{q d\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q \cdot 4\pi}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Мы доказали теорему для случая одного точечного заряда. Обобщение на случай произвольной системы зарядов проводится по принципу суперпозиции полей:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i,$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left( \sum \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{(\sum q)_S}{\epsilon_0}, \text{ ч. т. д.}$$

Рассмотрим примеры расчёта полей с использованием теоремы Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$ . Эта теорема полезна в том случае, когда можно выбрать замкнутую поверхность так, чтобы легко было вычислить поток  $\vec{E}$ . Прежде чем решать задачу с помощью теоремы Остроградского–Гаусса, нужно найти направление  $\vec{E}$  методом суперпозиций.

Случаи использования теоремы Остроградского–Гаусса

Сферическая  
(центральная)  
симметрия  
распределения  
заряда

Цилиндрическая  
(осевая)  
симметрия  
распределения  
заряда  
(протяжённость области пространства, содержащей заряд, вдоль оси симметрии много больше её поперечных размеров)

Плоская  
симметрия  
распределения  
заряда  
(размеры области пространства, содержащей заряд, в плоскости симметрии много больше поперечного размера этой области)

## ПРИМЕРЫ

### 1) Электрическое поле равномерно заряженной сферы

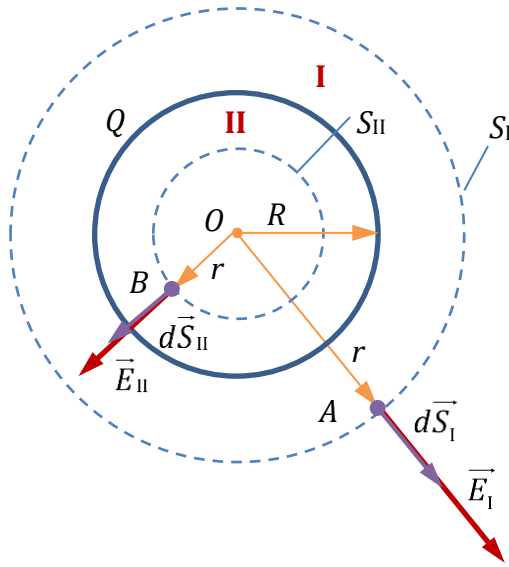


Рис. 19.7

По сфере радиуса  $R$  равномерно распределён заряд  $Q$  (рис. 19.7). Найти зависимость напряжённости электрического поля от расстояния  $r$  от центра сферы  $E_r(r)$ <sup>54</sup>.

Заряд распределён сферически симметрично. В каждой точке пространства напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  направлена радиально.

Будем выбирать поверхности интегрирования в виде сфер радиуса  $r$ , концентричных заряженной сфере, здесь  $r$  — расстояние от центра сферы до точки, где измеряется напряжённость поля.

Разобьём пространство на две области — вне заряженной сферы и внутри неё. Вид зависимости  $E_r(r)$  в этих областях должен быть различным.

1.  $r > R$

Теорема Остроградского–Гаусса:

$$\oint_{S_1} \vec{E} d\vec{S}_1 = \frac{(\sum q)_{S_1}}{\epsilon_0}.$$

Выберем поверхность  $S_1$  в виде сферы радиуса  $r$ , концентричной заряженной сфере (рис. 19.7). В каждой точке этой поверхности (например, в точке  $A$  на рисунке) напряжённость электрического поля  $\vec{E}_1$  направлена радиально, а по модулю одинакова. Вектор внешней нормали  $d\vec{S}_1$  сонаправлен  $\vec{E}_1$ . Поток напряжённости электрического поля

$$\oint_{S_1} \vec{E} d\vec{S}_1 = \oint_{S_1} E_{1r} dS_1 \cos 0 = E_{1r} \oint_{S_1} dS_1 = E_{1r} S_1 = E_{1r} 4\pi r^2.$$

Заряд, охваченный поверхностью  $S_1$ ,

$$(\sum q)_{S_1} = Q$$

— весь заряд заряженной сферы. Получим

$$E_{1r} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{1r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

<sup>54</sup> Здесь и далее в подобных примерах мы находим именно проекцию векторного поля на указанное направление — величину, которая содержит информацию и о модуле, и о направлении векторного поля. В зависимости от знака заряда проекция напряжённости электрического поля может быть как положительной, так и отрицательной.

II.  $r < R$

Теорема Остроградского–Гаусса:

$$\oint_{S_{II}} \vec{E} d\vec{S}_{II} = \frac{(\sum q)_{S_{II}}}{\epsilon_0}.$$

Выберем поверхность  $S_{II}$  в виде сферы радиуса  $r$ , концентричной заряженной сфере (рис. 19.7). Направления  $\vec{E}_{II}$  и  $d\vec{S}_{II}$  показаны на рисунке. Поток напряжённости электрического поля, аналогично выражению для области I,

$$\oint_{S_{II}} \vec{E} d\vec{S}_{II} = E_{IIr} 4\pi r^2.$$

Заряд, охваченный поверхностью  $S_{II}$ ,

$$(\sum q)_{S_{II}} = 0,$$

так как заряды внутри поверхности  $S_{II}$  не попадают. Поэтому

$$E_{IIr} = 0.$$

График зависимости  $E_r(r)$  представлен на рис. 19.8.

При  $r = R$  график  $E_r(r)$  терпит разрыв, так как на поверхности  $r = R$  сосредоточены свободные заряды. Разрывы конечной величины на графиках можно соединять сплошной линией.

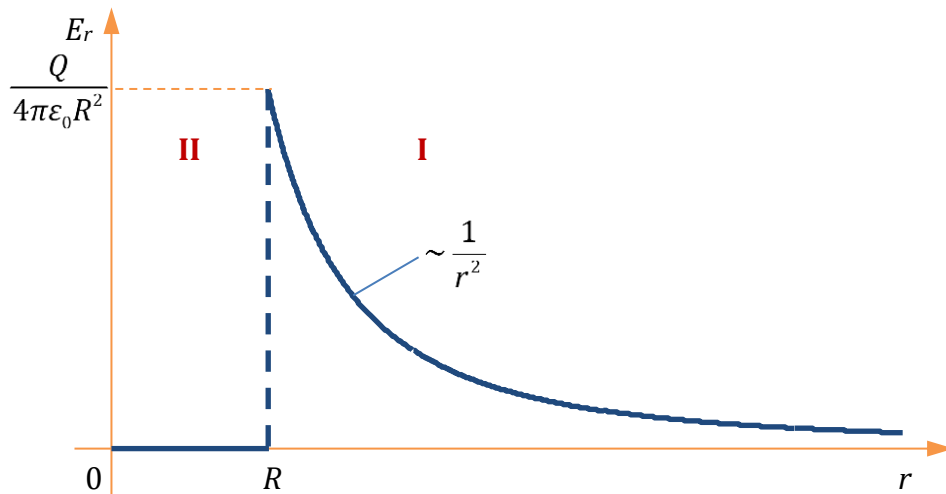


Рис. 19.8

2) Электрическое поле равномерно заряженной бесконечно длинной тонкой прямой нити

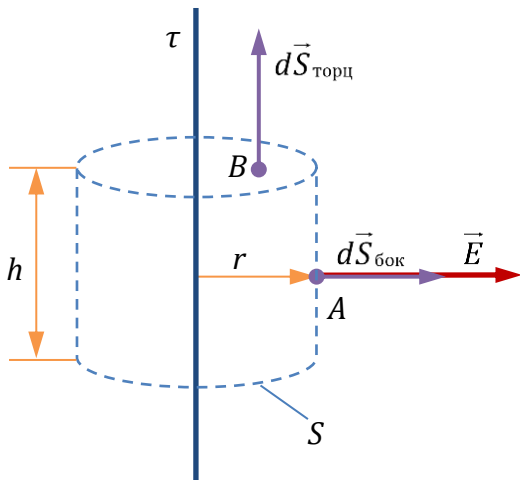


Рис. 19.9

Бесконечно длинная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью  $\tau$  (рис. 19.9). Найти зависимость напряжённости электрического поля от расстояния  $r$  от нити  $E_r(r)$ .

Распределение заряда имеет осевую симметрию. Теорема Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_S}{\epsilon_0}.$$

Выберем поверхность интегрирования в виде цилиндра радиуса  $r$  ( $r$  — расстояние от нити до точки, где измеряется поле — точка  $A$  на рис. 19.9) и произвольной высоты  $h$ , ось которого совпадает с нитью.

Напряжённость электрического поля направлена радиально и зависит только от  $r$ . Векторы внешней нормали направлены: для боковой поверхности  $d\vec{S}_{\text{бок}} \parallel \vec{E}$ , для торцов  $d\vec{S}_{\text{торц}} \perp \vec{E}$ . Поток напряжённости электрического поля

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S}_{\text{бок}} + 2 \int_{S_{\text{торц}}} \vec{E} d\vec{S}_{\text{торц}} = \int_{S_{\text{бок}}} E_r dS_{\text{бок}} \cos 0 + 2 \int_{S_{\text{торц}}} E_r dS_{\text{торц}} \cos \frac{\pi}{2} = \\ &= E_r \int_{S_{\text{бок}}} dS_{\text{бок}} = E_r S_{\text{бок}} = E_r 2\pi r h. \end{aligned}$$

Заряд, охваченный поверхностью  $S$ ,

$$(\sum q)_S = \tau h$$

— заряд участка нити длиной  $h$ . Получим

$$E_r 2\pi r h = \frac{\tau h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

Результат не зависит от  $h$ , как и должно быть. Это же решение было получено нами методом суперпозиций (см. РАЗДЕЛ 3.2.3).

График зависимости  $E_r(r)$  представлен на рис. 19.10.

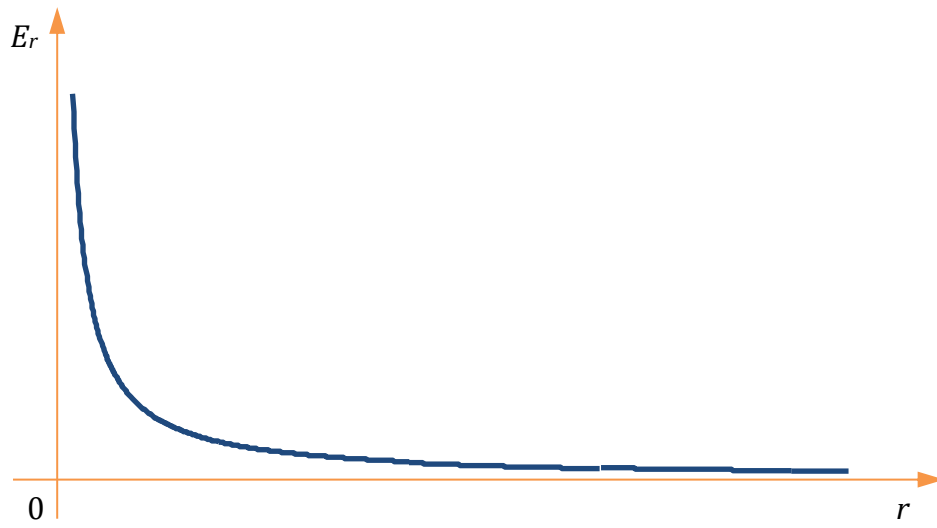


Рис. 19.10

## Лекция 20

## 3.2.3. Поток векторного поля. Теорема Остроградского–Гаусса для напряжённости электрического поля (продолжение)

3) Электрическое поле равномерно заряженной плоскости

Плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти зависимость напряжённости электрического поля от координаты, отсчитываемой от плоскости перпендикулярно ей,  $E_x(x)$ .

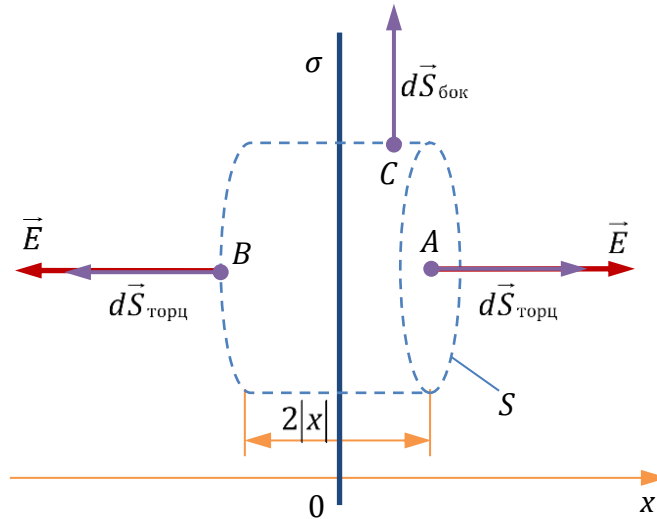


Рис. 20.1

Распределение заряда имеет плоскую симметрию. Теорема Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_S}{\epsilon_0}.$$

Выберем поверхность интегрирования в виде цилиндра высотой  $2|x|$  ( $x$  — координата точки, где измеряется поле, — точка  $A$  на рис. 20.1) и произвольного сечения  $S_{\text{торц}}$ . Торцы цилиндра  $S$  параллельны заряженной плоскости и расположены симметрично относительно неё. Напряжённость электрического поля направлена перпендикулярно плоскости и может зависеть только от  $x$ . Векторы внешней нормали направлены: для боковой поверхности  $d\vec{S}_{\text{бок}} \perp \vec{E}$ , для торцов  $d\vec{S}_{\text{торц}} \parallel \vec{E}$ . Поток напряжённости электрического поля

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S}_{\text{бок}} + 2 \int_{S_{\text{торц}}} \vec{E} d\vec{S}_{\text{торц}} = \int_{S_{\text{бок}}} E_x dS_{\text{бок}} \cos \frac{\pi}{2} + 2 \int_{S_{\text{торц}}} E_x dS_{\text{торц}} \cos 0 = \\ &= 2E \int_{S_{\text{торц}}} dS_{\text{торц}} = 2ES_{\text{торц}}. \end{aligned}$$

Заряд, охваченный поверхностью  $S$ ,

$$(\sum q)_S = \sigma S_{\text{торц}}$$

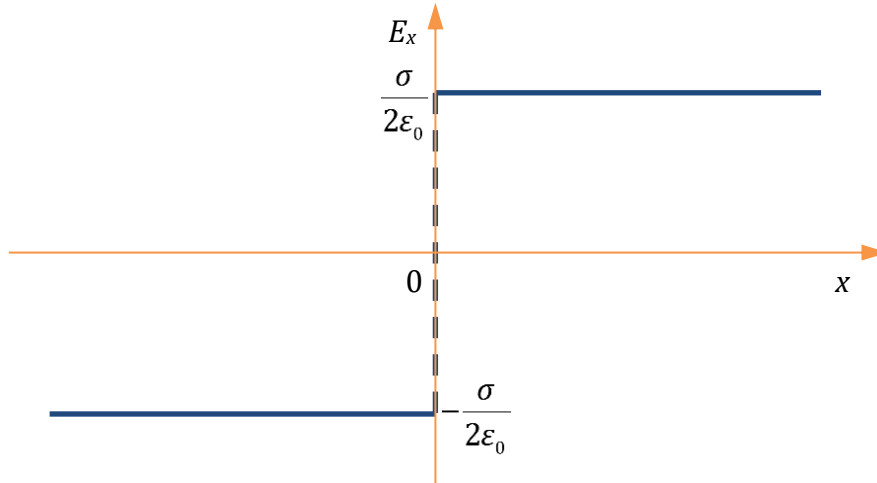
— заряд участка плоскости площадью  $S_{\text{торц}}$ . Получим



$$2ES_{\text{торц}} = \frac{\sigma S_{\text{торц}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ }^{55};$$

$$\begin{cases} x > 0: E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \\ x < 0: E_x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \end{cases}$$

По каждую сторону от заряженной плоскости поле однородно. График зависимости  $E_x(x)$  представлен на [рис. 20.2](#).



**Рис. 20.2**

**Демонстрация:** Сетка Кольбе — распределение заряда по поверхности проводника

### 3.2.4. Потенциал

I уравнение Максвелла для электростатического поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Умножим это уравнение на пробный заряд  $q_0$ :

$$q_0 \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L q_0 \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{F}_1 d\vec{l} = 0$$

— работа электростатического поля по перемещению пробного заряда по произвольной замкнутой траектории равна нулю. Это означает, что электростатическое поле *потенциально* (см. [РАЗДЕЛ 1.8.4](#)).

[Можно прийти к этому выводу по-другому: кулоновская сила центрально, а поле центральных сил потенциально (см. [1.8.4](#)).]

**Потенциальная энергия** заряженной частицы в электростатическом поле равна работе внешних сил при перемещении этой частицы из точки, где потенциальная энергия принята равной нулю, в данную точку или работе поля при этом перемещении, взятой с обратным знаком:

$$W_{\text{п}} = -A^{\text{поля}} = A^*.$$

<sup>55</sup> Эта формула справедлива при  $\sigma > 0$ . Для  $\sigma < 0$  знак  $\sigma$  нужно изменить на противоположный.

Потенциальная энергия — характеристика и поля, и заряда:

$$W_{\text{п}} = f(q_0, \vec{E}).$$

Отношение  $\frac{W_{\text{п}}}{q_0}$  не зависит от  $q_0$  и является энергетической характеристикой поля:

$$\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{q_0};$$

— *потенциал*;

$$[\varphi] = \text{В (вольт)}.$$

Эта величина определяется с точностью до произвольной постоянной. Физический смысл имеет *разность потенциалов*

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{A_{1 \rightarrow 2}^{\text{поля}}}{q_0} = \frac{A_{1 \rightarrow 2}^*}{q_0}$$

— работа поля по перемещению пробного заряда из начального положения в конечное, отнесённая к модулю этого заряда и взятая с обратным знаком, или работа внешних сил при том же перемещении, отнесённая к модулю пробного заряда.

Связь напряжённости и потенциала электростатического поля

Работа электростатического поля по перемещению пробного заряда из точки **1** в точку **2**

$$A^{\text{поля}} = \int_1^2 \vec{F}_1 d\vec{l} = \int_1^2 q_0 \vec{E} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l};$$

разность потенциалов

$$\Delta\varphi_{12} = -\frac{A^{\text{поля}}}{q_0} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l};$$

интегрирование проводится по произвольной кривой, соединяющей точки **1** и **2**.

*Интегральная связь напряжённости и потенциала электростатического поля*

$$\Delta\varphi_{12} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = -\int_1^2 E_l dl,$$

$$\varphi_1 = -\int_{(\varphi=0)}^1 \vec{E} d\vec{l} = -\int_{(\varphi=0)}^1 E_l dl$$

— потенциал поля в точке **1**.

Элементарная работа поля

$$\delta A^{\text{поля}} = \vec{F}_1 d\vec{l} = q_0 \vec{E} d\vec{l};$$

элементарное приращение потенциала

$$d\varphi = -\frac{\delta A^{\text{поля}}}{q_0} = -\vec{E} d\vec{l},$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

— дифференциальная связь напряжённости и потенциала электростатического поля (определение градиента см. в РАЗДЕЛЕ 1.8.5).

**Эквипотенциальная поверхность** — геометрическое место точек, потенциал которых одинаков.

Так как  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ , вектор напряжённости электрического поля перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям.

### ПРИМЕР

Потенциал поля точечного заряда

Напряжённость электрического поля точечного заряда  $q$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Эквипотенциальные поверхности — сферы (рис. 20.3).

Положим начало отсчёта потенциала в бесконечно удалённой точке:  $\varphi(\infty) = 0$ . Интегрирование в формуле интегральной связи напряжённости и потенциала проведём по радиальной прямой:

$$\varphi = -\int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{r} = -\int_{\infty}^r E_r dr = -\int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

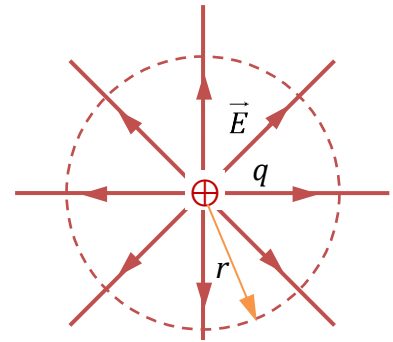


Рис. 20.3

**Принцип суперпозиции** (в применении к потенциалу): потенциал электростатического поля системы заряженных тел равен сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из этих тел по отдельности:

$$\varphi = \sum \varphi_i, \quad \varphi = \int d\varphi.$$

### Доказательство

Имеем систему  $N$  заряженных тел. По принципу суперпозиции напряжённость электрического поля

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Интегральная связь напряжённости и потенциала для поля в точке  $A$

$$\varphi = - \int_{(\varphi=0)}^A \vec{E} d\vec{l} = - \int_{(\varphi=0)}^A \left( \sum \vec{E}_i \right) d\vec{l} = - \sum \int_{(\varphi=0)}^A \vec{E}_i d\vec{l} = \sum \varphi_i, \text{ ч. т. д.}$$

Любую систему заряженных тел можно разбить на точечные заряды и найти потенциал по методу суперпозиций. Таким образом проще рассчитать потенциал, чем напряжённость электрического поля, так как потенциал — скалярная величина, а напряжённость — векторная.

### ПРИМЕРЫ

1) Поле равномерно заряженного тонкого кольца

По тонкому кольцу радиуса  $R$  равномерно распределён заряд  $Q > 0$  (рис. 20.4). Найти зависимость потенциала от координаты в точке на оси  $z$  кольца:  $\varphi(z)$ .

Положим потенциал равным нулю в бесконечно удалённой точке. Разобьём кольцо на малые участки с зарядами  $dq$  и воспользуемся методом суперпозиций:

$$\varphi = \int d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Расстояние  $r$  до точки  $A$ , где измеряется потенциал одинаково для всех элементов  $dq$ ;

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}.$$

Проинтегрируем выражение для потенциала по  $q$ :

$$\varphi = \int_0^Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Найдём напряжённость электрического поля как функцию  $z$  через дифференциальную связь напряжённости и потенциала:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{d\varphi}{dz} \vec{k}$$

( $\vec{k}$  — орт оси  $z$ ), так как в точках на оси  $z$  напряжённость электрического поля направлена вдоль этой оси и может зависеть только от  $z$ ;

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = + \frac{Q \left( \frac{1}{2} \right) 2z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Этот же результат мы получили **РАНЕЕ** методом суперпозиции  $\vec{E}$ .

## 2) Поле равномерно заряженной бесконечно длинной тонкой прямой нити

Бесконечно длинная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью  $\tau$  (рис. 20.5). Найти зависимость потенциала электрического поля от расстояния  $r$  от нити:  $\varphi(r)$ .

Воспользуемся результатом решения **ЗАДАЧИ** о напряжённости электрического поля этой системы

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

и интегральной связью напряжённости и потенциала. Начало отсчёта потенциала возьмём в точке  $O$  на расстоянии  $r_0$  от нити<sup>56</sup>;

$$\varphi = -\int_{r_0}^r E_r dr = -\int_{r_0}^r \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}.$$

График зависимости  $\varphi(r)$  показан на **рис. 20.6**.

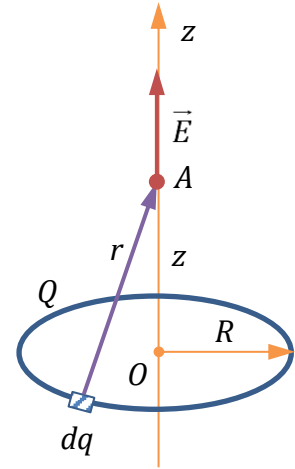


Рис. 20.4

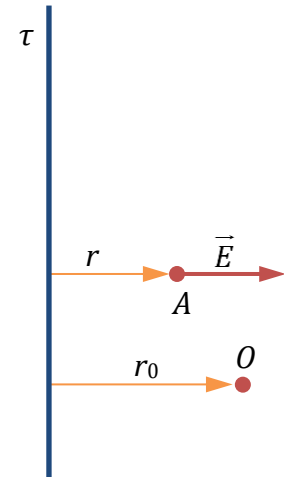


Рис. 20.5

<sup>56</sup> В случае, если заряды располагаются в бесконечно удалённых точках, нельзя взять начало отсчёта потенциала в бесконечности.

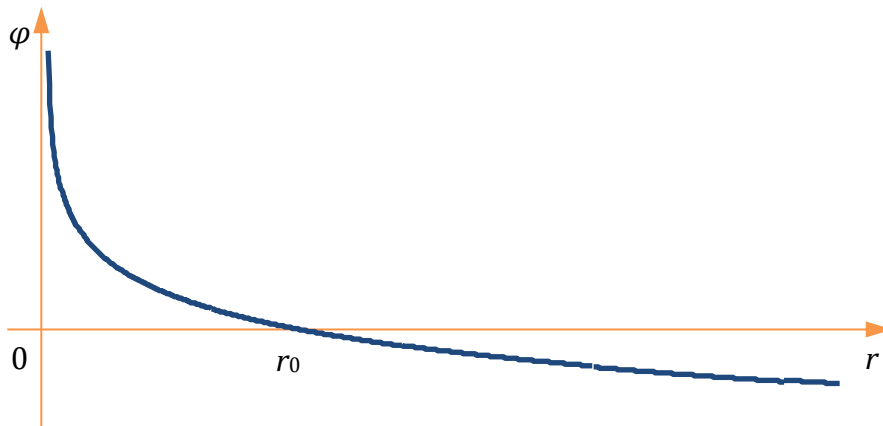


Рис. 20.6

## 3) Поле равномерно заряженной сферы

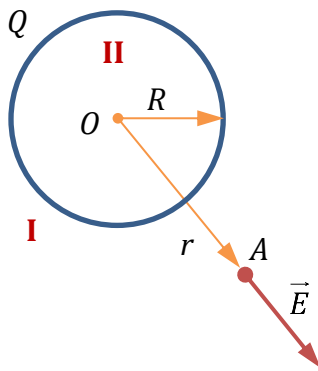


Рис. 20.7

Сфера радиуса  $R$  равномерно заряжена зарядом  $Q$  (рис. 20.7). Найти зависимость потенциала электрического поля от расстояния  $r$  от центра сферы:  $\varphi(r)$ .

Воспользуемся интегральной связью напряжённости и потенциала, полагая  $\varphi(0) = 0$ :

$$\varphi = -\int_0^r E_r dr. \quad (20.1)$$

Разбиваем пространство на две области (см. ПРИМЕР 1 РАЗДЕЛА 3.2.3).

II.  $r < R$

Напряжённость электрического поля в этой области  $E_{IIr} = 0$ . Потенциал

$$\varphi = -\int_0^r E_{IIr} dr = 0.$$

I.  $r > R$

Согласно ранее полученному результату, в этой области проекция напряжённости электрического поля на радиальное направление

$$E_{Irr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

При вычислении потенциала мы идём от центра сферы к точке  $A$  (рис. 20.7), где измеряется потенциал, по радиальной прямой. На разных участках этого пути (отрезка  $OA$ ) аналитическое выражение  $E_r(r)$  различно, поэтому интеграл (20.1) приходится разбивать на две части:

$$\varphi = -\int_0^R E_{IIr} dr - \int_R^r E_{Irr} dr = -\int_0^R 0 dr - \int_R^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

График зависимости  $\varphi(r)$  показан на рис. 20.8.

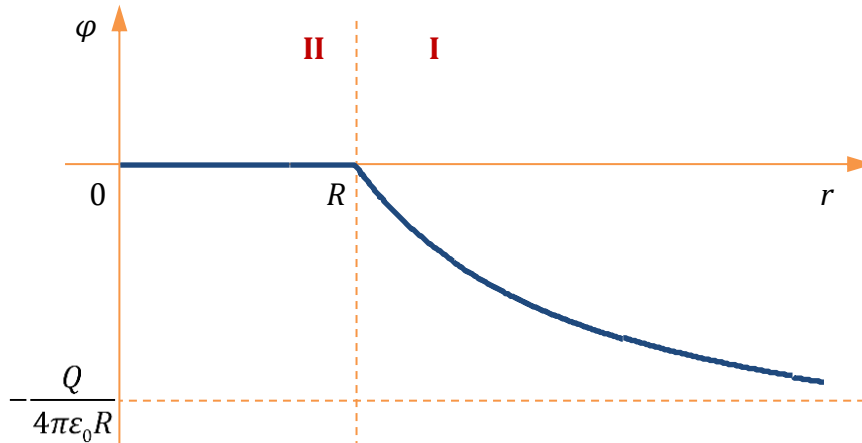


Рис. 20.8

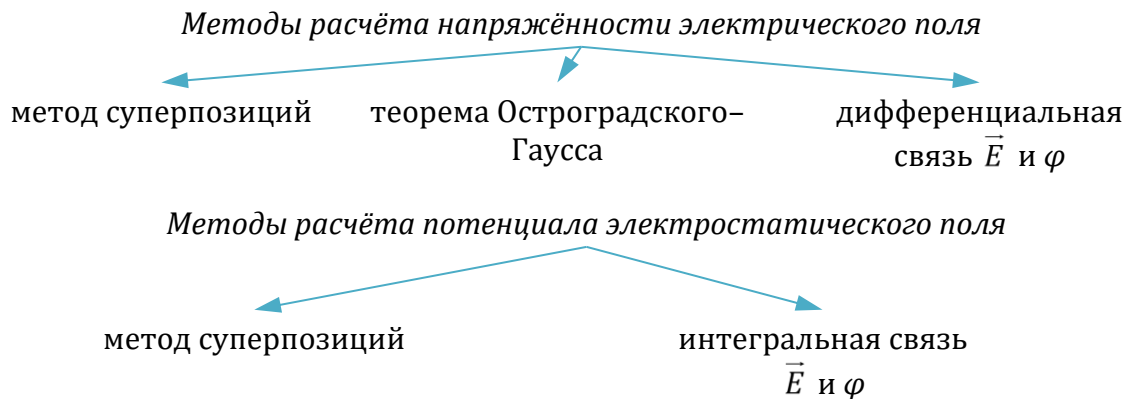
Можно построить этот график по графику проекции напряжённости электрического поля (рис. 19.8). По дифференциальной связи напряжённости и потенциала

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ }^{57}.$$

Там, где  $\frac{d\varphi}{dr} = 0$  (при  $r < R$ ),  $\varphi = \text{const}$ . В точке  $r = R$  график  $E_r(r)$  имеет разрыв, а гра-

фик  $\varphi(r)$  — излом. При  $r > R$   $E_r(r) > 0$  и убывает, соответственно,  $\frac{d\varphi}{dr} < 0$  и возрастает — кривая  $\varphi(r)$  убывает и вогнутая. При  $r \rightarrow \infty$   $E_r \rightarrow 0$  и график  $\varphi(r)$  имеет горизонтальную асимптоту.

**Потенциал — непрерывная функция координат! График потенциала никогда не имеет разрывов.**



### 3.3. Электростатическое поле в веществе

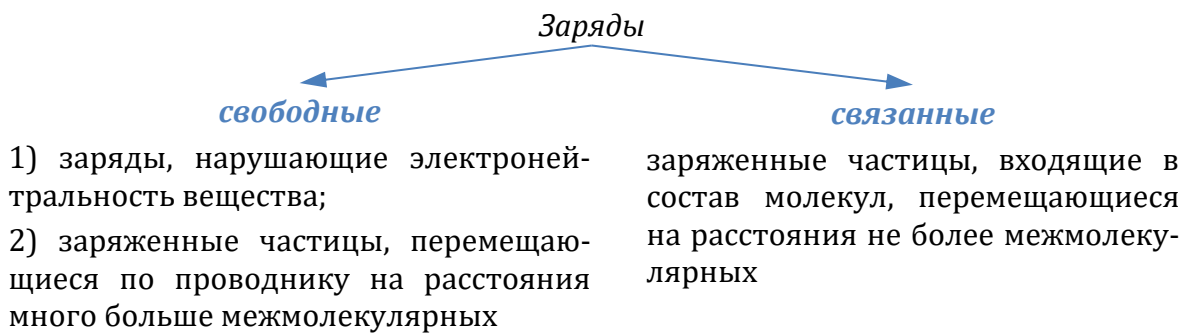
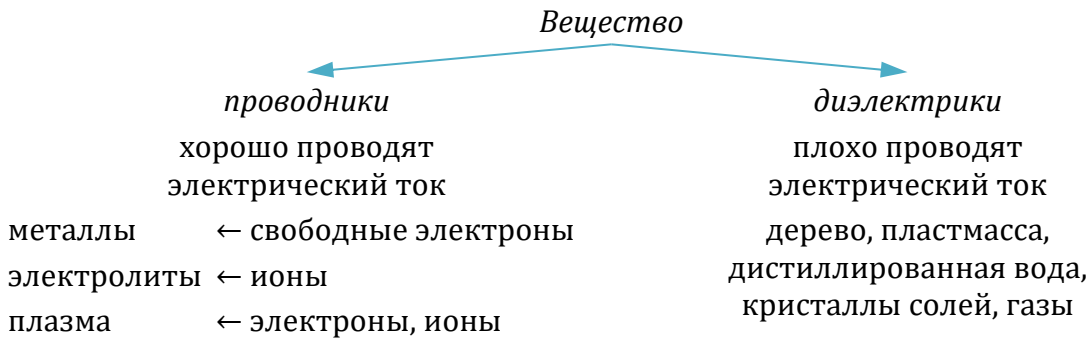
#### 3.3.1. Проводники и диэлектрики. Свободные и связанные заряды

**Проводники** — вещества, имеющие свободные заряды — заряженные частицы, свободно перемещающиеся по образцу.

<sup>57</sup> На самом деле  $E_r = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2\varphi)$  (ср. [ПОДРАЗДЕЛ 4 п. 3.3.3](#)).

**Диэлектрики** — вещества, в которых заряженные частицы связаны в пределах молекул и могут перемещаться под действием внешнего поля только на расстояния не более межмолекулярных.<sup>58</sup>

Любой диэлектрик можно превратить в проводник, т. е. *пробить*.



### 3.3.2. Электрический диполь

**Электрический диполь** — система двух точечных зарядов, одинаковых по модулю и противоположных по знаку (рис. 20.9).

#### 1. Характеристики диполя

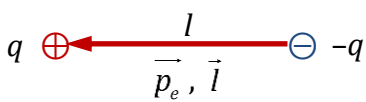


Рис. 20.9

**Заряд диполя**  $q$  — модуль заряда каждой из частиц (полюсов) диполя.

**Плечо диполя**  $l$  — расстояние между полюсами.

**Дипольный момент** — векторная характеристика:

$$\vec{p}_e = q\vec{l},$$

$$[p_e] = \text{Кл} \cdot \text{м}.$$

Вектор дипольного момента направлен от отрицательного полюса к положительному.

Будем рассматривать **жесткий диполь**, т. е. для которого  $l = \text{const}$ .

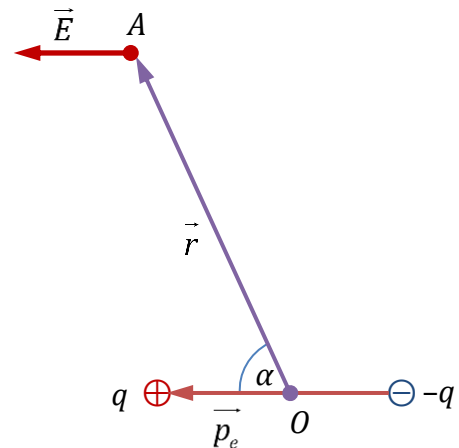


Рис. 20.10

<sup>58</sup> **Полупроводники** — диэлектрики с относительно высокой удельной электропроводностью. Сведения о природе и свойствах полупроводников см. в ПАРАГРАФЕ 6.6.

## 2. Электрическое поле диполя (без вывода)

Рассмотрим **точечный диполь**, т. е. диполь на расстояниях  $r \gg l$ .

Методом суперпозиций можно получить следующие результаты:

потенциал [при  $\varphi(\infty) = 0$ ]

$$\varphi = \frac{p_e \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

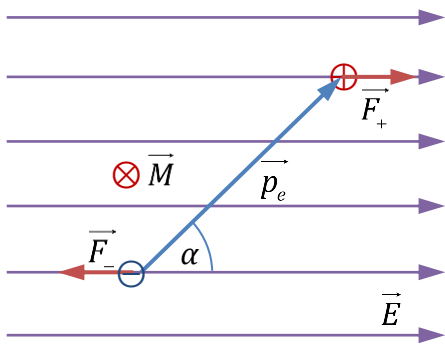
$\alpha$  — угол между  $\vec{p}_e$  и  $\vec{r}$  — показан на [рис. 20.10](#);

модуль напряжённости электрического поля

$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \alpha + 1}.$$

## 3. Диполь в электростатическом поле

### а) Однородное поле



**Рис. 20.11**

Пусть в пространстве имеется однородное электрическое поле, напряжённость поля  $\vec{E}$ . Диполь расположен под углом  $\alpha$  к силовым линиям поля ([рис. 20.11](#)).

Сила, с которой поле действует на диполь

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0,$$

так как  $\vec{F}_+ = -\vec{F}_-$ . Но момент пары сил  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$   $\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- \neq 0$ . Выразим этот момент относительно любой оси, перпендикулярной плоскости рисунка, например, оси  $z$ , проходящей через отрицательный полюс диполя:

$$M_z = F_+ l \sin \alpha = qEl \sin \alpha = p_e E \sin \alpha ;$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_e \vec{E}].$$

В однородном электрическом поле диполь разворачивается вдоль силовых линий.

### б) Неоднородное поле ([рис. 20.12](#))

В этом случае  $\vec{F}_+ \neq -\vec{F}_-$ , диполь не только разворачивается вдоль силовых линий, но и втягивается в область более сильного поля. Равнодействующая

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = ql \cos \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = p_e \cos \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \vec{i} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p}_e \vec{E}) \vec{i} = \text{grad}(\vec{p}_e \vec{E}),$$

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}_e \vec{E}) \quad (20.2)$$

(плечо диполя много меньше размера неоднородности поля).



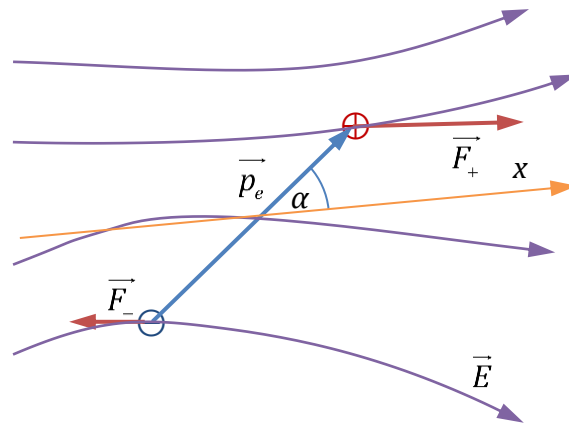


Рис. 20.12

в) Энергия диполя в электрическом поле

Рассмотрим диполь в однородном электрическом поле (рис. 20.11). Потенциальная энергия диполя

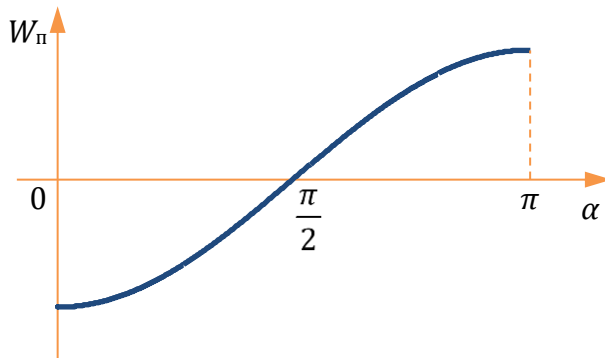
$$W_{\text{п}} = W_{\text{п}+} + W_{\text{п}-} = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = -q\vec{E}l = -\vec{p}_e\vec{E} = -p_e E \cos\alpha,$$

$$W_{\text{п}} = -\vec{p}_e\vec{E}.$$

Так как  $\vec{F} = -\text{grad}W_{\text{п}}$ , из этого выражения получается, что  $\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}_e\vec{E})$ , т. е. формула (20.2).

График зависимости потенциальной энергии диполя от угла между дипольным моментом и напряжённостью электрического поля представлен на рис. 20.13.

Диполь находится в положении равновесия при  $\vec{F} = 0$ , т. е. в точках экстремума потенциальной энергии:



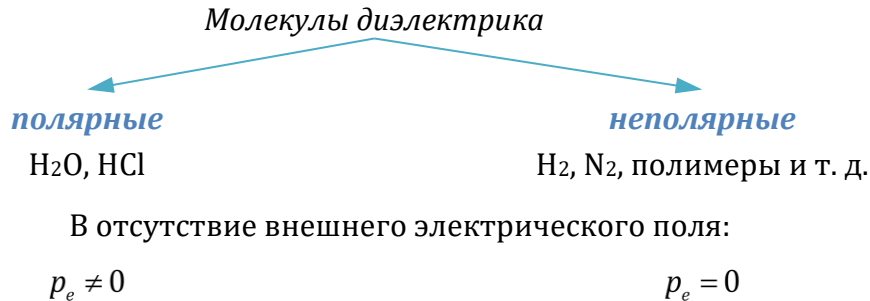
$\alpha = 0$  — устойчивое равновесие;  
 $\alpha = \pi$  — неустойчивое равновесие.

Рис. 20.13

## Лекция 21

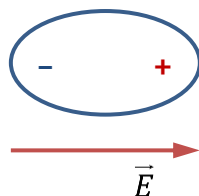
## 3.3.3. Электрическое поле в диэлектриках

## 1. Типы поляризации диэлектрика

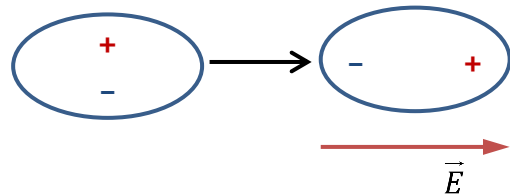


При наличии внешнего электрического поля:

Диполи разворачиваются вдоль поля — **ориентационная поляризация.**



Молекулы поляризуются — **электронная поляризация.**



Напряжённость электрического поля в веществе — это напряжённость *усреднённого* поля, созданного как свободными (напряжённость поля  $\vec{E}_0$ ), так и связанными ( $\vec{E}'$ ) зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Напряжённость поля связанных зарядов направлена против поля свободных зарядов, поэтому  $E < E_0$ .

## 2. Вектор поляризации (поляризованность)

**Поляризованность** — векторная характеристика поляризации вещества, равная сумме дипольных моментов молекул вещества, занимающего единичный объём:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_e}{V}, \quad (21.1)$$

$$[P] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

В слабом электрическом поле *дипольный момент молекулы* параллелен и пропорционален напряжённости электрического поля:

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \beta \vec{E}, \quad (21.2)$$

где  $\beta$  — **поляризуемость** молекулы. Подставим (21.2) в определение (21.1):

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_e}{V} = \frac{N \cdot \varepsilon_0 \beta \vec{E}}{V} = \varepsilon_0 n \beta \vec{E},$$

здесь  $N$  — число молекул,  $n$  — их концентрация. Обозначим

$$\varepsilon = n\beta$$

— **диэлектрическая восприимчивость** вещества;

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

*Связь поляризованности с поверхностными поляризационными (связанными) зарядами*

Рассмотрим диэлектрик — образец цилиндрической формы, помещённый в однородное электрическое поле (напряжённость этого поля — поля свободных зарядов — равна  $\vec{E}_0$ ). Молекулы либо разворачиваются, либо «растягиваются» вдоль поля. При этом внутри диэлектрик по-прежнему электронейтрален. На торцах образца появляются нескомпенсированные заряды. Такой образец эквивалентен большому диполю.

а) Торцы образца перпендикулярны  $\vec{E}_0$  (рис. 21.1)

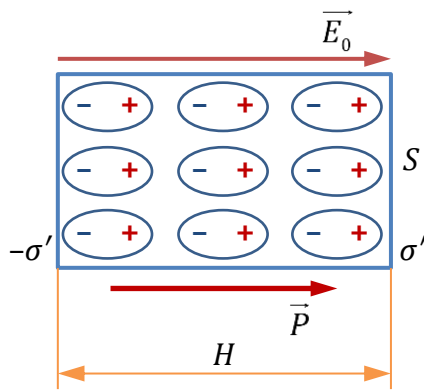


Рис. 21.1

На рисунке  $H$  — ширина образца,  $S$  — площадь торцевых поверхностей,  $\sigma'$  — поверхностная плотность связанных зарядов<sup>59</sup>. Заряды торцевых поверхностей

$$Q_- = -\sigma' S, \quad Q_+ = \sigma' S;$$

модуль дипольного момента образца

$$p_e = QH = \sigma' SH$$

( $Q = Q_+$ );

модуль поляризованности

$$P = \frac{p_e}{V} = \frac{\sigma' SH}{SH} = \sigma',$$

где  $V = SH$  — объём образца.

<sup>59</sup> Здесь и далее в этом разделе штрихом обозначаются связанные заряды, без штриха — свободные заряды. В «живой» лекции может быть целесообразно вместо этого писать верхние или нижние индексы, например,  $\sigma^{\text{связ}}$  и  $\rho^{\text{своб}}$ .

б) Торцы образца не перпендикулярны  $\vec{E}_0$  (рис. 21.2)

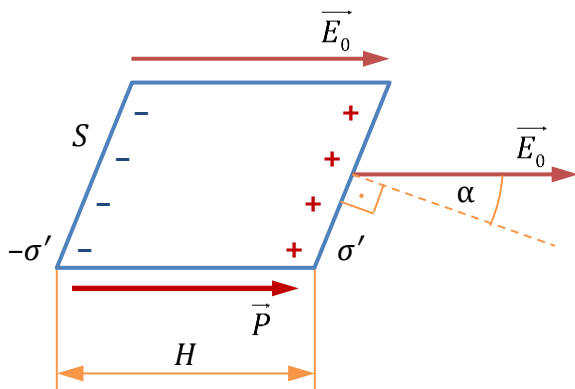


Рис. 21.2

Пусть напряжённость электрического поля свободных зарядов направлена под углом  $\alpha$  к нормали к торцам образца. Дипольный момент образца выражается той же формулой, что и в предыдущем случае:

$$p_e = QH = \sigma' SH.$$

Объём образца — косоугольного цилиндра

$$V = SH \cos \alpha.$$

Поэтому

$$P = \frac{\sigma'}{\cos \alpha} \Rightarrow \sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

$$\boxed{\sigma' = P_n} \quad (21.3)$$

— нормальная проекция поляризованности у поверхности диэлектрика равна поверхностной плотности связанных зарядов.

- Демонстрации:**
- 1) Модель поляризации диэлектрика с упругими диполями в проекции
  - 2) Модель поляризации диэлектрика с жёсткими диполями с помощью ориентации бумажных стрелок в поле заряженного конденсатора
  - 3) Ориентация эбонитового стержня в поле заряженного конденсатора

### 3. Теорема Остроградского–Гаусса для электрического поля в диэлектрике

а) Теорема Остроградского–Гаусса для вектора поляризации

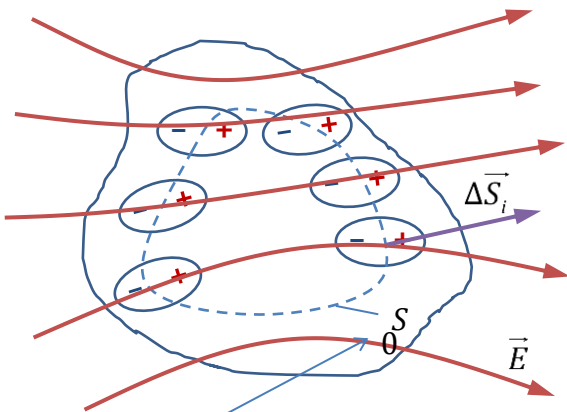


Рис. 21.3

Проведём внутри нейтрального диэлектрика, находящегося в электрическом поле, замкнутую поверхность  $S$  (рис. 21.3). Эта поверхность «разрежет» диполи молекул.

Разобьём диэлектрик на малые объёмы  $\Delta V_i$ , а поверхность  $S$  — на малые площадки  $\Delta S_i$  и найдём связанный заряд, охваченный поверхностью  $S$ :

$$(\sum q')_S = (\sum \rho'_i \Delta V_i)_S + (\sum \sigma'_i \Delta S_i)_S,$$

здесь  $\rho'$  — объёмная плотность связанных зарядов. Первое слагаемое в правой

части этого равенства равно нулю, так как диэлектрик в целом электронейтрален. Поверхностная плотность связанных зарядов во втором слагаемом отличается от  $\sigma'$  в выражении (21.3) тем, что это плотность зарядов не на внешней границе диэлектрика, а на воображаемой внутренней границе. При напряжённости электрического поля, направленной так, как показано на рисунках 21.2 и 21.3, связанные

заряды на внешней границе справа — положительные, а на внутренней — отрицательные. Поэтому направление вектора поляризации фрагмента образца, попадающего внутрь поверхности  $S$ , будет противоположным и  $P_n = -\sigma'_i$ ,

$$(\sum q')_s = -(\sum P_n \Delta S_i)_s = -(\sum \vec{P}_i \Delta \vec{S}_i)_s.$$

В пределе при  $\Delta S_i \rightarrow 0$

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -(\sum q')_s \quad (21.4)$$

— **теорема Остроградского–Гаусса для поляризованности**: поток поляризованности сквозь произвольную замкнутую поверхность равен сумме связанных зарядов, охваченной этой поверхностью, взятой с обратным знаком.

б) Теорема Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$

Теорема Остроградского–Гаусса для напряжённости электрического поля

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_s + (\sum q')_s}{\epsilon_0}. \quad (21.5)$$

Сумма связанных зарядов  $(\sum q')_s$  не поддаётся прямому расчёту. Выразим эту сумму из (21.4):

$$(\sum q')_s = -\oint_S \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = (\sum q)_s - \oint_S \vec{P} d\vec{S},$$

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = (\sum q)_s$$

— **теорема Остроградского–Гаусса для напряжённости электрического поля в веществе**.

Введём вспомогательную величину

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (21.6)$$

— **электрическое смещение (электрическая индукция)**;

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_s \quad (21.7)$$

— **теорема Остроградского–Гаусса для электрического смещения**: поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью.

$\vec{D}$  — это вспомогательная векторная характеристика электрического поля, помогающая расчёту  $\vec{E}$ .

в) Связь  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$

Формула (21.6) — определение.

Для изотропного диэлектрика<sup>60</sup> (несегнетоэлектрика)  $\vec{P} \parallel \vec{E}$ ,  $\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$  и

<sup>60</sup> Для изотропных диэлектриков смысл относительной диэлектрической проницаемости — величина, показывающая во сколько раз диэлектрик ослабляет электрическое поле свободных зарядов (см. ПРИМЕР). Задачи на расчёт характеристик электрического поля в изотропном диэлектрике

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E}.$$

Обозначим

$$\epsilon = 1 + \alpha$$

— *относительная диэлектрическая проницаемость* вещества. Связь  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  запишется как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

У всех диэлектриков  $\epsilon > 1$ ; у полярных диэлектриков эта характеристика больше, у неполярных — меньше.

Для анизотропных диэлектриков  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не параллельны. Диэлектрические свойства вещества определяются *тензором диэлектрической проницаемости*

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

### ПРИМЕР

*Поле точечного заряда в однородном диэлектрике*

Точечный заряд  $Q > 0$  находится в безграничном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 21.4). Найдём ряд векторных характеристик электрического поля, создаваемого этим зарядом.

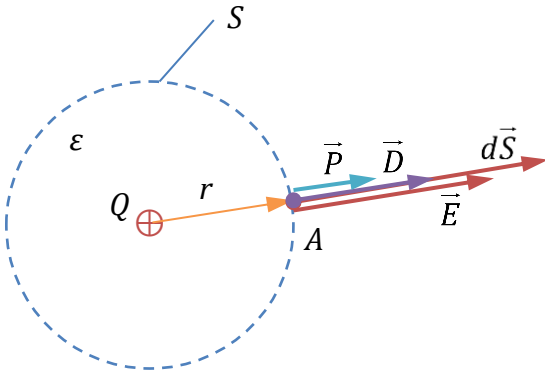


Рис. 21.4

Так как в пространстве имеется диэлектрик, воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса для  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S.$$

Выберем поверхность интегрирования  $S$  в виде сферы радиуса  $r$  — расстояние от заряда  $Q$  до точки  $A$ , в которой исследуется поле, с центром в точке, где расположен заряд  $Q$ ; нормаль  $d\vec{S}$  направлена радиально, как и  $\vec{D}$ . Поток  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_r 4\pi r^2,$$

охваченный заряд  $(\sum q)_S = Q$ . Получим

можно решать и без использования  $\vec{D}$  (вводя  $\epsilon$  в формулировку теоремы Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$ ), но мы настаиваем на том, чтобы студенты использовали эту величину и теорему Остроградского–Гаусса для  $\vec{D}$ .

$$D_r 4\pi r^2 = Q, \quad D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Связь между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \Rightarrow D_r = \varepsilon_0 \varepsilon E_r, \quad E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Поляризованность, исходя из определения  $\vec{D}$  (21.5),

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow P_r = D_r - \varepsilon_0 E_r = \frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{\varepsilon_0 Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Найдём также напряжённость электрического поля свободных и связанных зарядов. Проекция напряжённости электрического поля свободных зарядов на радиальное направление (см. 3.2.2)

$$E_{0r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}.$$

Так как  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ , напряжённость электрического поля связанных зарядов

$$E'_r = E_r - E_{0r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} - \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) < 0$$

— поле связанных зарядов направлено против поля свободных зарядов.

Отношение

$$\frac{E_r}{E_{0r}} = \frac{1}{\varepsilon} < 1$$

— диэлектрик ослабляет электрическое поле свободных зарядов в  $\varepsilon$  раз.

**Демонстрация:** Изменение потенциала при вводе диэлектрической пластины

#### 4. Теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме

##### Дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\nabla \vec{E})$$

— скалярная функция векторного аргумента.

В декартовых координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

в сферических координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi};$$

в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Можно доказать, что из теоремы Остроградского-Гаусса в интегральной форме (21.4), (21.5), (21.7) следует теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -(\sum q')_S \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'}, \quad (21.8)$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho},$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_S + (\sum q')_S}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0}}.$$

**ПРИМЕР**

Расчёт объёмной плотности связанных зарядов (см. [ПРЕДЫДУЩИЙ ПРИМЕР](#))

Точечный заряд  $Q$  находится в безграничном диэлектрике относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Найти объёмную плотность связанных зарядов в диэлектрике как функцию от расстояния  $r$  от заряда  $Q$ .

[РАНЕЕ](#) была получена зависимость поляризованности от  $r$ :

$$P_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right).$$

Рассчитаем объёмную плотность связанных зарядов по теореме Остроградского–Гаусса для  $\vec{P}$  в дифференциальной форме [\(21.8\)](#):

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{\cancel{r^2} Q}{4\pi \cancel{r^2}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \right] = 0.$$



## Лекция 22

## 3.3.3. Электрическое поле в диэлектриках (продолжение)

## 5. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Проанализируем, как изменяется электрическое поле при переходе из одной среды (диэлектрика) в другую.

Пусть имеются два изотропных диэлектрика (относительные диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ), граничащие друг с другом (рис. 22.1). В среде с  $\epsilon_1$  существует электрическое поле с напряжённостью  $\vec{E}_1$  и электрическим смещением  $\vec{D}_1$ . Свободные заряды на границе раздела сред отсутствуют. Найдём векторные характеристики поля в среде с  $\epsilon_2$  —  $\vec{E}_2$  и  $\vec{D}_2$  (в проекциях на нормаль  $\vec{n}$  и касательную  $\vec{\tau}$  к поверхности раздела сред).

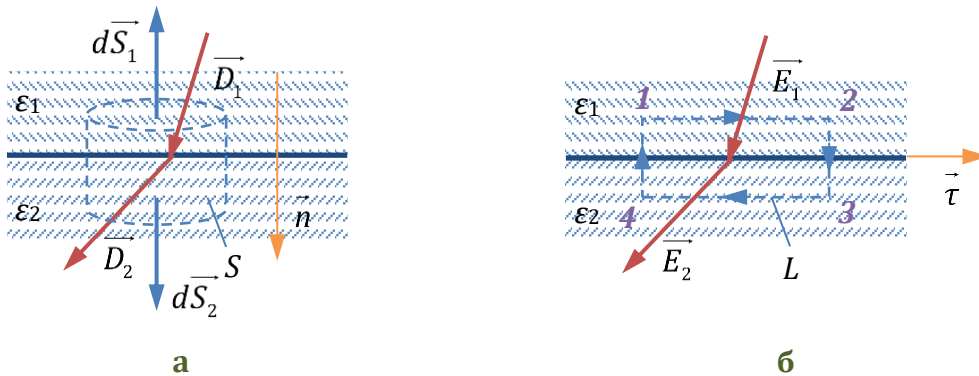


Рис. 22.1

1)  $D_n$ 

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса для  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S.$$

Выберем поверхность интегрирования  $S$  в виде цилиндра, основания которого параллельны границе раздела сред, а высота мала (рис. 22.1А). Поток  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = -D_{1n} S_{\text{торц}} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} d\vec{S} + D_{2n} S_{\text{торц}} = (D_{2n} - D_{1n}) S_{\text{торц}};$$

охваченный поверхностью  $S$  заряд  $(\sum q)_S = 0$ , так как свободные заряды на границе раздела отсутствуют. Поэтому

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (22.1)$$

— нормальная составляющая вектора электрического смещения не претерпевает скачка на границе раздела диэлектриков.

2)  $E_n$ 

Связь  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  в изотропном диэлектрике

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

поэтому

$$D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}, \quad D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}.$$

С учётом условия (22.1)

$$\cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}} = \cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \quad (22.2)$$

— нормальная составляющая напряжённости электрического поля претерпевает скачок на границе раздела диэлектриков.

### 3) $E_\tau$

Воспользуемся I уравнением Максвелла — условием потенциальности электростатического поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Выберем контур интегрирования  $L$  в виде прямоугольника, одна пара сторон которого параллельна границе раздела сред (стороны 1-2 и 3-4 на рис. 22.1Б), а другая мала (стороны 2-3 и 4-1). Циркуляция  $\vec{E}$  по контуру  $L$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = E_{1\tau} l_{12} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{l} - E_{2\tau} l_{34} + \int_4^1 \vec{E} d\vec{l} = (E_{1\tau} - E_{2\tau}) l_{12} = 0,$$

$$\boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}} \quad (22.3)$$

— тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля не претерпевает скачка на границе раздела диэлектриков.

### 4) $D_\tau$

Из связи между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  и условия (22.3) получим

$$D_{1\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}, \quad D_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau} \Rightarrow \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2},$$

$$\boxed{\frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (22.4)$$

— тангенциальная составляющая электрического смещения претерпевает скачок на границе раздела диэлектриков.

## 3.3.4. Проводники в электростатическом поле

### Свойства электростатического поля в проводниках<sup>61</sup>

**1.** Внутри проводника напряжённость электрического поля равна нулю:

$$\vec{E}^{\text{внутри}} = 0.$$

В противном случае по проводнику будет идти ток, так как в проводнике имеются свободные заряды, свободно перемещающиеся под действием электрического поля.

**Демонстрация:** Клетка Фарадея — отсутствие заряда внутри проводника

<sup>61</sup> Следует отметить, что эти утверждения относятся только к электростатическому полю в проводниках, т. е. к случаю, когда электрический ток отсутствует.

2. Напряжённость электрического поля перпендикулярна поверхности проводника:

$$E_\tau = 0, E = |E_n|.$$

Если  $E_\tau \neq 0$ , то по поверхности проводника будет идти ток.

3. Нескомпенсированный заряд располагается на поверхности проводника:

$$\rho = 0.$$

### Доказательство

Проведём внутри проводника произвольную замкнутую поверхность  $S$  (рис. 22.2). Теорема Остроградского-Гаусса для  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S.$$

Но  $\vec{D} = 0$ , так как  $\vec{E} = 0$ , поэтому  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0$  и  $(\sum q)_S = 0$ , т. е. нескомпенсированного заряда внутри проводника нет.

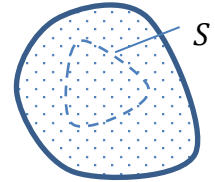


Рис. 22.2

**Демонстрация:** 1) Распределение заряда по поверхности проводника: шар, цилиндрический кондуктор (свинка)  
2) Стеkanie заряда с острия

4. Поверхность проводника эквипотенциальна (а также весь объём проводника):

$$\varphi = \text{const}.$$

### Доказательство

Найдём разность потенциалов между точками 1 и 2 на одном проводнике, соединив эти точки кривой, целиком лежащей внутри проводника (рис. 22.3), и воспользовавшись интегральной связью напряжённости и потенциала электростатического поля:

$$\Delta\varphi_{12} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2, \text{ ч. т. д.}$$

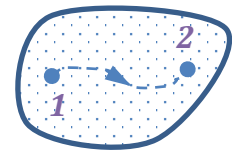


Рис. 22.3

**Демонстрация:** Распределение потенциала на поверхности проводника (шар, цилиндрический кондуктор)

5. Нормальная проекция электрического смещения у поверхности проводника равна поверхностной плотности свободных зарядов:

$$D_n = \sigma.$$

### Доказательство

Применим теорему Остроградского-Гаусса для  $\vec{D}$ , выбрав поверхность интегрирования  $S$  в виде цилиндра, одно из оснований которого лежит внутри проводника, а другое плотно прилегает к поверхности проводника с внешней стороны (рис. 22.4):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S;$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_n S_{\text{торц}},$$

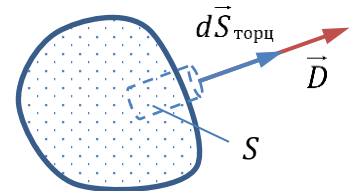


Рис. 22.4

так как внутри проводника  $\vec{D} = 0$  и потоки  $\vec{D}$  сквозь все стороны цилиндра  $S$ , кроме внешнего торца, равны нулю;

$$(\sum q)_S = \sigma S_{\text{торц}},$$

так как заряд распределён только по поверхности проводника;

$$D_n S_{\text{торц}} = \sigma S_{\text{торц}} \Rightarrow D_n = \sigma, \text{ ч. т. д.}$$

### 3.4. Электрическая ёмкость

#### 3.4.1. Ёмкость уединённого проводника

**Уединённый проводник** — проводник, удалённый от других тел, так что влиянием их электрических полей можно пренебречь.

Рассмотрим, как изменяются напряжённость электрического поля и потенциал уединённого проводника при изменении его заряда. При увеличении заряда в  $n$  раз напряжённость поля и потенциал увеличатся также в  $n$  раз (см. [ПРИМЕРЫ В РАЗДЕЛЕ 3.2.4](#)).

**Электрическая ёмкость уединённого проводника** — характеристика проводника, равная отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$C = \frac{Q}{\varphi},$$

$$[C] = \Phi \text{ (фарад)}.$$

Ёмкость не зависит от заряда, потенциала и прочих характеристик электрического поля, она зависит от формы и размеров проводника и диэлектрических свойств среды, его окружающей.

#### ПРИМЕР

##### Ёмкость шара

Уединённый проводник — металлический шар радиуса  $R$  находится в вакууме ([рис. 22.5](#)). Найти ёмкость проводника.

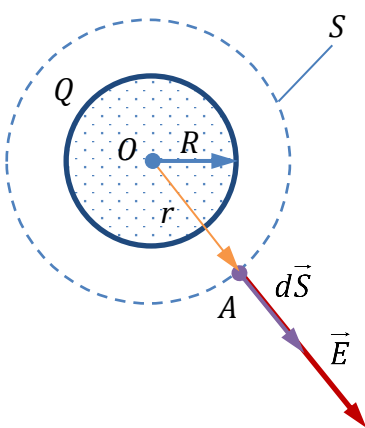


Рис. 22.5

Мысленно зарядим проводник зарядом  $Q$  и рассчитаем потенциал проводника (потенциал отсчитывается от бесконечно удалённой точки).

Сначала найдём напряжённость электрического поля из теоремы Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$ :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_S}{\epsilon_0}.$$

Поверхность интегрирования  $S$  — сфера радиуса  $r$ , где  $r$  — расстояние от центра шара до точки, где измеряется поле, концентричная заряженному шару. Поток  $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r 4\pi r^2$$

(см. [ПРИМЕР 1 В РАЗДЕЛЕ 3.2.3](#)), охваченный заряд равен заряду шара  $Q$ ;

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Потенциал шара найдём из интегральной связи напряжённости и потенциала электростатического поля:

$$\varphi = -\int_{\infty}^R E_r dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

По определению ёмкости

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

### 3.4.2. Взаимная ёмкость

Рассмотрим систему, состоящую из двух проводников, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку (рис. 22.6). Разность потенциалов между проводниками пропорциональна модулю их заряда:  $\varphi_+ - \varphi_- \sim q$ . Отношение

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-}$$

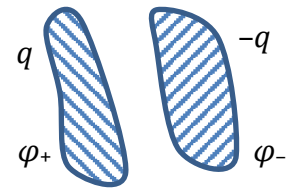


Рис. 22.6

— **взаимная ёмкость проводников**. Эта величина зависит от размеров, формы, взаимного расположения проводников и диэлектрических свойств среды и не зависит от заряда, потенциала и прочих характеристик электрического поля.

### 3.4.3. Конденсаторы

**Конденсатор** — система двух проводников, расположенных друг относительно друга так, что, если этим проводникам сообщить одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды, электрическое поле будет в основном сосредоточено между этими проводниками — **обкладками** конденсатора. Модуль заряда каждой из обкладок — **заряд** конденсатора.

**Ёмкость конденсатора** — характеристика конденсатора, равная отношению заряда конденсатора к модулю разности потенциалов между его обкладками (**напряжению** на обкладках):

$$C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{Q}{U}. \quad (22.5)$$

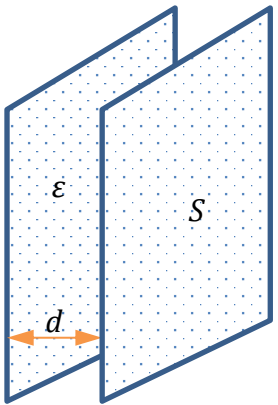
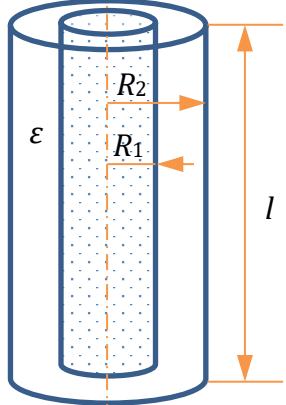
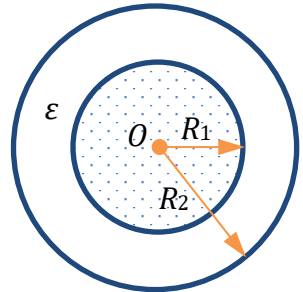
Ёмкость конденсатора зависит от формы и размеров обкладок, их взаимного расположения, диэлектрических свойств среды между обкладками и не зависит от заряда, напряжения и т. п.

Для расчёта ёмкости любого конденсатора нужно мысленно придать ему заряд, найти напряжение между обкладками, а затем ёмкость по определению (22.5).

В [ТАБЛИЦЕ 22.1](#) представлены конденсаторы простейшей формы и стандартные формулы<sup>62</sup> для вычисления их ёмкости. Примеры вывода подобных формул даны [НИЖЕ](#).

<sup>62</sup> Эти формулы относятся к конденсаторам, пространство между обкладками которых заполнено однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . В других случаях формулы для вычисления ёмкости нужно выводить заново, пользуясь определением ёмкости.

## Конденсаторы

Плоский	Цилиндрический	Сферический
 <p><math>d \ll</math> размеров пластин</p> $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	 <p><math>R_2 - R_1 \ll l</math></p> $C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$	 $C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

## ПРИМЕРЫ

## 1) Расчёт ёмкости плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком

Имеется плоский конденсатор, площадь обкладок которого равна  $S$ , расстояние между обкладками —  $d$ , пространство между обкладками заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 22.7). Найти ёмкость конденсатора.

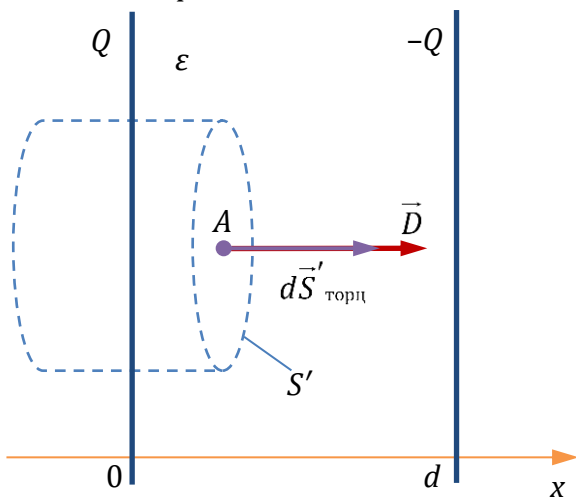


Рис. 22.7

Сообщим конденсатору заряд  $Q$ . Найдём электрическое смещение в пространстве внутри конденсатора с помощью теоремы Остроградского–Гаусса

$$\oint_{S'} \vec{D} d\vec{S}' = (\sum q)_{S'}$$

здесь  $(\sum q)_{S'}$  — сумма свободных зарядов, охваченных поверхностью  $S'$ . Поверхность интегрирования  $S'$  выберем в виде цилиндра, основания которого параллельны обкладкам конденсатора, один из торцов располагается вне конденсатора (за положительно заряженной обкладкой), а другой — внутри конденсатора.

Вне конденсатора поле отсутствует (это легко показать с помощью принципа суперпозиции полей, воспользовавшись результатом РАСЧЁТА ПОЛЯ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОСТИ), внутри конденсатора оно однородно;

$$\oint_{S'} \vec{D} d\vec{S}' = D_x S'_{\text{торц}}, \quad (\sum q)_{S'} = \sigma S'_{\text{торц}},$$

$\sigma$  — поверхностная плотность заряда положительно заряженной обкладки,  $\sigma = \frac{Q}{S}$ .

Заметим, что легко найти поток  $\vec{D}$  мы можем благодаря тому, что пластины считаются большими, т. е. практически бесконечными — мы пренебрегаем *краевыми эффектами*. Получим

$$D_x = \sigma = \frac{Q}{S}.$$

Далее, найдём напряжённость электрического поля через связь  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \Rightarrow E_x = \frac{D_x}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Затем найдём разность потенциалов между обкладками конденсатора, воспользовавшись интегральной связью напряжённости и потенциала электростатического поля:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \varphi(0) - \varphi(d) = -\int_d^0 E_x dx = -\int_d^0 \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} dx = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Наконец, по определению ёмкости [\(22.5\)](#)

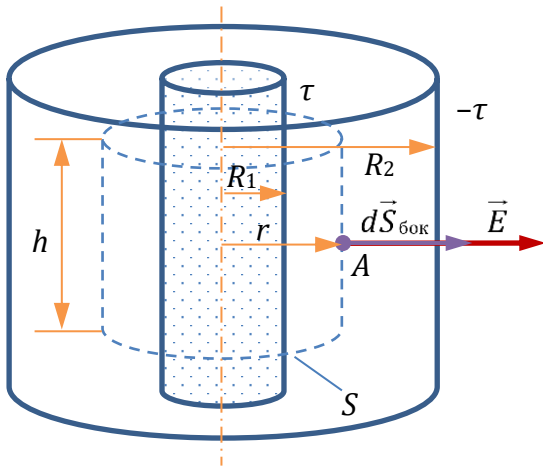
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

— формула, приведённая в [ТАБЛ. 22.1](#).

**Демонстрации:** 1) Плоский раздвижной конденсатор  
2) Влияние диэлектрика на ёмкость конденсатора

2) Расчёт ёмкости воздушного коаксиального кабеля (цилиндрического конденсатора)

Имеется воздушный коаксиальный кабель (в пространстве между обкладками  $\varepsilon = 1$ ), радиусы обкладок равны  $R_1$  и  $R_2$  ([рис. 22.8](#)). Найти ёмкость кабеля, приходящуюся на отрезок единичной длины.



**Рис. 22.8**

Ход решения будет аналогичен [ПРЕДЫДУЩЕМУ ПРИМЕРУ](#). Зарядим обкладки линейными плотностями  $\tau$  (внутреннюю обкладку) и  $-\tau$  (внешнюю обкладку). Так как между обкладками нет диэлектрика, можно обойтись без  $\vec{D}$ . Теорема Остроградского–Гаусса для  $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_S}{\varepsilon_0}.$$

Поверхность интегрирования  $S$  выберем в виде цилиндра, коаксиального (соосного) кабелю, произвольной высоты  $h$ , много меньшей длины кабеля, радиуса  $r$ , где  $r$  — расстояние от оси кабеля до точки, в которой измеряется поле. Внутри внутреннего провода (при  $r < R_1$ ) и вне кабеля (при  $r > R_2$ ) поля нет.

Поток  $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r 2\pi r h,$$

заряд, охваченный поверхностью  $S$ ,  $(\sum q)_S = \tau h$  (см. [ЗАДАЧУ О ПОЛЕ ТОНКОЙ ДЛИННОЙ НИТИ](#)). Получим

$$E_r 2\pi r h = \frac{\tau h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Напряжение на обкладках конденсатора

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = -\int_{R_2}^{R_1} E_r dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Ёмкость, приходящаяся на отрезок кабеля единичной длины,

$$C_1 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

### 3) Расчёт ёмкости сферического конденсатора с двухслойным диэлектриком

Имеется сферический конденсатор, радиус внутренней обкладки которого равен  $R_1$ , радиус внешней обкладки —  $R_2$ , заполненный двумя слоями диэлектрика: диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  (область **I** на [РИС. 22.9](#)) примыкает вплотную к внутренней обкладке, диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  (область **II**) — к внешней обкладке, радиус границы раздела диэлектриков равен  $R_0$ . Найти ёмкость конденсатора.

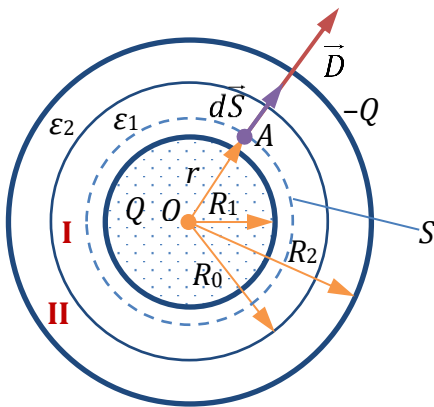


Рис. 22.9

Зарядим конденсатор: пусть внутренняя обкладка имеет заряд  $Q$ , а внешняя обкладка — заряд  $-Q$ . Электрическое поле существует только в пространстве между обкладками ( $R_1 < r < R_2$ ). Применим теорему Остроградского–Гаусса для  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S.$$

Выберем поверхность интегрирования  $S$  в виде сферы, концентричной конденсатору. Поток  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_r 4\pi r^2,$$

охваченный поверхностью  $S$  свободный заряд равен  $Q$ ,

$$D_r 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Связь между напряжённостью электрического поля и электрическим смещением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \Rightarrow E_{I,r} = \frac{D_r}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_1 r^2}, \quad E_{II,r} = \frac{D_r}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_2 r^2}.$$

Напряжение на обкладках конденсатора



$$\begin{aligned}
 U = \varphi_+ - \varphi_- = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) &= - \int_{R_2}^{R_1} E_r dr = - \int_{R_2}^{R_0} E_{\text{II}r} dr - \int_{R_0}^{R_1} E_{\text{I}r} dr = - \int_{R_2}^{R_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \frac{dr}{r^2} - \int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_2 r} \Big|_{R_2}^{R_0} + \frac{1}{\varepsilon_1 r} \Big|_{R_0}^{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_2 R_0} - \frac{1}{\varepsilon_2 R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1 R_1} - \frac{1}{\varepsilon_1 R_0} \right) = \\
 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_1 R_1 R_2 - \varepsilon_1 R_0 R_1 + \varepsilon_2 R_0 R_2 - \varepsilon_2 R_1 R_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 R_0 R_1 R_2}.
 \end{aligned}$$

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 R_0 R_1 R_2}{\varepsilon_1 R_1 R_2 - \varepsilon_1 R_0 R_1 + \varepsilon_2 R_0 R_2 - \varepsilon_2 R_1 R_2}.$$

При  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  этот результат переходит в формулу, приведённую в [ТАБЛ. 22.1](#).

## Лекция 23

## 3.4.4. Способы соединения конденсаторов

## 1. Последовательное соединение

**Последовательное соединение** конденсаторов — соединение, при котором конденсаторы соединяются разноимённо заряженными обкладками.

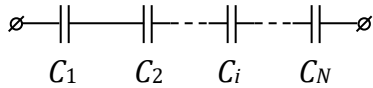


Рис. 23.1

На рис. 23.1 изображена схема батареи из  $N$  конденсаторов, соединённых последовательно. Заряд каждого конденсатора равен заряду всей батареи, так как все обкладки кроме крайних (левая обкладка конденсатора  $C_1$  и правая обкладка  $C_N$  на схеме рис. 23.1) изолированы и

сумма их зарядов равна нулю:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_N = Q.$$

Напряжение на  $i$ -м конденсаторе

$$U_i = \frac{Q_i}{C_i}.$$

Напряжение на батарее есть сумма напряжений на каждом из конденсаторов:

$$U = \sum U_i = \sum \frac{Q_i}{C_i} = Q \sum \frac{1}{C_i}.$$

Ёмкость батареи

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}} \Rightarrow \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

## 2. Параллельное соединение

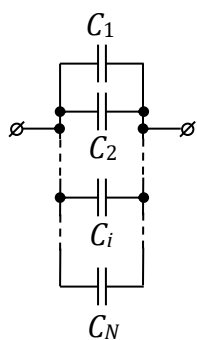


Рис. 23.2

**Параллельное соединение** конденсаторов — соединение, при котором конденсаторы соединяются одноимённо заряженными обкладками.

На рис. 23.2 изображена схема батареи  $N$  конденсаторов, соединённых параллельно. Напряжение на каждом из конденсаторов одинаково и равно напряжению на всей батарее:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_i = \dots = U_N = U.$$

Заряд батареи равен сумме зарядов каждого из конденсаторов:

$$Q = \sum Q_i = \sum C_i U_i = U \sum C_i.$$

Ёмкость батареи

$$C = \frac{Q}{U} = \sum C_i, \quad C = \sum_{i=1}^N C_i.$$

**Нужно соблюдать правила построения электрических схем!**

### 3.5. Энергия электростатического поля

#### 3.5.1. Энергия заряженного конденсатора

Пусть конденсатор ёмкостью  $C$  имеет заряд  $q$ . Перенесём положительный малый заряд  $dq$  с отрицательно заряженной обкладки на положительно заряженную (рис. 23.3). При этом внешними силами совершается работа

$$\delta A^* = dq \cdot (\varphi_+ - \varphi_-) = Udq = \frac{q}{C} dq.$$

Работа внешних сил по зарядке конденсатора от 0 до  $Q$

$$A^* = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Так как работа — мера изменения энергии,  $W = A^*$ ,

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$$

(по определению ёмкости  $Q = CU$ ).

**Демонстрация:** Энергия конденсатора (разряд на лампу)

#### 3.5.2. Объёмная плотность энергии электрического поля

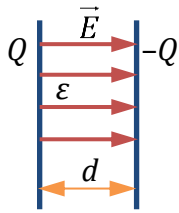


Рис. 23.4

Рассмотрим заряженный плоский конденсатор (рис. 23.4); заряд конденсатора равен  $Q$ , площадь обкладок —  $S$ , расстояние между обкладками —  $d$ , конденсатор заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Электрическое поле внутри конденсатора однородно, его напряжённость равна  $\vec{E}$ . Ёмкость этого конденсатора  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ , а напряжение между обкладками

(по интегральной связи напряжённости и потенциала)  $U = Ed$ . Энергия конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 V}{2}, \quad (23.1)$$

где  $V = Sd$  — объём конденсатора.

**Объёмная плотность энергии** электрического поля — энергетическая характеристика поля, равная энергии поля в единичном объёме

$$w = \frac{W}{V} \quad (23.2)$$

для однородного поля,

$$w = \frac{dW}{dV};$$

$$[w] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

для неоднородного поля.

В изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$

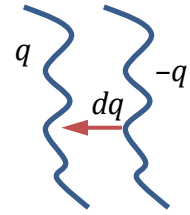


Рис. 23.3

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

### Доказательство

Пусть в пространстве существует электростатическое поле. Разобьём пространство на плоские конденсаторы: вдоль любой пары близко расположенных друг к другу эквипотенциальных поверхностей можно мысленно разместить тонкие проводники, которые служат обкладками плоского конденсатора (рис. 23.5) (при этом поле не исказится, так как проводник в электростатическом поле эквипотенциален). По формулам (23.1) и (23.2) объёмная плотность энергии

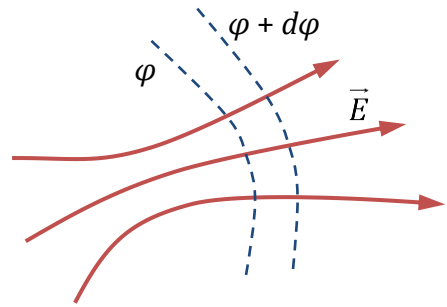


Рис. 23.5

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

Так как в изотропной среде  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ ,

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}.$$

Выражение объёмной плотности энергии электрического поля

$$w = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}$$

справедливо для любой среды.

Согласно определению объёмной плотности, энергия электрического поля в объёме  $V$

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\vec{D} \vec{E}}{2} dV.$$

### ПРИМЕР

Энергия электрического поля заряженной сферы

По сфере радиуса  $R$ , находящейся в безграничном однородном диэлектрике относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , равномерно распределён заряд  $Q$  (рис. 23.6). Найти энергию электрического поля в сферическом слое, внутренний радиус которого равен  $r_1$ , а внешний —  $r_2$  ( $r_1, r_2 > R$ ), концентричном заряженной сфере, и энергию электрического поля во всём пространстве.

Сначала нужно найти напряжённость электрического поля. Аналогичная задача (при  $\varepsilon = 1$ ) была решена нами ранее (см. ПРИМЕР 1 В РАЗДЕЛЕ 3.2.3). Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса для  $\vec{D}$  и связью  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  в изотропном диэлектрике, получим, что при  $r > R$  (область I на рис. 23.6)

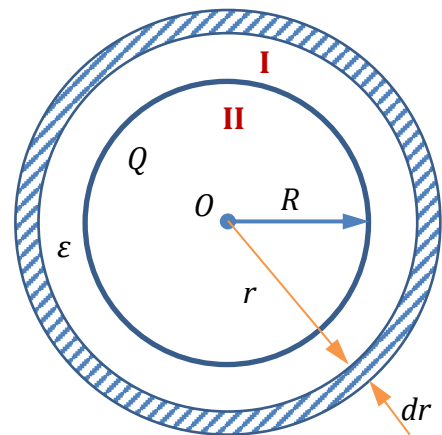


Рис. 23.6

$$E_{lr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2},$$

при  $r < R$  (область **II**)  $E_{lr} = 0$ .

В области I объёмная плотность энергии электрического поля

$$w_1(r) = \frac{\epsilon_0\epsilon E_{lr}^2}{2} = \frac{\epsilon_0\epsilon Q^2}{2 \cdot 16\pi^2\epsilon_0^2\epsilon^2 r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon r^4}.$$

Разобьём пространство вне заряженной сферы на бесконечно тонкие сферические слои, концентричные заряженной сфере. Энергия электрического поля в слое радиуса  $r$  и толщины  $dr$

$$dW = w_1(r)dV = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Энергия поля в сферическом слое радиусами  $r_1$  и  $r_2$

$$W(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Энергия поля во всём пространстве

$$W_0 = \int_R^{\infty} \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon R}$$

(внутри заряженной сферы поля нет).

Заметим, что энергия поля всегда положительна вне зависимости от знака заряда.

### 3.6. Электрический ток

#### 3.6.1. Электрический ток. Сторонние силы

Если в проводнике (на каком-либо его участке) существует непостоянное электрическое поле, то напряжённость поля внутри проводника  $\vec{E} \neq 0$  и имеет место электрический ток.

Направление тока — направление упорядоченного движения положительно заряженных частиц.

**Сила тока**<sup>63</sup> — скалярная алгебраическая величина — характеристика тока, равная заряду, проходящему через поперечное сечение проводника в единичный промежуток времени:

$$I = \frac{dq}{dt};$$

$$[I] = \text{A},$$

ампер — одна из основных единиц СИ.

Знак силы тока определяется тем, совпадает ли направление движения положительных зарядов с выбранным положительным направлением обхода проводящего контура (см. [НИЖЕ](#)).

<sup>63</sup> Эту величину в электротехнике называют **током**.

**Плотность тока** — векторная характеристика тока, по модулю равная заряду, проходящему в единичный промежуток времени через единичный участок поперечного сечения проводника, а по направлению совпадающая с направлением движения положительных зарядов (рис. 18.1)<sup>64</sup>:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \vec{n};$$

$$[j] = \frac{A}{M^2}.$$

Почему возникает электрический ток? На некотором участке проводника происходит разделение зарядов. Такое разделение не может произойти под действием кулоновского (электростатического) поля; под действием кулоновского поля разделение зарядов, наоборот, исчезает. Разделение зарядов происходит под действием электромагнитных (неэлектростатических) полей; эти поля называют **сторонними силами**<sup>65</sup>.

Уравнение Максвелла:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S};$$

при  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} \neq 0$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{A}{q_0},$$

здесь  $A$  — работа электрического поля по перемещению пробного заряда  $q_0$  по замкнутому контуру  $L$ . Представим напряжённость электрического поля в проводнике как

$$\vec{E} = \vec{E}^{\text{кул}} + \vec{E}^{\text{стор}} \quad (23.3)$$

— сумму напряжённостей кулоновского и неэлектростатического полей;

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L (\vec{E}^{\text{кул}} + \vec{E}^{\text{стор}}) d\vec{l} = \oint_L \vec{E}^{\text{кул}} d\vec{l} + \oint_L \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Теперь рассмотрим незамкнутый контур **1-2**, лежащий в проводнике (рис. 23.7). Интеграл по этому контуру

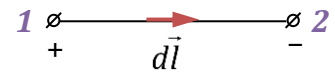


Рис. 23.7

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 (\vec{E}^{\text{кул}} + \vec{E}^{\text{стор}}) d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}^{\text{кул}} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l} =$$

$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l};$$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l}$$

<sup>64</sup> Рисунок 18.1 следует нарисовать заново.

<sup>65</sup> Здесь и далее мы сталкиваемся с исторически сложившейся, но не очень удачной терминологией: сторонние силы — это не силы, а поля, т. е. физические объекты; ЭДС — это не силовая, а энергетическая характеристика поля.

— *электродвижущая сила (ЭДС)* — энергетическая характеристика электромагнитного поля (поля сторонних сил), равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда из начала в конец проводника;

$$[\mathcal{E}] = \text{В}.$$

### 3.6.2. Закон Ома

Большинство проводников подчиняется закону Ома. Экспериментальный<sup>66</sup> **закон Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (23.4)$$

где  $\sigma$  — *удельная электропроводность вещества*. Закон Ома справедлив для веществ, в которых концентрация носителей заряда остаётся неизменной.

*Удельное электрическое сопротивление вещества*

$$\rho = \frac{1}{\sigma};$$

$$[\sigma] = \frac{\text{СМ}}{\text{М}}, [\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Подставим напряжённость электрического поля в виде (23.3) в закон Ома в форме (23.4), затем умножим скалярно на элемент контура  $d\vec{l}$ :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}^{\text{кул}} + \vec{E}^{\text{стоп}}),$$

$$\vec{j} d\vec{l} = \sigma \vec{E}^{\text{кул}} d\vec{l} + \sigma \vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l} = \frac{\vec{E}^{\text{кул}} d\vec{l}}{\rho} + \frac{\vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l}}{\rho}.$$

Умножим это выражение на  $\rho$  и проинтегрируем по контуру 1-2 (рис. 23.7):

$$\int_1^2 \rho \vec{j} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}^{\text{кул}} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}. \quad (23.5)$$

По определению плотности тока

$$\vec{j} d\vec{l} = \frac{dI}{dS} n d\vec{l} = \frac{dI}{dS} d\vec{l} = \frac{I}{S_{\perp}} d\vec{l},$$

где  $S_{\perp}$  — площадь сечения проводника в направлении, перпендикулярном плотности тока. Подставим это выражение в (23.5) и проинтегрируем по участку 1-2:

$$I \int_1^2 \frac{\rho d\vec{l}}{S_{\perp}} = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12}.$$

Интеграл в левой части этого равенства — *электрическое сопротивление участка цепи 1-2* — характеристика проводника, зависящая от его формы, размеров и материала:

$$R_{12} = \int_1^2 \frac{\rho d\vec{l}}{S_{\perp}}; \quad (23.6)$$

$$[R] = \text{Ом}.$$

<sup>66</sup> Этот закон для металлических проводников будет выведен в ПАРАГРАФЕ 6.5.

С учётом определения (23.6) перепишем (23.5) в виде

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \quad (23.7)$$

— *обобщённый закон Ома для участка цепи*. Здесь:

$\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов на участке 1-2;

$\mathcal{E}_{12}$  — ЭДС на участке 1-2;

$$IR_{12} = U_{12} = \frac{A_{12}^{\text{кул}}}{q_0} + \frac{A_{12}^{\text{стоп}}}{q_0} \quad \text{— падение напряжения на участке 1-2.}$$

**Демонстрации:** 1) Падение потенциала вдоль верёвки  
2) Обобщённый закон Ома (Усы Курёпина)

### 3.6.3. Способы соединения проводников

В этом разделе рассматриваются *однородные участки* цепи, т. е. такие, на которых неэлектростатические поля не совершают работы ( $\mathcal{E}_{12} = 0$ ). *Закон Ома для однородного участка цепи*

$$IR_{12} = U_{12}$$

1. Последовательное соединение (рис. 23.8)

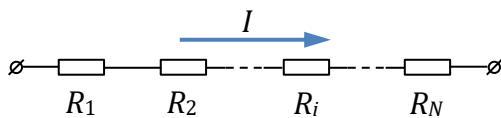


Рис. 23.8

Для  $N$  проводников, соединённых последовательно

$$I_1 = I_2 = \dots = I_i = \dots = I_N = I,$$

так как по закону сохранения заряда заряд, проходящий через любое сечение каждого из проводников в определённый промежуток времени, одинаков.

Для однородного участка  $IiR_i = U_i = \varphi_{1i} - \varphi_{2i}$ ; общее падение напряжения

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_i + \dots + U_N = \sum U_i.$$

Сопротивление участка цепи, состоящего из  $N$  проводников, соединённых последовательно,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\sum U_i}{I} = \sum \frac{U_i}{I_i} = \sum R_i;$$

$$R = \sum_{i=1}^N R_i.$$



## 2. Параллельное соединение (рис. 23.9)

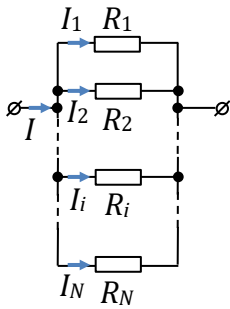


Рис. 23.9

В этом случае напряжение на всех проводниках одинаково, а токи суммируются:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_i = \dots = U_N = U,$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_i + \dots + I_N = \sum I_i.$$

Сопротивление участка цепи, состоящего из  $N$  проводников, соединённых параллельно,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\sum I_i} = \frac{1}{\sum \frac{I_i}{U}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}},$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}.$$

### 3.6.4. Правила Кирхгофа

Приведённые ниже два правила являются выражениями физических законов — закона сохранения электрического заряда и закона Ома — и позволяют рассчитать токи и напряжения на любом участке сколь угодно сложной электрической цепи.

1. Алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю:

$$\left( \sum I_i \right)_{\text{узел}} = 0.$$

**Узел** электрической цепи — место (точка на электрической схеме), где соединяются два и более проводников (рис. 23.10). При записи I правила Кирхгофа втекающие в узел токи считаются положительными, вытекающие — отрицательными.

I правило Кирхгофа следует из закона сохранения электрического заряда.

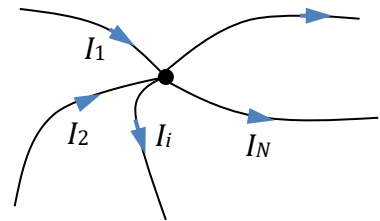


Рис. 23.10

2. Сумма падений напряжений на замкнутом участке цепи равна сумме ЭДС на этом участке:

$$\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i.$$

### Доказательство

Применим обобщённый закон Ома (23.7) к каждому из  $N$  проводников на замкнутом участке цепи:

$$I_i R_i = \varphi_{1i} - \varphi_{2i} + \mathcal{E}_i.$$

Просуммируем эти выражения по всему замкнутому участку:

$$\sum I_i R_i = \sum (\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \sum \mathcal{E}_i, \text{ ч. т. д.}$$

→ 0, т. к. контур замкнут

Для расчёта токов в цепи произвольно выбирают направления токов в каждом неразветвлённом участке и направления обхода замкнутых контуров. Составляют систему линейных алгебраических уравнений:

$N - 1$  уравнений по I правилу Кирхгофа ( $N$  — число узлов);

$k$  уравнений по II правилу Кирхгофа ( $k$  — число независимых замкнутых контуров, т. е. таких контуров, которые нельзя целиком составить из других рассматриваемых контуров).

Эта система уравнений должна иметь одно и только одно решение.

### ПРИМЕР

Расчёт токов в разветвлённой цепи

Электрическая цепь состоит из трёх источников постоянного тока и трёх однородных проводников (схема цепи на [рис. 23.11](#)). Параметры  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, R_1, R_2, R_3$  известны. Найти ток в каждой из ветвей цепи.

Число узлов в цепи  $N = 2$ , число независимых контуров  $k = 2$ .

Произвольно обозначим направления токов в ветвях цепи, выберем направления обхода контуров **I** и **II** (см. [рис. 23.11](#)). Можно было бы выбрать другие два из трёх замкнутых контуров в этой цепи.

Запишем уравнение по I правилу Кирхгофа для узла **1** и уравнения по II правилу Кирхгофа для контуров **I** и **II**:

$$1: -I_1 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$I: -I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$$

$$II: -I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Эта система содержит 3 уравнения с 3 неизвестными. Студентам предлагается решить её **самостоятельно**.

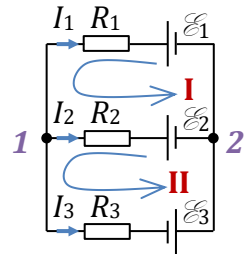


Рис. 23.11

## Лекция 24

## 3.6.5. Закон Джоуля–Ленца

При протекании электрического тока энергия электрического поля — работа сторонних сил расходуется на приращение внутренней энергии проводника ( $A = \Delta U = Q$  — количество теплоты, выделившееся в цепи).

Работа электростатического поля по переносу заряда  $dq$  по однородному участку цепи 1-2 (рис. 23.7)

$$\delta A = -(\varphi_2 - \varphi_1) dq;$$

по определению силы тока  $dq = Idt$ , а по закону Ома для однородного участка цепи  $IR = \varphi_1 - \varphi_2$ . Работа по переносу заряда по участку цепи 1-2 за конечное время  $t$

$$A = -\int_0^t (\varphi_2 - \varphi_1) Idt = \int_0^t IR \cdot Idt = \int_0^t I^2 R dt;$$

$$Q = \int_0^t I^2 R dt$$

— закон Джоуля–Ленца в интегральной форме.

При  $I = \text{const}$

$$Q = I^2 R t = U I t = \frac{U^2}{R} t.$$

Мощность тока [по определению мощности (см. РАЗДЕЛ 1.8.2)]

$$N = \frac{\delta Q}{dt}.$$

**Удельная мощность тока** — энергетическая характеристика тока, равная энергии электрического поля, переходящей во внутреннюю энергию проводника в единичный промежуток времени в единичном объёме:

$$w = \frac{\delta Q}{V dt};$$

$$[w] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Так как  $\delta Q = I^2 R dt$ ,

$$w = \frac{I^2 R}{V}.$$

Для проводника цилиндрической формы (рис. 24.1)  $V = Sl$ ,

$R = \frac{\rho l}{S}$  ( $\rho$  — удельное сопротивление проводника); если

плотность тока  $\vec{j}$  постоянна по сечению проводника, то  $I = jS$  и

$$w = \frac{j^2 S^2 \rho l}{S \cdot Sl} = \rho j^2;$$

$$w = \rho j^2$$

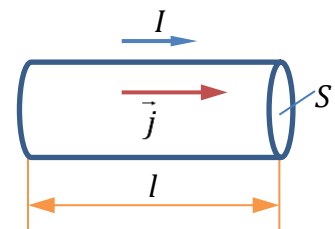


Рис. 24.1

— **закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.** Можно показать, что этот закон справедлив для проводника любой формы и при любом распределении плотности тока.

**ПРИМЕР**

Параллельное и последовательное соединения ламп накаливания

Две одинаковые лампы накаливания подключаются к одному и тому же источнику сначала параллельно, затем последовательно. В каком случае лампы будут ярче гореть?

**Демонстрация:** Параллельное и последовательное соединение ламп

Лампа будет гореть тем ярче, чем больше её температура, т. е. чем больше энергия, переходящая во внутреннюю энергию, — мощность тока, протекающего через лампу.

Представим лампы как проводники сопротивлением  $R$ ; источник, к которому они подключаются, имеет ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$ .



**Рис. 24.2**

1) *Параллельное соединение (схема на [рис. 24.2А](#))*

I правило Кирхгофа для узла 1:

$$I_0 = I_1 + I_1 = 2I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{I_0}{2}.$$

Для нахождения тока  $I_0$  воспользуемся обобщённым законом Ома и формулой для сопротивления параллельно и последовательно соединённых проводников:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad R_1 = r + \frac{R \cdot R}{R + R} = r + \frac{R}{2} \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{2}} = \frac{2\mathcal{E}}{2r + R}, \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{2r + R}.$$

Мощность тока, протекающего через каждую из ламп,

$$N_1 = I_1^2 R = \left( \frac{\mathcal{E}}{2r + R} \right)^2 R.$$

2) *Последовательное соединение (схема на [рис. 24.2Б](#))*

Цепь неразветвлённая. Ток в цепи и в каждой из ламп

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{r + 2R}.$$

Мощность тока в одной лампе

$$N_2 = I_2^2 R = \left( \frac{\mathcal{E}}{r + 2R} \right)^2 R.$$

Отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \left( \frac{\cancel{\mathcal{E}}}{2r + R} \right)^2 \left( \frac{r + 2R}{\cancel{\mathcal{E}}} \right)^2 = \left( \frac{r + 2R}{2r + R} \right)^2.$$

Обычно внутреннее сопротивление источника сравнительно невелико:  $r \ll R$ . В таком случае

$$\frac{N_1}{N_2} = \left( \frac{2R}{R} \right)^2 = 4.$$

При параллельном соединении лампы горят в четыре раза ярче, чем при последовательном.

### 3.7. Постоянное магнитное поле в вакууме

В этом случае  $\vec{E} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ .

Уравнения Максвелла:

$$\text{II. } \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 I_L$$

$$\text{IV. } \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Силовые линии магнитного поля замкнуты.

#### 3.7.1. Закон Био–Савара–Лапласа. Расчёт индукции магнитного поля методом суперпозиций

**Закон Био–Савара–Лапласа:** индукция магнитного поля точечного тока (бесконечно малого участка  $d\vec{l}$  тонкого проводника с током  $I$ )

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (24.1)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, соединяющий точечный ток с точкой, где измеряется индукция магнитного поля (рис. 24.3);  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $d\vec{l}$  направлен по току.

Направление  $d\vec{B}$  выбирается по правилу правой винта<sup>67</sup>. На рис. 24.3 векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  лежат в плоскости чертежа, а  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости чертежа. Модуль элементарной магнитной индукции

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}.$$

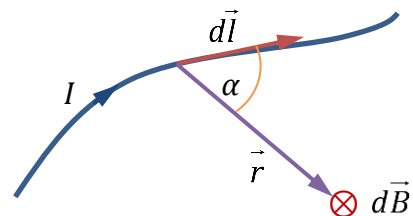


Рис. 24.3

<sup>67</sup> Можно пользоваться *правилом правой руки*, известным из школьного курса физики, в следующей формулировке: если пальцы правой руки направить по току, а большой палец — в сторону точки, где измеряется поле, то линии магнитной индукции будут входить в ладонь.

Закон Био–Савара–Лапласа — эмпирический закон. Исходя из него может быть доказана теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (см. [3.7.2](#)).

Принцип суперпозиции в применении к вектору магнитной индукции (см. [РАЗДЕЛ 3.1.5](#)):

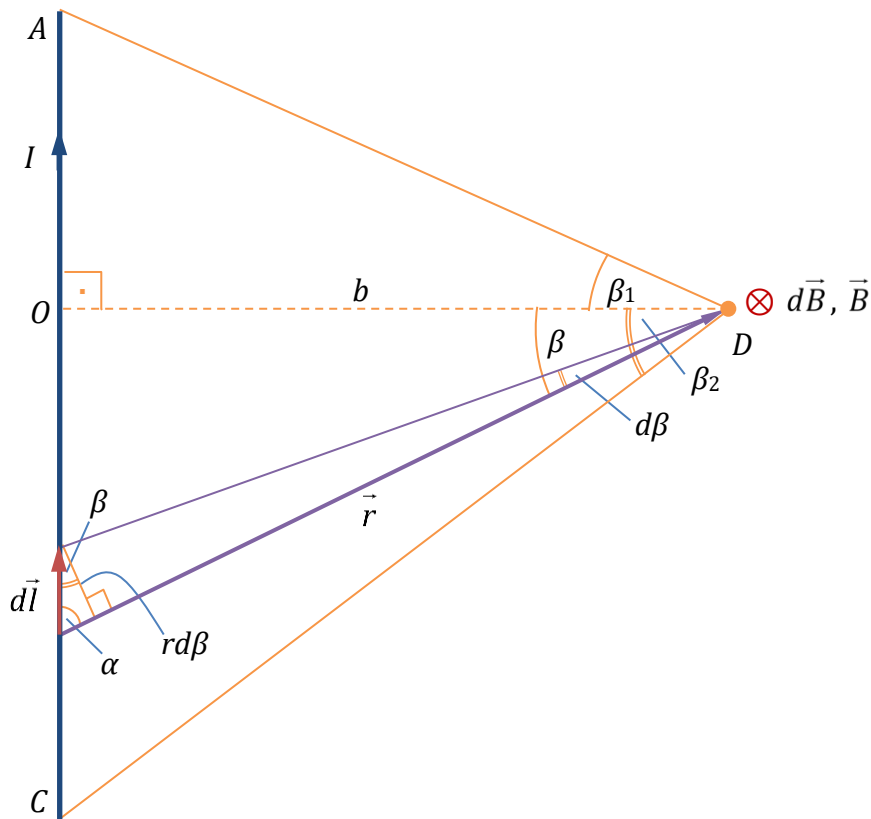
$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i, \quad \vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Любую сколь угодно сложную систему токов можно разбить на точечные токи (или токи другой формы, поле которых легко рассчитать) и рассчитать магнитную индукцию, воспользовавшись законом Био–Савара–Лапласа и принципом суперпозиции.

### ПРИМЕРЫ

#### 1) Расчёт индукции магнитного поля тонкого прямого провода с током

Тонкий прямой провод  $AC$ , по которому идёт ток  $I$ , виден из точки  $D$ , находящейся на перпендикуляре к нему на расстоянии  $b$ , под углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  ([РИС. 24.4](#)). Найти индукцию магнитного поля в точке  $D$ . Полеом подводящих проводов пренебречь.



**Рис. 24.4**

Разобьём провод на малые фрагменты  $d\vec{l}$  — точечные токи. По закону Био–Савара–Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

направление  $d\vec{B}$  — перпендикулярно плоскости чертежа «от нас». Применим принцип суперпозиции

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Все  $d\vec{B}$  направлены одинаково, поэтому результирующая магнитная индукция  $\vec{B}$  направлена так же.

Найдём модуль  $\vec{B}$ :

$$B = \int dB; dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2};$$

$r, \alpha, l$  — зависящие друг от друга переменные. Выразим их через угол  $\beta$ , так как интегрировать по этому углу удобнее:

$$\sin \alpha = \cos \beta, r = \frac{b}{\cos \beta}, dl = \frac{rd\beta}{\cos \beta} = \frac{bd\beta}{\cos^2 \beta};$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{bd\beta \cos^2 \beta}{b^2 \cos^2 \beta} \cos \beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \beta d\beta;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2).$$

### Предельный случай

При  $\beta_1, \beta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

— модуль индукции магнитного поля длинного прямого провода с током. ПОЗДНЕЕ мы получим этот результат другим способом.

### 2) Расчёт индукции магнитного поля тонкого кольца с током

По тонкому кольцу радиуса  $R$  идёт ток  $I$ . Найти магнитную индукцию в точках на оси кольца:  $\vec{B}(z)$  (рис. 24.5).

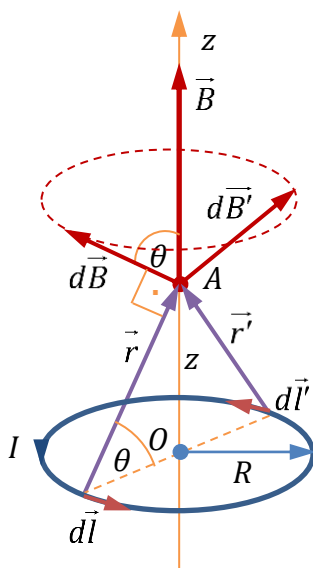


Рис. 24.5

Разобьём кольцо на одинаковые по модулю элементы  $d\vec{l}$ . Воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа и принципом суперпозиции:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Все  $d\vec{B}$  одинаковы по модулю и образуют конус с вершиной в точке  $A$ , где измеряется поле (рис. 24.5). Результирующая магнитная индукция направлена вдоль оси кольца:  $B = B_z$ . Найдём  $B_z$ :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \frac{\pi}{2}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}, dB_z = dB \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \theta;$$

$r$  и  $\cos \theta$  одинаковы для всех  $d\vec{l}$ ;

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}, \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Подставим в формулу для  $dB_z$  выражения для  $r$  и  $\cos \theta$  и проинтегрируем по всей длине кольца:

$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 I R \cdot 2\pi R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (24.2)$$

### Предельные случаи

а)  $z = 0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

б)  $z \gg R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$  — модуль индукции магнитного поля точечного контура.

### 3) Расчёт индукции магнитного поля прямого круглого соленоида с током

По прямому круглому соленоиду (катушке, на которую намотана проволока) радиуса  $R$ , имеющему плотность намотки  $n$ , идёт ток  $I$  (рис. 24.6А). Найти магнитную индукцию в точке на оси соленоида, отстоящей от концов соленоида на  $l_1$  и  $l_2$  (точка  $O$  на рис. 24.6Б):  $\vec{B}(l_1, l_2)$ .

**Плотность намотки** — число витков, приходящихся на отрезок соленоида единичной длины:

$$n = \frac{N}{l},$$

где  $N$  — число витков соленоида,  $l$  — его длина.

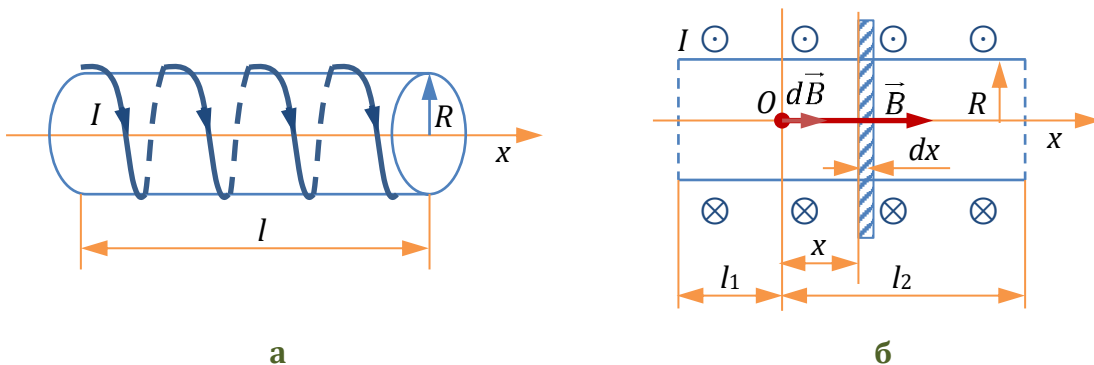


Рис. 24.6

Разобьём соленоид на тонкие кольца и воспользуемся принципом суперпозиции полей

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

и результатом предыдущей задачи (24.2). Индукция магнитного поля  $d\vec{B}$ , создаваемого каждым тонким кольцом, направлена одинаково; соответственно и результирующий вектор  $\vec{B}$  направлен так же (рис. 24.6Б);

$$B = B_x = \int dB.$$

Тонкое кольцо толщиной  $dx$ , отстоящее на  $x$  от точки  $O$ , состоит из

$$dN = n \cdot dx$$

витков и по нему идёт ток

$$dl = I dN = n I dx.$$



Модуль индукции магнитного поля этого кольца, согласно (24.2),

$$dB = \frac{\mu_0 dI \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n R^2 I dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Проинтегрируем это выражение по всей длине соленоида, т. е. от  $-x_1$  до  $x_2$ :

$$B = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\mu_0 n R^2 I}{2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n R^2 I}{2} \frac{1}{R^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \Big|_{-l_1}^{l_2} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{l_2}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} \right).$$

Если точка  $O$  находится в середине соленоида, т. е.  $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ , то

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{l}{\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{\mu_0 n I l}{\sqrt{4R^2 + l^2}} = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{4R^2 + l^2}}.$$

### Предельный случай

При  $R \ll l$  (длинный соленоид)

$$B = \mu_0 n I.$$

Этот результат НИЖЕ будет получен другим способом.

### 3.7.2. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

**Теорема о циркуляции  $\vec{B}$ <sup>68</sup>:** циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру пропорциональна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( \sum I \right)_L.$$

Знак тока выбирается согласно направлению обхода контура  $L$  по правилу правого винта.

#### ПРИМЕР

На [рис. 24.7](#)  $\left( \sum I \right)_L = I_1 - I_2$ . Токи  $I_3$  и  $I_4$  с контуром  $L$  не сцеплены.

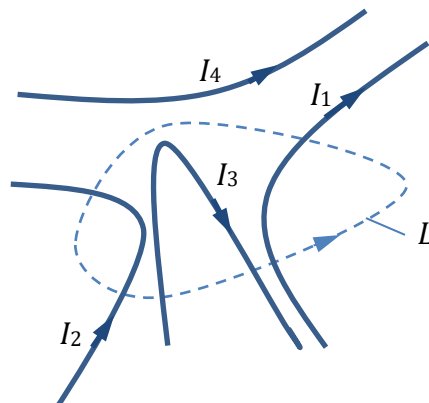


Рис. 24.7

<sup>68</sup> Эту теорему иначе называют **законом полного тока**.

Теорема о циркуляции  $\vec{B}$  полезна для расчёта магнитной индукции в отдельных случаях, в том числе при осевой симметрии распределения токов. Сначала направление  $\vec{B}$  определяется по принципу суперпозиции, затем выбирается такой контур интегрирования, циркуляцию по которому легко вычислить.

### ПРИМЕРЫ

#### 1) Расчёт индукции магнитного поля длинного тонкого прямого провода с током

По тонкому бесконечно длинному прямому проводу идёт ток  $I$ . Найти индукцию магнитного поля как функцию расстояния  $r$  от провода.

Принцип суперпозиции и закон Био–Савара–Лапласа указывают, что в каждой точке магнитная индукция направлена перпендикулярно току (проводу) и радиусу — перпендикулярно к проводу, проведённому в точку, где измеряется поле. Таким образом, силовые линии магнитного поля представляют собой окружности. На [рис. 24.8А](#) изображён вектор индукции магнитного поля в точке  $A$ , лежащей в плоскости рисунка. [рис. 24.8Б](#) — это [рис. 24.8А](#), вид сверху (провод перпендикулярен плоскости рисунка).

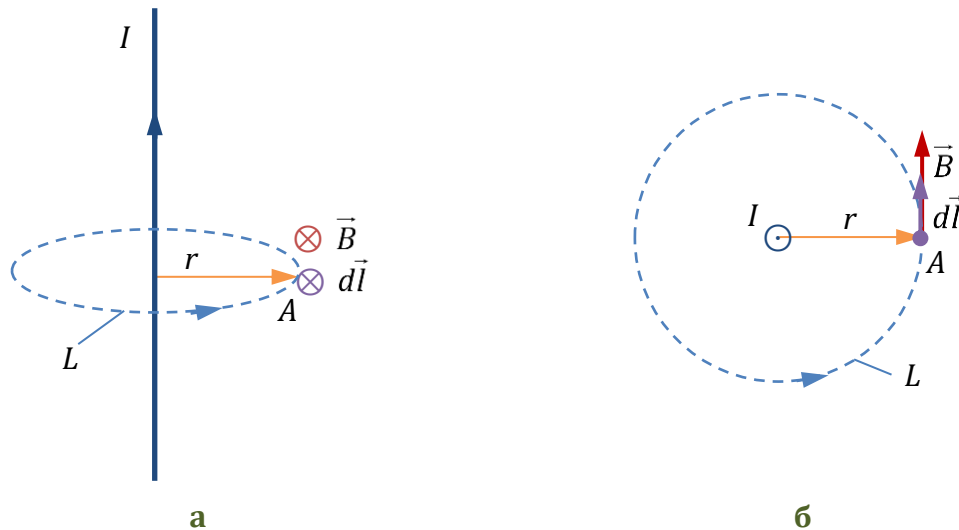


Рис. 24.8

Теорема о циркуляции  $\vec{B}$ :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum I)_L.$$

Так как провод бесконечный, модуль  $\vec{B}$  может зависеть только от  $r$ . Поэтому выбираем контур интегрирования  $L$  в виде окружности радиуса  $r$ , центр которой лежит на проводе ([рис. 24.8А, Б](#)). В каждой точке контура  $L$  вектор магнитной индукции направлен по касательной и одинаков по модулю. Циркуляция  $\vec{B}$  по контуру  $L$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos 0 = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r.$$

Сумма сцепленных с контуром  $L$  токов

$$(\sum I)_L = I.$$

Получим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Этот результат был нами получен [РАНЕЕ](#) по методу суперпозиций.

### 2) Расчёт индукции магнитного поля длинного прямого соленоида с током

По бесконечно длинному соленоиду с плотностью намотки  $n$  идёт ток  $I$ . Найти индукцию магнитного поля внутри соленоида.

По принципу суперпозиции поле соленоида складывается из полей бесконечного числа витков. Внутри соленоида суммарная магнитная индукция будет направлена вдоль его оси ([рис. 24.9](#)), более того, поле  $\vec{B}$  будет однородно, а вне соленоида поля витков будут скомпенсированы и результирующая магнитная индукция равна нулю (студенты должны показать это *самостоятельно*).

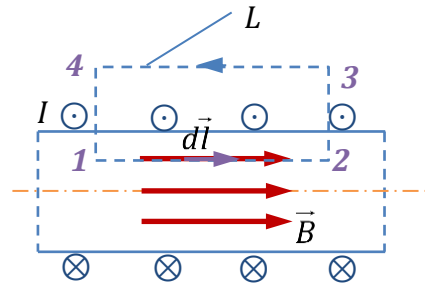


Рис. 24.9

Применим теорему о циркуляции  $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum I)_L.$$

Выберем контур интегрирования  $L$  в виде прямоугольника, одна из сторон (1-2) которого параллельна оси соленоида и лежит внутри него, противоположная ей (3-4) — вне соленоида, а две другие (2-3 и 4-1) перпендикулярны оси соленоида ([рис. 24.9](#)). Циркуляция  $\vec{B}$  по контуру  $L$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} d\vec{l} = \int_1^2 B dl \cos 0 + \int_2^3 B dl \cos \frac{\pi}{2} + \int_3^4 B dl \cos \frac{\pi}{2} = B \int_1^2 dl = Bl_{12},$$

$l_{12}$  — длина прямоугольника  $L$ .

Сцепленный с контуром  $L$  ток

$$(\sum I)_L = nl_{12}I,$$

$nl_{12}$  — число витков, приходящееся на отрезок соленоида длиной  $l_{12}$ . Получим

$$Bl_{12} = \mu_0 nl_{12}I \Rightarrow B = \mu_0 nI. \quad (24.3)$$

Как и должно быть, магнитная индукция не зависит от  $l_{12}$  — параметра произвольного контура интегрирования. Магнитная индукция также не зависит от формы и размеров поперечного сечения соленоида.

Полученный результат был достигнут нами [РАНЕЕ](#) с использованием метода суперпозиций.

### 3) Расчёт индукции магнитного поля тороида с током

*Тороид* — геометрическое тело, образованное вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры.

Имеется тороид, внутренний радиус которого равен  $R_1$ , внешний радиус —  $R_2$ , с обмоткой из  $N$  витков, по которым идёт ток  $I$  ([рис. 24.10](#)). Найти индукцию магнитного поля как функцию расстояния  $r$  от оси тороида.

Магнитное поле тороида является суперпозицией магнитных полей его витков. Поэтому вне тороида (при  $r < R_1$  и  $r > R_2$ )  $B = 0$ . Внутри же тороида вектор магнитной

индукции будет перпендикулярен радиусу, проведённому из центра тороида в точку  $A$ , где измеряется поле, модуль магнитной индукции будет зависеть только от  $r$ . Применим теорему о циркуляции  $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum I)_L.$$

Выберем контур интегрирования  $L$  в виде окружности радиуса  $r$  с центром в центре тороида. Циркуляция  $\vec{B}$  по контуру  $L$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos 0 = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r.$$

Сцепленный с контуром  $L$  ток

$$(\sum I)_L = NI.$$

Получим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

при  $R_1 < r < R_2$ .

График зависимости  $B(r)$  представлен на [рис. 24.11](#).

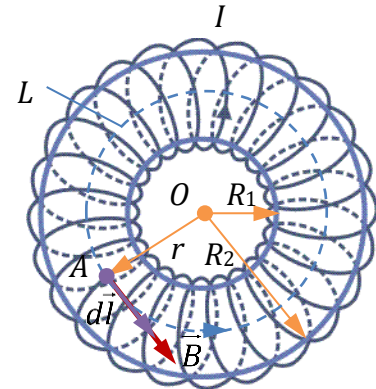


Рис. 24.10

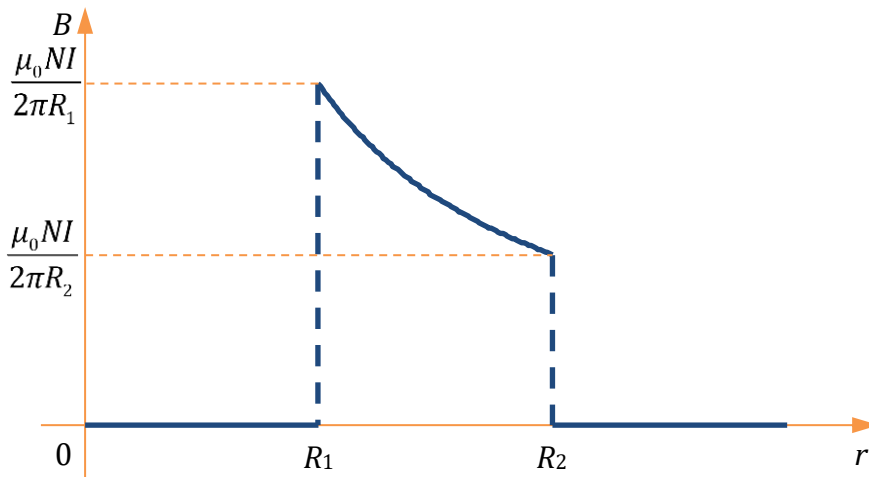


Рис. 24.11

### Предельный случай

При  $R_1 \approx R_2 \approx R$  (*тонкий тороид*)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI, \quad (24.4)$$

где  $n = \frac{N}{2\pi R}$  — плотность намотки тороида. Формула [\(24.4\)](#) совпадает с [\(24.3\)](#) — индукцией магнитного поля длинного соленоида.

Лекция 25

3.7.3. Теорема Остроградского–Гаусса для магнитной индукции

**Теорема Остроградского–Гаусса для магнитной индукции:** поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Поток вектора магнитной индукции — **магнитный поток**

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S};$$

$$[\Phi] = \text{Вб (вебер)}.$$

Поток магнитной индукции сквозь незамкнутую поверхность не зависит от формы этой поверхности, а зависит только от ограничивающего её контура.

**Доказательство**

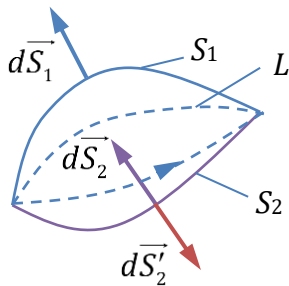


Рис. 25.1

Пусть на контур  $L$  натянуты две поверхности  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 25.1). Составная поверхность  $S_1 + S_2$  — замкнутая. По теореме Остроградского-Гаусса для  $\vec{B}$

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

При вычислении потока по замкнутой поверхности  $d\vec{S}$  — внешняя нормаль. Поэтому

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}'_2.$$

При расчёте же магнитного потока сквозь незамкнутые поверхности направление нормали выбирается по правилу правого винта, соответственно, нормали  $d\vec{S}_1$  и  $d\vec{S}_2$  будут направлены в одну сторону;  $d\vec{S}_2 = -d\vec{S}'_2$ . Из этого следует, что

$$\int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 - \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 = \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}'_2, \text{ ч. т. д.}$$

**ПРИМЕР**

Поток однородного магнитного поля сквозь полусферу

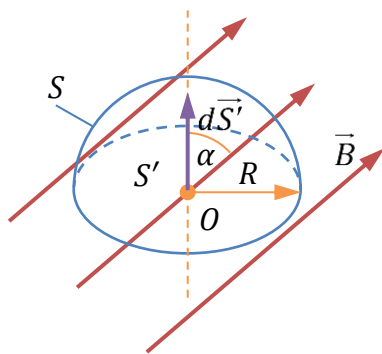


Рис. 25.2

Найдём поток однородного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  сквозь полусферу радиуса  $R$ , при том что силовые линии магнитного поля направлены под углом  $\alpha$  к нормали к основанию полусферы (рис. 25.2).

Полусфера  $S$  натянута на окружность радиуса  $R$  с центром в центре полусферы — точке  $O$ . На ту же окружность натянута и плоское основание  $S'$ . Следовательно, магнитные потоки сквозь поверхности  $S$  и  $S'$  равны:



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 j_x, \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_0 j_y, \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_0 j_z. \end{cases}$$

Это три независимых дифференциальных уравнения второго порядка в частных производных. Поэтому при известном распределении плотности тока в некоторых случаях удобнее решить эти уравнения по отдельности и найти все компоненты векторного потенциала, а затем по определению (25.2), проведя дифференцирование, найти магнитную индукцию.

Выражение, подобное (25.3), можно получить и для электрической компоненты электромагнитного поля:

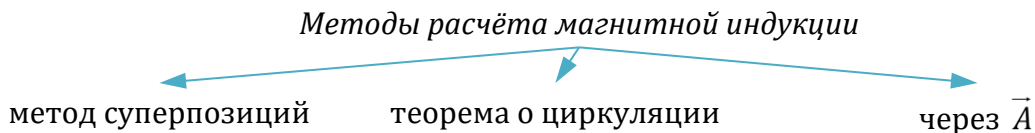
$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla\varphi, \\ \nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow -\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(напоминаем, что  $\varphi$ —потенциал,  $\rho$  — объёмная плотность заряда).

Единая энергетическая характеристика электромагнитного поля:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} ic\varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

— *4-потенциал*.



### 3.8. Действие магнитного поля на движущиеся заряды

#### 3.8.1. Движение точечного заряда в магнитном поле

Магнитная составляющая электромагнитного поля действует на точечный заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , с силой

$$\vec{F}_2 = q[\vec{v}\vec{B}]$$

— *сила Лоренца* (магнитная составляющая) (см. РАЗДЕЛ 3.1.3).

Магнитная составляющая силы Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы. По этой причине магнитное поле не совершает работы.

**ПРИМЕР**

Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Частица массы  $m$ , имеющая заряд  $q > 0$ , влетает со скоростью  $\vec{v}$  в область пространства, где имеется однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис. 25.3). Угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен  $\alpha$ . По какой траектории будет двигаться частица?

Запишем II закон Ньютона для данной частицы

$$m\vec{a} = \vec{F}_2, \quad (25.4)$$

где  $\vec{F}_2 = q[\vec{v}\vec{B}]$ . Сила  $\vec{F}_2$  и ускорение  $\vec{a}$  изображены на рис. 25.3А, Б в разных проекциях.

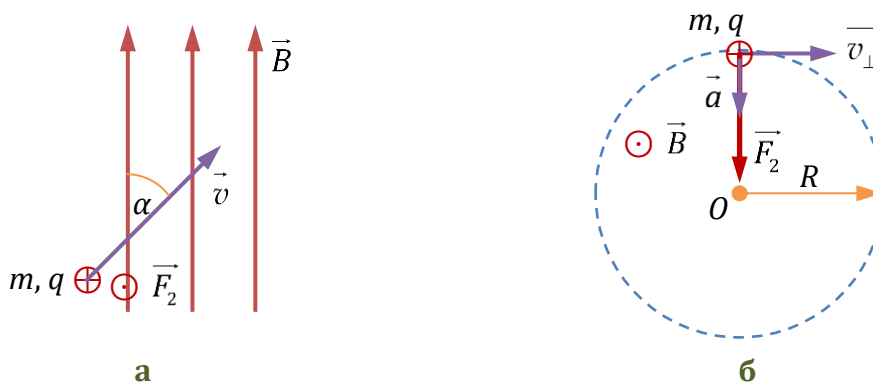


Рис. 25.3

Сила  $\vec{F}_2$  перпендикулярна скорости частицы, так же направлено и ускорение, т. е.  $a = a_n$  — нормальное ускорение. Следовательно, вдоль оси, параллельной линиям магнитной индукции, частица будет двигаться равномерно, а в проекции на плоскость, перпендикулярную линиям магнитной индукции (плоскость РИСУНКА 25.3Б) — по окружности.

Спроецируем векторное равенство (25.4) на нормаль к проекции траектории частицы на плоскость, перпендикулярную линиям магнитной индукции:

$$ma_n = qvB \sin \alpha.$$

По известной формуле кинематики (2.3)  $a_n = \frac{v_{\perp}^2}{R}$ , где  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ ,  $R$  — радиус траектории;

$$m \frac{v_{\perp}^2}{R} = qv_{\perp}B \Rightarrow R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Можно также найти шаг спирали, по которой движется частица.

При  $q < 0$  траектория будет закружаться в другую сторону.

**Демонстрация:** Отклонение электронов в магнитном поле



### 3.8.2. Действие магнитного поля на проводник с током

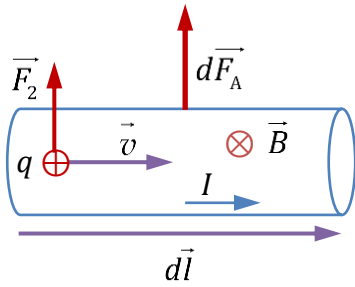


Рис. 25.4

Рассмотрим участок проводника длиной  $dl$ , находящийся в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , по которому идёт ток  $I$  (рис. 25.4). Заряд носителей равен  $q$  (будем считать, что в проводнике движутся положительно заряженные частицы), скорость их упорядоченного движения —  $\vec{v}$ . На каждый носитель магнитное поле действует с силой  $\vec{F}_2 = q[\vec{v}\vec{B}]$ . Всего на данном участке проводника находится  $dN$  носителей заряда, их общий заряд

$$dQ = q \cdot dN.$$

Сила, с которой магнитное поле действует на все эти заряды,

$$d\vec{F}_A = \vec{F}_2 dN = q[\vec{v}\vec{B}] dN = dQ[\vec{v}\vec{B}].$$

Представим  $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$  ( $dt$  — время, за которое носитель заряда проходит расстояние  $dl$ ; направим  $d\vec{l}$  в сторону упорядоченного движения зарядов), тогда

$$d\vec{F}_A = dQ \left[ \frac{d\vec{l}}{dt} \vec{B} \right] = \frac{dQ}{dt} [d\vec{l}, \vec{B}] = I [d\vec{l}, \vec{B}],$$

так как  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

**Закон Ампера:**

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}],$$

где  $d\vec{F}_A$  — **сила Ампера** — сила, с которой магнитное поле действует на проводник с током.

**Демонстрация:** Проводник в однородном поле (Качели Второва)

**ПРИМЕР**

Взаимодействие длинных прямых параллельных проводов с токами

Имеются два прямых параллельных длинных провода с токами  $I_1$  и  $I_2$ , текущими в одну сторону (рис. 25.5А). Расстояние между проводами равно  $d$ . Найти силу, с которой магнитное поле одного провода действует на отрезок другого провода единичной длины.

Направление индукции магнитного поля  $\vec{B}_1$  провода с током  $I_1$  в точках, через которые проходит провод с током  $I_2$ , и индукции магнитного поля  $\vec{B}_2$  провода с током  $I_2$  в точках, через которые проходит провод с током  $I_1$ ;  $d\vec{F}_{21}$  — сила, с которой поле провода с током  $I_1$  действует на элемент тока  $d\vec{l}_2$ ;  $d\vec{F}_{12}$  — сила, с которой поле провода с током  $I_2$  действует на элемент тока  $d\vec{l}_1$  показаны на рис. 25.5А.

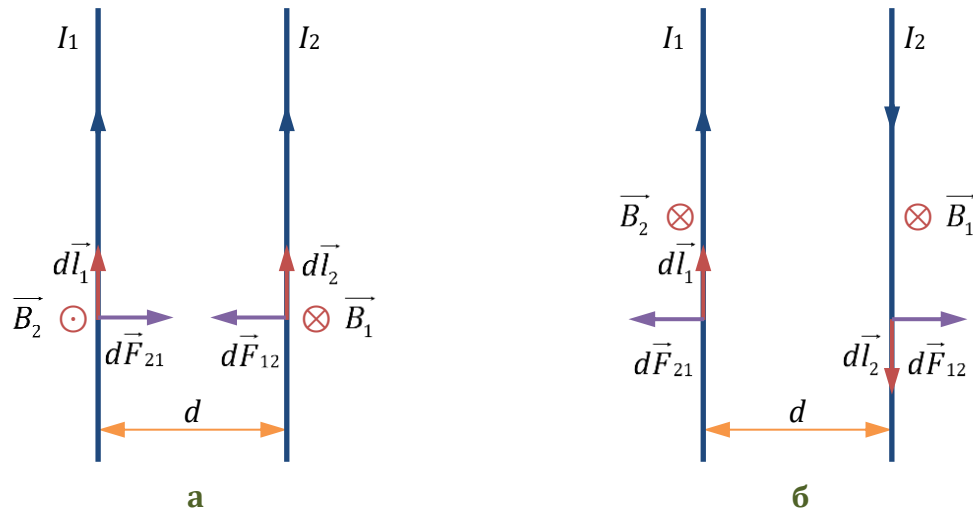


Рис. 25.5

По закону Ампера

$$\left. \begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= I_2 [d\vec{l}_2, \vec{B}_1], \\ d\vec{F}_{21} &= I_1 [d\vec{l}_1, \vec{B}_2] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} dF_{12} = I_2 B_1 dl_2, \\ dF_{21} = I_1 B_2 dl_1. \end{cases}$$

Модули магнитной индукции (см. [ПРИМЕР В РАЗДЕЛЕ 3.7.2](#))

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}.$$

При  $l_1 = l_2 = 1$  м

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

При одинаково направленных токах провода притягиваются. При разнонаправленных токах  $I_1, I_2$  (рис. 25.5Б) провода отталкиваются (формула для модуля силы взаимодействия проводов будет той же).

**Демонстрация:** Взаимодействие параллельных токов (с мишурой)

### 3.8.3. Рамка с током в магнитном поле

Поместим прямоугольную рамку **1234** с током  $I$  в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ ; нормаль к плоскости рамки расположена под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции (рис. 25.6А). Равнодействующая сил Ампера, с которыми магнитное поле действует на все четыре стороны рамки, равна нулю, но суммарный момент сил нулю равен не будет — рамка будет разворачиваться вокруг оси, перпендикулярной линиям магнитной индукции.

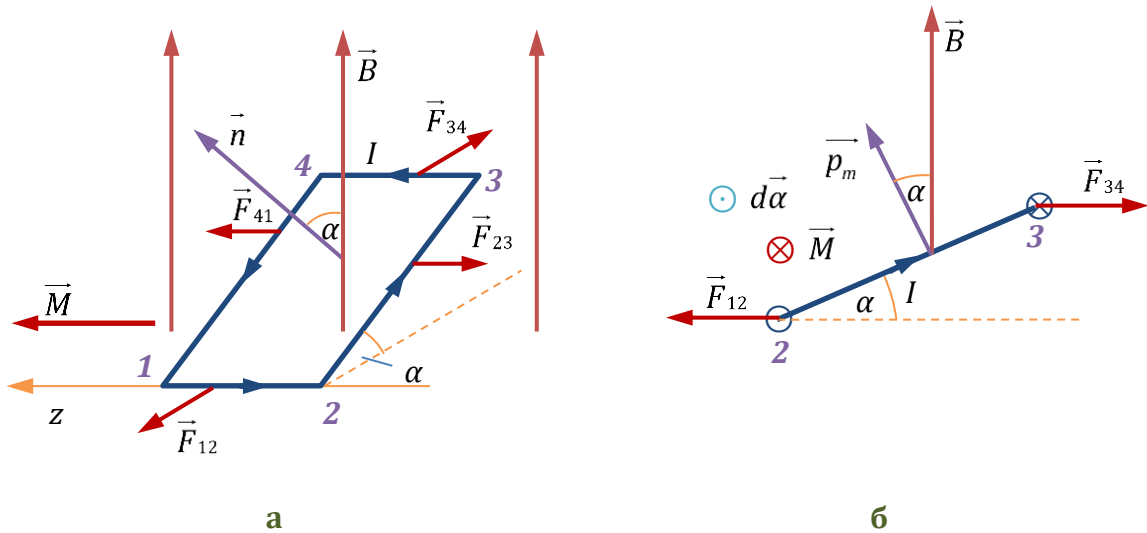


Рис. 25.6

Найдём момент сил Ампера — момент пары сил  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{34}$ . Пусть ось, перпендикулярная линиям магнитной индукции — ось  $z$  проходит через сторону **12**. Единственная сила, которая имеет ненулевой момент относительно этой оси, это сила  $\vec{F}_{34}$ . Её момент

$$\vec{M} = \vec{M}_{34} = [\vec{l}_{23} \vec{F}_{34}];$$

$$M_{34} = l_{23} F_{34} \sin \alpha = l_{23} I B l_{34} \sin \alpha = IBS \sin \alpha,$$

где  $S = l_{23} l_{34}$  — площадь рамки;

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad (25.5)$$

где

$$\vec{p}_m = IS \vec{n}$$

— **магнитный момент** рамки — характеристика замкнутого проводника (контура) с током ( $\vec{n}$  — нормаль к поверхности рамки);

$$[p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Вектор магнитного момента показан на [рис. 25.6б](#) — вид со стороны **23** рамки. Направление магнитного момента выбирается в соответствии с направлением тока в рамке по правилу правого винта.

Соотношение [\(25.5\)](#) справедливо и для рамки произвольной формы. Магнитное поле стремится развернуть рамку с током так, чтобы её магнитный момент был направлен вдоль линий магнитной индукции.

**Демонстрации:** 1) Поворот рамки с током в магнитном поле постоянного магнита (модель магнитоэлектрического гальванометра)  
2) «Сознательные» катушки. Взаимодействие двух катушек

### 3.8.4. Работа силы Ампера

#### 1. Энергия рамки с током в магнитном поле

Рассмотрим рамку с током, находящуюся в однородном магнитном поле (см. [ПРЕДЫДУЩИЙ РАЗДЕЛ](#)). Чтобы повернуть рамку на угол  $d\alpha$ , внешние силы должны совершить работу

$$\delta A^* = \vec{M}^* d\vec{\alpha} = -\vec{M} d\vec{\alpha} = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha,$$

здесь  $\vec{M}^* = -\vec{M}$  — момент внешних сил, вектор углового перемещения  $d\vec{\alpha}$  обозначено на [РИС. 25.6Б](#) и направлен «на нас», так как угол принято отсчитывать против часовой стрелки;  $M = p_m B \sin \alpha$  по формуле [\(25.5\)](#).

Приращение энергии контура в магнитном поле при повороте на малый угол  $d\alpha$

$$dW = \delta A^* = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Энергия контура

$$W = \int p_m B \sin \alpha d\alpha = -p_m B \cos \alpha + \text{const}.$$

Положим константу в этой формуле равной нулю; получим

$$W = -\vec{p}_m \vec{B},$$

$$W = -p_m B \cos \alpha.$$

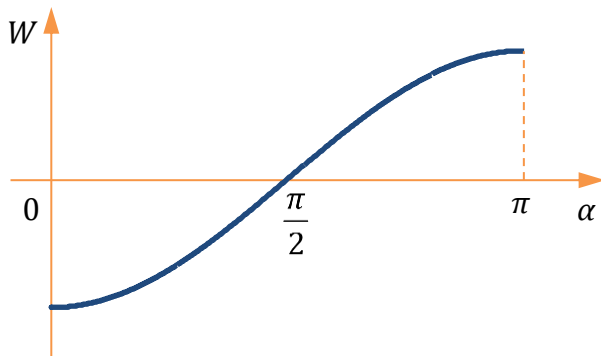


Рис. 25.7

График зависимости  $W(\alpha)$  представлен на [РИС. 25.7](#).

$\alpha = 0$  — устойчивое равновесие;

$\alpha = \pi$  — неустойчивое равновесие.

## Лекция 26

## 3.8.4. Работа силы Ампера (продолжение)

## 2. Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле

Пусть прямолинейный проводник длиной  $l$ , по которому идёт ток  $I$ , движется в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Магнитное поле действует на проводник с силой Ампера  $\vec{F}_A = I[\vec{l}, \vec{B}]$ . Работу будет совершать составляющая этой силы, лежащая в плоскости перемещения проводника,

$$F_{\perp} = IlB_{\perp},$$

где  $B_{\perp}$  — компонента вектора магнитной индукции, перпендикулярная плоскости движения проводника (рис. 26.1).

Работа магнитного поля по перемещению проводника на малое расстояние  $dx$  (соответствующее перемещению  $d\vec{r}$ )

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_{\perp}dx = IlB_{\perp}dx = IB_{\perp}dS = Id\Phi,$$

здесь  $dS$  — площадь поверхности, ометаемой проводником при малом перемещении  $dx$  (заштрихованная область на рис. 26.1),  $d\Phi$  — магнитный поток сквозь эту поверхность.

При перемещении проводника из положения 1 в положение 2

$$A = \int_1^2 Id\Phi.$$

При  $I = \text{const}$

$$A = I\Delta\Phi. \quad (26.1)$$

Это выражение можно обобщить на случай проводника произвольной формы.

В разделе 3.8.1 мы пояснили, что сила Лоренца не совершает работы. Почему же совершает работу сила Ампера, которая есть суперпозиция сил Лоренца, с которыми магнитное поле действует на отдельные носители заряда в проводнике? На самом деле работу совершает не магнитное поле, а источник тока.

## 3. Работа при перемещении контура с током в магнитном поле

Пусть имеется замкнутый проводник с током  $I$ , находящийся в магнитном поле. Проводник перемещается из положения 12 в положение 1'2' (рис. 26.2). Найдём работу магнитного поля по перемещению двух половин этого контура — 12 и 21 по формуле (26.1):

$$\begin{aligned} A &= A_{12} + A_{21} = -I(\Phi_1 + \Phi_0) + I(\Phi_2 + \Phi_0) = \\ &= I(\Phi_2 - \Phi_1), \end{aligned}$$

где  $\Phi_1$  — магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром 12,  $\Phi_2$  — контуром 1'2',  $\Phi_0$  — контуром 11'2'2 (рис. 26.2);

$$A = I\Delta\Phi,$$

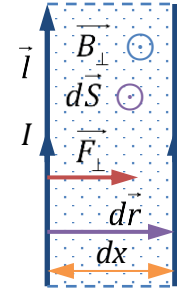


Рис. 26.1

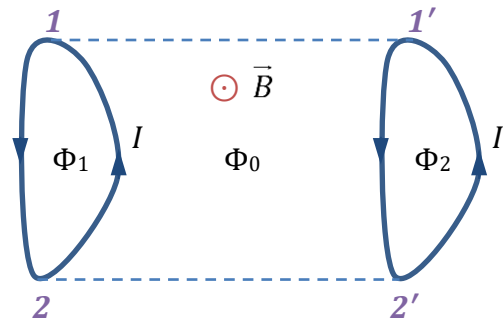


Рис. 26.2

здесь  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  — разность магнитных потоков сквозь поверхности, натянутые на проводящий контур в начальном и конечном положении.

### 3.9. Электромагнитная индукция<sup>69</sup>

#### 3.9.1. Закон Фарадея–Максвелла

Пусть в пространстве существует переменное магнитное поле. I уравнение Максвелла

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Левая часть этого уравнения равна ЭДС в произвольном замкнутом контуре  $L$ :

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mathcal{E},$$

а правая (с точностью до знака) — скорости изменения магнитного потока сквозь произвольную поверхность  $S$ , натянутую на контур  $L$ :

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (26.2)$$

— **закон Фарадея–Максвелла (закон электромагнитной индукции)**;  $\mathcal{E}_i$  — ЭДС индукции.

Явление **электромагнитной индукции** — возникновение электрического поля в замкнутом контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на этот контур. ЭДС индукции — энергетическая характеристика этого поля.

В замкнутом проводнике, магнитный поток сквозь который (поверхность, ограниченную которым) изменяется, возникает **индукционный ток**.

**Правило Ленца:** направление индукционного тока таково, чтобы компенсировать вызвавшее индукционный ток изменение магнитного потока. Правило Ленца выражается знаком «–» в выражении закона Фарадея–Максвелла.

Явление электромагнитной индукции можно трактовать как возникновение вихревого электрического поля при переменном магнитном поле.

Получим закон Фарадея–Максвелла из других опытных законов.

#### 1) Вывод закона Фарадея–Максвелла из закона сохранения энергии

Проводник с током  $I$  (ток создаётся источником с ЭДС  $\mathcal{E}$ ) движется в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , перпендикулярной плоскости движения проводника (**рис. 26.3**). Энергия источника расходуется на совершение механической работы и увеличение внутренней энергии проводника — в тепло:

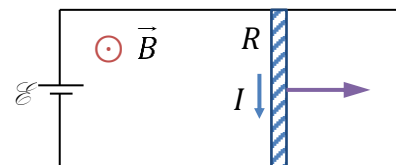


Рис. 26.3

<sup>69</sup> Материал разделов 3.9–3.14 представлен в дополнительных материалах настоящего ЭУМК в форме презентации.

$$A_{\text{ист}} = A_{\text{мех}} + Q. \quad (26.3)$$

По определению ЭДС, работа источника при прохождении через источник малого заряда  $dq$

$$\delta A_{\text{ист}} = \mathcal{E} dq; \quad (26.4)$$

механическая работа — работа силы Ампера

$$\delta A_{\text{мех}} = Id\Phi, \quad (26.5)$$

$\Phi$  — магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на замкнутую цепь, содержащую источник и движущийся проводник; количество теплоты, выделяющееся в цепи за время  $dt$  прохождения через источник заряда  $dq$ ,

$$\delta Q = I^2 R dt, \quad (26.6)$$

$R$  — сопротивление всей цепи.

Подставим в выражение закона сохранения энергии (26.3) слагаемые (26.4), (26.5), (26.6):

$$\mathcal{E} dq = Id\Phi + I^2 R dt.$$

Так как  $I = \frac{dq}{dt}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} dt &= Id\Phi + I^2 R dt, \\ IR &= \mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned}$$

Это обобщённый закон Ома для замкнутой цепи: сумма падений напряжений равна сумме ЭДС. Обозначим  $-\frac{d\Phi}{dt} = \xi_i$ . Это и есть ЭДС индукции.

## 2) Вывод закона Фарадея-Максвелла из электронных представлений

Пусть металлический проводник длиной  $l$  движется поступательно в однородном магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной линиям индукции (рис. 26.4). На свободные заряды (электроны) в проводнике магнитное поле действует с силой  $\vec{F}_2$ . Из-за этого электроны будут перемещаться по проводнику до тех пор, пока не установится равновесие, т. е. возникшее по этой причине электрическое поле не скомпенсирует воздействие магнитного поля силой  $\vec{F}_1$ .

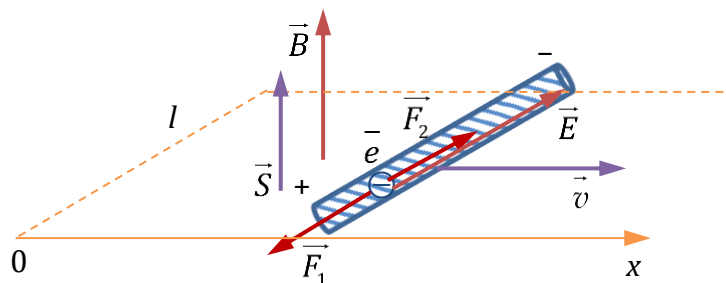


Рис. 26.4

Рассмотрим один электрон в проводнике. Он движется с постоянной скоростью — скоростью проводника  $\vec{v}$ , значит, его ускорение равно нулю. Запишем II закон Ньютона:

$$0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}, \vec{F}_2 = -e[\vec{v}\vec{B}],$$

где  $-e$  — заряд электрона,  $\vec{E}$  — напряжённость электрического поля внутри проводника;

$$0 = -e\vec{E} - e[\vec{v}\vec{B}] \Rightarrow \vec{E} = -[\vec{v}\vec{B}], E = vB.$$

Поле  $\vec{E}$  внутри проводника однородно.

Разность потенциалов между концами проводника, по интегральной связи напряжённости и потенциала электростатического поля,

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = El = vBl.$$

Применим к рассматриваемому проводнику обобщённый закон Ома:

$$\varphi_+ - \varphi_- + \xi_i = 0$$

(правая часть этого равенства равна нулю, так как тока в проводнике нет). Отсюда

$$\xi_i = -(\varphi_+ - \varphi_-) = -U = -vBl.$$

Но  $v = \frac{dx}{dt}$ <sup>70</sup>, поэтому

$$\xi_i = -Bl \frac{dx}{dt} = -B \frac{dS}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\vec{S})}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ ч. т. д.}$$

(Здесь  $S = lx$  — площадь поверхности, ометаемой проводником при его движении;  $\vec{S}$  направлен по нормали к этой поверхности.)

Мы получили разными способами одинаковый результат — закон Фарадея–Максвелла. Это указывает на единство природы электромагнитного поля в разных его проявлениях.

**Демонстрации:** 1) Основные опыты по электромагнитной индукции (опыты Фарадея)  
2) Закон Ленца  
3) Вихревые токи

**Вихревые токи (токи Фуко)** — токи, текущие в сплошном металлическом проводнике под действием переменного магнитного поля (изменении магнитного потока сквозь поверхность проводника). Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое является причиной возникновения токов. Эти токи взаимодействуют с магнитным полем по закону Ампера и вызывают нагревание проводника по закону Джоуля–Ленца.

Явление электромагнитной индукции имеет огромное прикладное значение.

### 3.9.2. Самоиндукция

Рассмотрим замкнутый проводник (проводящий контур), по которому идёт ток, создающий магнитное поле — собственное магнитное поле проводника. Если этот ток — переменный, то магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на контур

<sup>70</sup> Строго говоря, здесь и выше в данном подразделе надо писать  $v_x$  вместо  $v$ ; мы этого не делаем, чтобы не усложнять запись, так как  $v_x = v > 0$ .



с током (*собственный магнитный поток*), будет изменяться и возникнет индуцированное электрическое поле.

**Самоиндукция** — частный случай явления электромагнитной индукции — возникновение электрического поля в проводнике в результате изменения силы тока в этом проводнике.

*Собственный магнитный поток*

$$\Phi_s = \int_S \vec{B}_s d\vec{S},$$

где  $\vec{B}_s$  — индукция собственного магнитного поля проводника. Так как  $B_s \sim I$  (току в проводнике),  $\Phi_s \sim I$ .

**Потокоцепление** — суммарный собственный магнитный поток проводника, имеющего более одного витка:

$$\Psi = \sum \Phi_{si}.$$

Закон Фарадея–Максвелла в случае самоиндукции запишется как

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (26.7)$$

$\mathcal{E}_s$  — ЭДС самоиндукции.

**Индуктивность** — характеристика проводника, равная отношению собственного магнитного потока (потокоцепления) к току в проводнике:

$$L = \frac{\Psi}{I}; \quad (26.8)$$

$[L] = \text{Гн}$  (генри).

Индуктивность зависит от формы и размеров проводника (а также магнитных свойств среды) и не зависит от силы тока, магнитной индукции и других характеристик поля и тока (в случае, если нет ферромагнитного сердечника; см. [РАЗДЕЛ 3.11.9](#)).

Из определения индуктивности [\(26.8\)](#) следует

$$\Psi = LI.$$

Подставим это выражение в закон Фарадея–Максвелла [\(26.7\)](#):

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(I \frac{dL}{dt} + L \frac{dI}{dt}\right) = -I \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt} - L \frac{dI}{dt} = -\frac{dI}{dt} \left(I \frac{dL}{dI} + L\right).$$

При  $L = \text{const}$  (проводник не деформируется и нет ферромагнетиков)

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

При расчёте индуктивности нужно мысленно пустить по проводнику ток и найти собственный магнитный поток (потокоцепление) проводника.

**ПРИМЕРЫ**

## 1) Расчёт индуктивности длинного соленоида

Имеется соленоид длиной  $l$  с поперечным сечением  $S$  с плотностью намотки  $n$  (рис. 26.5). Длина соленоида много больше его поперечных размеров. Найти индуктивность соленоида.

Пусть по соленоиду ток  $I$ . Магнитное поле внутри соленоида однородно — так как соленоид длинный, краевыми эффектами пренебрегаем. Направление магнитной индукции показано на рис. 26.5, её модуль

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

(см. ПРИМЕР 2 В РАЗДЕЛЕ 3.7.2),  $N$  — число витков соленоида.

Магнитный поток сквозь один виток соленоида

$$\Phi_s = \vec{B} S \vec{n} = BS = \frac{\mu_0 N I S}{l};$$

потокосцепление

$$\Psi = N \Phi = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} I.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}.$$

Эта величина зависит только от размеров и числа витков соленоида, как и следовало ожидать.

## 2) Расчёт индуктивности тонкого тороида

Найти индуктивность тонкого тороида радиуса  $R$ , сечением  $S$ , имеющего  $N$  витков (рис. 26.6).

Пусть по тороиду ток  $I$ . Задача о нахождении индукции магнитного поля тороида была рассмотрена в РАЗДЕЛЕ 3.7.2, ПРИМЕР 3. Модуль магнитной индукции

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R},$$

направление  $\vec{B}$  показано на рис. 26.6.

Магнитный поток сквозь один виток тороида

$$\Phi_s = \vec{B} S \vec{n} = BS = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi R};$$

потокосцепление

$$\Psi = N \Phi_s = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi R} I.$$

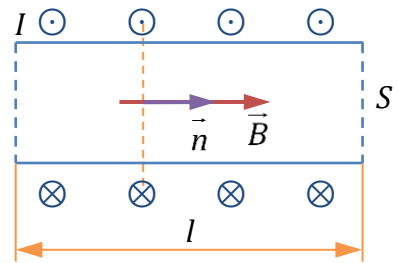


Рис. 26.5

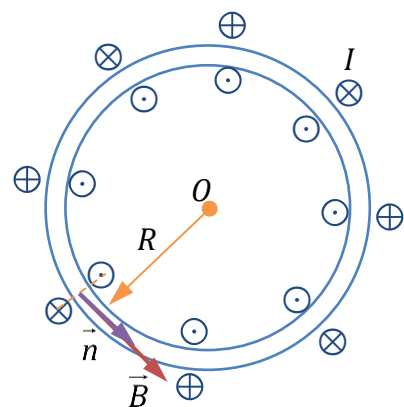


Рис. 26.6

Индуктивность тонкого тороида

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi R} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

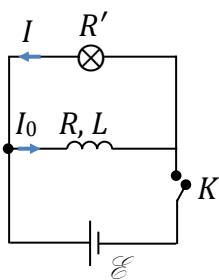
где  $l = 2\pi R$  — длина тороида.

**Демонстрация:** Экстра-ток размыкания

**ПРИМЕР**

Экстра-ток размыкания

Катушка индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  подключена к источнику постоянного тока параллельно с лампой накаливания, сопротивление которой равно  $R'$  (схема на [рис. 26.7](#)). В начальный момент времени ключ  $K$  замыкают и катушка вместе с лампой отключаются от источника. Найти зависимость тока в цепи от времени.



**Рис. 26.7**

После размыкания ключа изменяющийся ток в катушке приводит к возникновению электрического поля, энергетическая характеристика которого — ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ . Это единственная ЭДС в цепи после размыкания ключа.

Применим обобщённый закон Ома:

$$I(R + R') = \mathcal{E}_s \Rightarrow I(R + R') = -L \frac{dI}{dt}.$$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении и проинтегрируем:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R + R'}{L} dt,$$

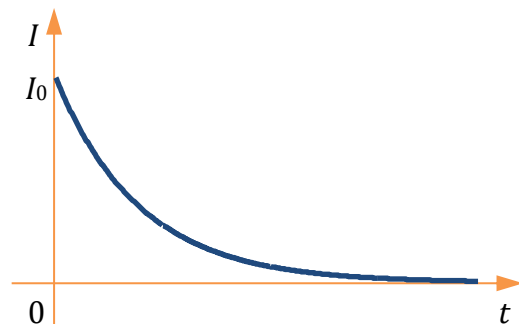
$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R + R'}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R + R'}{L} t,$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R + R'}{L} t}. \quad (26.9)$$

Здесь  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$  — ток в катушке до размыкания ключа (внутреннее сопротивление источника считаем пренебрежимо малым по сравнению с сопротивлением катушки). График функции (26.9) представлен на [рис. 26.8](#).

В этом примере мы рассмотрели пример *релаксационного процесса*, т. е. процесса приближения какой-либо физической величины к её равновесному значению — в данном случае при  $t \rightarrow \infty$   $I \rightarrow 0$ . Характерный параметр этого процесса — *время релаксации* — время, за которое сила тока в цепи уменьшится в  $e$  раз:

$$\tau = \frac{L}{R + R'}.$$



**Рис. 26.8**

Теперь разберёмся, почему лампа сразу после размыкания ключа ярко вспыхивает, как мы видели в демонстрационном эксперименте. Сравним ток в лампе до размыкания ключа

$$I'_0 = \frac{\mathcal{E}}{R'}$$

с током  $I$  после размыкания:

$$\frac{I}{I'_0} = \frac{e^{-\frac{R+R'}{L}t} R'}{R} = \frac{R'}{R} e^{-\frac{R+R'}{L}t}.$$

При малых  $t$  (сразу после размыкания ключа)  $e^{-\frac{R+R'}{L}t} \approx 1$  и, если  $R' \gg R$  (а сопротивление лампы накаливания сравнительно велико), то  $I \gg I'_0$  и мощность лампы резко увеличивается, а, значит, лампа ярко вспыхивает.

### 3.9.3. Взаимная индукция

Пусть имеются два замкнутых проводящих контура **1** и **2**, расположенные достаточно близко друг к другу (рис. 26.9). По контуру **1** идёт ток  $I_1$ , так что контур **2** находится в магнитном поле контура **1**. Поток индукции магнитного поля контура **1** сквозь поверхность, натянутую на контур **2**,  $\Phi_{12} \sim I_1$ , так как  $B_1 \sim I_1$ . Если ток  $I_1$  переменный, то в проводнике **2** возникает переменное электрическое поле и ток  $I_2$ . В свою очередь, контур **2** создаёт магнитное поле, пронизывающее контур **1**; соответственно, магнитный поток  $\Phi_{21} \sim I_2$ . Таким образом два проводника влияют друг на друга.

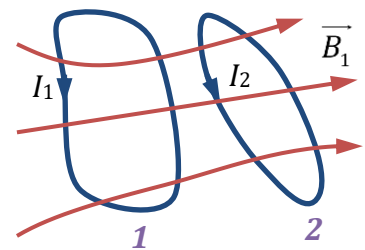


Рис. 26.9

**Взаимная индукция** — частный случай явления электромагнитной индукции — возникновение вихревого электрического поля в проводнике при изменении силы тока в другом проводнике.

Магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на проводник **2**, создаваемый проводником **1**,

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1;$$

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

— **коэффициент взаимной индукции (взаимная индуктивность)** — характеристика взаимного влияния проводников. Коэффициент взаимной индукции зависит от формы, размера проводников, их взаимного расположения, магнитных свойств среды. Возможно  $M_{12} < 0$ ;

$$[M] = \text{Гн}.$$

**ПОЗДНЕЕ** мы докажем, что в отсутствие ферромагнетиков коэффициенты взаимной индукции равны:

$$M_{12} = M_{21}$$

— **теорема взаимности.**

Закон Фарадея–Максвелла для случая взаимной индукции:

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt},$$

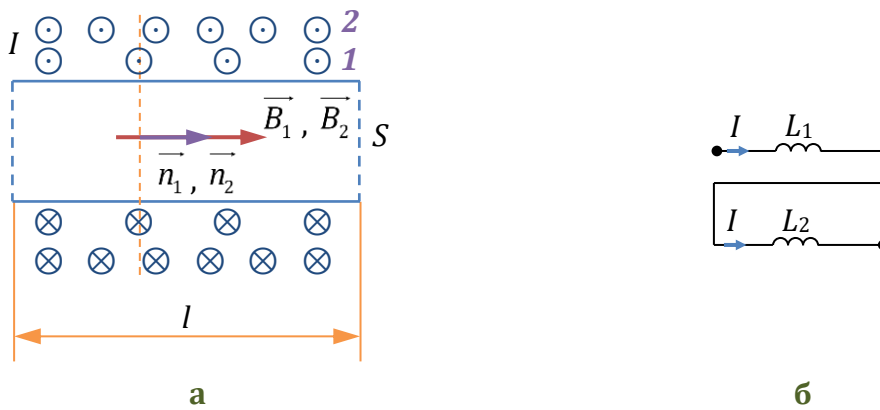
$\mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{21}$  — ЭДС взаимной индукции.

**Демонстрация:** Взаимная индукция (Катушка Томпсона и катушка с лампой, медное и алюминиевое кольца)

**ПРИМЕР**

Расчёт взаимной индуктивности двух длинных соленоидов, надетых друг на друга

На катушку длиной  $l$  и сечением  $S$  навиты две обмотки с числом витков  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 26.10А), соединённые последовательно так, что ток по ним будет течь в одну сторону (схема на рис. 26.10Б). Найти взаимную индуктивность обмоток и индуктивность системы.



**Рис. 26.10**

Пусть по обмоткам ток  $I$ . Магнитные поля, создаваемые обеими обмотками, однородны, так как соленоид длинный, и направлены в одну сторону (рис. 26.10А).

Модуль индукции магнитного поля обмотки **1** (см. ПРИМЕР 2 В РАЗДЕЛЕ 3.7.2)

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I}{l}.$$

Поток магнитного поля, создаваемого обмоткой **1**, сквозь поверхность, натянутую на виток обмотки **2**,

$$\Phi_{12} = \vec{B}_1 \vec{S} n_2 = B_1 S = \frac{\mu_0 N_1 S I}{l},$$

потокосцепление

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S I}{l}.$$

Аналогично потокосцепление обмотки **2**, обусловленное током в обмотке **1**,

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S I}{l}.$$

Коэффициенты взаимной индукции

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} = M_{21}.$$

Получилось  $M_{12} = M_{21}$ ; таким образом мы доказали теорему взаимности для частного случая.

Потокоцепление всей системы

$$\Psi = \Psi_{11} + \Psi_{22} + \Psi_{12} + \Psi_{21},$$

где  $\Psi_{11}, \Psi_{22}$  — собственные магнитные потоки обмоток **1** и **2** соответственно;

$$\Psi_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} I, \quad \Psi_{22} = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l} I$$

(см. [ПРИМЕР 1 РАЗДЕЛА 3.9.2](#)). Получим

$$\Psi = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} I + \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l} I + 2 \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} I = \frac{\mu_0 S}{l} (N_1 + N_2)^2 I.$$

Индуктивность системы

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 S}{l} (N_1 + N_2)^2.$$

В случае, когда токи в обмотках текут в разные стороны,

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}, \quad \Psi = \frac{\mu_0 S}{l} (N_1 - N_2)^2 I, \quad L = \frac{\mu_0 S}{l} (N_1 - N_2)^2.$$

## Лекция 27

## 3.10. Энергия магнитного поля

## 3.10.1. Энергия проводника с током

Пусть проводник индуктивностью  $L$  включён в электрическую цепь. Найдём энергию проводника при токе  $I$ , т. е. работу индуцированного электрического поля (ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ ) с обратным знаком при возрастании тока в проводнике от 0 до  $I$ . Приращение энергии при перемещении по проводнику малого заряда  $dq$

$$dW = \delta A^* = -\delta A_s = -\mathcal{E}_s dq,$$

здесь  $\delta A^*$  — работа внешних сил (источника тока),  $\delta A_s$  — работа индуцированного электрического поля. Так как  $dq = Idt$ , а  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ ,

$$dW = L \frac{dI}{dt} Idt = LI dI;$$

$$W = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

**Энергия магнитного поля** проводника индуктивностью  $L$  при токе  $I$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}, \quad (27.1)$$

где  $\Phi_s$  — собственный магнитный поток (потокосцепление) проводника.

## 3.10.2. Энергия взаимодействия проводников с токами

Пусть имеются два проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расположенные близко друг к другу (рис. 26.9). Энергия магнитного поля этой системы

$$W = W_1 + W_2 + W_{12},$$

где  $W_{12}$  — **взаимная энергия**.

Энергия магнитного поля равна работе источников тока, которая необходима для того, чтобы это поле создать, т. е. увеличить токи в проводниках от 0 до  $I_1$  и  $I_2$  соответственно. Сначала доведём ток в контуре **1** от 0 до  $I_1$  (при разомкнутом контуре **2**); работа источника в контуре **1** по (27.1)

$$A_1^* = W_1 = \frac{L_1 I_1^2}{2},$$

где  $L_1$  — индуктивность проводника **1**. Затем замкнём контур **2** и увеличим ток в нём от 0 до  $I_2$ . Работа источника в контуре **2**

$$A_2^* = W_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2},$$

здесь  $L_2$  — индуктивность проводника **2**. Но при этом благодаря взаимной индукции в контуре **1** будет возникать электрическое поле (ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}$ ). Чтобы скомпенсировать его влияние, источник в контуре **1** должен совершать дополнительную работу по перемещению малого заряда  $dq_1 = I_1 dt$

$$\delta A_{21}^* = -\mathcal{E}_{21} dq_1 = M_{21} \frac{dI_2}{dt} I_1 dt = M_{21} I_1 dI_2;$$

интеграл от этого выражения по  $I_2$  при  $I_1 = \text{const}$  — взаимная энергия

$$A_{21}^* = W_{21} = \int_0^{I_2} M_{21} I_1 dI_2 = M_{21} I_1 I_2.$$

Итак, энергия магнитного поля двух проводников

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M_{21} I_1 I_2.$$

Если действовать в обратной последовательности, т. е. сначала увеличивать ток в контуре **2**, а затем — в контуре **1**, то результат должен быть тем же:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} = W_1 + W_2 + W_{21} \Rightarrow W_{12} = W_{21} \Rightarrow M_{12} = M_{21}.$$

Мы доказали теорему взаимности (см. [РАЗДЕЛ 3.9.3](#)).

### 3.10.3. Объёмная плотность энергии магнитного поля

Энергия магнитного поля длинного прямого воздушного соленоида индуктивностью  $L$ , по которому идёт ток  $I$ ,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \frac{\mu_0 N^2 (Sl)}{l^2} = \mu_0 n^2 V, \quad (27.2)$$

где  $N$  — число витков соленоида,  $l$  — его длина,  $S$  — площадь поперечного сечения,  $V = Sl$  — объём соленоида,  $n = \frac{N}{l}$  — плотность намотки. Подставим [\(27.2\)](#) в [\(27.1\)](#):

$$W = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} V = \frac{B^2}{2\mu_0} V,$$

так как модуль индукции магнитного поля длинного соленоида  $B = \mu_0 nI$ .

**Объёмная плотность энергии магнитного поля** (в однородном поле)

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Этот результат обобщается на случай неоднородного магнитного поля:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

В вакууме напряжённость магнитного поля  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  (см. [3.1.4](#)), отсюда

$$w = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2};$$

эта формула справедлива для любой среды.

В ферромагнитной среде



$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

(относительная магнитная проницаемость неферромагнитной среды  $\mu \approx 1$ , см. 3.11.6).

Энергия неоднородного магнитного поля в области пространства объёмом  $V$

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV.$$

В общем случае *объёмная плотность энергии электромагнитного поля*

$$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2},$$

здесь  $\vec{D}$  — электрическое смещение,  $\vec{E}$  — напряжённость электрического поля.

### 3.11. Магнитное поле в веществе

#### 3.11.1. Макротоки и микротоки. Намагниченность

**Макротоки** — упорядоченное движение заряженных частиц, при котором частицы перемещаются на расстояния, много большие межмолекулярных.

**Микротоки** — движение заряженных частиц внутри атомов и молекул.

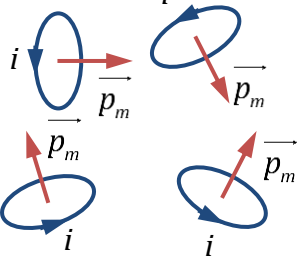
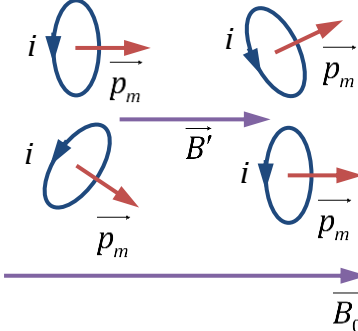
Магнитное поле в веществе определяется полем макротоков и *усреднённым* полем микротоков:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

поле макротоков                      поле микротоков

Каждый электрон в атоме (молекуле), двигаясь вокруг ядра, создаёт микроток и собственное магнитное поле; это движение характеризуется микротоком  $i$  и магнитным моментом  $\vec{p}_m$ . В отсутствие внешнего магнитного поля (макротоков) все магнитные моменты атомов ориентированы разнонаправленно и  $\vec{B}' = 0$  (см. ТАБЛ. 27.1).

## Процесс намагничивания

$\vec{B}_0 = 0$	$\vec{B}_0 \neq 0$ <sup>71</sup>
 $\sum \vec{p}_m = 0$ $\vec{B}' = 0$	 $\sum \vec{p}_m \neq 0$ $\vec{B}' = \sum \vec{B}'_i \neq 0$ <p>Вещество намагничивается, т. е. приобретает отличный от нуля магнитный момент.</p>

**Намагниченность** — векторная характеристика магнитного поля в веществе, равная магнитному моменту вещества, занимающего единичный объём:

$$\vec{j} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V},$$

$$[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

### 3.11.2. Теорема о циркуляции намагниченности, магнитной индукции и напряжённости магнитного поля

#### 1. Теорема о циркуляции $\vec{B}$

Циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна сумме макротоков и микротоков, сцепленных с этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum I)_L + \mu_0 (\sum i)_L. \quad (27.3)$$

Здесь и далее в этом параграфе  $I$  — макроток,  $i$  — микроток<sup>72</sup>.

Вторая сумма в правой части этого равенства не поддаётся прямому вычислению, так как распределение микротоков заранее не известно.

#### 2. Теорема о циркуляции $\vec{j}$

Проведём внутри вещества (магнетика) замкнутый контур  $L$  (рис. 27.1А) и подсчитаем сумму микротоков, сцепленных с этим контуром.

<sup>71</sup> На рисунке в этой колонке показано, что магнитные моменты молекул выстраиваются вдоль поля макротоков. Так происходит, если вещество парамагнитно (см. РАЗДЕЛ 3.11.8). У диамагнетиков (РАЗДЕЛ 3.11.7) магнитные моменты молекул выстраиваются, наоборот, против внешнего поля.

<sup>72</sup> В «живой» лекции можно обозначать  $I_{\text{макро}}$ ,  $i_{\text{микро}}$  или другим образом.

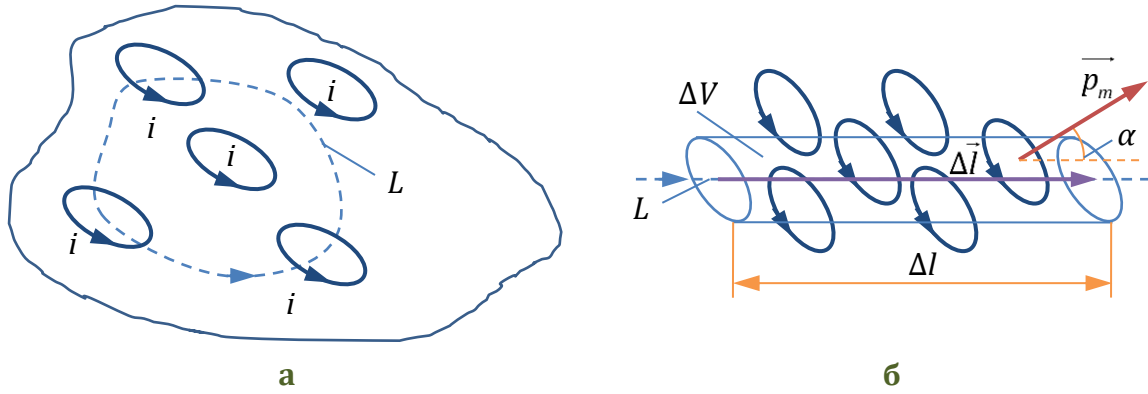


Рис. 27.1

Рассмотрим элемент контура  $L$  длиной  $\Delta l$  (рис. 27.1Б). Центры микротоков, сцепленных с участком  $\Delta l$ , находятся внутри цилиндра высоты  $\Delta l$  и площади основания, равной площади  $S$  микротоков. Основание этого цилиндра параллельно плоскостям микротоков и составляет угол  $\alpha$  с участком  $\Delta l$ . Объём этого цилиндра

$$\Delta V = S\Delta l \cos \alpha.$$

Число микротоков, сцепленных с участком  $\Delta l$ ,

$$\Delta N = n\Delta V = nS\Delta l \cos \alpha,$$

где  $n$  — концентрация магнетика — число микротоков (молекул), находящихся в веществе единичного объёма. Сумма микротоков, сцепленных с участком  $\Delta l$ ,

$$\left(\sum i\right)_{\Delta l} = i\Delta N = inS\Delta l \cos \alpha = np_m \Delta l \cos \alpha = n\overline{p}_m \Delta \vec{l} = \vec{j} \Delta \vec{l},$$

$\overline{p}_m$  — магнитный момент молекулы. Просуммируем эти выражения при  $\Delta \vec{l} \rightarrow 0$ , т. е. проинтегрируем по всему контуру  $L$ :

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} = \left(\sum i\right)_L \quad (27.4)$$

— **теорема о циркуляции намагниченности**: циркуляция вектора намагниченности по произвольному замкнутому контуру равна сумме микротоков, сцепленных с этим контуром.

### 3. Теорема о циркуляции $\vec{H}$

Преобразуем выражение теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  (27.3), подставив циркуляцию  $\vec{j}$  (27.4):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I\right)_L + \mu_0 \oint_L \vec{j} d\vec{l} \Rightarrow \oint_L \left(\vec{B} - \mu_0 \vec{j}\right) d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I\right)_L,$$

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}\right) d\vec{l} = \left(\sum I\right)_L.$$

Обозначим

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} = \vec{H}$$

— **напряжённость магнитного поля** — вспомогательная силовая характеристика магнитного поля.

**Теорема о циркуляции напряжённости магнитного поля:** циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна сумме макротоков, сцепленных с этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = (\sum I)_L. \quad (27.5)$$

Напряжённость магнитного поля определяется только макротоками.

### 3.11.3. Связь магнитной индукции, намагниченности и напряжённости магнитного поля

1) В любом случае согласно определению напряжённости магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (27.6)$$

2) Для изотропных магнетиков, неферромагнетиков  $\vec{J} \parallel \vec{H}, J \sim H$ ;

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (27.7)$$

$\chi$  — **магнитная восприимчивость** вещества.

Подставим (27.7) в (27.6):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Обозначим

$$\mu = 1 + \chi \quad (27.8)$$

— **относительная магнитная проницаемость** вещества.

С учётом определения (27.8) получим

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (27.9)$$

Эта формула связи  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  справедлива только для изотропных магнетиков. В вакууме  $\mu = 1$ .

В отсутствие магнетиков индукция магнитного поля макротоков

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}.$$

При наличии изотропного магнетика  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ . Отсюда следует, что

$$\frac{B}{B_0} = \mu.$$

Магнитная индукция при наличии магнетика отличается от индукции магнитного поля при том же распределении макротоков в  $\mu$  раз. Возможно  $\mu \geq 1$  (см. [РАЗДЕЛ 3.11.6](#)).

3) Для ферромагнетиков зависимости  $B(H)$  и  $J(H)$  нелинейные и неоднозначные (см. [3.11.9](#)).

### 3.11.4. Условия на границе раздела двух магнетиков

Проанализируем, как изменяется магнитное поле при переходе из одной среды (магнетика) в другую.

Пусть имеются два изотропных магнетика (относительные магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ), граничащие друг с другом ([рис. 27.2](#)). В среде с  $\mu_1$  существует магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_1$  и напряжённостью  $\vec{H}_1$ . Макротоки на границе раздела

сред отсутствуют. Найдём векторные характеристики поля в среде с  $\mu_2$  —  $\vec{B}_2$  и  $\vec{H}_2$  (в проекциях на нормаль  $\vec{n}$  и касательную  $\vec{\tau}$  к поверхности раздела сред).

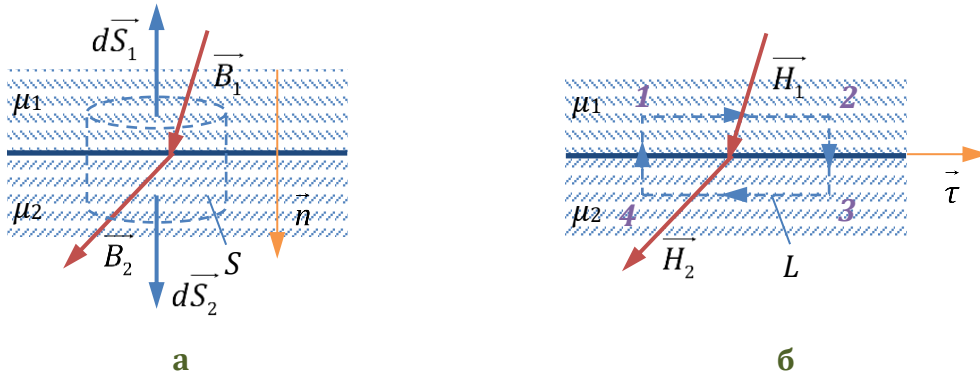


Рис. 27.2

1)  $B_n$ 

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса для  $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Выберем поверхность интегрирования  $S$  в виде цилиндра, основания которого параллельны границе раздела сред, а высота мала (рис. 27.2А). Магнитный поток

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = -B_{1n} S_{\text{торц}} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{B} d\vec{S} + B_{2n} S_{\text{торц}} = (B_{2n} - B_{1n}) S_{\text{торц}} = 0;$$

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}} \quad (27.10)$$

— нормальная составляющая вектора магнитной индукции не претерпевает скачка на границе раздела магнетиков.

2)  $H_n$ 

Связь  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  в изотропном магнетике

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

Поэтому, с учётом условия (27.10),

$$\cancel{\mu_0 \mu_1} H_{1n} = \cancel{\mu_0 \mu_2} H_{2n} \Rightarrow \boxed{\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (27.11)$$

— нормальная составляющая напряжённости магнитного поля претерпевает скачок на границе раздела магнетиков.

3)  $H_\tau$ 

Воспользуемся теоремой о циркуляции  $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = (\sum I)_L.$$

Выберем контур интегрирования  $L$  в виде прямоугольника, одна пара сторон которого параллельна границе раздела сред (стороны 1-2 и 3-4 на рис. 27.2Б), а другая мала (стороны 2-3 и 4-1). Циркуляция  $\vec{H}$  по контуру  $L$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_{1\tau} l_{12} + \int_2^3 \vec{H} d\vec{l} - H_{2\tau} l_{34} + \int_4^1 \vec{H} d\vec{l} = (H_{1\tau} - H_{2\tau}) l_{12} = 0,$$

так как макротоки на границе раздела сред отсутствуют и  $(\sum I)_L = 0$ ;

$$\boxed{H_{2\tau} = H_{1\tau}} \quad (27.12)$$

— тангенциальная составляющая напряжённости магнитного поля не претерпевает скачка на границе раздела магнетиков.

4)  $B_\tau$

Из связи  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  (27.9) и условия (27.12) получим

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0 \mu_2} \Rightarrow \boxed{\frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad (27.13)$$

— тангенциальная составляющая магнитной индукции претерпевает скачок на границе раздела магнетиков.

## Лекция 28

## 3.11.5. Магнитный момент атома. Спин

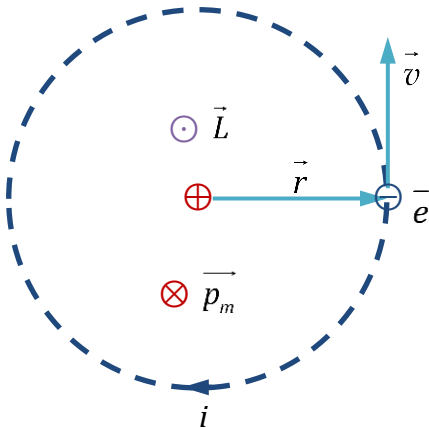


Рис. 28.1

Электрон, движущийся по орбите вокруг ядра<sup>73</sup>, представляет собой микроток (рис. 28.1). Так как заряд электрона отрицательный, сила тока  $i$  направлена против скорости  $\vec{v}$ , а магнитный момент электрона  $\vec{p}_m$  — против момента импульса  $\vec{L}$ .

Модуль магнитного момента электрона

$$p_m = iS, \quad (28.1)$$

где  $S = \pi r^2$  ( $r$  — радиус орбиты) — площадь орбиты; сила тока

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}, \quad (28.2)$$

где  $T$  — период обращения электрона по орбите; мо-

мент импульса

$$\vec{L} = m_e [\vec{v}r] \Rightarrow L = m_e vr, \quad (28.3)$$

где  $m_e$  — масса электрона. Подставив (28.2) в (28.1) и сравнив с (28.3), получим

$$p_m = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} \Rightarrow p_m = \frac{eL}{2m_e},$$

$$\vec{p}_m = \frac{e}{2m_e} \vec{L}.$$

**Гиромангнитное отношение орбитальных моментов**

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m_e} \quad (28.4)$$

не зависит от  $r$ ,  $v$  и т. п., а является характерной константой.

Помимо момента импульса и магнитного момента, описывающих орбитальное движение, электрон обладает ещё и собственным моментом импульса и магнитным моментом — **спином**. Спин — квантовый релятивистский эффект, не объяснимый с точки зрения классической теории.

**Гиромангнитное отношение спиновых моментов**

$$g_s = \frac{e}{m_e}; \quad (28.5)$$

модуль собственного магнитного момента

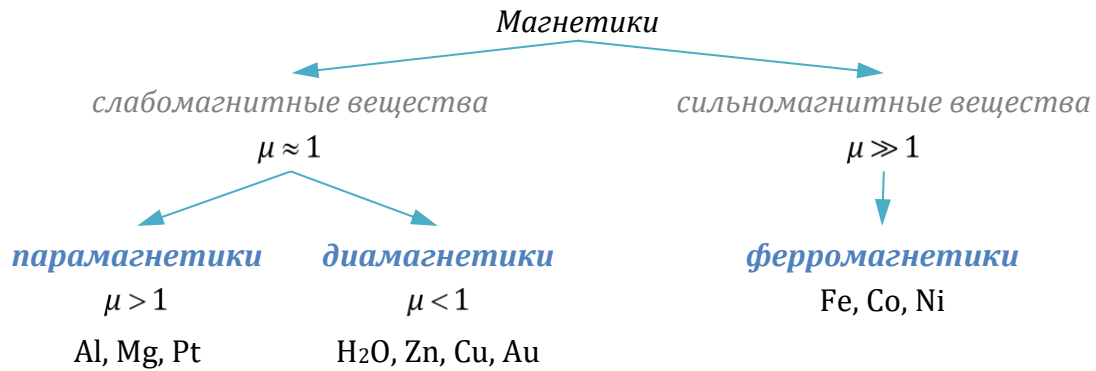
$$p_{m_s} = \frac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}, \quad (28.6)$$

<sup>73</sup> С точки зрения современных — квантовых — представлений данная картина некорректна. Тем не менее сейчас, работая в рамках классической физики, мы представляем электрон как материальную точку, движущуюся по определённой (а именно круговой) траектории. Даже из таких представлений мы получим результаты, согласующиеся с экспериментом.

$\mu_B$  — магнетон Бора,  $\hbar$  — постоянная Планка. Модуль собственного момента импульса

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (28.7)$$

### 3.11.6. Классификация магнетиков



В отсутствие магнитного поля ( $\vec{B}_0 = 0$ )

$p_m \neq 0$	$p_m = 0$	$p_m \neq 0$
$\mu = f(T)$	$\mu \neq f(T)$	
$\chi \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$	$ \chi  \sim 10^{-7} \div 10^{-5}$	$\mu \sim 10^6$
$\chi_{Al} = 1,64 \cdot 10^{-5}$	$\chi_{Cu} = -7,7 \cdot 10^{-7}$	$\mu_{Fe} = 5 \cdot 10^3$

**Демонстрация:** Ориентация парамагнитного и диамагнитного стержней в поле электромагнита (в проекции)

### 3.11.7. Диамагнетизм

Рассмотрим атом (один электрон, обращающийся вокруг ядра), находящийся во внешнем магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Магнитный момент  $\vec{p}_m$  и момент импульса  $\vec{L}$  электрона направлены под углом  $\alpha$  к вектору магнитной индукции (рис. 28.2). Магнитное поле действует на электрон с моментом сил  $\vec{M}$  (см. 3.8.3), вследствие этого изменяется момент импульса электрона. Изменение момента импульса за время  $dt$

$$d\vec{L} = \vec{M} dt,$$

так как  $M = p_m B \sin \alpha$ ,

$$dL = p_m B \sin \alpha \cdot dt.$$

<sup>74</sup> Формулы (28.5), (28.6), (28.7) — экспериментальные результаты, обоснованные квантовой релятивистской теорией. Обратим внимание на то, что  $g_s \neq \frac{p_{m_s}}{L_s}$ .



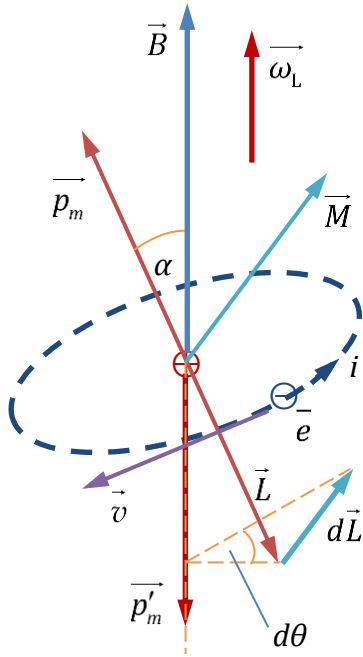


Рис. 28.2

За время  $dt$  плоскость, в которой лежат  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$ , т. е. плоскость нормали к орбите электрона, повернется вокруг направления  $\vec{B}$  на угол

$$d\theta = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B}{L} dt;$$

угловая скорость этого вращения

$$\omega_L = \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_m B}{L} = \frac{eB}{2m_e}.$$

[здесь мы использовали гиромагнитное отношение орбитальных моментов (28.4)].

Вращение направлений магнитного момента и момента импульса электрона в атоме, находящемся в магнитном поле, вокруг направления вектора магнитной индукции называется **ларморовой прецессией**.

**Угловая скорость ларморовой прецессии**

$$\omega_L = \frac{eB}{2m_e}.$$

При ларморовой прецессии атом приобретает добавочный магнитный момент  $\vec{p}'_m$ , направленный против  $\vec{B}$ ; если считать орбиту круговой и её радиус  $r$  постоянным, то

$$p'_m = \frac{e\omega_L r^2}{2} = \frac{e^2 B r^2}{4m_e} \quad (28.8)$$

[ср. вывод формулы (28.4)].

Получается, что все электроны в атомах вещества, магнитные моменты которых ориентированы беспорядочно, если поместить это вещество в магнитное поле, приобретут дополнительные магнитные моменты, направленные одинаково — против поля. Соответственно вещество намагнитится против внешнего магнитного поля. Этот эффект называется **диамагнитным** и присущ все веществам без исключения.

Намагниченность

$$\vec{J} = Zn p'_m,$$

где  $Z$  — число электронов в атоме,  $n$  — концентрация атомов вещества; с учётом (28.8)

$$J = \frac{Zne^2 B \langle r^2 \rangle}{4m_e} = \frac{Ze^2 n \langle S \rangle}{4\pi m_e} B,$$

где  $\langle r^2 \rangle$  — средний квадрат радиуса орбиты электрона, а  $\langle S \rangle$  — её средняя площадь.

Найдём магнитную восприимчивость диамагнетика. Так как  $\mu \approx 1$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ; для изотропных слабомагнитных веществ  $\vec{J} = \chi \vec{H}$ ;

$$\vec{j} = -\frac{Ze^2 n \langle S \rangle}{4\pi m_e} \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \chi = -\frac{Ze^2 \mu_0 n \langle S \rangle}{4\pi m_e}.$$

### 3.11.8. Парамагнетизм

Парамагнетиками являются вещества, для которых магнитные моменты атомов (т. е. суммарные магнитные моменты всех электронов, входящих в атом) в отсутствие внешнего магнитного поля отличны от нуля.

В магнитном поле магнитные моменты атомов ориентируются вдоль  $\vec{B}$ , поэтому вектор намагниченности сонаправлен вектору магнитной индукции и  $\chi > 0$ . Парамагнетик усиливает внешнее магнитное поле.

Парамагнитный эффект на несколько порядков сильнее диамагнитного и «перебивает» последний.

Зависимость магнитной восприимчивости парамагнетика от абсолютной температуры

$$\chi = \frac{C}{T}$$

— **закон Кюри-Вейсса** (опытный закон);  $C$  — константа — характеристика конкретного вещества. Качественное объяснение: с ростом температуры магнитная восприимчивость падает из-за усиления теплового движения молекул. Можно показать, что

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}.$$

### 3.11.9. Ферромагнетизм

1. Свойства ферромагнетиков

1.  $\mu \gg 1$
2. Нелинейная и неоднозначная зависимость  $\vec{j}(\vec{H})$ ,  $\vec{B}(\vec{H})$  — **гистерезис** (рис. 28.3)
3. Нелинейная зависимость  $\mu(H)$
4. Остаточное намагничивание: вещество сохраняет намагниченность при отключении внешнего магнитного поля.
5. Насыщение: при высокой напряжённости магнитного поля намагниченность перестаёт возрастать.
6. Зависимость  $\mu(T)$ : при  $T > T_k$  (**точка Кюри**) ферромагнетик теряет ферромагнитные свойства и превращается в парамагнетик.

2. Кривые гистерезиса

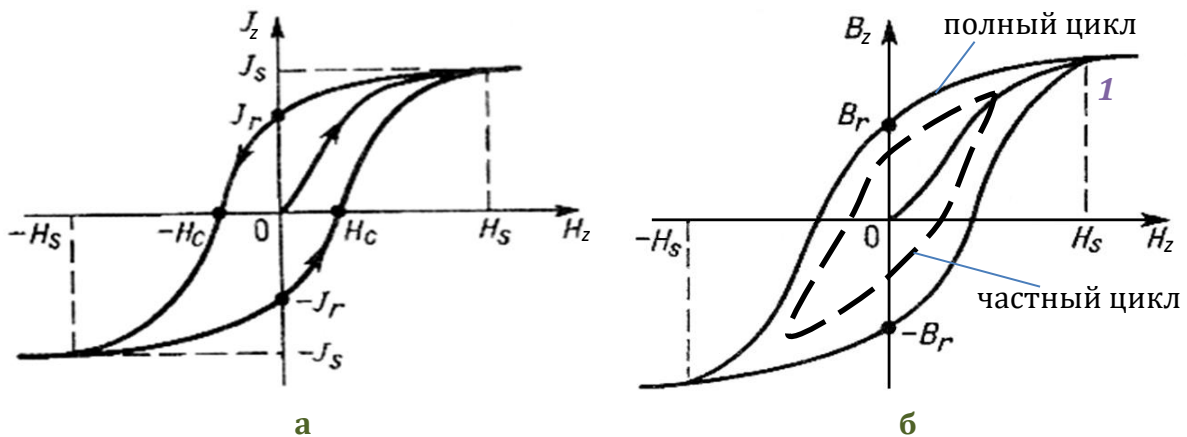
На рис. 28.3А показана зависимость проекции намагниченности на какое-либо направление от проекции напряжённости магнитного поля на это направление.

На рис. 28.3Б показана зависимость проекции магнитной индукции внутри ферромагнетика на какое-либо направление от проекции напряжённости магнитного поля на это направление. На рис. 28.3Б изображён *полный цикл (максимальная петля гистерезиса)* — зависимость  $B_z(H_z)$  в случае, если в ходе процесса намагни-

чивания намагниченность образца достигает насыщения, а также один из бесконечного множества возможных частных циклов — зависимость  $B_z(H_z)$  в случае, если насыщение не достигается.

Кривая **0-1** на [рис. 28.3Б](#) — кривая первичного намагничивания — зависимость  $B(H)$  при увеличении напряжённости магнитного поля от нуля в случае, если образец до этого не был намагничён.

Определения обозначений на [рис. 28.3](#) — характерных параметров ферромагнетика — даны в [табл. 28.1](#).



**Рис. 28.3. Петли гистерезиса**

**Таблица 28.1**

*Параметры петель гистерезиса*

Обозначение	Величина	Определение
$J_r$	Остаточная намагниченность	Модуль намагниченности ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля
$B_r$	Остаточная магнитная индукция	Модуль магнитной индукции внутри ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля
$H_c$	Коэрцитивная сила	Модуль напряжённости внешнего магнитного поля, которое нужно приложить, чтобы намагниченность ферромагнетика стала равной нулю
$J_s$	Намагниченность насыщения	Модуль максимально возможной намагниченности
$H_s$	Напряжённость насыщения	Модуль минимальной напряжённости магнитного поля, при которой намагниченность максимальна

### 3. Кривая первичного намагничивания

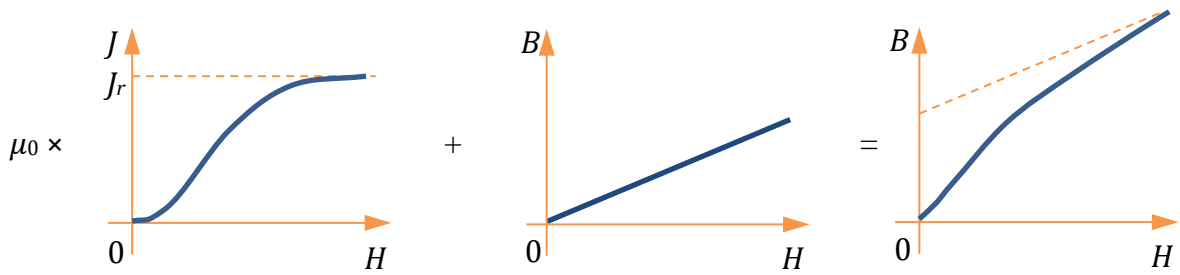
Объясним ход кривой первичного намагничивания  $B(H)$ . По определению напряжённости магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J};$$

$\mu_0 \vec{H} = \vec{B}_0$  — индукция магнитного поля макротоков, т. е. внешнего магнитного поля без учёта поля ферромагнетика. В процессе первичного намагничивания все силовые характеристики магнитного поля сонаправлены,

$$B(H) = B_0(H) + \mu_0 J(H).$$

Суммирование двух графиков:  $J(H)$  и  $B_0 = \mu_0 H$  показано на [рис. 28.4](#).

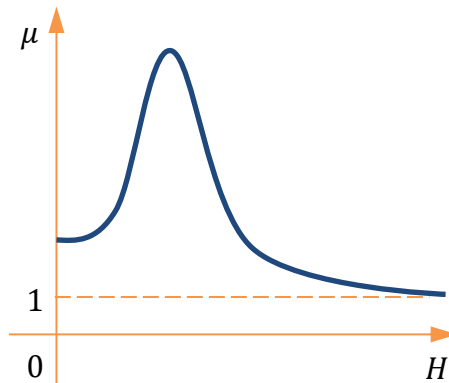


**Рис. 28.4**

Если определять относительную магнитную проницаемость как  $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$ , то

$$\mu = 1 + \frac{J}{H}.$$

Примерный ход зависимости  $\mu(H)$  показан на [рис. 28.5](#).



**Рис. 28.5**

#### 4. Энергия перемагничивания ферромагнетика

Энергия магнитного поля

$$W = \int_V \frac{\overline{B}\overline{H}}{2} dV,$$

так как объёмная плотность энергии магнитного поля  $w = \frac{\overline{B}\overline{H}}{2}$ ;  $V$  — объём образца.

Будем считать поле внутри ферромагнетика однородным, тогда

$$W = wV = \frac{B_z H_z}{2} V.$$

При изменении напряжённости магнитного поля на  $dH_z$  изменение энергии магнитного поля

$$dW = Vdw = V \cdot \frac{B_z(H_z) dH_z}{2}.$$

Работа внешних сил по полному перемагничиванию образца (при изменении проекции напряжённости магнитного поля от  $H_s$  до  $-H_s$ )

$$A^* = \Delta W = V \int_{H_s}^{-H_s} \frac{B_z(H_z) dH_z}{2}.$$

Эта величина пропорциональна площади петли гистерезиса  $B_z(H_z)$ .

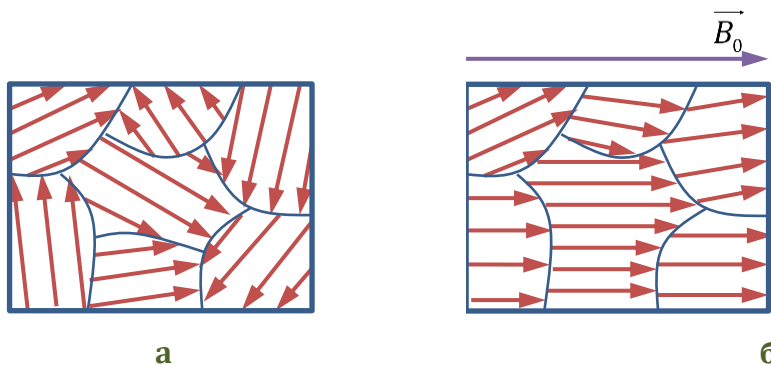
Соответственно, чем больше площадь петли гистерезиса, тем больше потери энергии на перемагничивание образца при изменении направления напряжённости магнитного поля, т. е. изменении направления тока, создающего магнитное поле. По этому признаку (сравнительно большая или малая площадь петли гистерезиса) магнитные материалы делятся на *твёрдые* и *мягкие*, имеющие разное назначение.

**Демонстрации:** 1) Нагревание при перемагничивании железа  
2) Эффект Баркгаузена  
3) Точка Кюри: накаливание стальной проволоки током

### 5. Толкование свойств ферромагнетиков

Магнитные свойства ферромагнетиков обусловлены спином электрона. Намагничивание ферромагнетика — коллективный квантовый эффект, обусловленный *обменными силами*<sup>75</sup>.

В отсутствие внешнего магнитного поля внутри ферромагнетика имеются области, в пределах которых ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения — *домены*. В целом ферромагнетик не намагничен, так как направления намагничённости различных доменов различны ([рис. 28.6А](#)).



**Рис. 28.6**

При наложении внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  магнитные моменты доменов выстраиваются вдоль этого поля и образец намагничивается ([рис. 28.6Б](#)). Этот процесс протекает в три этапа, обозначенные на кривой первичного намагничивания на [рис. 28.7](#):

<sup>75</sup> Обменные силы — это не силы в смысле определения, данного нами, т. е. не мера какого-либо взаимодействия объектов. Происхождение обменных сил можно разъяснить только в рамках формализма квантовой механики; это выходит за рамки курса общей физики.

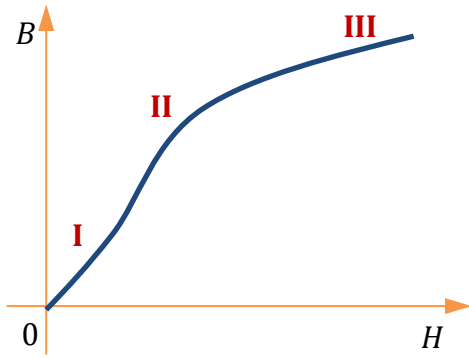


Рис. 28.7

**I** — слияние доменов, магнитные моменты которых близки по направлению к  $\vec{B}_0$ ;

**II** — расширение границ доменов, магнитные моменты которых близки по направлению к  $\vec{B}_0$ ;

**III** — разворот магнитных моментов доменов.

## Лекция 29

## 3.12. Уравнения Максвелла

## 3.12.1. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме

Вспомним уравнения Максвелла в общем виде, записав их в интегральной и дифференциальной форме (ТАБЛ. 29.1).

Таблица 29.1

Уравнения Максвелла

	в интегральной форме	в дифференциальной форме
<b>I.</b>	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
<b>II.</b>	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
<b>III.</b>	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
<b>IV.</b>	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$

**Материальные уравнения для изотропной среды:**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Решив систему уравнений Максвелла с учётом материальных уравнений, можно рассчитать характеристики электромагнитного поля в любой задаче.

## 3.12.2. Физический смысл уравнений Максвелла

**I.** Переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле.

**II.** Переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле.

При этом  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . Из I и II уравнений Максвелла следует возможность существования электромагнитных волн (РИС. 29.1).

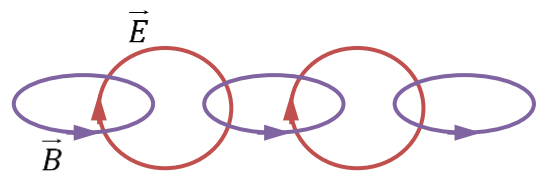


Рис. 29.1

**II.** Магнитное поле порождается токами:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = I.$$

Второе слагаемое в правой части II уравнения Максвелла

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

— **плотность тока смещения.**

**III.** Электрическое поле порождается электрическими зарядами:

$$\int_V \rho dV = \left( \sum q^{\text{своб}} \right)_S.$$

IV. Магнитных зарядов не существует. Силовые линии магнитного поля замкнуты.

### 3.12.3. Относительность электрического и магнитного полей

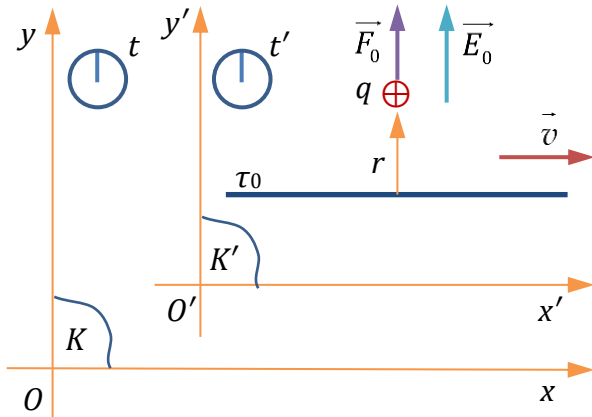


Рис. 29.2

Рассмотрим взаимодействие тел с точки зрения двух наблюдателей: подвижного и неподвижного. Пусть имеются два заряженных тела, неподвижных друг относительно друга: точечный заряд и длинная равномерно заряженная нить; заряд расположен на расстоянии  $r$  от нити (рис. 29.2). Найдём силу, с которой поле нити действует на точечный заряд.

В инерциальной системе отсчёта  $K'$ , относительно которой точечный заряд и нить покоятся, точечный заряд равен  $q$ , а линейная плотность заряда нити

$$\tau_0 = \frac{dq}{dl_0},$$

$dl_0$  — собственная длина элементарного отрезка нити. В этой системе отсчёта поле нити — электростатическое (напряжённость поля  $\vec{E}_0$ ) и сила, с которой оно действует на точечный заряд,

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \vec{F}_{10} = q\vec{E}_0.$$

Из III уравнения Максвелла найдём

$$E_0 = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (29.1)$$

$$F_0 = \frac{q\tau_0}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(см. задачу о поле длинной нити в РАЗДЕЛЕ 3.2.3).

С точки зрения наблюдателя, движущегося относительно рассматриваемой системы зарядов со скоростью  $\vec{v}$  (и покоящегося относительно инерциальной системы отсчёта  $K$ , см. рис. 29.2), кроме электрической составляющей поля появляется ещё и магнитная, так как нить, движущаяся со скоростью  $\vec{v}$ , создаёт магнитное поле, которое действует на движущийся заряд  $q$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Классическая механика

В классической механике сила — инвариант:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 = \text{inv} \Rightarrow \vec{F}_2 = 0.$$

Никакой магнитной составляющей силы Лоренца классическая механика не предусматривает. Это показывает, что электромагнитное поле — сугубо релятивистский объект и рассматривать его нужно только с точки зрения релятивистской физики.



Релятивистская механика

Сила не инвариантна:

$$\vec{F} \neq \text{inv} \Rightarrow \vec{F} \neq \vec{F}_0.$$

Но уравнения Максвелла инвариантны. Заряд также является релятивистским инвариантом:

$$q = \text{inv}$$

— постулируется.

Сила в релятивистской механике преобразуется по закону

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Зная  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_1 = q\vec{E}$ , можно найти  $\vec{F}_2$ . Найдём сначала  $\vec{E}$  — напряжённость электрического поля нити в системе отсчёта  $K$ .

III уравнение Максвелла (теорема Остроградского-Гаусса для  $\vec{E}$ ):

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_s}{\epsilon_0}.$$

Здесь  $S$  — та же поверхность, что и для наблюдателя, покоящегося относительно системы отсчёта  $K'$ , и результат расчёта напряжённости электрического поля должен быть аналогичен (29.1):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (29.2)$$

где  $\tau$  — линейная плотность заряда нити в системе отсчёта  $K$  (здесь и далее в этом выводе мы опускаем векторы, так как все векторные величины, входящие в выражения, приведённые выше в этом разделе, сонаправлены). В правой части выражения (29.2) все величины инвариантны, кроме  $\tau$ :

$$\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{dq}{dl_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставив последнее выражение в (29.2), получим

$$E = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$F_1 = qE = \frac{qE_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Теперь найдём  $F_2$ :

$$F_2 = F - F_1 = F_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{F_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_0 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{v^2}{c^2} \frac{F_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{v^2}{c^2} qE$$

— релятивистская поправка порядка  $\frac{v^2}{c^2}$ . Выразим силу  $F$  через  $E$ :

$$F = qE - \frac{v^2}{c^2} qE. \quad (29.3)$$

Теперь выразим второе слагаемое в выражении (29.3) — релятивистскую поправку к силе, с которой электромагнитное поле действует на заряд, — через другие величины, которые может измерить наблюдатель, покоящийся относительно системы отсчёта  $K$ . Для этого наблюдателя по нити идёт ток

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\tau dl}{dt} = v\tau,$$

с учётом этого

$$F = qE - \frac{v^2}{c^2} \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = qE - \frac{v}{c^2} \frac{qI}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Так как  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ ,

$$F = qE - \frac{\epsilon_0\mu_0 qvI}{2\pi\epsilon_0 r} = qE - qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = qE - qvB$$

( $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  — модуль индукции магнитного поля прямого тока, см. пример в [РАЗДЕЛЕ 3.7.2](#)). Мы получили формулу Лоренца.

Выразим индукцию магнитного поля через напряжённость электрического поля в системе отсчёта  $K'$ :

$$B = \frac{\mu_0 v \tau}{2\pi r} = \frac{\mu_0 v}{2\pi r} \frac{\tau_0 \frac{1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 v \tau_0}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c^2} \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Электромагнитное поле — единый объект. Его деление на электрическую и магнитную компоненты зависит от выбора системы отсчёта.

### 3.12.4. Преобразования компонент электромагнитного поля

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Две из этих формул ( $E_y$  и  $B_z$  при  $B'_z$ ) мы вывели в [ПРЕДЫДУЩЕМ РАЗДЕЛЕ](#). Другие формулы выводятся похожим образом. В векторной форме преобразования компонент электромагнитного поля записываются как

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}' - [\vec{v}\vec{B}']}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{B}' + \frac{1}{c^2}[\vec{v}\vec{E}']}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Можно показать, что

$$B^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{inv}, \quad \vec{B}\vec{E} = \text{inv}.$$

### 3.12.5. Силовая характеристика электромагнитного поля как 4-тензор

Тензор электромагнитного поля:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.12.6. Обзор: Постоянное электрическое и магнитное поле

В [ТАБЛИЦЕ 29.2](#) используются те же обозначения, что при изучении соответствующих тем в настоящей главе.

Таблица 29.2

Величина/закон	Электрическое поле	Магнитное поле
Характеристика источника	Электрический заряд $q$	Сила тока $I$
Плотность характеристики источника	Объёмная плотность заряда $\rho = \frac{dq}{dV}$	Плотность тока $\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{n}$
Основная силовая характеристика	Напряжённость электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}_1}{q_0}$	Магнитная индукция $\vec{F}_2 = q_0[\vec{v}\vec{B}], B = \frac{F_{2\max}}{q_0v}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum \vec{E}_i, \vec{E} = \int d\vec{E}$	$\vec{B} = \sum \vec{B}_i, \vec{B} = \int d\vec{B}$
Силовая характеристика поля точечного источника в вакууме	Напряжённость поля точечного заряда (закон Кулона) $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	Закон Био-Савара-Лапласа $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$

Таблица 29.2 (продолжение)

Величина/закон	Электрическое поле	Магнитное поле
Теорема Остроградского-Гаусса, теорема о циркуляции	Теорема о циркуляции $\vec{E}$ : $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \text{rot } \vec{E} = 0$	Теорема Остроградского-Гаусса для $\vec{B}$ : $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \text{div } \vec{B} = 0$
	Теорема Остроградского-Гаусса для $\vec{E}$ : $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{(\sum q)_s}{\epsilon_0}, \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Теорема о циркуляции $\vec{B}$ : $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum I)_L, \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Энергетическая характеристика	Потенциал $\varphi$ : $\Delta \varphi_{12} = -\frac{A_{12}}{q_0}$	Векторный потенциал $\vec{A}$ : $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \text{div } \vec{A} = 0$ Магнитный поток <sup>76</sup> $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$
Связь между энергетической и силовой характеристиками	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \Delta \varphi_{12} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$
Момент	Дипольный момент $\vec{p}_e = q\vec{l}$	Магнитный момент $\vec{p}_m = IS\vec{n}$
Момент силы	$\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}]$	$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$
Энергия	Энергия диполя $W = -\vec{p}_e \vec{E}$	Энергия контура с током $W = -\vec{p}_m \vec{B}$
Силовая характеристика поля в веществе	Поляризованность $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_e}{V}$	Намагниченность $\vec{j} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V}$
Вспомогательная силовая характеристика	Электрическое смещение $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	Напряжённость магнитного поля $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}$

<sup>76</sup> Эта величина не является энергетической характеристикой магнитного поля. Она приведена в этой ячейке ТАБЛ. 29.2, так как занимает в некоторых формулах, относящимся к проводникам с током, место, аналогичное тому, что занимает потенциал (разность потенциалов) или заряд в формулах, описывающих заряженные проводники.

Таблица 29.2 (продолжение)

Величина/закон	Электрическое поле	Магнитное поле
Теорема Остроградского-Гаусса, теорема о циркуляции поля в веществе	Теорема Остроградского-Гаусса для $\vec{P}$ : $\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -(\sum q')_S, \operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$	Теорема о циркуляции $\vec{J}$ : $\oint_L \vec{J} d\vec{l} = (\sum i)_L, \operatorname{rot} \vec{J} = \vec{j}^{\text{микро}}$
	Теорема Остроградского-Гаусса для $\vec{D}$ : $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\sum q)_S, \operatorname{div} \vec{D} = \rho$	Теорема о циркуляции $\vec{H}$ : $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = (\sum I)_L, \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}^{\text{макро}}$
Характеристика вещества	Диэлектрическая восприимчивость $\varepsilon$	Магнитная восприимчивость $\chi$
	Относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1 + \varepsilon$	Относительная магнитная проницаемость $\mu = 1 + \chi$
Связь силовых характеристик для изотропной среды	$\vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$	$\vec{J} = \chi \vec{H}$ $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$
Условия на границе раздела двух сред	$D_{2n} = D_{1n}$ $\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ $\frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$	$B_{2n} = B_{1n}$ $\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ $H_{2\tau} = H_{1\tau}$ $\frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$
Работа поля	Работа электростатического поля по перемещению заряда $A_{12} = -q(\varphi_2 - \varphi_1)$	Работа магнитного поля по перемещению проводника с током $A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1)$
Характеристика проводника	Ёмкость $C = \frac{q}{\varphi}$	Индуктивность $L = \frac{\Phi}{I}$
Характеристика двух проводников	Взаимная ёмкость $C_{12} = \frac{q}{ \varphi_2 - \varphi_1 }$	Взаимная индуктивность $M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$
Энергия проводника	Энергия заряженного конденсатора $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C}$	Энергия проводника с током $W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$

Таблица 29.2 (продолжение)

<i>Величина/закон</i>	<i>Электрическое поле</i>	<i>Магнитное поле</i>
Объёмная плотность энергии поля	$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}$	$w = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}$
Объёмная плотность энергии поля в изотропной среде	$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$	$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}$

## Лекция 30

## 3.13. Электромагнитные колебания

В электрической цепи, содержащей конденсатор и катушку индуктивности (или проводники, обладающие отличными от нуля ёмкостью и индуктивностью) — *колебательном контуре*, — могут возникать электромагнитные колебания. Если сообщить конденсатору заряд и замкнуть цепь, то конденсатор будет разряжаться через катушку. По катушке будет идти переменный ток, который по закону электромагнитной индукции будет создавать в катушке индуцированное электрическое поле, препятствующее изменению тока. Конденсатор будет разряжаться и перезаряжаться, а ток в цепи расти, убывать и менять направление: заряд конденсатора и ток в цепи будут изменяться периодически, т. е. будут происходить *электромагнитные колебания*.

3.13.1. Свободные незатухающие колебания ( $R = 0$ )

Схема электрической цепи, в которой происходят свободные незатухающие электромагнитные колебания, представлена на [рис. 30.1](#). Так как сопротивление цепи равно нулю, ток будет изменяться по модулю и направлению, а конденсатор перезаряжаться неограниченно долго — возникнут свободные незатухающие электромагнитные колебания.

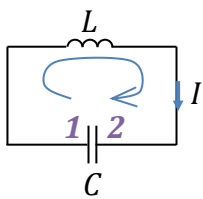


Рис. 30.1

Обобщённый закон Ома для контура **12** (**1** и **2** — обкладки конденсатора)

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s = 0, \quad (30.1)$$

$\mathcal{E}_s$  — ЭДС самоиндукции — единственная ЭДС в этой цепи. Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_c = \frac{q}{C}; \quad (30.2)$$

по закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (30.3)$$

По определению силы тока  $I = -\frac{dq}{dt}$  (здесь знак «-» обусловлен тем, что при разрядке конденсатора его заряд уменьшается). Подставив это выражение, а также [\(30.2\)](#) и [\(30.3\)](#) в уравнение [\(30.1\)](#):

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний (см. [1.14.2](#)).

Обозначив  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , запишем его в стандартном виде [\(15.1\)](#)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (30.4)$$

$A$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования, которые находятся из начальных условий.

**Собственная циклическая частота** колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

**период** свободных незатухающих электромагнитных колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Зависимость тока от времени

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (30.5)$$

Пусть в начальный момент времени заряд конденсатора равен  $q_0$ , а тока в цепи нет. Подставим начальные условия в общее решение (30.4) и формулу (30.5):

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ I(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = A \cos \varphi, \\ 0 = A\omega_0 \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = A, \\ \varphi = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 \cos \omega_0 t, \\ I(t) = q\omega_0 \sin \omega_0 t. \end{cases}$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} \cos \omega_0 t.$$

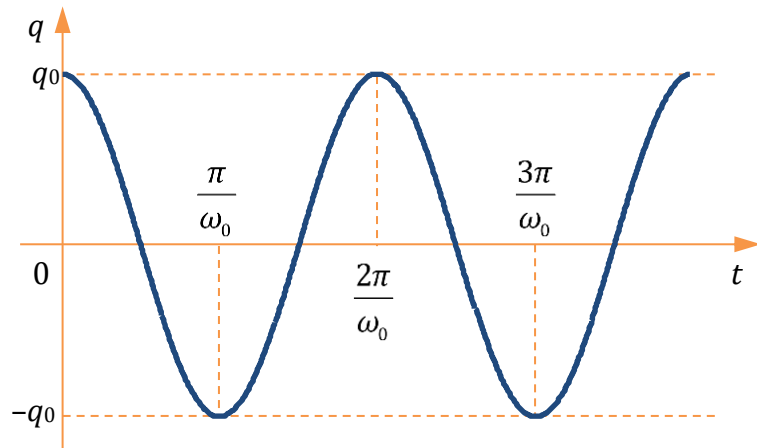
Графики зависимостей  $q(t)$  и  $I(t)$  при указанных начальных условиях показаны на [рис. 30.2А, Б](#). Видно, что ток опережает заряд конденсатора (и напряжение на конденсаторе) по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Энергия электромагнитного поля в колебательном контуре (**энергия колебательного контура**) складывается из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки:

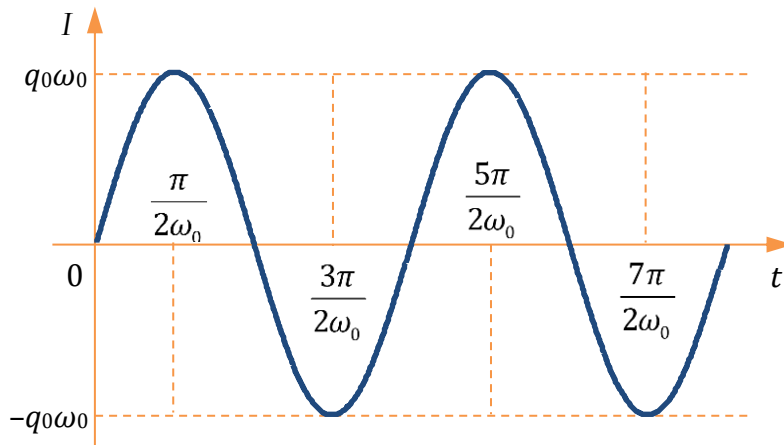
$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}, \quad (30.6)$$

где  $q_m$ ,  $I_m$  — соответственно амплитуды заряда конденсатора и тока в цепи. Студенты доказывают утверждение (30.6) **самостоятельно**.





а



б

Рис. 30.2

### 3.13.2. Свободные затухающие колебания

Пусть теперь электрическое сопротивление цепи отлично от нуля (см. схему на [рис. 30.3](#), содержащую элемент  $R$ ).

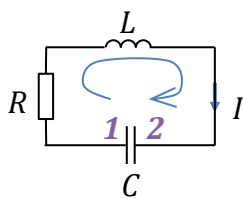


Рис. 30.3

Обобщённый закон Ома для участка цепи **12**:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_3 = IR. \quad (30.7)$$

Подставим в это уравнение выражения [\(30.2\)](#) и [\(30.3\)](#):

$$\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} = IR.$$

Учитывая, что  $I = -\frac{dq}{dt}$ , запишем это уравнение как

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0;$$

обозначим  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ,  $\frac{R}{L} = 2\beta$ , где  $\beta$  — коэффициент затухания; получим уравнение [\(16.1\)](#)

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0} \quad (30.8)$$

— дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (см. 1.14.3). Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (30.9)$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Эти корни могут быть как действительными, так и комплексными. Общее решение дифференциального уравнения (30.8)

$$q(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

$A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования.

### 1. Сильное затухание ( $\beta \geq \omega_0$ )

Корни характеристического уравнения (30.9) — действительные. Общее решение дифференциального уравнения (30.8)

$$q(t) = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

— *апериодическое решение* (разрядка конденсатора). График этого решения представлен на рис. 30.4 ( $q_0$  — заряд конденсатора при  $t = 0$ ).

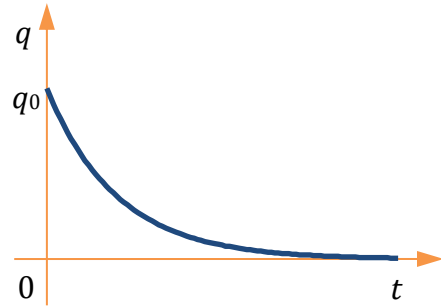


Рис. 30.4

### 2. Слабое затухание ( $\beta < \omega_0$ )

Корни характеристического уравнения (30.9) — комплексные. Общее решение дифференциального уравнения (30.8)

$$q(t) = A_1 e^{(-\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t} + A_2 e^{(-\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}).$$

Обозначим

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

— *циклическая частота свободных затухающих колебаний*. Общее решение удобно представить в виде

$$\boxed{q(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}, \quad (30.10)$$

где  $A_0$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования, значения которых определяются из начальных условий.

### *Период затухающих колебаний (условный период)*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

### *Амплитуда затухающих колебаний*

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t};$$

затухающие колебания можно рассматривать как гармонические колебания с переменной амплитудой:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

График функции (30.10) при  $\varphi = 0$  показан на рис. 30.5.

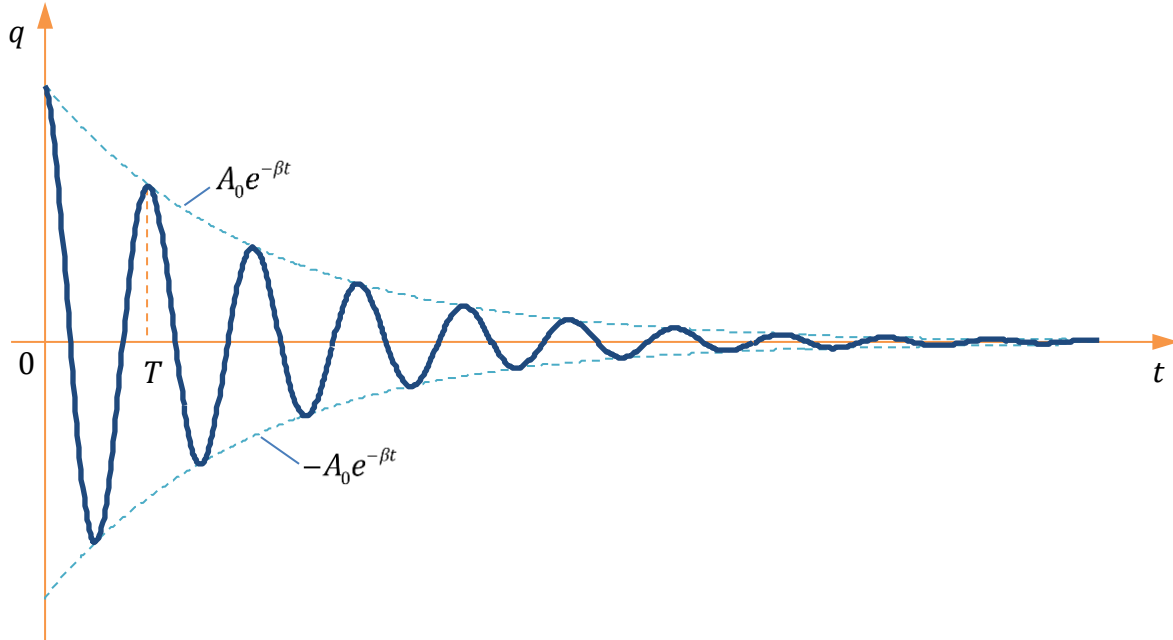


Рис. 30.5

Зависимость тока в цепи от времени

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)] = A_0 e^{-\beta t} \sqrt{\beta^2 + \omega^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right] = A_0 e^{-\beta t} \sqrt{\beta^2 + \omega^2} \sin(\omega t + \varphi + \theta);$$

$$\sin \theta = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\omega}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta}{\omega}.$$

Ток опережает заряд (напряжение на конденсаторе) по фазе на  $\frac{\pi}{2} - \theta$ .

Введём ещё некоторые характеристики затухающих колебаний.

**Логарифмический декремент затухания**

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}.$$

Выразим логарифмический декремент через другие характеристики колебаний:

$$\delta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}.$$

**Время релаксации** — время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \Rightarrow \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta \tau}} = e^{\beta \tau} = e \Rightarrow \beta \tau = 1,$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

**Число колебаний за время релаксации**, т. е. число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в  $e$  раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\delta}.$$

Отсюда ясен физический смысл логарифмического декремента затухания.

**Добротность** колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e = \frac{\pi \omega}{2\pi \beta} = \frac{\omega}{2\beta}.$$

Эта величина пропорциональна числу колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

**Энергия затухающих колебаний**

В колебательной системе с затуханием происходит *диссипация* энергии. Так как электрическое сопротивление цепи отлично от нуля, энергия электромагнитного поля переходит во внутреннюю энергию проводников.

Энергия колебаний пропорциональна квадратам амплитуд всех колеблющихся величин:  $W \sim q_m^2 \sim I_m^2 \sim U_m^2 \sim e^{-2\beta t}$ .

**Относительное уменьшение энергии за период**

$$\frac{|\Delta W|}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = 1 - e^{-2\beta T} = 1 - e^{-2\delta}.$$

При малом затухании ( $\delta \ll 1$ )  $\frac{|\Delta W|}{W} = 2\delta$ . Тогда

$$Q = \frac{2\pi}{\frac{|\Delta W|}{W}} = \frac{2\pi W}{|\Delta W|}.$$

Чем выше добротность колебательной системы, тем медленнее убывает энергия колебаний.

### 3.13.3. Вынужденные колебания

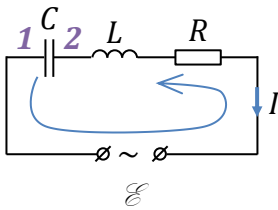


Рис. 30.6

Теперь включим в колебательный контур источник с переменной ЭДС (рис. 30.6), изменяющейся по гармоническому закону:

$$\mathcal{E} = -U_0 \cos \Omega t^{77}$$

— вынуждающая ЭДС.

Обобщённый закон Ома для участка **12**:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = IR. \quad (30.11)$$

Подставив сюда (30.2) и (30.3), получим

$$\frac{q}{C} - U_0 \cos \Omega t - L \frac{dI}{dt} = IR;$$

с учётом  $I = -\frac{dq}{dt}$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 \cos \Omega t,$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{U_0}{L} \cos \Omega t.$$

Обозначим, как и ПРЕЖДЕ,  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ,  $\frac{R}{L} = 2\beta$ , а также  $\frac{U_0}{L} = F_0$ . Уравнение (30.11) примет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = F_0 \cos \Omega t \quad (30.12)$$

— *дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний*. Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Далее рассматриваем случай СЛАБОГО ЗАТУХАНИЯ.

Общее решение дифференциального уравнения (30.12):

$$q(t) = \underbrace{A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{общее решение ОДУ}} + \underbrace{q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0)}_{\text{частное решение НДУ}}. \quad (30.13)$$

общее решение ОДУ    частное решение НДУ

Общее решение однородного дифференциального уравнения [(30.8) или (30.12) без правой части] быстро затухает, далее мы его учитывать не будем. Найдём коэффициенты  $q_0$  и  $\varphi_0$  в частном решении неоднородного уравнения [и убедимся в том, что это решение действительно имеет вид второго слагаемого в правой части выражения (30.13)].

Подставим в (30.12):

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \Omega q_0 \sin(\Omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\Omega^2 q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0);$$

<sup>77</sup> Здесь ставим знак «-», чтобы вынуждающее напряжение  $U = U_0 \cos \Omega t$  было со знаком «+», так как обычно рассматривается соотношение фаз между током в цепи и т. д. и входным напряжением, а не ЭДС.

получим

$$-\Omega^2 q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta\Omega q_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) = F_0 \cos \Omega t.$$

Преобразуем левую часть этого равенства:

$$q_0 \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) \right] = q_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \varphi_0) - \frac{2\beta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi_0) \right] =$$

$$= q_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi_0 + \theta),$$

$$\text{tg } \theta = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Итак,

$$q_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi_0 + \theta) = F_0 \cos \Omega t.$$

Это равенство должно выполняться при любых  $t$ , поэтому

$$\begin{cases} q_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} = F_0, \\ \cos(\Omega t + \varphi_0 + \theta) = \cos \Omega t. \end{cases}$$

Отсюда получим:

$$\varphi_0 = -\theta$$

— колебания заряда опережают вынуждающее напряжение по фазе на  $\theta$  (соответственно, отстают от вынуждающей ЭДС на  $\pi - \theta$ );

$$q_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

— амплитуда заряда конденсатора.

Запишем окончательные выражения зависимостей заряда конденсатора и силы тока в цепи от времени:

$$q(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t - \theta),$$

$$I(t) = \frac{F_0 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \theta).$$

$I_0$  — амплитуда силы тока

Так как  $\sin(\theta - \Omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \Omega t\right) = \cos\left(\Omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right)$ , ток опережает заряд конденсатора по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Обозначим

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

— *полное сопротивление (импеданс)* цепи. (Эта величина вводится по аналогии с законом Ома для участка цепи  $U = IR$ : если сопротивление  $R$  проводника — это коэффициент пропорциональности между током и напряжением на этом участке, то импеданс  $Z$  — это коэффициент пропорциональности между амплитудным значением тока и амплитудным значением напряжения на клеммах участка цепи, т. е. вынуждающей ЭДС.)

Выразим полное сопротивление цепи, а также сдвиг фаз между зарядом конденсатора и вынуждающей ЭДС через параметры  $R, L, C$ :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{U_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}{F_0 \Omega} = \frac{U_0 L}{U_0 \Omega} \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + 4 \frac{R^2}{4L^2} \Omega^2} = \\ &= \sqrt{\frac{L^2}{\Omega^2} \left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + \frac{L^2}{\Omega^2} \frac{R^2}{L^2} \Omega^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{\Omega LC} - \frac{\Omega^2 L}{\Omega}\right)^2 + R^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{R \Omega}{L \left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)} = \frac{R}{\left(\frac{L}{\Omega LC} - \frac{\Omega^2 L}{\Omega}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)}; \\ Z &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{R}{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}. \end{aligned} \quad (30.14)$$

## Лекция 31

## 3.13.3. Вынужденные колебания (продолжение)

Амплитуды силы тока в цепи и заряда конденсатора

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}}, \quad q_0 = \frac{I_0}{\Omega} = \frac{U_0}{\Omega \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}}.$$

Обобщим сказанное в этом разделе и проанализируем, как изменяется ток и напряжения на разных элементах цепи.

1. Заряд конденсатора:

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t - \theta).$$

2. Сила тока:

$$I(t) = q_0 \Omega \sin(\Omega t - \theta) = q_0 \Omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t + \theta\right).$$

3. Напряжение на резисторе:

$$U_R(t) = IR = q_0 \Omega R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t + \theta\right).$$

4. Напряжение на конденсаторе:

$$U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\Omega t - \theta).$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{C0} = \frac{q_0}{C}.$$

Отношение амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде тока

$$X_C = \frac{U_{C0}}{I_0} = \frac{q_0}{CI_0} = \frac{q_0}{Cq_0\Omega} = \frac{1}{\Omega C},$$

$$X_C = \frac{1}{\Omega C}$$

— ёмкостное сопротивление.

5. Напряжение на катушке индуктивности:

$$U_L(t) = -\mathcal{E}_s = L \frac{dI}{dt} = -q_0 \Omega^2 L \cos(\Omega t - \theta) = q_0 \Omega^2 L \cos(\Omega t - \theta + \pi).$$

Амплитуда напряжения на катушке

$$U_{L0} = q_0 \Omega^2 L.$$

Отношение амплитуды напряжения на катушке к амплитуде тока

$$X_L = \frac{U_{L0}}{I_0} = \frac{q_0 \Omega^2 L}{q_0 \Omega} = \Omega L,$$

$$X_L = \Omega L$$

— индуктивное сопротивление.



Полное сопротивление цепи (30.14) можно выразить через ёмкостное и индуктивное сопротивление:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}.$$

**Демонстрация:** Сопротивление катушки самоиндукции в цепи переменного тока и влияние сердечника на величину тока

Найдём, при какой циклической частоте вынуждающей ЭДС амплитуды силы тока в цепи и заряда конденсатора будут максимальны. Условие экстремума

$$\frac{dI_0}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{U_0 \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right) \left(-\frac{1}{\Omega^2 C} - L\right)}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2\right]^{3/2}} = 0,$$

$$\frac{1}{\Omega C} - \Omega L = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\Omega = \Omega_{\text{рез } I} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0;$$

$$\frac{dq_0}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{U_0 \left(-\frac{1}{2}\right) \left[2\Omega R^2 + 2\left(\frac{1}{C} - \Omega^2 L\right)(-2\Omega L)\right]}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2\right]^{3/2}} = 0,$$

$$R^2 - 2\left(\frac{1}{C} - \Omega^2 L\right)L = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} - \Omega^2 L = \frac{R^2}{2L},$$

$$\Omega = \Omega_{\text{рез } q} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Графики зависимостей  $I_0(\Omega)$  (при разных сопротивлениях) и  $q_0(\Omega)$  представлены на рис. 31.1А, Б.

**Мощность переменного тока** по закону Джоуля-Ленца

$$\begin{aligned} N(t) &= U(t)I(t) = U_0 \cos \Omega t \cdot I_0 \sin(\Omega t - \theta) = U_0 I_0 \cos \Omega t \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t + \theta\right) = \\ &= U_0 I_0 \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \Omega t + \theta\right) + \cos\left(2\Omega t + \frac{\pi}{2} - \theta\right) \right] = \frac{U_0 I_0}{2} [-\sin \theta + \sin(-2\Omega t + \theta)]. \end{aligned} \quad (31.1)$$

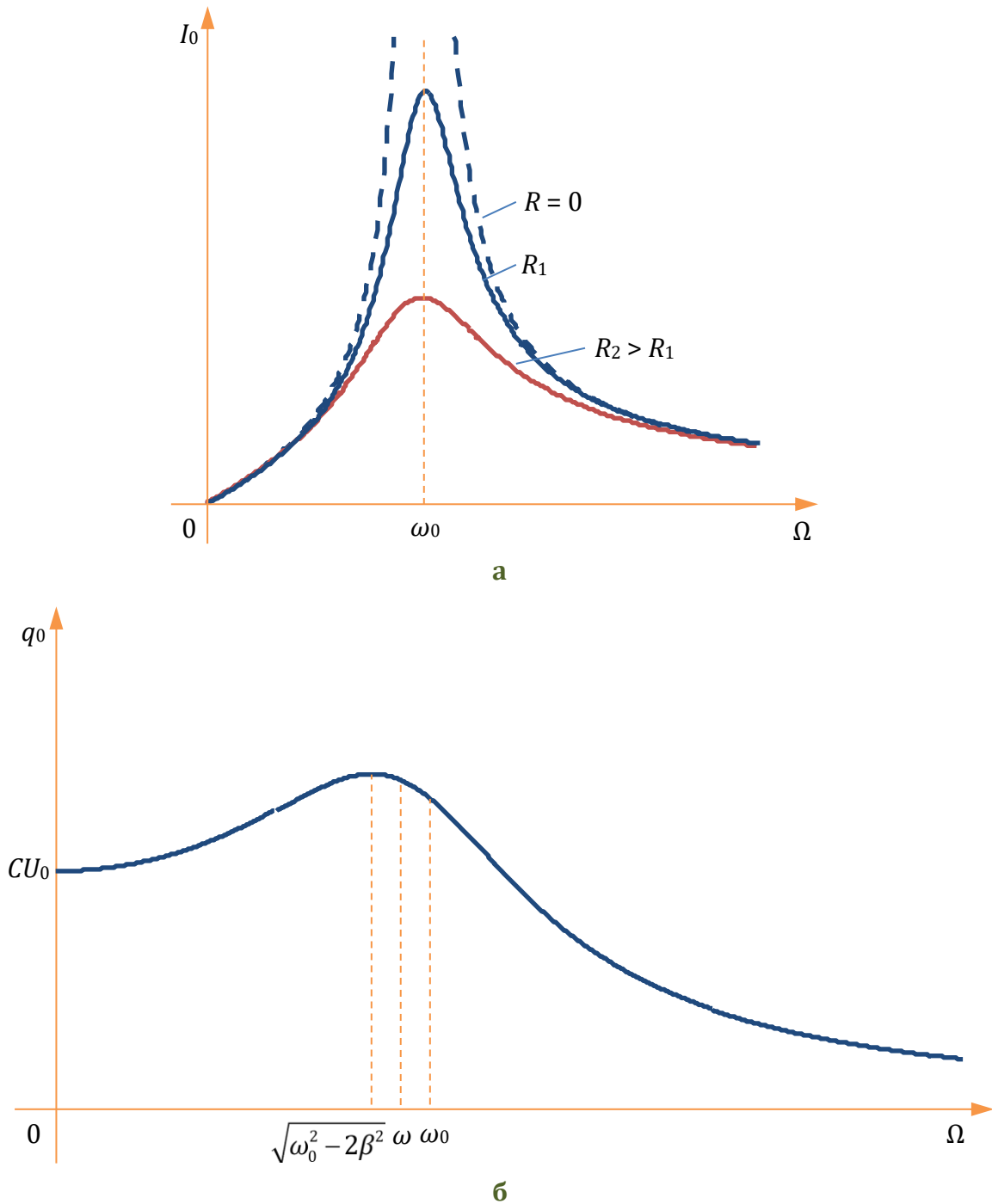
Здесь мы воспользовались формулой тригонометрии

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

Усредним выражение (31.1) по времени:

$$\langle N \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \sin \theta = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi_0,$$

где  $\cos \varphi_0$  — коэффициент мощности.



**Рис. 31.1. Резонансные кривые**

### 3.14. Электромагнитные волны

#### 3.14.1. Вывод волнового уравнения для электромагнитных волн

Ранее мы говорили (см. 3.12.2), что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное и наоборот и это приводит к возникновению электромагнитной волны. Выведем волновое уравнение из I и II уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

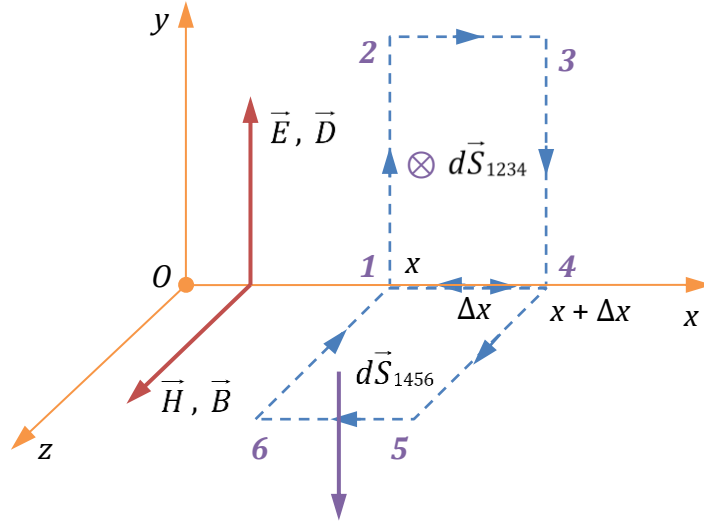


Рис. 31.2

Пусть в пространстве (однородной, изотропной, неферромагнитной среде с относительной электрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$ ,  $\mu$ ) существует переменное электрическое поле. Свободные заряды и макротоки отсутствуют. Напряжённость электрического поля направлена вдоль оси  $y$  и изменяется только вдоль оси  $x$  (рис. 31.2):

$$E = |E_y|.$$

При этом магнитная индукция будет направлена вдоль оси  $z$ :

$$B = |B_z|.$$

Мысленно выделим в пространстве прямоугольные контуры **1234** в плоскости  $xy$  и **1456** в плоскости  $xz$  (рис. 31.2), причём ширина контуров  $\Delta x \ll x$ . Циркуляция  $\vec{E}$  по контуру **1234**

$$\oint_{L_{1234}} \vec{E} d\vec{l} = E_y(x)l_{12} - E_y(x + \Delta x)l_{34} = [E_y(x) - E_y(x + \Delta x)]l_{12} = -\Delta E_y l_{12}; \quad (31.2)$$

поток  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  сквозь поверхность, натянутую на этот контур, взятый с обратным знаком,

$$-\int_{S_{1234}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{1234}} \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{1234}} B_z dS \cos \pi = \frac{\partial B_z}{\partial t} S_{1234} = \frac{\partial B_z}{\partial t} l_{12} \Delta x. \quad (31.3)$$

Подставим (31.2) и (31.3) в I уравнение Максвелла и поделим на  $\Delta x$ :

$$-\frac{\Delta E_y}{\Delta x} l_{12} = \frac{\partial B_z}{\partial t} l_{12};$$

при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (31.4)$$

Циркуляция напряжённости магнитного поля по контуру **1456**

$$\oint_{L_{1456}} \vec{H} d\vec{l} = H_z(x + \Delta x)l_{45} - H_z(x)l_{61} = [H_z(x + \Delta x) - H_z(x)]l_{45} = \Delta H_z l_{45}; \quad (31.5)$$

ток смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур,

$$\int_{S_{1456}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{1456}} \vec{D} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{1456}} D_y dS \cos \pi = -\frac{\partial D_y}{\partial t} S_{1456} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} l_{45} \Delta x. \quad (31.6)$$

Подставим (31.5) и (31.6) во II уравнение Максвелла и поделим на  $\Delta x$

$$\frac{\Delta H_z}{\Delta x} \Big|_{45} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} \Big|_{45};$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t}. \quad (31.7)$$

Никаких других соотношений между  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  быть не может.

Материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Далее в этом параграфе все формулы будем записывать через  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Возьмём производную от уравнения (31.4) по  $x$ , а от уравнения (31.7) — по  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 (\mu_0 \mu H_z)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} &= -\frac{\partial^2 (\varepsilon_0 \varepsilon E_y)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (31.8)$$

— *волновое уравнение* для  $E_y$ .

Возьмём производную от уравнения (31.7) по  $x$ , а от уравнения (31.4) — по  $t$ . Аналогично получим

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \quad (31.9)$$

— *волновое уравнение* для  $H_z$ .

Общий вид волнового уравнения (для плоской волны)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

где  $v$  — скорость распространения бегущей волны. Сравнивая с этой записью уравнения (31.8) и (31.9), видим, что

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}}$$

— *скорость распространения электромагнитных волн*; в вакууме

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

*Скорость электромагнитных волн в веществе*

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Напряжённости электрического и магнитного полей подчиняются одному и тому же уравнению. Это означает, что переменное электромагнитное поле может существовать только в виде бегущей волны.

Общее решение волнового уравнения:

$$E_y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt),$$

прямая волна

обратная волна

аналогично для  $H_z$ . Вид функций  $f_1$  и  $f_2$  определяется начальными условиями.

**Связь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в электромагнитной волне:**

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_y = \sqrt{\mu_0 \mu} H_z. \quad (31.10)$$

### **Доказательство**

Решение волнового уравнения (без обратной волны):

$$E_y = f(x - vt), \quad H_z = g(x - vt).$$

Подставим это решение в (31.7). Для этого найдём производные

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = g', \quad \frac{\partial D_y}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon f'(-v).$$

Из (31.7) получим

$$g' = -\varepsilon_0 \varepsilon f'(-v) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} f' \Rightarrow g = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} f \Rightarrow H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_y, \text{ ч. т. д.}$$

## Лекция 32

## 3.14.2. Монохроматическая волна как решение волнового уравнения

Пусть источник волны создаёт возмущение  $E_y(0, t) = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_0)$  (при  $x = 0$ ). При этих начальных условиях решение волнового уравнения (31.8) и (31.9) будет иметь вид

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_{0y} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \\ H_z(x, t) = H_{0z} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \end{cases} \quad (32.1)$$

— уравнение плоской бегущей монохроматической электромагнитной волны (без обратной волны). «Мгновенная фотография» монохроматической электромагнитной волны изображена на рис. 32.1.

Характеристики монохроматической волны

$E_{0y}, H_{0z}$  — амплитуда;

$\Phi = \omega t - kx + \varphi_0$  — фаза;

$k = \frac{\omega}{v}$  — волновое число;

$v$  — скорость распространения волны;

$\omega$  — циклическая частота;

$\varphi_0$  — начальная фаза;

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  — частота;

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$  — период;

$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi}{k}$  — длина волны.

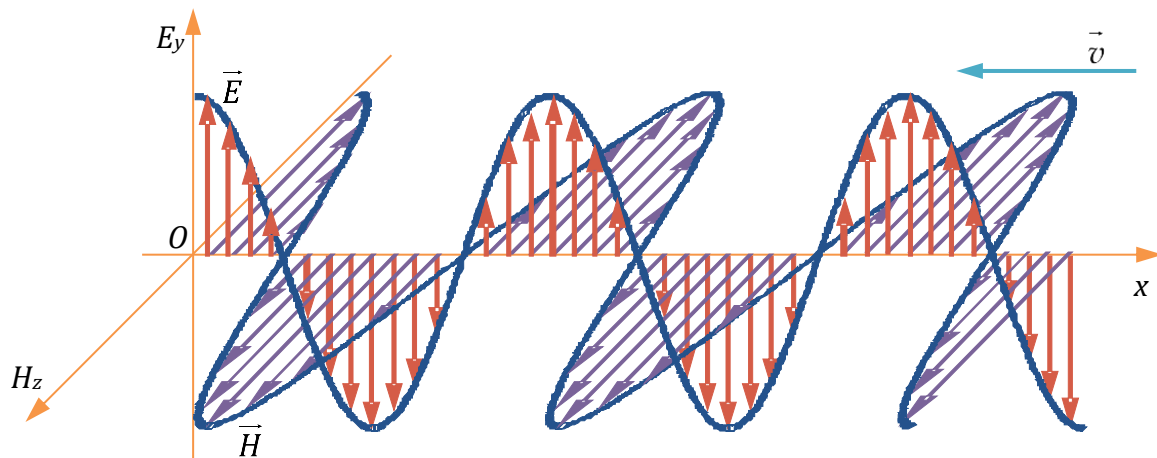


Рис. 32.1. «Мгновенная фотография» монохроматической электромагнитной волны

Уравнения (32.1) можно также записать в виде

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \\ H_z(x, t) = H_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \end{cases}$$

Уравнение монохроматической электромагнитной волны при произвольной форме волнового фронта:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0). \end{cases}$$

Здесь  $\vec{k}$  — волновой вектор;  $\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0$ , а модули напряжённостей электрического и магнитного полей связаны между собой соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$$

[ср. (31.10)].

### 3.14.3. Энергия электромагнитной волны

**Плотность потока энергии** — энергетическая характеристика волны — энергия, которую волна переносит в единичный промежуток времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$P = \frac{dW}{dt dS_{\perp}};$$

$$[P] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Выделим в пространстве, где распространяется электромагнитная волна, малый параллелепипед, длина которого равна расстоянию, проходимому волной за малое время  $dt$  —  $vdt$ , а площадь торца равна  $dS_{\perp}$  (рис. 32.2). Объём параллелепипеда

$$dV = vdt dS_{\perp}.$$

Энергия, содержащаяся в этом объёме,

$$dW = w dV,$$

где  $w$  — объёмная плотность энергии электромагнитного поля;

$$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_y^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H_z^2}{2}.$$

С учётом соотношения (31.10)

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_y^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_y^2}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon E_y^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} E_y H_z = \frac{E_y H_z}{v}.$$

Тогда

$$dW = \frac{E_y H_z}{v} v dt dS_{\perp}, \quad P = \frac{E_y H_z dt dS_{\perp}}{dt dS_{\perp}} = E_y H_z;$$

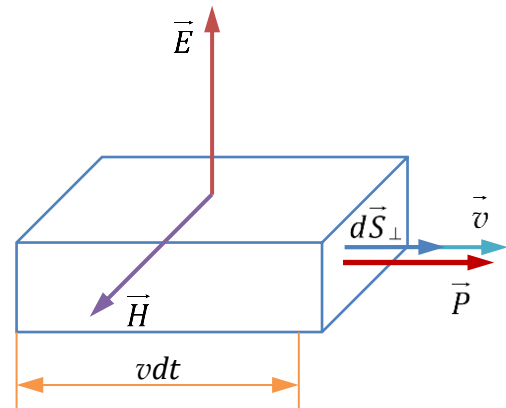


Рис. 32.2

$$\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$$

— **вектор Умова-Пойнтинга** — вектор плотности потока энергии. Вектор Умова-Пойнтинга сонаправлен скорости волны и волновому вектору, т. е. указывает направление переноса энергии.

**Интенсивность** электромагнитной волны — среднее по модулю значение плотности потока энергии за время, во много раз превышающее период колебаний:

$$I = \langle P \rangle = \langle E_y H_z \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \langle E^2 \rangle.$$

Для монохроматической волны

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \frac{E_0^2}{2}.$$

Интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуд напряжённостей электрического и магнитного полей.

### 3.14.4. Шкала электромагнитных волн

Самая грубая классификация электромагнитных волн по диапазону приведена в [ТАБЛ. 32.1](#). Длины волн указаны в вакууме.

Таблица 32.1

Шкала электромагнитных волн

Диапазон	Длина волны	Способ получения
Радиоволны	$> 5 \cdot 10^{-5}$ м	Излучение диполя, вибратор
Оптическое излучение: инфракрасное излучение видимый свет ультрафиолетовое излучение	1 мм ÷ 770 нм (770 ÷ 380) нм (380 ÷ 10) нм	Внутриатомные переходы
Рентгеновское излучение	(10 ÷ 100) нм – (0,01 ÷ 1) нм	Взаимодействие заряженных частиц с веществом
Гамма-излучение	$< 0,1$ нм	Радиоактивные превращения, ядерные реакции, распад частиц и т. п.

### 3.14.5. Отражение электромагнитной волны от идеального проводника

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется перпендикулярно поверхности раздела диэлектрика и проводника ([рис. 32.3](#)).

Введём обозначения — верхние индексы (для данного и [СЛЕДУЮЩЕГО](#) разделов):

0 — падающая волна;

i — отражённая волна;

r — преломлённая волна (прошедшая через границу раздела сред).

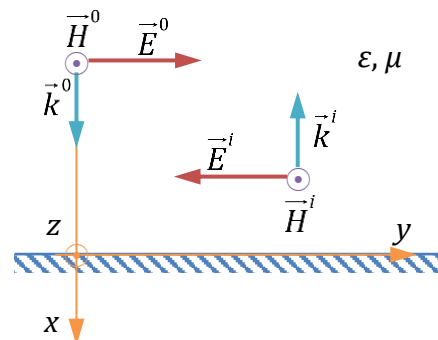


Рис. 32.3



По принципу суперпозиции полей напряжённость результирующего электрического поля в диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^i, \quad \vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^i.$$

Падающая волна:

$$\begin{cases} E_y^0(x, t) = E_m^0 \cos(\omega t - kx), \\ H_z^0(x, t) = H_m^0 \cos(\omega t - kx). \end{cases}$$

Так как  $H_z^0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_y^0,$

$$H_z^0(x, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^0 \cos(\omega t - kx).$$

Отражённая волна:

$$\begin{cases} E_y^i(x, t) = E_m^i \cos(\omega t + kx + \varphi), \\ H_z^i(x, t) = H_m^i \cos(\omega t + kx + \varphi); \end{cases}$$

$$H_z^i(x, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^i \cos(\omega t + kx + \varphi).$$

Здесь  $\varphi$  — разность фаз падающей и отражённой волн.

На границе проводника (при  $x = 0$ )

$$E_y(0, t) = 0. \quad (32.2)$$

Но

$$E_y(0, t) = E_y^0(0, t) + E_y^i(0, t) = E_m^0 \cos \omega t + E_m^i \cos(\omega t + \varphi).$$

Для того чтобы равенство (32.2) выполнялось при любых  $t$ , требуется

$$E_m^i = E_m^0, \quad \cos \omega t = -\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \omega t = \omega t + \varphi - \pi, \quad \varphi = \pi.$$

Отражённая волна отличается от падающей по фазе на  $\pi$ ;

$$E_y^i = E_m^0 \cos(\omega t + \pi) = -E_m^0 \cos \omega t.$$

Для любого  $x$

$$E_y(x, t) = E_y^0 + E_y^i = E_m^0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)].$$

Преобразуем это выражение по тригонометрической формуле

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]:$$

$$E_y(x, t) = 2E_m^0 \sin kx \sin \omega t \quad (32.3)$$

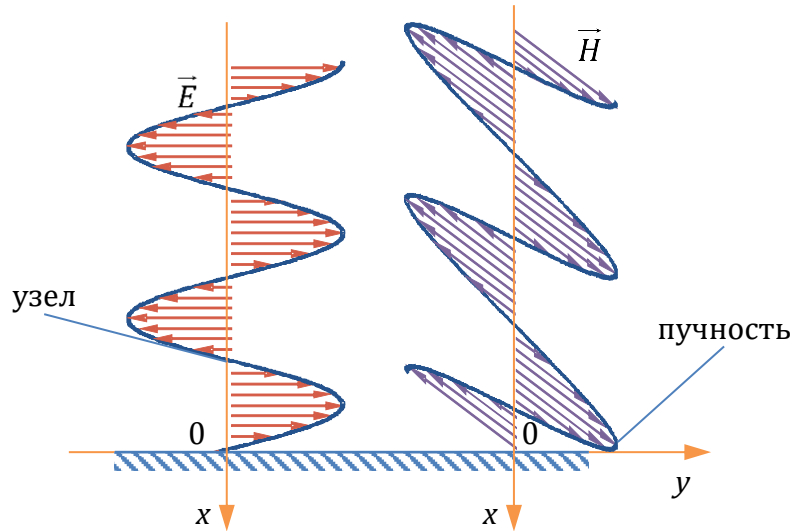
— *уравнение стоячей волны.*

Уравнение (32.3) описывает гармонические колебания, амплитуда которых  $2E_m^0 \sin kx$  определяется координатой. Перенос колебаний и энергии в пространстве отсутствует, поэтому эта волна (строго говоря, не являющаяся волной), называется *стоячей*. На поверхности проводника — при  $x = 0$  стоячая волна (32.3) имеет *узел* — точку, где амплитуда колебаний равна нулю (рис. 32.4).

Аналогично для напряжённости магнитного поля

$$\begin{aligned}
 H_z(x,t) = H_z^0 + H_z^i &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^0 [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] = \\
 &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^0 \cos kx \cos \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{32.4}$$

Это также уравнение стоячей волны, которая при  $x = 0$  имеет *пучность* — точку с максимальной амплитудой колебаний ([рис. 32.4](#))



**Рис. 32.4**

**Демонстрация:** Модель стоячей волны (в проекции)

## Лекция 33

## 3.14.6. Отражение и преломление электромагнитной волны на границе раздела диэлектриков

Скорость электромагнитных волн в среде меньше их скорости в вакууме:

$$n = \frac{c}{v}$$

— *абсолютный показатель преломления* среды;

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Для слабомангнитной среды  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Выразим длину волны в среде через длину волны  $\lambda_0$  в вакууме:

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi c}{n\omega} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

*Относительный показатель преломления* сред 1 и 2 (рис. 33.1)

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

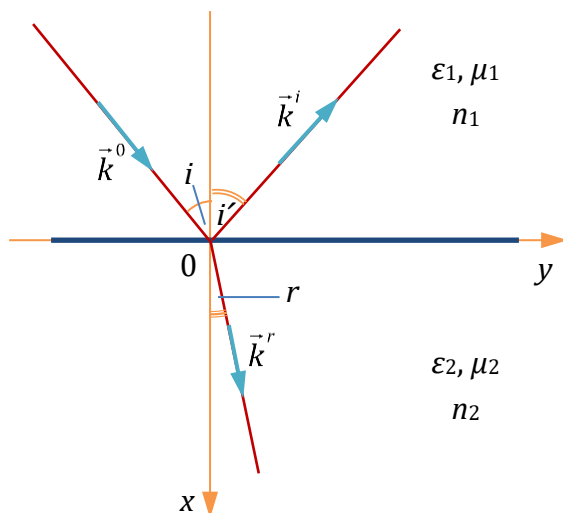


Рис. 33.1

Пусть электромагнитная волна падает на границу двух сред (относительные электрические и магнитные проницаемости  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$ ) под углом  $i$  — *углом падения*. Эта волна частично отражается от границы раздела сред под углом  $i'$  — *углом отражения*, а частично преломляется — проходит через границу раздела под углом  $r$  — *углом преломления* (рис. 33.1). Все углы отсчитываются от нормали к границе раздела сред.

**Луч** — прямая, сонаправленная волновому вектору. Луч перпендикулярен волновому фронту.

**Точка падения** — точка пересечения падающего луча с поверхностью раздела

сред.

**Плоскость падения** — плоскость, проходящая через падающий луч и перпендикулярная поверхности раздела сред в точке падения луча.

По принципу суперпозиции полей напряжённость электрического и магнитного полей в среде 1

$$\vec{E}_1 = \vec{E}^0 + \vec{E}^i, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}^0 + \vec{H}^i;$$

в среде 2

$$\vec{E}_2 = \vec{E}^r, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}^r.$$

Условия на границе раздела двух сред (при  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ):

$$\begin{cases} E_{\tau}^0 + E_{\tau}^i = E_{\tau}^r, \\ \varepsilon_1 (E_n^0 + E_n^i) = \varepsilon_2 E_n^r, \\ H_{\tau}^0 + H_{\tau}^i = H_{\tau}^r, \\ H_n^0 + H_n^i = H_n^r. \end{cases} \quad (33.1)$$

Законы отражения и преломления

1. Отражённый и преломлённый лучи лежат в плоскости падения.
2. Отражённая и преломлённая волны имеют ту же частоту, что и падающая волна:

$$\omega^0 = \omega^i = \omega^r.$$

3. Угол отражения равен углу падения:

$$i' = i.$$

4. **Закон Снеллиуса (закон преломления):**

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (33.2)$$

**Доказательство**

Уравнения волны для  $\vec{E}$ :

$$\begin{cases} \vec{E}^0 = \vec{E}_m^0 \cos(\omega^0 t - \vec{k}^0 \vec{r}), \\ \vec{E}^i = \vec{E}_m^i \cos(\omega^i t - \vec{k}^i \vec{r}), \\ \vec{E}^r = \vec{E}_m^r \cos(\omega^r t - \vec{k}^r \vec{r}). \end{cases}$$

Спроецируем первое из этих уравнений на направление касательной к границе раздела сред:

$$E_{\tau}^0 = E_{\tau m}^0 \cos(\omega^0 t - k_x^0 x - k_y^0 y) = E_{\tau m}^0 \cos\left(\omega^0 t - \frac{\omega^0 n_1}{c} x \cos i - \frac{\omega^0 n_1}{c} y \sin i\right).$$

Аналогично для тангенциальной составляющей отражённой волны получим

$$E_{\tau}^i = E_{\tau m}^i \cos\left(\omega^i t + \frac{\omega^i n_1}{c} x \cos i' - \frac{\omega^i n_1}{c} y \sin i'\right);$$

для тангенциальной составляющей преломлённой волны

$$E_{\tau}^r = E_{\tau m}^r \cos\left(\omega^r t - \frac{\omega^r n_2}{c} x \cos r - \frac{\omega^r n_2}{c} y \sin r\right).$$

Так как граничное условие  $E_{\tau}^0 + E_{\tau}^i = E_{\tau}^r$  должно выполняться для любых  $t$  и  $y$  при  $x = 0$ ,

$$\omega^0 = \omega^i = \omega^r = \omega,$$

$$i' = i,$$

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r,$$

Ч. Т. Д.

### 3.14.7. Формулы Френеля

Способом, аналогичным тому, как мы вывели законы отражения и преломления, можно получить и выражения для амплитуд поля в отражённой и преломлённой волне при известных амплитудах падающей волны. Соответствующие формулы — **формулы Френеля** — запишем для  $\vec{E}$  — **светового вектора**.

В падающей волне выделим **p-волну** — колебания  $\vec{E}$  в плоскости падения и **s-волну** — колебания  $\vec{E}$ , перпендикулярные плоскости падения. На **рис. 33.2А, Б** изображены направления  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в p- и s-волне.

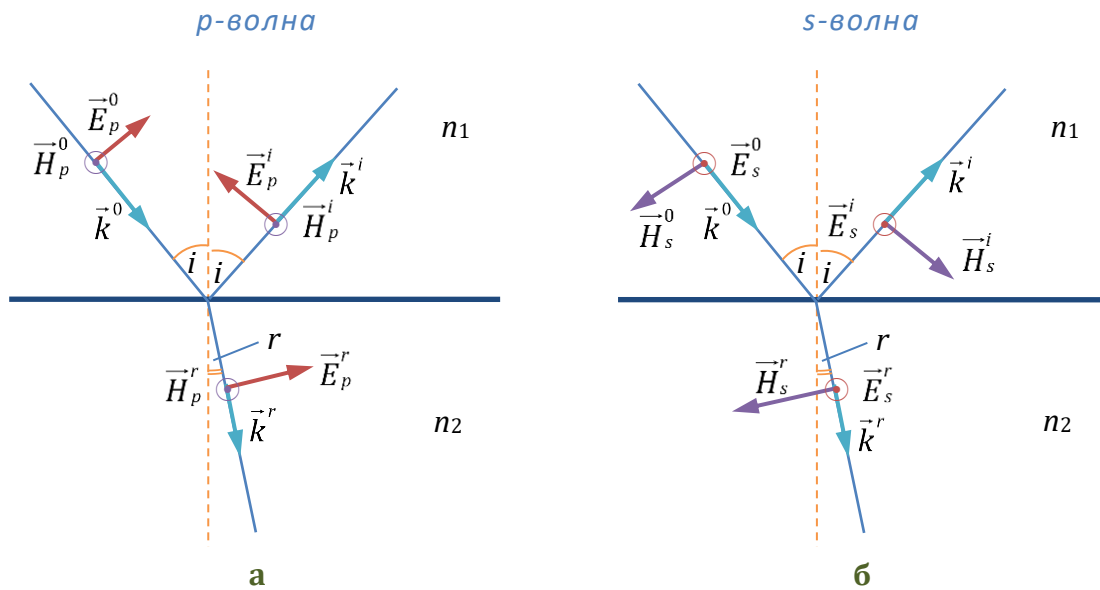


Рис. 33.2

Формулы Френеля

$$E_{pm}^i = -E_{pm}^0 \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \qquad E_{sm}^i = -E_{sm}^0 \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$$

$$E_{pm}^r = E_{pm}^0 \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \qquad E_{sm}^r = E_{sm}^0 \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)}$$

Амплитуды преломлённой волны  $E_{pm}^r, E_{sm}^r > 0$  при любых углах  $i$  и  $r$ . При  $i > r$  ( $n_1 < n_2$ )  $E_{pm}^i < 0$  и  $E_{sm}^i < 0$  — фаза отражённой волны отличается на  $\pi$  от фазы падающей. При этом фаза колебаний напряжённости магнитного поля не изменяется. При  $i < r$  — наоборот.

**Коэффициент отражения** — отношение интенсивности отражённой волны к интенсивности падающей волны:

$$\rho = \frac{I^i}{I^0} = \left( \frac{E_m^i}{E_m^0} \right)^2 \Rightarrow \rho_p = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)} \text{ и т. д.}$$

**Коэффициент пропускания** — отношение интенсивности преломлённой волны к интенсивности падающей волны:

$$\tau = \frac{I^r}{I^0} = \left( \frac{E_m^r}{E_m^0} \right)^2 \Rightarrow \tau_p = \frac{4 \cos^2 i \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} \text{ и т. д.}$$

Угол Брюстера

При  $i+r = \frac{\pi}{2}$   $E_{pm}^i = 0$  —  $p$ -волна не отражается. Из закона Снеллиуса (33.2):

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow n_1 \sin i = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - i \right) = n_2 \cos i ;$$

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

$i_{\text{Бр}}$  — *угол Брюстера*.

**Закон Брюстера:** при падении электромагнитной волны на поверхность раздела двух диэлектриков под углом Брюстера отражённая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения.

Полное внутреннее отражение

При  $\sin r = 1$  (отражённая волна направлена вдоль поверхности раздела сред)

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

при  $n_2 < n_1$ . При падении волны на поверхность раздела двух диэлектриков под углом, большим  $i_{\text{пр}}$  — *угла полного внутреннего отражения* — преломлённая волна отсутствует и всё излучение отражается.

**Демонстрации:** 1) Волновая машина со связями. Распространение поперечной волны  
2) Опыты Герца со звуковым или клистронным генератором (отражение, преломление, поляризация)

## III семестр

## Лекция 34

## 4. Волновая оптика

## 4.1. Интерференция электромагнитных волн

**Интерференция** — наложение (сложение) волн; устойчивое во времени перераспределение энергии в пространстве, которое наблюдается при сложении когерентных волн. В результате этого перераспределения возникает интерференционная картина, которая зачастую в оптике представляет собой чередование светлых и тёмных полос. Расчёт интерференционной картины сводится к сложению колебаний от волн, приходящих в данную точку от разных источников.

## 4.1.1. Интерференция волн от двух точечных источников. Когерентность

Пусть в пространстве имеются два источника гармонических колебаний  $S_1$  и  $S_2$  с циклическими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 34.1). Эти колебания распространяются в пространстве в виде монохроматических волн той же частоты. Волна от источника  $S_1$  достигнет точки  $M$  и вызовет в ней колебания той же частоты, но запаздывающие по фазе на величину, зависящую от расстояния  $S_1M = x_1$ . Аналогично, фаза волны от источника  $S_2$  будет зависеть от расстояния  $S_2M = x_2$ .

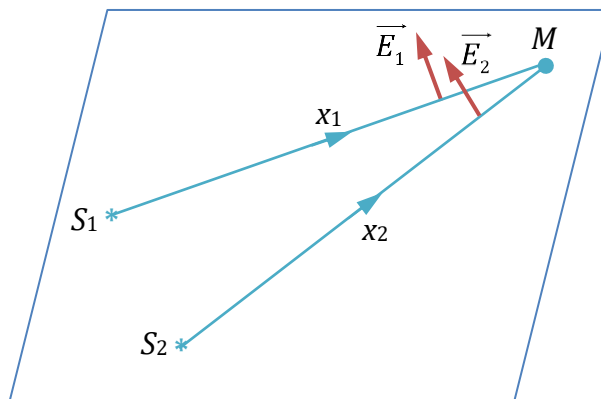


Рис. 34.1

Уравнения плоских бегущих монохроматических волн от источников  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\vec{E}_1(x_1, t) = \vec{E}_{01} \cos \left[ \omega_1 \left( t - \frac{x_1}{v} \right) + \varphi_{01} \right] = \vec{E}_{01} \cos \Phi_1,$$

$$\vec{E}_2(x_2, t) = \vec{E}_{02} \cos \left[ \omega_2 \left( t - \frac{x_2}{v} \right) + \varphi_{02} \right] = \vec{E}_{02} \cos \Phi_2,$$

где  $v$  — скорость распространения волны,  $t$  — время.

По принципу суперпозиции полей  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Результат интерференции

$$\vec{E} = \vec{E}_{01} \cos \Phi_1 + \vec{E}_{02} \cos \Phi_2. \quad (34.1)$$

Положим  $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ . Тогда уравнение (34.1) в проекции на направление колебаний  $\vec{E}$  (ось  $z$ ) даёт

$$E_z = E_{01} \cos \Phi_1 + E_{02} \cos \Phi_2;$$

$$E_z^2 = E^2 = E_{01}^2 \cos^2 \Phi_1 + E_{02}^2 \cos^2 \Phi_2 + 2E_{01}E_{02} \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \Phi_1 \cos \Phi_2.$$

Усредним это выражение по времени (намного превышающему период волны) и учтём, что интенсивность волны  $I \sim E_0^2$ :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 \rangle.$$

Так как  $\cos \Phi_1 \cos \Phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \cos(\Phi_1 + \Phi_2)]$ ,

$$\langle \cos(\Phi_1 \Phi_2) \rangle = \frac{1}{2} [\langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \rangle + \langle \cos(\Phi_1 + \Phi_2) \rangle];$$

$\cos(\Phi_1 + \Phi_2) = \cos \left[ (\omega_1 + \omega_2)t - \frac{\omega_1}{v}x_1 - \frac{\omega_2}{v}x_2 + \varphi_{01} + \varphi_{02} \right]$  осциллирует с циклической частотой  $(\omega_1 + \omega_2)$  и в среднем по времени равно нулю. Поэтому

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \rangle.$$

При  $\Phi_1 - \Phi_2 \neq \text{const}$

$$I = I_1 + I_2.$$

При  $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$

$$I \neq I_1 + I_2.$$

Волны, разность фаз которых постоянна во времени ( $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$ ), называются **когерентными**.

Условие когерентности  $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$  эквивалентно двум условиям:

- 1)  $\omega_1 = \omega_2$  — волны *монохроматичны* (одноцветны),
- 2)  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \text{const}$  — разность начальных фаз не зависит от времени.

При  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  (с учётом того, что  $\frac{\omega}{v} = k$  — волновое число)

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \cancel{\omega t} - \frac{\omega}{v}x_1 + \varphi_{01} - \cancel{\omega t} + \frac{\omega}{v}x_2 - \varphi_{02} = k(x_2 - x_1) + \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

**Геометрическая разность хода** волн

$$\Delta = x_2 - x_1.$$

При  $\varphi_{02} = \varphi_{01}$   $\Phi_1 - \Phi_2 = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ , где  $\lambda$  — длина волны.

Если волна распространяется в веществе, то скорость распространения волны  $v = \frac{c}{n}$ ;  $n$  — показатель преломления среды;

$$k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c},$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = n \frac{\omega}{c} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi n \Delta}{\lambda}, \quad (34.2)$$

здесь  $\lambda$  — длина волны в вакууме.

**Оптическая разность хода** волн



$$\delta = n(x_2 - x_1).$$

Если волны от источников  $S_1$  и  $S_2$  распространяются в разных средах с показателями преломления, соответственно равными  $n_1$  и  $n_2$ , то оптическая разность хода будет равна

$$\delta = n_2 x_2 - n_1 x_1.$$

Разность фаз при распространении интерферирующих волн в среде

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta.$$

При интерференции когерентных волн максимум интенсивности наблюдается при  $\cos(\Phi_1 - \Phi_2) = 1$ , а минимум — при  $\cos(\Phi_1 - \Phi_2) = -1$  (см. [ТАБЛ. 34.1](#)).

**Таблица 34.1**

*Условия максимумов и минимумов при интерференции двух когерентных волн*

	$\cos(\Phi_1 - \Phi_2)$	$\Phi_1 - \Phi_2$	$\delta$ (при $\varphi_{02} = \varphi_{01}$ )
Максимум	1	$2\pi m$	$m\lambda$
Минимум	-1	$(2m + 1)\pi$	$(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$

Здесь  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — целое число.

Волны, испускаемые различными источниками, не являются когерентными (см. [4.1.4](#)). Ниже, в [РАЗДЕЛАХ 4.1.2](#) и [4.1.3](#), рассмотрены основные способы получения когерентных волн.

#### 4.1.2. Схема Юнга

Когерентные источники можно получить, разделив волновой фронт на два. В этом и состоит смысл схемы Юнга, которую поясним на различных её вариантах.

#### ПРИМЕРЫ

##### 1) Опыт Юнга

Перед точечным источником  $S$  ставят непрозрачный экран с двумя щелями  $S_1$  и  $S_2$  ([РИС. 34.2](#)). При соблюдении условий когерентности (см. [4.1.4](#)) щели  $S_1$  и  $S_2$  являются когерентными источниками, так как их излучение — это излучение в различных участках фронта волны, испускаемой одним источником  $S$ . Результат интерференции — *интерференционная картина* — наблюдается на экране  $\mathcal{E}$  в области, где излучение источников  $S_1$  и  $S_2$  перекрывается — *области интерференции*; точка  $M$  на [РИС. 34.2](#) — одна из точек в этой области.

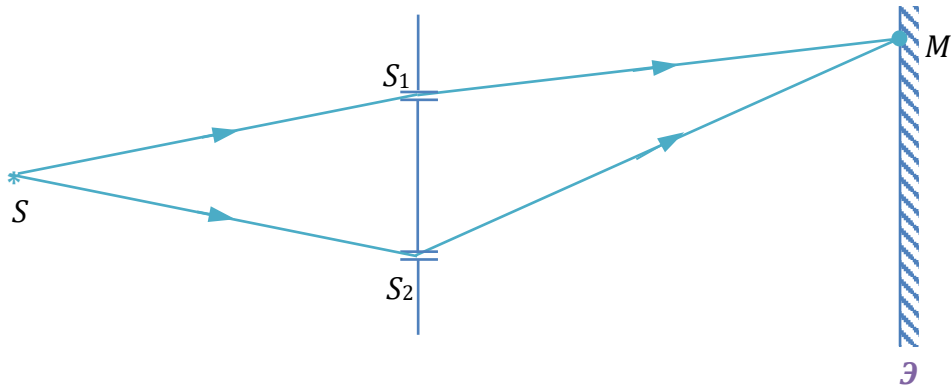


Рис. 34.2

## 2) Бипризма Френеля

Между точечным источником (или щелью)  $S$  и экраном  $\mathcal{E}$  ставят **бипризму Френеля** — стеклянный оптический прибор, склеенный из двух одинаковых призм с очень малым преломляющим углом  $\beta$  (рис. 34.3). Благодаря преломлению волн, излучаемых источником  $S$ , в обеих половинах бипризмы получают два мнимых источника  $S_1$  и  $S_2$  — изображения источника  $S$ . Источники  $S_1$  и  $S_2$ , так как они «сделаны» из одного источника  $S$ , можно считать когерентными. Малость угла  $\beta$  необходима для соблюдения условий когерентности (см. 4.1.4).

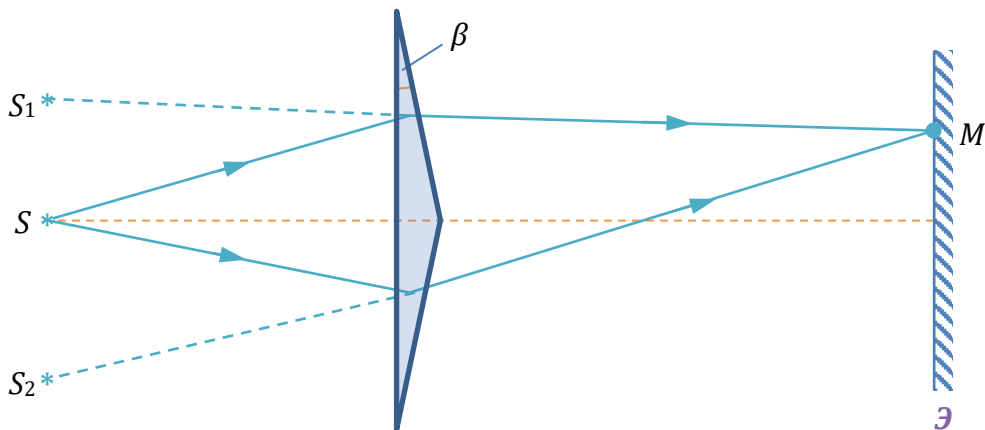


Рис. 34.3

**Демонстрация:** Бипризма Френеля

## 3) Зеркало Ллойда

Точечный источник (или щель)  $S$  расположен перед плоским зеркалом  $\mathcal{Z}$ , в котором получается мнимое изображение источника —  $S'$  (рис. 34.4). Действительный источник  $S$  и мнимый источник  $S'$  когерентны. В поле интерференции этих источников помещается экран  $\mathcal{E}$ , на котором наблюдается интерференционная картина.

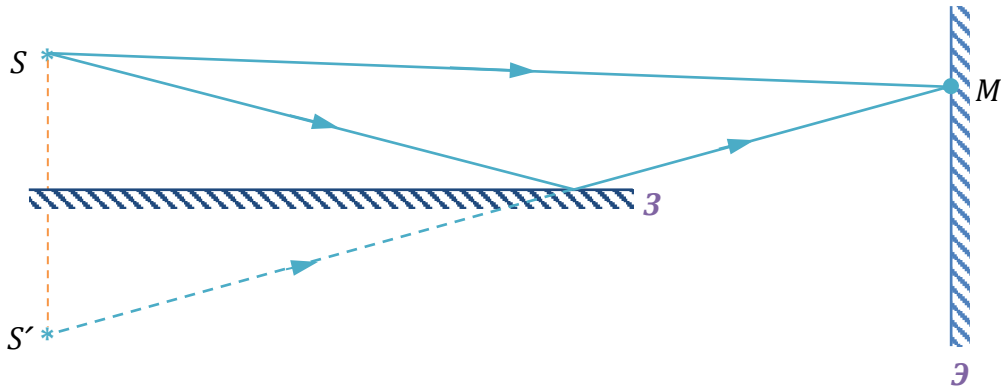


Рис. 34.4

Найдём условия интерференционных минимумов и максимумов при интерференции излучения двух когерентных источников, полученных по схеме Юнга.

Пусть расстояние между когерентными монохроматическими точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$  (длина волны излучения  $\lambda$ ) равно  $d$ , а расстояние от источников до экрана  $\mathcal{E}$  равно  $L \gg d$  (рис. 34.5). Среда — воздух ( $n = 1$ ). Найдём разность фаз  $\Phi_2 - \Phi_1$  интерферирующих волн в точке  $M$  на экране  $\mathcal{E}$ , находящейся на расстоянии  $y$  от оси симметрии системы.

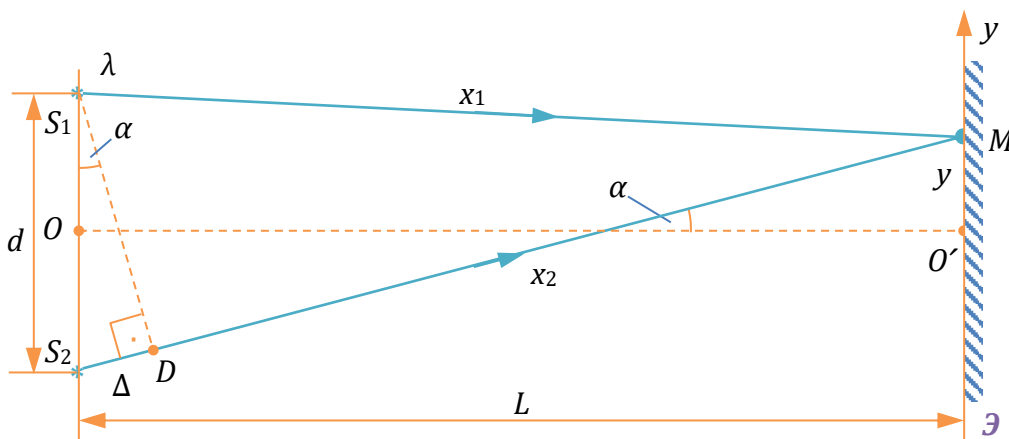


Рис. 34.5

Будем считать начальные фазы волн, испускаемых источниками  $S_1$  и  $S_2$ , одинаковыми:  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ . Тогда по формуле (34.2) разность фаз волн от источников  $S_1$  и  $S_2$ , приходящих в точку  $M$ ,

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1)$$

(здесь  $x_1 = S_1M$ ,  $x_2 = S_2M$  на рис. 34.5);

$$\Delta = S_2D = d \sin \alpha = d \cdot \alpha,$$

так как угол  $\alpha$  мал из-за того, что  $L \gg d$ . Угол  $\alpha$  найдём из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y + \frac{d}{2}}{L} = \frac{y}{L} = \alpha,$$

так как расстояние  $y = O'M \gg d$ . Получим

$$\Delta = \frac{d \cdot y}{L}.$$

Условие интерференционных максимумов

$$\delta = \Delta = m\lambda \Rightarrow y_{\max} = \frac{m\lambda L}{d};$$

условие минимумов

$$\delta = \Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow y_{\min} = \frac{(2m+1)\lambda L}{2d}.$$

**Ширина интерференционной полосы** — расстояние между соседними интерференционными максимумами или минимумами. В схеме Юнга она одинакова по всему полю интерференции и равна

$$Y = \frac{\lambda L}{d}.$$

Интерференционная картина представляет собой чередование светлых и тёмных полос одинаковой ширины  $\frac{Y}{2}$ .

#### 4.1.3. Интерференция в тонких плёнках

Волна от некогерентного источника может разделяться на когерентные волны через отражение и преломление на границах раздела сред, расположенных настолько близко друг от друга, чтобы соблюдались условия когерентности (4.1.4). Рассмотрим три варианта данной схемы.

##### 1. Плоскопараллельная пластинка

Пусть плоская волна длиной  $\lambda$  падает из воздуха ( $n = 1$ ) на плоскопараллельную пластинку толщиной  $h$ , состоящую из вещества с показателем преломления  $n$ , под углом  $i$  (рис. 34.6). На первой границе раздела сред (в точке  $A$ ) падающая волна  $0$  частично отражается (волна  $1$ ), а частично — преломляется (волна  $2$ ) и проходит через границу. Затем волна  $2$  частично отражается от второй границы раздела сред — нижней стороны пластинки в точке  $B$ , падает на верхнюю сторону пластинки и проходит через неё, преломляясь, в точке  $C$ . Волны  $1$  и  $2$  когерентны, так как образованы из одной падающей волны  $0$  (если толщина пластинки не слишком велика, см. РАЗДЕЛ 4.1.4).

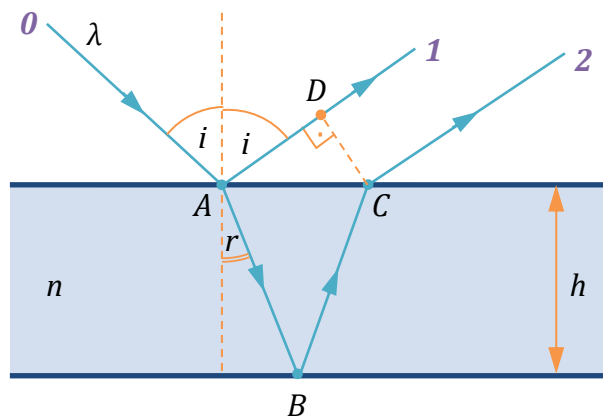


Рис. 34.6

Оптическая разность хода волн  $1$  и  $2$

$$\delta = n(AB + BC) - AD + \frac{\lambda}{2}.$$

Слагаемое  $\frac{\lambda}{2}$  появляется здесь потому, что волна **1** отражается в воздух от оптически более плотной среды — вещества пластинки (см. [РАЗДЕЛ 3.14.7](#)). Найдём длины всех отрезков, входящие в эту формулу:

$$AB = BC = \frac{h}{\cos r}, \quad AD = AC \sin i = 2htgr \sin i.$$

Углы падения  $i$  и преломления  $r$  связаны по закону Снеллиуса

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n},$$

отсюда

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}, \quad tgr = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\sin i}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}};$$

$$\delta = n \frac{2h}{\cos r} - 2htgr \sin i + \frac{\lambda}{2} = \frac{2hn}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} - \frac{2h \sin^2 i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} + \frac{\lambda}{2},$$

$$\delta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}.$$

Если осветить плёнку белым (немонохроматическим) светом, то она будет окрашена в цвет, для длины волны, соответствующей которому, при данной оптической разности хода будет выполняться условие интерференционных максимумов. Если плёнка имеет переменную толщину, то она будет окрашена в разные цвета.

## 2. Тонкий клин

На клин с малым углом  $\beta$  нормально падает свет с длиной волны  $\lambda$ . Клин сделан из материала с показателем преломления  $n$  ([РИС. 34.7](#)).

На верхней поверхности клина падающая волна **0** разделяется на две: отражённую волну **1** и прошедшую волну **2**. Волна **2** частично отражается от нижней поверхности клина, падает на верхнюю поверхность и проходит сквозь неё. Если толщина клина  $h$  не слишком велика, то волны **1** и **2** когерентны. (Так как угол  $\beta$  мал, все отражённые и преломлённые волны направлены по нормали к поверхностям клина. На [РИС. 34.7](#) лучи **0**, **1** и **2** изображены отдельно, на самом деле они проходят через одни и те же точки.)

Интерференционная картина на поверхности клина представляет собой чередование тёмных и светлых полос, параллельных ребру клина. Ширина полосы

$$Y = \frac{\lambda}{2n\beta}$$

(доказать *самостоятельно*).

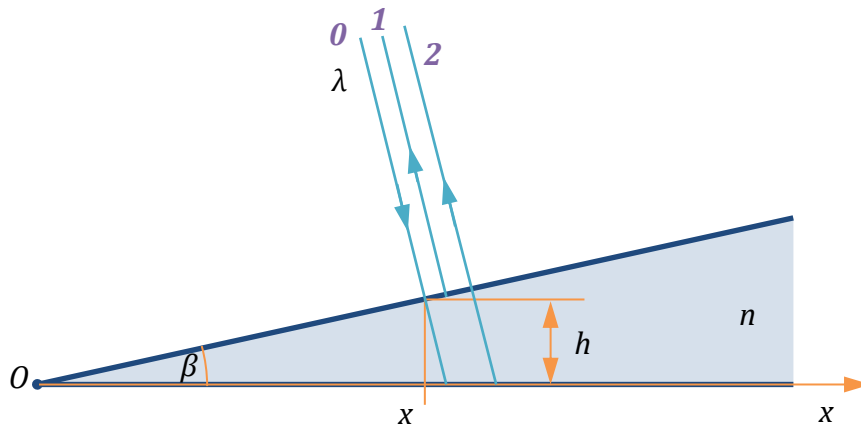


Рис. 34.7

### 3. Кольца Ньютона

Плоско-выпуклая линза (радиус выпуклой поверхности  $R$ ) лежит на плоской стеклянной пластинке. Система освещается светом с длиной волны  $\lambda$  так, как показано на [рис. 34.8](#). Волна  $0$ , падающая на сферическую поверхность линзы, разделяется на две волны: отражённую  $1$  и прошедшую  $2$ . Волна  $2$ , в свою очередь, частично отражается от верхней поверхности плоской пластинки, а затем проходит сквозь сферическую поверхность линзы. Если толщина воздушного зазора между линзой и пластинкой не слишком велика, то волны  $1$  и  $2$  когерентны. Эти волны затем собираются (например, оптической системой микроскопа) и дают интерференционную картину, имеющую вид концентрических колец.

Оптическая разность хода волн  $1$  и  $2$

$$\delta = 2h + \frac{\lambda}{2},$$

где  $h$  — толщина воздушного зазора между линзой и пластинкой. Дополнительная разность хода  $\frac{\lambda}{2}$  появляется за счёт отражения волны  $2$  от оптически более плотной среды. Выразим  $h$  через расстояние  $r$  от вершины линзы:

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = R \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right];$$

так как  $r \ll R$ ,

$$h = R \left( \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{r^2}{2R^2} \right) = \frac{r^2}{2R};$$

$$\delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Условие интерференционных максимумов (светлых колец):

$$\delta = m\lambda, \quad r_m = \sqrt{\frac{(2m-1)\lambda R}{2}}$$

— радиус  $m$ -го светлого кольца;  $m = 1, 2, \dots$

Условие интерференционных минимумов (*тёмных колец*):

$$\delta = \frac{(2m+1)\lambda}{2}, \quad r_m = \sqrt{m\lambda R}$$

— радиус  $m$ -го тёмного кольца;  $m = 1, 2, \dots$

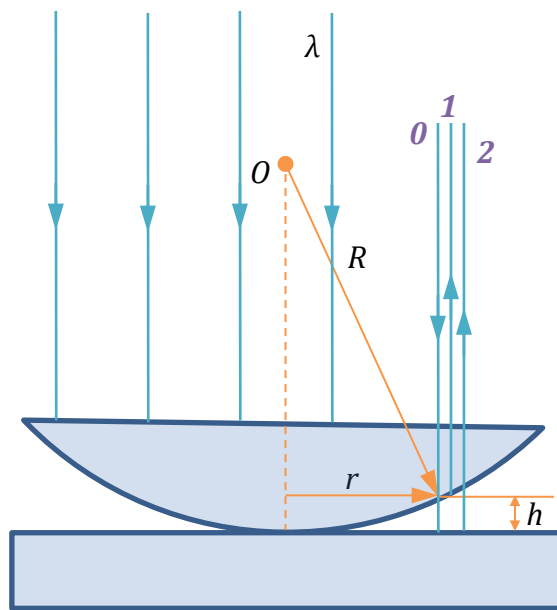


Рис. 34.8

В центре интерференционной картины наблюдается тёмное пятно (при  $h = 0$   $\delta = \frac{\lambda}{2}$  — интерференционный минимум), ограниченное первым светлым кольцом.

**Демонстрация:** Интерференция в тонких плёнках

Все рассмотренные выше схемы получения когерентных волн можно реализовать и *в проходящем свете*: падающая волна проходит через первую поверхность тонкой плёнки, отражается от второй, а затем от первой, наконец, проходит через вторую поверхность.

#### 4.1.4. Пространственная и временная когерентность

Реальная электромагнитная волна, излучаемая в течение конечного промежутка времени, не является монохроматической. Спектр её циклических частот имеет конечную ширину  $\Delta\omega$ . Такую волну можно считать монохроматической в течение времени

$$\Delta t \leq \tau_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\Delta\omega}, \quad (34.3)$$

$\tau_{\text{ког}}$  — **время когерентности**. Волна с циклической частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $v$  распространяется за это время на расстояние

$$l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}} = \frac{\pi v}{\Delta\omega}, \quad (34.4)$$

$l_{\text{ког}}$  — *длина когерентности (длина гармонического цуга)*.

**ПРИМЕР**

Для видимого солнечного света с частотой  $\nu = (4 \cdot 10^{14} \div 8 \cdot 10^{14})$  Гц  $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-14}$  с,  $l_{\text{ког}} \sim 10^{-6}$  м.

Пусть длины волн лежат в пределах от  $\lambda$  до  $\lambda \pm \Delta\lambda$ , а циклические частоты — от  $\omega$  до  $\omega \pm \Delta\omega$ ;

$$\Delta\omega = \frac{2\pi\nu\Delta\lambda}{\lambda^2}, \quad (34.5)$$

так как  $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}$ ,  $\omega = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$ .

**Критерий Рэля:** интерференционная картина остаётся ещё различимой до максимумов порядка  $m_0$  для света с длиной волны  $\lambda + \Delta\lambda$  ( $\Delta\lambda > 0$ ), который накладывается на ближайший к нему минимум для света с длиной волны  $\lambda$ .

Выразим  $m_0$ :

$$m_0(\lambda + \Delta\lambda) = (2m_0 + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow m_0 = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

Соответствующая критерию Рэля оптическая разность хода интерферирующих волн, т. е. оптическая разность хода, при которой интерференционная картина различима,

$$\delta \leq m_0\lambda = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = \frac{\pi v}{\Delta\omega} = v\tau_{\text{ког}} = l_{\text{ког}}.$$

Таким образом мы вывели формулы (34.3) и (34.4), выразив  $\Delta\lambda$  через  $\Delta\omega$  из (34.5).



## Лекция 35

### 4.2. Дифракция электромагнитных волн

**Дифракция** — совокупность явлений, связанных с поведением волны на неоднородностях среды, в которой волна распространяется.

Любое изображение имеет дифракционную природу: электромагнитные волны взаимодействуют с каким-либо объектом (*предметом*), нарушающим оптическую однородность среды, а затем поступают в приёмник, в котором создаётся изображение этого предмета.

Для расчёта дифракционной картины нужно записать волновое уравнение и решить его с учётом граничных условий. Так как решение этого уравнения в общем случае весьма сложно, разработаны приближённые методы расчёта дифракционной картины.

#### 4.2.1. Принцип Гюйгенса–Френеля

1. Любая точка пространства, до которой доходит волна, становится источником вторичных сферических волн. Огибающая этих волн даёт новое положение фронта волны.
2. Вторичные источники когерентны друг другу.
3. Амплитуда волн, испускаемых вторичными источниками, пропорциональна площади поверхности этих источников.
4. Вторичные источники излучают преимущественно в направлении распространения волны. Обратного излучения нет.

*Дифракционная картина* — результат интерференции волн, испускаемых бесконечным числом вторичных источников.

#### 4.2.2. Метод зон Френеля. Дифракция на одной щели

Пусть на щель шириной  $b$  в непрозрачном экране падает по нормали плоская монохроматическая волна (длина волны  $\lambda$ ). За щелью расположена собирающая линза  $L$ , фокусирующая излучение, прошедшее через щель, на экране  $\mathcal{E}$ , находящемся в фокальной плоскости линзы (рис. 35.1). Положим  $b \ll L$ , где  $L$  — расстояние между щелью и линзой. Излучение, выходящее из щели под углом  $\varphi$  к оси системы (к нормали к плоскости щели и экранам), собирается в точке  $M$  на экране  $\mathcal{E}$ .

Волны, приходящие в точку  $M$  из разных точек щели, когерентны, поэтому в результате интерференции они могут либо усиливать, либо ослаблять друг друга. Проблема качественного анализа дифракционной картины и расчёта интенсивности света решается *методом зон Френеля*.

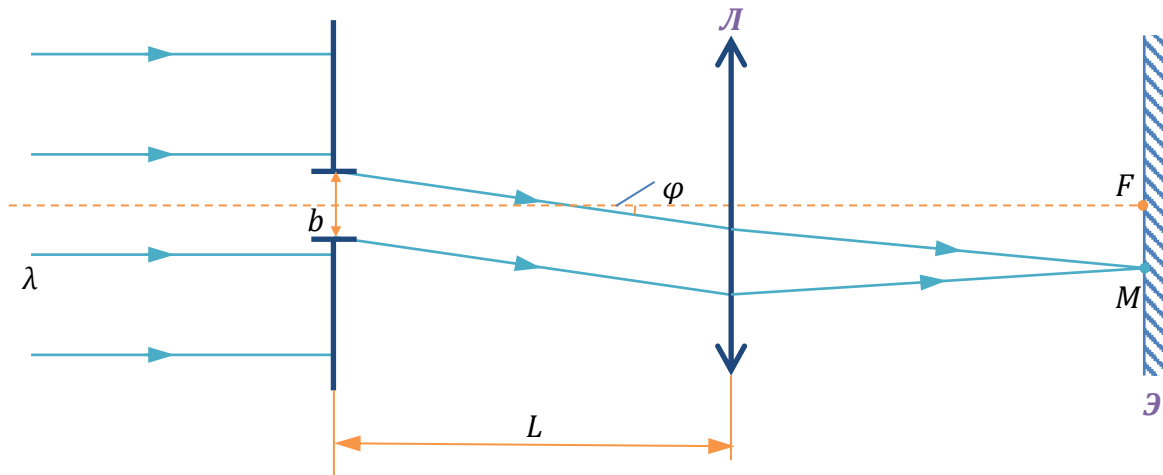


Рис. 35.1

**Зона Френеля** — область волнового фронта, такая, что разность фаз волн, испускаемых вторичными источниками на границах этой области, равна  $\pi$  (разность хода  $\frac{\lambda}{2}$ ). Таким образом, излучение от соседних зон Френеля взаимно гасится.

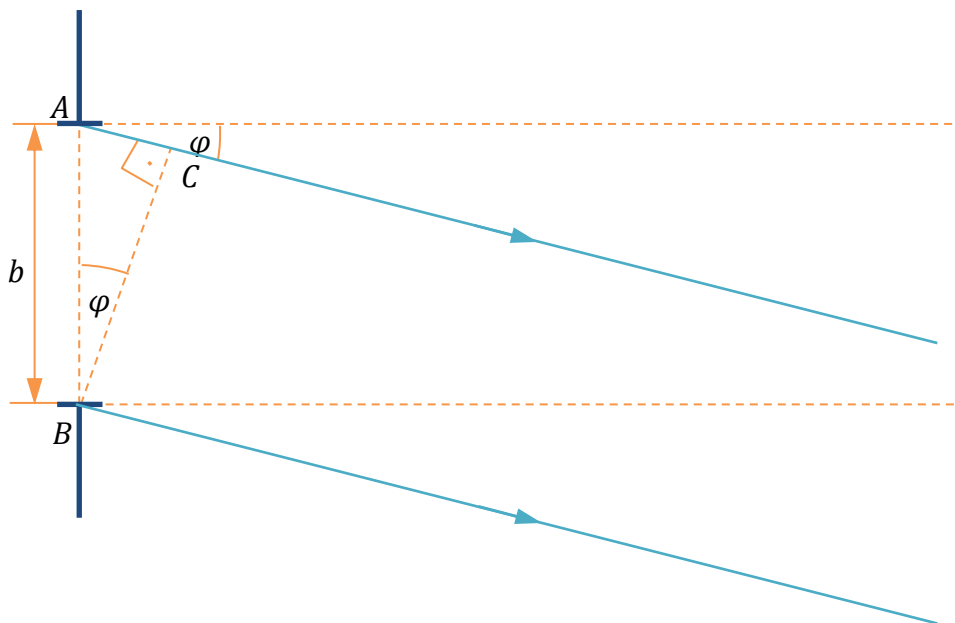


Рис. 35.2

Построим зоны Френеля для прямоугольной щели шириной  $b$ . Оптическая разность хода между волнами, идущими под углом  $\varphi$  к оси системы из крайних точек щели,

$$\delta = AC = b \sin \varphi$$

(рис. 35.2). Число зон Френеля, которые помещаются на щели,

$$n = \frac{AC}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2b \sin \varphi}{\lambda}.$$

Зоны Френеля для щели имеют форму полос шириной  $\frac{\lambda}{2\sin\varphi}$ . Соответственно, площади всех зон одинаковы. Поэтому амплитуды волн, испускаемых каждой зоной, также одинаковы:

$$E_1 = E_2 = \dots = E_n = E.$$

Амплитуда результирующего колебания в точке  $M$ , по принципу суперпозиции полей, складывается из амплитуд колебаний, посылаемых всеми зонами, с учётом направления светового вектора. Так как волны из соседних зон приходят в противофазе, то соответствующие световые векторы направлены противоположно друг другу и их проекции (амплитуды соответствующих колебаний) суммируются с разными знаками:

$$E_{\Sigma} = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots \pm E_n.$$

Для нечётного числа зон Френеля  $E_{\Sigma} = E$ , для чётного числа зон  $E_{\Sigma} = 0$ . Получается, что если щель открывает нечётное число зон Френеля, то в точке  $M$  наблюдается интерференционный максимум, а если чётное — то минимум.

При чётном  $n$

$$\frac{2b\sin\varphi}{\lambda} = 2m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$b\sin\varphi = m\lambda$$

— *условие минимумов при дифракции света на щели.*

При нечётном  $n$

$$\frac{2b\sin\varphi}{\lambda} = 2m + 1;$$

$$b\sin\varphi = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$$

— *условие максимумов при дифракции света на щели.*

Можно вывести формулу для распределения интенсивности при дифракции света на щели

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)^2}, \quad (35.1)$$

где  $I_0$  — интенсивность волны, падающей на щель. График зависимости  $I(\alpha)$  представлен на [рис. 35.3](#).

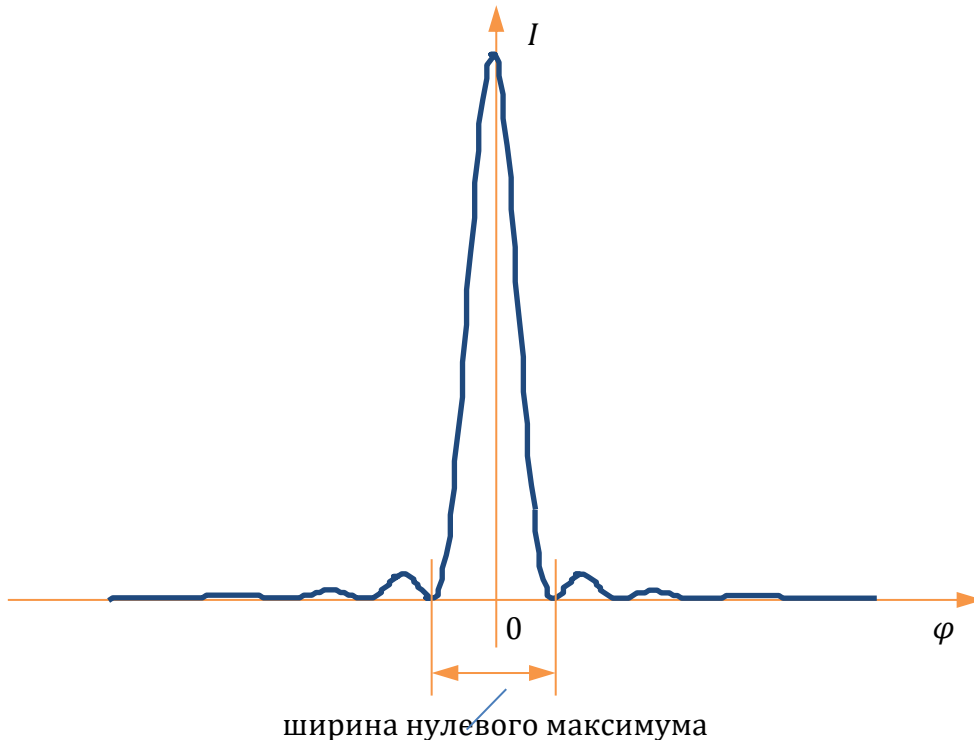


Рис. 35.3

**Демонстрация:** Дифракция от щели

#### 4.2.3. Дифракционная решётка

**Дифракционная решётка** — периодическая структура, состоящая из прозрачных и непрозрачных участков (рис. 35.4).

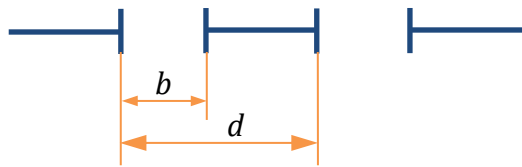


Рис. 35.4

На рис. 35.4  $b$  — ширина щели,  $d$  — **период (постоянная) решётки**.

Пусть на решётку нормально падает плоская монохроматическая волна (длина волны  $\lambda$ ). Происходит дифракция электромагнитной волны на щелях: согласно принципу Гюй-

генса-Френеля, каждая точка щели является источником сферических вторичных волн. За решёткой располагается линза  $L$ . В фокальной плоскости линзы расположен экран  $\mathcal{E}$ , на котором наблюдается дифракционная картина. Расстояние от решётки до линзы и экрана много больше периода решётки. Волны, выходящие из решётки под углом  $\varphi$ , фокусируются на экране в точке  $M$  (рис. 35.5).

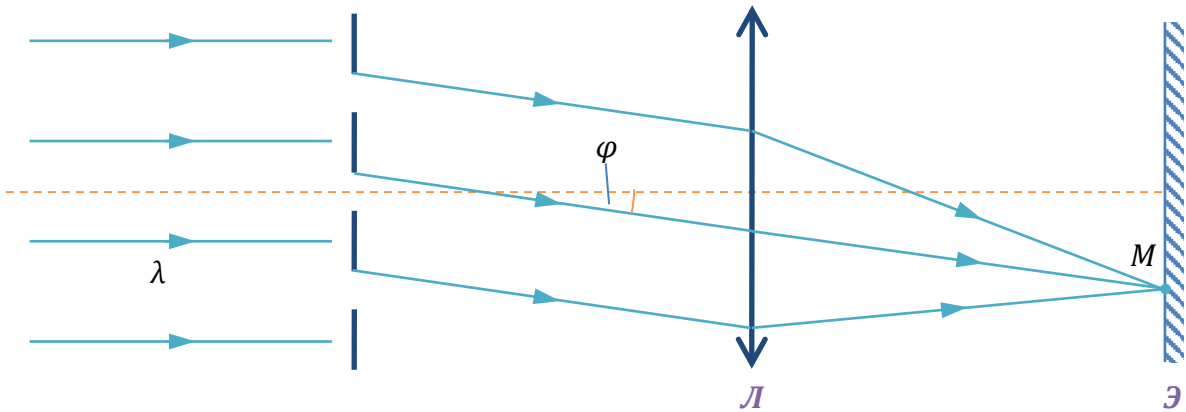


Рис. 35.5

Проанализируем, какая картина будет наблюдаться на экране Э.

1. Волны, исходящие от *сходственных точек* всех щелей (рис. 35.6), будут усиливать друг друга, если их разность хода

$$\Delta = m\lambda,$$

$m$  — целое число. В соответствующих точках на экране будут наблюдаться *главные дифракционные максимумы*.

*Условие главных максимумов:*

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — *порядок спектра*.

2. *Главные минимумы* соответствуют углам дифракции, в направлении которых каждая щель не посылает свет:

$$b \sin \varphi = k\lambda,$$

$k = \pm 1, \pm 2, \dots$  Это условие минимумов при дифракции света на одной щели.

3. *Побочные минимумы* соответствуют углам дифракции, в направлении которых каждая щель посылает свет, но в совокупности амплитуда колебаний равна нулю:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{z}{N} \lambda,$$

$z = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1, N + 2, \dots$ ;  $N$  — полное число штрихов (периодов) решётки.

4. Между побочными минимумами расположены *побочные максимумы*.

Интенсивность волны, дифрагированной на решётке под углом  $\varphi$ ,

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\left( \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi N d \sin \varphi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}}, \quad (35.2)$$

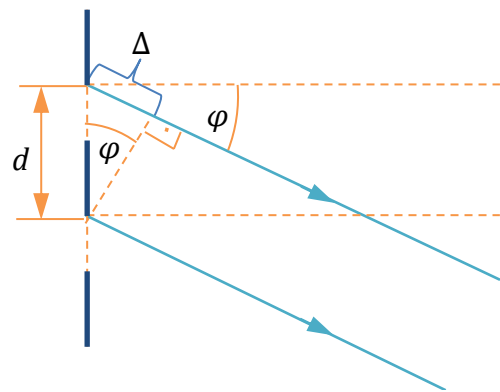


Рис. 35.6

где  $I_0$  — интенсивность падающей волны. График зависимости  $I(\varphi)$  представлен на [рис. 35.7](#). Красной штриховой линией изображён график зависимости интенсивности света от угла дифракции  $\varphi$  при дифракции на одной щели [\(35.1\)](#)<sup>78</sup>.

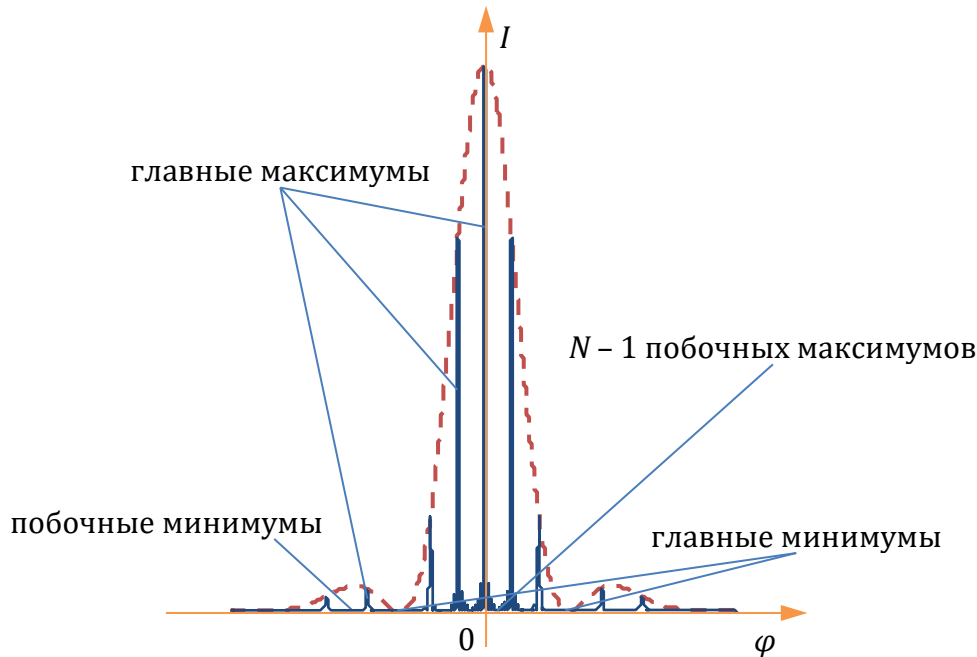


Рис. 35.7

Амплитуда напряжённости электрического поля в главных максимумах равна сумме амплитуд волн, излучаемых каждой щелью по отдельности,

$$E_{\Sigma} = E_1 + E_2 + \dots + E_N = NE_1,$$

а интенсивность света пропорциональная квадрату амплитуды колебаний:

$$I = N^2 I_1,$$

где  $I_1$  — интенсивность света от одной щели. Чем больше число щелей в решётке, тем больше интенсивности приходится на главные максимумы и меньше — на побочные. В монохроматическом свете дифракционная картина выглядит следующим образом: яркие тонкие линии — главные максимумы на тёмном фоне.

Дифракционная решётка (наряду с [ПРИЗМОЙ](#)) служит основой спектральных приборов. Если осветить решётку немонахроматическим светом, то свет разлагается в спектр.

**Демонстрация:** Дифракционные решётки

#### 4.2.4. Дифракция на круглом отверстии

Пусть точечный источник  $S$  излучает сферические монохроматические волны (длина волны  $\lambda$ ). На расстоянии  $a$  от источника расположена ширма с круглым отверстием, а на расстоянии  $b$  от ширмы — экран, где наблюдается дифракционная картина ([рис. 35.8](#)). Радиус отверстия  $R \ll a, b$ .

<sup>78</sup> График функции [\(35.1\)](#) на [рис. 35.7](#) изображён так, что он является огибающей графика функции [\(35.2\)](#) (при той же ширине  $b$  щели). На самом деле при одинаковой интенсивности  $I_0$  падающего света площади под обоими графиками должны пропорциональны суммарной площади щелей, так как дифракция приводит лишь к перераспределению энергии электромагнитного поля в пространстве, но не изменяет её суммарного значения.

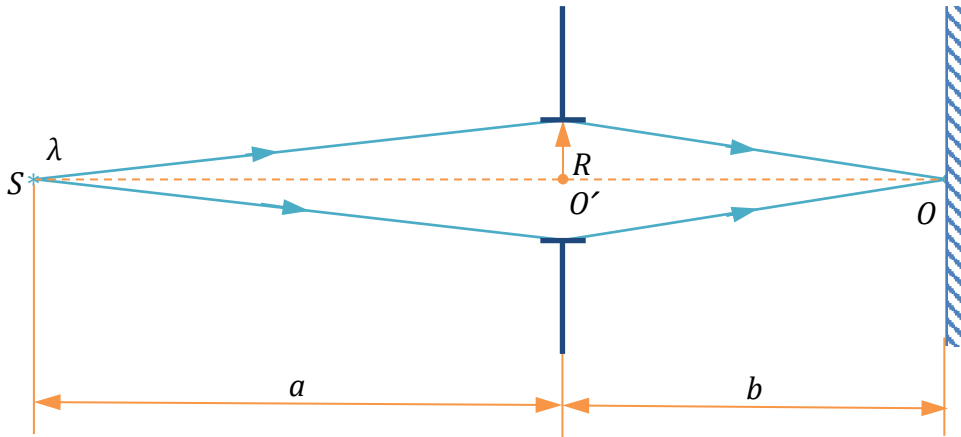


Рис. 35.8

Дифракционная картина будет иметь вид светлых и тёмных концентрических колец. Разберёмся, что будет в центре картины — точке  $O$  — минимум или максимум интенсивности?

Разобьём волновой фронт в отверстии на зоны Френеля. Они будут иметь вид колец с центром в точке  $O'$  — центре отверстия (рис. 35.9). Легко показать, что радиус  $m$ -ой зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}. \quad (35.3)$$

Если отверстие открывает чётное число зон Френеля, то в точке  $O$  будет наблюдаться дифракционный минимум, если нечётное — то максимум. Из (35.3) следует, что площади всех зон Френеля одинаковы:

$$S_1 = S_2 = \dots = S_n,$$

где  $n$  — число зон Френеля, открываемых отверстием. По принципу Гюйгенса–Френеля амплитуды колебаний, приходящих в точку  $O$  из всех зон Френеля, одинаковы:

$$E_1 = E_2 = \dots = E_n.$$

Однако, с ростом порядкового номера  $m$  зоны Френеля увеличивается угол между нормалью к волновому фронту и направлением на точку  $O$ , поэтому  $E_1 > E_2 > \dots > E_n$ .

Можно считать, что  $E_m \approx \frac{E_{m-1} + E_{m+1}}{2}$ .

Суммарная амплитуда колебаний в точке  $O$  при полностью открытом волновом фронте (при отсутствии ширмы)

$$E_{\Sigma} = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - \dots = \frac{E_1}{2} + \left( \frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \left( \frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2} \right) + \dots = \frac{E_1}{2},$$

Мы доказали, что свет распространяется прямолинейно — в точку наблюдения приходит свет из половины первой зоны Френеля.

Если закрыть все зоны Френеля, кроме первой, то амплитуда колебаний в точке  $O$  будет равна  $E_1$ , а интенсивность света

$$I_1 = 4I_0,$$

где  $I_0$  — интенсивность света при полностью открытом волновом фронте.

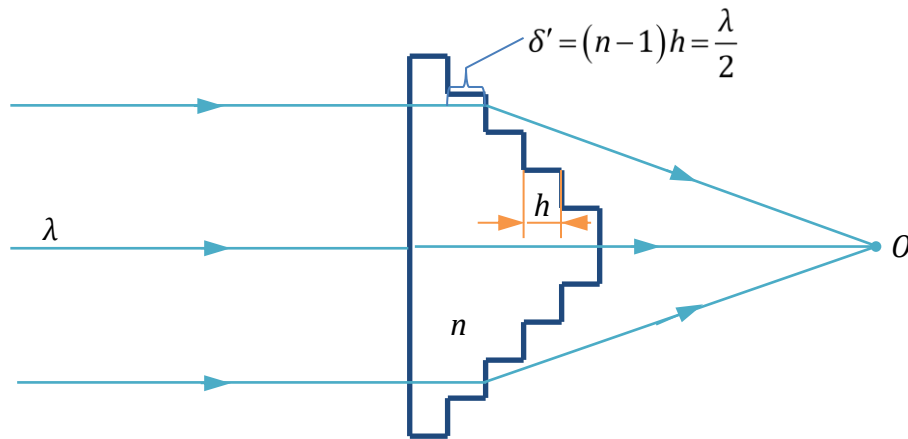


Рис. 35.9

Можно создать такую диафрагму, что будут открыты только нечётные (или только чётные) зоны Френеля ([рис. 35.9](#)). Тогда

$$E_z = E_1 + E_3 + E_5 + \dots$$

Ещё больше интенсивность света в центре экрана можно увеличить, если сдвигать по фазе излучение чётных зон Френеля так, чтобы оно совпадало по фазе с излучением нечётных зон, перекрыв волновой фронт прозрачной пластинкой переменной толщины ([рис. 35.10](#)). (На рисунке  $n$  — показатель преломления вещества, из которого изготовлена пластинка;  $\delta'$  — добавочная оптическая разность хода.)



**Рис. 35.10**

**Демонстрация:** Зонная пластинка

#### 4.2.5. Разрешающая способность оптических приборов

**Разрешающая способность** оптического прибора — способность давать разделённое изображение объектов, расположенных близко друг к другу.

**Критерий Рэля** (ср. [4.1.4](#)): изображение двух одинаковых точечных источников света ещё можно видеть отдельно, если центральный максимум дифракционной картины от одного источника совпадает с минимумом первого порядка дифракционной картины от второго источника.

#### Разрешающая способность телескопа

$$\Delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

$\lambda$  — длина волны наблюдения;  $\Delta\varphi$  — минимальное угловое расстояние между точечными источниками, видимыми в телескоп отдельно;  $D$  — диаметр объектива телескопа.

#### Разрешающая способность микроскопа

$$\Delta l \approx \frac{\lambda}{4},$$

$\Delta l$  — минимальное расстояние между точечными источниками, видимыми в микроскоп отдельно.

#### Разрешающая способность дифракционной решётки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN,$$

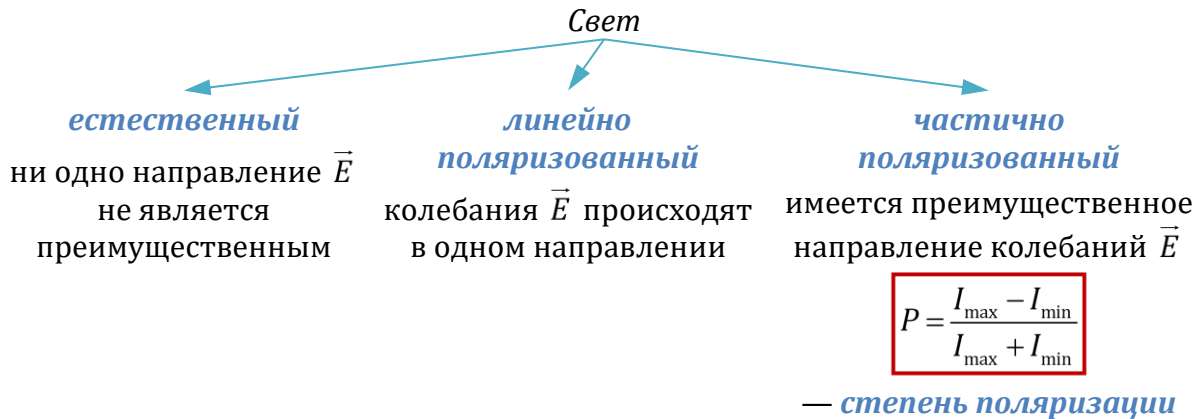


$\Delta\lambda$  — минимальная разность длин волн линий, видимых отдельно при разложении света в спектр на данной дифракционной решётке;  $m$  — порядок главного максимума;  $N$  — число штрихов (щелей) решётки.

## Лекция 36

## 4.3. Поляризация света

## 4.3.1. Виды поляризации



## 4.3.2. Поляризаторы. Закон Малю

**Идеальный поляризатор** — устройство, которое пропускает все волны, поляризованные в одном направлении, и совсем не пропускает волны, поляризованные в перпендикулярном направлении. Плоскость колебаний светового вектора (напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ ), которые полностью пропускает поляризатор, — **главная плоскость** поляризатора.

Пусть на идеальный поляризатор падает линейно поляризованный свет, амплитуда светового вектора равна  $E_0$ . Угол между плоскостью поляризации падающей волны и главной плоскостью поляризатора равен  $\theta$  (рис. 36.1). Амплитуда волны, прошедшей поляризатор,

$$E = E_0 \cos \theta.$$

Так как интенсивность волны  $I \sim E_0^2$ ,

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

— **закон Малю**.

Линейно поляризованный свет можно получить, пропустив естественный свет через поляризатор. Можно поставить за поляризатором второй поляризатор — **анализатор** и проанализировать поляризацию падающего излучения.

**ПРИМЕР**

Естественный свет интенсивностью  $I_0$  падает на систему из двух скрещенных поляризаторов, угол между главными плоскостями которых равен  $\theta$  (рис. 36.2). Найти интенсивность прошедшего систему света.

Интенсивность света, прошедшего первый поляризатор,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

(доказать **самостоятельно**, что идеальный поляризатор пропускает половину падающего на него естественного света).

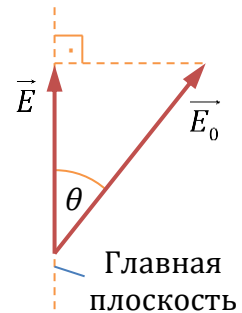


Рис. 36.1

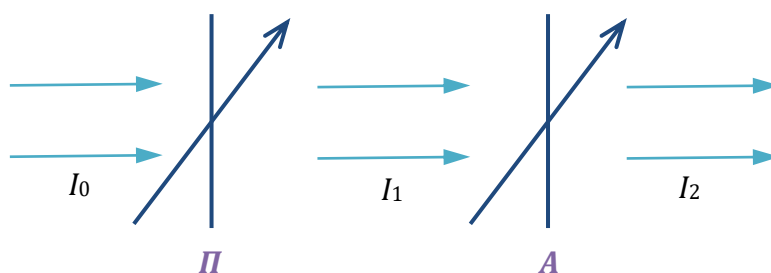


Рис. 36.2

Интенсивность света, прошедшего второй поляризатор — анализатор, по закону Малю

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta.$$

#### 4.3.3. Оптическая анизотропия. Двойное лучепреломление

**Оптическая анизотропия** — явление зависимости показателя преломления вещества от направления распространения световой волны.

**Двойное лучепреломление** — раздвоение светового луча, падающего на поверхность оптически анизотропного кристалла. **Обыкновенный луч** (*o*) подчиняется закону Снеллиуса [33.2], а **необыкновенный луч** (*e*) — не подчиняется. На рис. 36.3 изображён ход лучей в оптически анизотропной плоскопараллельной пластинке при нормальном падении.

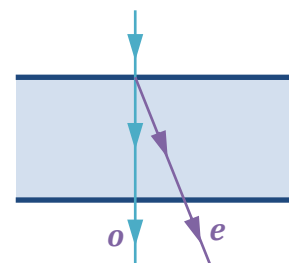


Рис. 36.3

**Оптическая ось** кристалла — направление в оптически анизотропном кристалле, вдоль которого свет распространяется без двойного лучепреломления.

**Главная плоскость** кристалла — любая плоскость, проходящая через оптическую ось. В обыкновенной волне световой вектор перпендикулярен главной плоскости, а в необыкновенной волне — параллелен.

Явление двойного лучепреломления можно обосновать с помощью принципа Гюйгенса-Френеля.

**Демонстрация:** Двойное лучепреломление в исландском шпате

#### 4.3.4. Методы получения поляризованного света

В основе принципа действия поляризационных устройств лежит одно из следующих явлений:

1. Поляризация света при отражении от границы раздела диэлектриков (закон Брюстера, см. РАЗДЕЛ 3.14.7)

На этом принципе работает **стопа Столетова** — поляризационное устройство, состоящее из нескольких склеенных друг с другом параллельных стеклянных пластин. Свет падает на стопу под углом Брюстера (рис. 36.4); на поверхность каждой из пластин стопы он падает также под углом Брюстера и степень поляризации прошедшего света повышается от пластины к пластине.

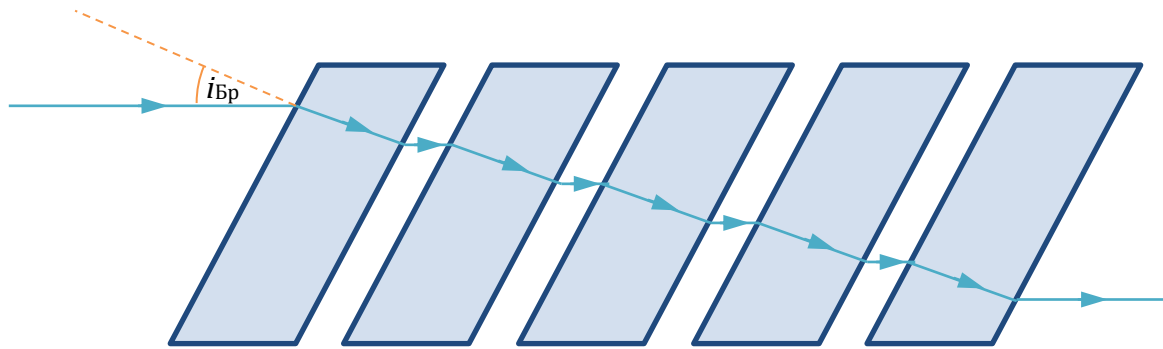


Рис. 36.4

2. Двойное лучепреломление

3. *Дихроизм* — зависимость коэффициента поглощения (см. 4.4.1) от направления колебаний светового вектора

**Демонстрации:** 1) Способы получения поляризованного света  
2) Поляризационные приборы: призма Николя, поляроиды

#### 4.4. Взаимодействие света с веществом

Электроны и ионы, совершая вынужденные колебания под действием света, излучают вторичные электромагнитные волны той же частоты. Средние расстояния между молекулами намного меньше длины когерентности света, поэтому вторичные волны, излучаемые множеством соседних молекул, когерентны. Если среда однородна и изотропна, то в результате интерференции этих волн образуется волна, фазовая скорость (см. 4.4.3) которой зависит от частоты, а волновой вектор параллелен волновому вектору падающей волны.

##### 4.4.1. Поглощение света

**Поглощение** света — уменьшение энергии световой волны при её распространении в веществе. Поглощение света происходит вследствие преобразования энергии световой волны во внутреннюю энергию вещества (или в энергию вторичного излучения, имеющего другой спектральный состав и иные направления распространения).

При *линейном поглощении* зависимость интенсивности света в веществе от пути  $l$ , пройденного световой волной в веществе (рис. 36.5),

$$I = I_0 e^{-\alpha l}$$

— **закон Бугера-Ламберта**; здесь  $I_0$  — интенсивность света, падающего на поверхность вещества,  $\alpha$  — **линейный коэффициент поглощения**;

$$[\alpha] = \text{м}^{-1}.$$

Коэффициент поглощения в общем случае зависит от свойств среды, частоты и поляризации падающего излучения.

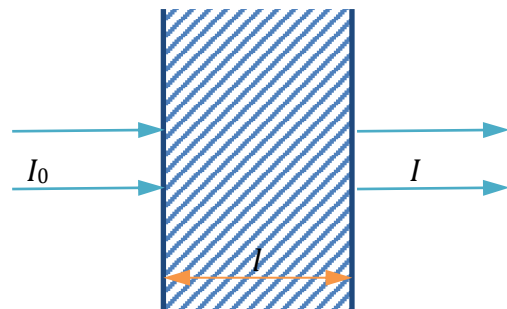


Рис. 36.5

#### 4.4.2. Рассеяние света

**Рассеяние** света — преобразование света веществом, сопровождающееся изменением направления распространения световой волны и проявляющееся как несобственное свечение вещества. Рассеяние света происходит в *оптически неоднородной среде* (показатель преломления  $n \neq \text{const}$ ).



**Рэлеевское рассеяние** (размер неоднородности среды  $r \ll \lambda$  — длина волны света):

$$I \sim \lambda^{-4}$$

— закон Рэлея.

#### 4.4.3. Фазовая и групповая скорости света

В случае, если скорость распространения световой волны (показатель преломления среды) зависит от частоты, имеет смысл вводить разные определения скорости распространения волны.

**Фазовая скорость** — скорость распространения *фазы* колебаний:

$$v = \frac{c}{n},$$

здесь  $c$  — скорость света в вакууме.

**Групповая скорость** — скорость распространения *амплитуды* колебаний, т. е. энергии:

$$u = \frac{d\omega}{dk},$$

здесь  $\omega$  — циклическая частота волны,  $k$  — волновое число.

Физический смысл имеет групповая скорость.

**Демонстрация:** Модель, поясняющая фазовую и групповую скорости

Связь фазовой и групповой скорости:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

#### Доказательство

По определению

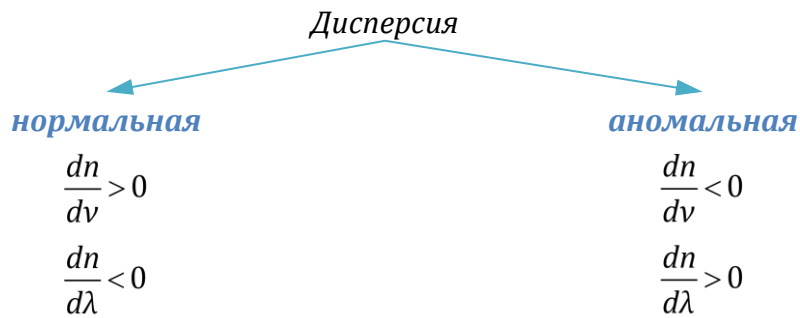
$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow \omega = kv, \quad d\omega = kv + vdk;$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda;$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda} dv - v \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda}{-\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \text{ ч. т. д.}$$

#### 4.4.4. Дисперсия света

**Дисперсия**<sup>79</sup> — явление зависимости фазовой скорости волны (показателя преломления среды) от частоты (длины волны).



Аномальная дисперсия сопровождается сильным поглощением света.

Благодаря дисперсии призма разлагает падающий на ней свет в спектр (рис. 36.6).

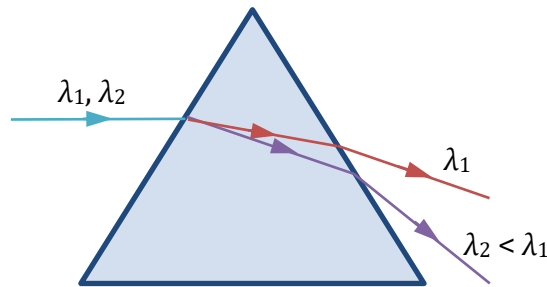


Рис. 36.6

**Демонстрация:** Получение спектра от призмы

#### 4.4.5. Классическая электронная теория дисперсии

Рассмотрим взаимодействие молекулы-диполя с электромагнитной волной циклической частоты  $\omega$  (рис. 36.7). Колебания проекции напряжённости электрического поля описываются уравнением

$$E_x = E_0 \sin \omega t.$$

Диполь ориентируется вдоль поля. Диполь не жёсткий: проекция дипольного момента молекулы на направление поля

$$p_{ex} = ex,$$

здесь  $e$  — модуль заряда электрона.

Проекция поляризованности вещества на ось  $x$

$$P_x = n_0 ex, \quad (36.1)$$

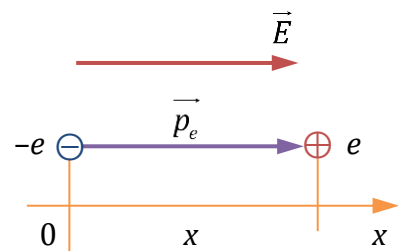


Рис. 36.7

<sup>79</sup> Не следует путать явление дисперсии с физической величиной — дисперсией спектрального прибора (линейной или угловой).

где  $n_0$  — концентрация диполей [см. (21.1)].

С другой стороны, связь векторных характеристик электрического поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

здесь  $\vec{D}$  — электрическое смещение,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. В изотропном диэлектрике  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ , где  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды. С учётом (36.1) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \varepsilon E_x &= n_0 e x + \varepsilon_0 E_x, \\ \varepsilon &= 1 + \frac{n_0 e x}{\varepsilon_0 E_x}. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Запишем II закон Ньютона для положительного заряда, входящего в состав молекулы:

$$m_e \vec{a} = \sum \vec{F},$$

$m_e$  — масса электрона,  $\vec{a}$  — ускорение. В проекции на ось  $x$

$$m_e \ddot{x} = e E_0 \sin \omega t - kx - r\dot{x}. \quad (36.3)$$

В правой части этого равенства первое слагаемое — это проекция силы, с которой электрическое поле действует на заряд  $e$ ; второе слагаемое — проекция квазиупругой силы, описывающей взаимодействие полюсов диполя; третье слагаемое — проекция силы сопротивления, моделирующей воздействие других молекул;  $k, r$  — положительные коэффициенты.

Преобразуем уравнение (36.3) к стандартному виду (16.3)

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e E_0}{m_e} \sin \omega t,$$

где  $\beta = \frac{r}{2m_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где (см. РАЗДЕЛ 3.13.3)

$$A = \frac{e E_0}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Тогда

$$\frac{x}{E_x} = \frac{A \sin(\omega t + \varphi)}{E_0 \sin \omega t}.$$

Эта величина изменяется со временем. Нас интересует среднее значение  $\frac{x}{E_x}$  за период колебаний  $T$ :

$$\left\langle \frac{x}{E_x} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{x}{E_x} dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{A \sin(\omega t + \varphi)}{E_0 \sin \omega t} dt = \frac{A \cos \varphi}{E_0};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}};$$

$$\left\langle \frac{x}{E_x} \right\rangle = \frac{e}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}.$$

С учётом (36.2) показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad 80.$$

В отсутствие потерь (при  $\beta = 0$ )

$$n = \sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}}.$$

График этой функции представлен на рис. 36.8. При  $\omega = \omega_0$  наступает резонанс.

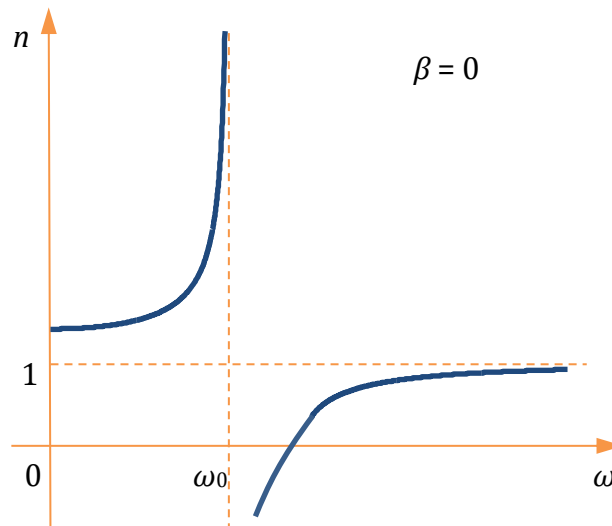


Рис. 36.8

В действительности никаких разрывов, отрицательных значений показателя преломления не наблюдается. Экспериментальная зависимость  $n(\omega)$  выглядит примерно так, как показано на рис. 36.9. В областях, где показатель преломления уменьшается с ростом частоты, имеет место аномальная дисперсия. В этих же областях наблюдается сильное поглощение.

В областях аномальной дисперсии возможно  $n < 1$  и фазовая скорость  $v = \frac{c}{n} > c$ . Но групповая скорость волны всегда меньше (или равна)  $c$ .

<sup>80</sup> Эта величина в общем случае комплексна. Вводятся понятия комплексного показателя преломления и комплексной диэлектрической проницаемости. На графике рис. 36.8 показана действительная часть  $n(\omega)$ .



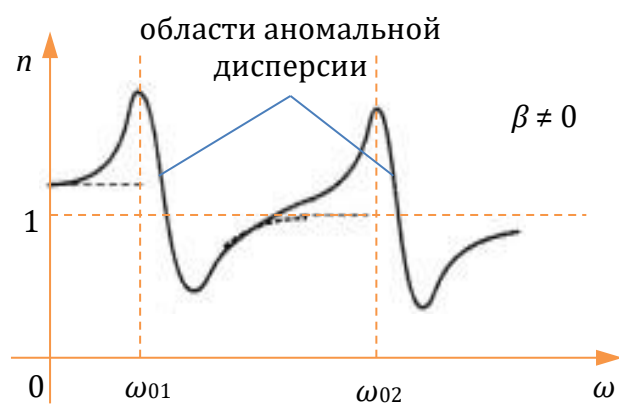


Рис. 36.9

## Лекция 37

## 5. Квантовая физика

## 5.1. Квантовые свойства электромагнитного излучения

Ряд оптических явлений не объясним с точки зрения волновой теории:

1. Тепловое излучение
2. Эффект Комптона
3. Фотоэффект
4. Спектры атомов

Для объяснения этих явлений необходимо рассматривать электромагнитное излучение как поток частиц — **фотонов**.

## 5.1.1. Характеристики фотонов

## 1. Скорость:

$$v = c.$$

## 2. Энергия

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda};$$

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — **постоянная Планка**; здесь  $\nu$  — частота,  $\omega$  — циклическая частота,  $\lambda$  — длина волны.

## 3. Масса

$$\varepsilon = mc^2 \Rightarrow m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{h}{c\lambda},$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Так как  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , где  $m_0$  — масса покоя, а  $v = c$ ,

$$m_0 = 0$$

— масса покоя фотона равна нулю; фотон называют **безмассовой** частицей.

## 4. Импульс

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi h}{2\pi\lambda} = \hbar k,$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

$\vec{k}$  — волновой вектор.

Фотон — переносчик электромагнитного взаимодействия, истинно нейтральная частица [электрический заряд, а также все остальные заряды (см. [РАЗДЕЛ 7.4.5](#)) равны нулю]. Фотон — истинно элементарная частица, т. е. не имеет структуры.

### 5.1.2. Внешний фотоэффект

**Внешний фотоэффект** — явление приобретения электрического заряда телом при освещении его поверхности. Причина внешнего фотоэффекта — испускание электронов веществом под действием света.

Внешний эффект наблюдается у металлов. Вылетающие электроны — *фотоэлектроны* — это свободные электроны, находившиеся внутри металла в потенциальной яме (см. [РАЗДЕЛ 6.4.1](#)).

#### Опыты Столетова

Схема установки, на которой проводятся все опыты, показана на [рис. 37.1](#). Вакуумная трубка с двумя электродами подключена к источнику постоянного тока через потенциометр, с помощью которого регулируется напряжение на трубке (которое показывает вольтметр). На катод (электрод трубки, подключённый к отрицательному полюсу источника) падает свет с длиной волны  $\lambda$ . Ток, идущий в цепи трубки, измеряется микроамперметром.

Если к трубке приложено напряжение прямой полярности (как показано на [рис. 37.1](#)), то электроны, выбиваемые с катода, ускоряются электрическим полем и долетают до анода. В цепи идёт *фототок*  $i$ .

Можно приложить к трубке напряжение обратной полярности. Тогда электрическое поле внутри трубки будет задерживать электроны. При напряжении, большем некоторого значения  $U_3$  (*задерживающее напряжение*), электроны не достигают катода и фототок не идёт. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{m_e v_{\max}^2}{2} = eU_3,$$

где  $v_{\max}$  — максимальная скорость фотоэлектронов при вылете с катода,  $m_e$  — масса электрона.

#### Опытные законы внешнего фотоэффекта

1. Фототок возрастает с увеличением интенсивности падающего света.
2. Фототок достигает насыщения.
3. Существует **красная граница фотоэффекта** — частота  $\nu_0$  (длина волны  $\lambda_0$ ) падающего излучения, при частотах ниже (длинах волн выше) которой фотоэффект не наблюдается. Значение  $\nu_0$  зависит от материала катода и состояния его поверхности.
4. Максимальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты падающего света и не зависит от его интенсивности.
5. Фотоэффект практически безынерционен.

**Демонстрация:** Фотоэффект на цинке

Зависимость фототока от напряжения показана на [рис. 37.2](#).

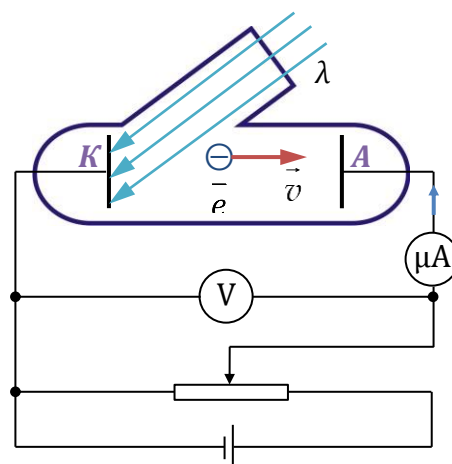


Рис. 37.1

Вольт-амперная характеристика вакуумного фотоэлемента

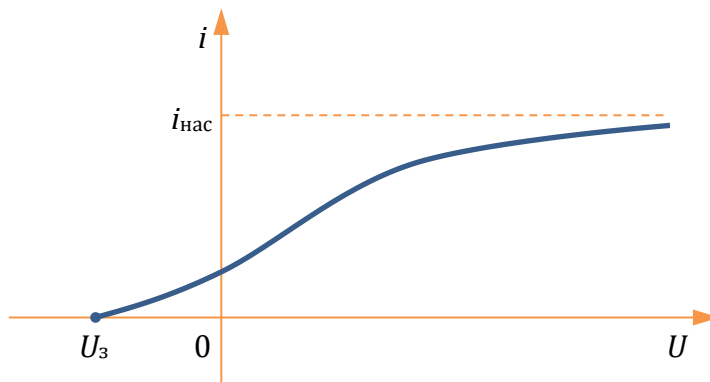


Рис. 37.2

Квантовая теория внешнего фотоэффекта

Из закона сохранения энергии следует, что энергия фотона расходуется на кинетическую энергию вылетающего электрона (её максимальное значение

$W_{\text{к max}} = \frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2}$ ,  $m_e$  — масса электрона) и *работу выхода*  $A$  электрона с поверхности металла:

$$h\nu = \frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2} + A \quad (37.1)$$

— *уравнение Эйнштейна*.

Работа выхода электрона из металла составляет единицы электрон-вольт.

1 электрон-вольт (эВ) равен энергии, которую приобретает электрон, пройдя ускоряющее электрическое поле с разностью потенциалов 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

*Объяснение свойств внешнего фотоэффекта*

1. Число фотоэлектронов пропорционально интенсивности падающего света.
2. Число фотоэлектронов ограничено.
3. Фотоэффект прекращается, когда максимальная скорость фотоэлектронов равна нулю:

$$v_{\text{max}} = 0 \Rightarrow h\nu_0 - A = 0 \Rightarrow \nu_0 = \frac{A}{h}.$$

4. Из уравнения Эйнштейна (37.1) следует, что  $v_{\text{max}} = v_{\text{max}}(\nu)$ .
5. Соударение фотона и электрона настолько сильное, что электрон вылетает практически мгновенно.

### 5.1.3. Эффект Комптона

**Эффект Комптона** — явление изменения длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии электронами вещества. Этот эффект наблюдается в результате столкновения фотона со свободным или почти свободным электроном (рис. 37.3).

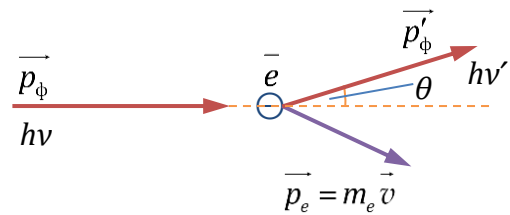


Рис. 37.3

Рассмотрим замкнутую систему фотон-электрон в системе отсчёта, в которой электрон покоится. Импульс и механическая энергия этой системы сохраняются. Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e, \quad (37.2)$$

где  $\vec{p}_\phi$  — импульс фотона до соударения,  $\vec{p}'_\phi$  — импульс фотона после соударения,  $\vec{p}_e$  — импульс электрона после соударения. Закон сохранения механической энергии:

$$hv = \frac{m_e v^2}{2} + hv', \quad (37.3)$$

где  $\nu$  — частота налетающего фотона,  $\nu'$  — частота рассеянного фотона,  $v$  — скорость электрона после соударения. Здесь мы полагаем  $v \ll c$  и описываем движение электрона нерелятивистскими формулами<sup>81</sup>.

Считая угол рассеяния  $\theta$  фотона (рис. 37.3) известным, спроецируем уравнение (37.2) на координатные оси, выразив импульс и частоту фотона через длину волны. Из системы уравнений (37.2) и (37.3) получим выражение для длины волны рассеянного фотона

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos\theta),$$

здесь  $\lambda$  — длина волны налетающего фотона,  $\lambda'$  — длина волны рассеянного фотона,

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,425 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

— **комptonовская длина волны электрона.**

### 5.1.4. Корпускулярно-волновая двойственность свойств света

Каждой группе фотонов в классическом описании ставится в соответствие *цуг волн*, характеризуемой напряжённостью электрического поля  $\vec{E}$  и напряжённостью магнитного поля  $\vec{H}$ .

Объёмная плотность энергии электромагнитного поля (см. 3.14.3)

$$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

(здесь  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды).

<sup>81</sup> На самом деле во многих случаях электрон нужно считать релятивистским и пользоваться релятивистскими выражениями для импульса и энергии электрона.

Энергия электромагнитного поля в малом объёме  $dV$

$$dW = wdV,$$

но, с другой стороны,

$$dW = NhvdP,$$

где  $dP$  — вероятность попадания фотона в объём  $dV$ ,  $N$  — общее число фотонов. Отсюда

$$w \sim \frac{dP}{dV}$$

— классическая плотность энергии электромагнитного излучения определяет *плотность вероятности* попадания фотонов в данную область пространства. Данная картина реализуется в виде изменяющегося в пространстве распределения интенсивности света (при большом числе фотонов).

Так как  $w \sim E^2$ ,

$$E^2 \sim \frac{dP}{dV}$$

— квадрат модуля напряжённости электрического поля определяет плотность вероятности попадания фотона в данную область пространства.

## 5.2. Гипотеза де Бройля

**Гипотеза де Бройля:** корпускулярно-волновая двойственность присуща не только свету, но и всей материи, т. е. все частицы обладают не только корпускулярными, но и волновыми свойствами.

Каждой движущейся частице можно поставить в соответствие волновой процесс (*волну де Бройля*), который характеризуется *длиной волны*

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

и *частотой*

$$\nu = \frac{W}{h};$$

здесь  $p$  — модуль импульса,  $W$  — энергия частицы.

**Квадрат модуля амплитуды** волны де Бройля равен плотности вероятности обнаружения частицы в данной области пространства.

Корпускулярные свойства частицы проявляются в том, что её масса, импульс и энергия локализованы в малом объёме.

### ПРИМЕРЫ

1) Пуля массой  $m = 10$  г летит со скоростью  $v = 600$  м/с. Её длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^2} \approx 10^{-34} \text{ (м)} = 10^{-24} \text{ (Å)}.$$

Волновые свойства частицы можно обнаружить благодаря явлению дифракции. Препятствия, на котором можно было бы обнаружить волновые свойства пули, не существует.

2) Электрон прошёл ускоряющее электрическое поле с разностью потенциалов  $U = 150 \text{ В}$ .

По закону сохранения энергии

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU,$$

здесь  $v$  — конечная скорость электрона. Импульс электрона

$$p = m_e v = \sqrt{2em_e U}.$$

Длина волны де Бройля

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2em_e U}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^2}} = \\ &= \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{10^{-24} \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 1,6 \cdot 1,5}} = 10^{-10} \text{ (м)} = 1 \text{ (Å)}. \end{aligned}$$

Период кристаллической решётки твёрдого тела — порядка  $1 \text{ Å}$ . Можно наблюдать дифракционную картину при рассеянии электронов на кристаллической решётке. Условие дифракционных максимумов

$$2d \sin \theta = m\lambda \Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{2d},$$

здесь  $\theta$  — угол дифракции,  $d$  — период кристаллической решётки,  $m$  — целое.

Если пускать электроны по одному, то распределение точек на детекторе (фотопластинке) будет случайным.

### 5.3. Соотношения неопределённостей Гейзенберга

В квантовой физике теряет смысл понятие траектории, координаты, скорости, ускорения частицы. Приходится говорить о плотности вероятности нахождения частицы в данной области пространства. Корректность использования классических физических величины определяется *соотношениями неопределённостей Гейзенберга*.

Нельзя одновременно с произвольной точностью измерить координату и соответствующую ей проекцию импульса частицы. Между неопределённостями этих величин должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases} \quad (37.4)$$

(здесь  $\Delta x$  — неопределённость координаты  $x$  и т. п.).

Величины, которые связаны между собой подобными соотношениями, называются *канонически сопряжёнными*; например, энергия  $W$  и время  $t$ :

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Соотношения неопределённостей являются оценочными.

**ПРИМЕР**

Пролёт микрочастицы через щель (дифракция электрона на щели)

Попытаемся определить координату свободно летящей микрочастицы. Для этого поставим на её пути ширму с щелью шириной  $\Delta x$  (рис. 37.4). До прохождения частицы через щель  $p_x = 0$ ,  $\Delta p_x = 0$ , зато координата  $x$  совершенно не определена. В момент прохождения частицы через щель ситуация изменяется:

$$\Delta p_x = p \sin \varphi, \quad \Delta x \sin \varphi = \lambda$$

— условие первого минимума при дифракции на щели (см. 4.2.2), поэтому

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}, \quad \Delta p_x = p \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{\Delta x}, \quad \Delta p_x \Delta x = h.$$

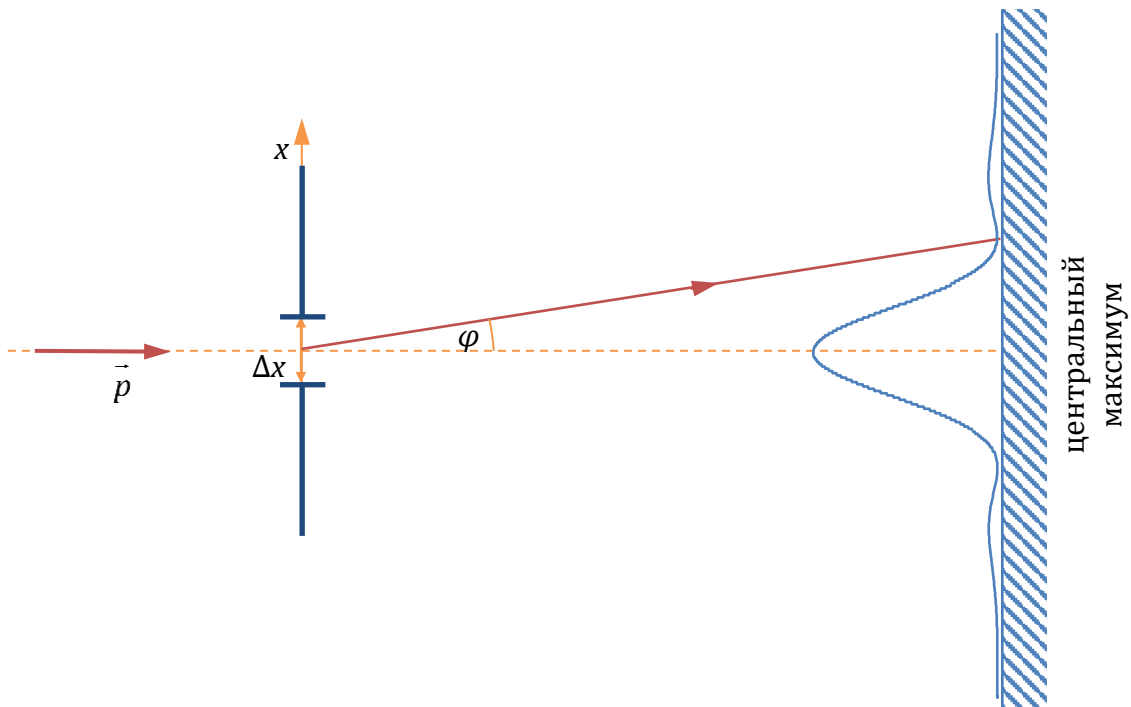


Рис. 37.4



## Лекция 38

### 5.4. Квантовомеханическое описание движения частицы

#### 5.4.1. Волновая функция

**Волновая функция**  $\Psi(\vec{r}, t)$  описывает состояние частицы. Волновая функция может быть как действительной, так и комплексной. Физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции:

$$|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV}$$

— квадрат модуля волновой функции равен плотности вероятности обнаружения частицы в данной области пространства.

Свойства волновой функции

1. Однозначность и непрерывность при любых  $x, y, z, t$
2. Непрерывность производных  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}$  при любых  $x, y, z, t$
3. Интегрируемость по  $x, y, z$  при любых  $x, y, z, t$
4. **Условие нормировки:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, y, z)|^2 dV = 1$$

(обнаружение частицы во всём пространстве — достоверное событие, его вероятность равна единице). Здесь  $dV = dx dy dz$  — интегрирование ведётся по объёму.

#### 5.4.2. Изображение физических величин операторами

В квантовой механике каждой физической величине ставится в соответствие **оператор** — правило, посредством которого одна функция сопоставляется другой:

$$f = Q\varphi.$$

Уравнение для **собственных функций** и **собственных значений** оператора  $Q$ :

$$Q\varphi = q\varphi.$$

Множеству собственных значений  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  соответствует множество собственных функций  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ .

При измерении физической величины  $q$ , представляемой оператором  $Q$ , могут получаться только результаты, совпадающие с собственными значениями этого оператора.

**Среднее значение**  $q$ :

$$\langle q \rangle = \int \Psi^* Q\Psi dV,$$

здесь  $\Psi^*$  — *комплексно сопряжённая* функция к функции  $\Psi$ ; интегрирование ведётся по всей области определения  $\Psi$ .

Важнейшие операторы физических величин

### 1. Оператор координаты

$$x = x;$$

$$x\psi(x, y, z) = x\psi(x, y, z)^{82}.$$

Оператор радиуса-вектора

$$\hat{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

### 2. Оператор импульса

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\vec{p} = -i\hbar \nabla,$$

здесь  $i$  — мнимая единица.

### 3. Оператор момента импульса

$$\vec{L} = [\hat{r}\vec{p}];$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix};$$

$$L_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ и т. д.}$$

### 4. Оператор кинетической энергии

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta,$$

здесь  $\Delta = \nabla^2$  — оператор Лапласа,  $m$  — масса частицы.

### 5. Оператор полной энергии — гамильтониан

$$H = T + U(x, y, z, t),$$

$U(x, y, z, t) = U(x, y, z, t)$  — **силовая функция** — описывает действие других объектов на частицу.

#### 5.4.3. Возможность одновременного измерения двух величин

Пусть имеются два оператора  $A$  и  $B$ . **Коммутатор** операторов  $A$  и  $B$

$$\{A, B\} = AB - BA.$$

Операторы  $A$  и  $B$  **коммутируют**, если

<sup>82</sup> Волновую функцию, зависящую от времени, мы обозначаем  $\Psi$ , а её стационарную часть (см. 5.4.5), не зависящую явно от времени, —  $\psi = \psi(x, y, z)$ .

$$\{A, B\} = 0,$$

т. е.  $AB = BA$ .

Если операторы не коммутируют, т. е.  $\{A, B\} \neq 0$ , то величины  $a$  и  $b$ , которым соответствуют эти операторы, одновременно не измеримы. (Для этих величин можно записать соотношение неопределённостей.)

### ПРИМЕРЫ

1) Измеримы ли одновременно координата и соответствующая проекция импульса?

Найдём коммутатор операторов  $x$  и  $p_x$ ; для простоты воздействуем этими операторами на функцию  $\psi$ :

$$\begin{aligned} x(p_x \psi) &= x\left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ p_x(x\psi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -i\hbar \psi - i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ (xp_x - p_x x)\psi &= i\hbar \psi \Rightarrow \{x, p_x\} = i\hbar \neq 0. \end{aligned}$$

Координата и соответствующая проекция импульса одновременно не измеримы, что подтверждается соотношениями неопределённостей (37.4).

2) Измеримы ли одновременно  $p_y$  и  $x$ ?

Действуем аналогично тому, как [В ПРЕДЫДУЩЕМ ПРИМЕРЕ](#):

$$\begin{aligned} y(p_x \psi) &= y\left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -i\hbar y \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ p_x(y\psi) &= -i\hbar y \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ \{p_x, y\} &= 0. \end{aligned}$$

Координата  $y$  и проекция импульса на ось  $x$  одновременно измеримы.

### Дополнительное задание

Доказать, что операторы проекций момента импульса не коммутируют:  $\{L_x, L_y\} \neq 0$ , а также что оператор каждой из проекций момента импульса коммутирует с оператором квадратом момента импульса:  $\{L_x, L^2\} = 0$ .

### 5.4.4. Квантование физических величин

Если физическая величина принимает дискретный ряд значений, т. е. собственные значения соответствующего оператора дискретны, то говорят, что данная величина *квантуется*.

### ПРИМЕР

Квантование момента импульса

Уравнение для собственных значений оператора квадрата момента импульса:

$$L^2\psi = L^2\psi.$$

Решение этого уравнение трудное, поэтому приведём только результат — собственные значения оператора квадрата момента импульса

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad (38.1)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

Уравнение для собственных значений оператора проекции момента импульса:

$$L_z\psi = L_z\psi.$$

Это уравнение мы решим — найдём собственные значения и собственные функции. В сферических координатах оператор проекции момента импульса записывается как

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Уравнение для собственных функций и собственных значений этого оператора:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = L_z\psi. \quad (38.2)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$\psi = e^{\alpha\varphi}.$$

Подставим эту функцию в уравнение (38.2):

$$-i\hbar\alpha e^{\alpha\varphi} = L_z e^{\alpha\varphi} \Rightarrow L_z = -i\hbar\alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{L_z}{i\hbar} = \frac{iL_z}{\hbar}, \quad \psi = e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}}.$$

Функция  $\psi$  должна быть однозначной. Для этого необходимо

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi) \Rightarrow \frac{L_z}{\hbar} = m,$$

$m$  — целое;

$$L_z = m\hbar, \quad (38.3)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Так как проекция вектора (по модулю) не может быть больше его модуля,

$$|m|\hbar \leq \hbar\sqrt{l(l+1)} \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

#### 5.4.5. Уравнение Шрёдингера

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (38.4)$$

или

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

— *временное уравнение Шрёдингера.*

Уравнение Шрёдингера не выводится из других соотношений, оно постулируется. Если силовое поле стационарно —  $U \neq U(t)$ , то решение уравнения Шрёдингера разделяется на два множителя:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\frac{W}{\hbar}t}, \quad (38.5)$$

где  $W$  — полная энергия частицы. Подставим (38.5) в уравнение Шрёдингера (38.4):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i\frac{W}{\hbar}t} \Delta\psi + U(x, y, z) \psi e^{-i\frac{W}{\hbar}t} = i\hbar \psi \left(-\frac{iW}{\hbar}\right) e^{-i\frac{W}{\hbar}t},$$

$$\boxed{H\psi = W\psi} \quad (38.6)$$

— *уравнение Шрёдингера для стационарных состояний (стационарное уравнение Шрёдингера).*

Это уравнение мы будем чаще писать в другом виде:

$$\boxed{\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0}. \quad (38.7)$$

## 5.5. Некоторые квантовомеханические задачи

### 5.5.1. Свободная частица с энергией $W$

Рассмотрим одномерное движение. Лапласиан имеет вид  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ ; силовая функция  $U = 0$ . Уравнение Шрёдингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}W\psi = 0. \quad (38.8)$$

Будем искать решение в виде  $\psi = Ae^{ikx}$ , где  $k$  — неизвестная константа. Производные волновой функции

$$\frac{d\psi}{dx} = ikAe^{ikx} = ik\psi, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = (ik)^2 Ae^{ikx} = -k^2\psi.$$

Подставим эти производные в уравнение (38.8):

$$-k^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}W\psi = 0;$$

$$k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2} \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar};$$

$$\psi = Ae^{\pm i\frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}x},$$

$A$  — постоянная нормировки. Полная волновая функция

$$\boxed{\Psi(x, t) = Ae^{-i\frac{Wt \mp \sqrt{2mW}x}{\hbar}}}.$$

Действительная часть этой функции

$$\text{Re}[\Psi(x, t)] = A \cos \frac{Wt \pm \sqrt{2mW}x}{\hbar}$$

— уравнение плоской бегущей монохроматической волны.

Вероятность обнаружения частицы

$$|\Psi|^2 = A$$

везде одинакова.

### 5.5.2. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме бесконечной глубины

**Потенциальная яма** — область пространства, в которой находится минимум потенциальной энергии частицы. В данной задаче рассматривается потенциальная яма бесконечной глубины, т. е. в области длиной  $l$  потенциальная энергия минимальна (равна нулю), а во всём остальном пространстве она стремится к бесконечности. График потенциальной энергии приведён на [рис. 38.1](#).

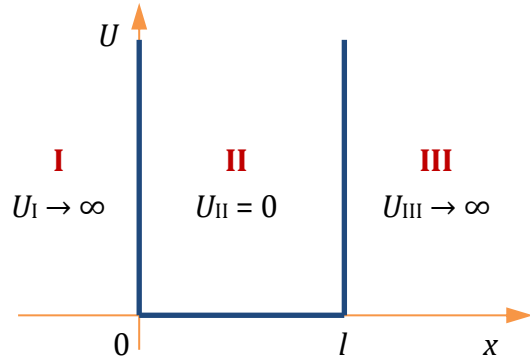


Рис. 38.1

В областях **I** и **III**, где потенциальная энергия бесконечно велика, вероятность обнаружения частицы должна быть равна нулю, т. е.

$$\begin{cases} \psi_I = 0, \\ \psi_{III} = 0. \end{cases}$$

Уравнение Шрёдингера для области **II**

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}W\psi_{II} = 0. \quad (38.9)$$

Введём обозначение

$$k^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}W,$$

тогда уравнение [\(38.9\)](#) примет вид

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + k^2\psi_{II} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$\psi_{II}(x) = A \cos(kx + \varphi).$$

Постоянные  $A$  и  $\varphi$  найдём из свойств волновой функции. Волновая функция должна быть непрерывна во всём пространстве, в том числе на стенках ямы:

$$\begin{cases} \psi_{II}(0) = 0, \\ \psi_{II}(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ A \cos(kl + \varphi) = 0 \Rightarrow \sin kl = 0; \end{cases}$$

$$k = \pm \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\psi_{II} = A \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Энергия частицы

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m l^2}, n = 1, 2, \dots$$

Видно, что энергия частицы имеет дискретный ряд значений, т. е. квантуется.

Условие нормировки:

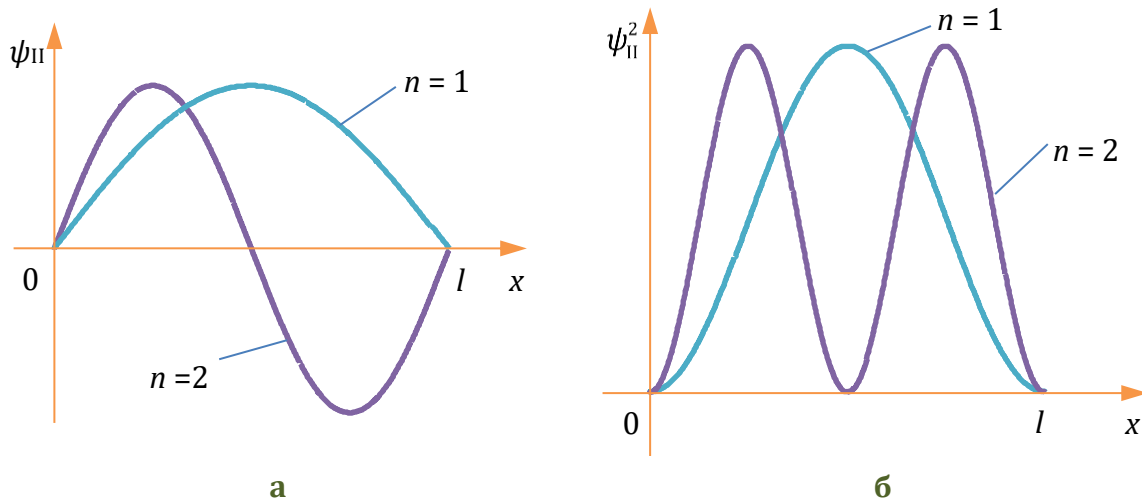
$$\int_0^l \psi_{II}^2(x) dx = A^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Итак,

$$\psi_{II} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (38.10)$$

$$|\psi_{II}|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (38.11)$$

Графики функций (38.10) и (38.11) для  $n = 1$  и  $2$  представлены на [рис. 38.2А, Б](#).



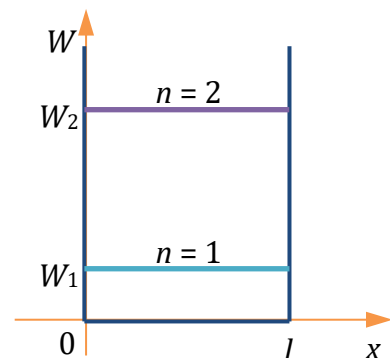
**Рис. 38.3**

Интервал энергий между соседними уровнями

$$\Delta W = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \left[ (n+1)^2 - n^2 \right] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n$$

при достаточно больших  $n$ .

Энергетическая диаграмма частицы в бесконечной потенциальной яме изображена на [рис. 38.3](#).



**Рис. 38.2**

## Лекция 39

## 5.5.3. Потенциальный барьер. Туннельный эффект

**Потенциальный барьер** — область пространства, в которой находится максимум потенциальной энергии частицы. Рассмотрим потенциальный барьер прямоугольной формы, шириной  $l$  и высотой  $U_0$  (рис. 39.1).

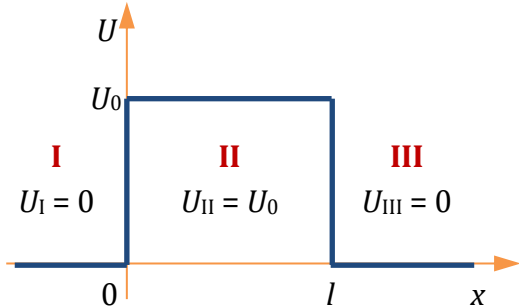


Рис. 39.1

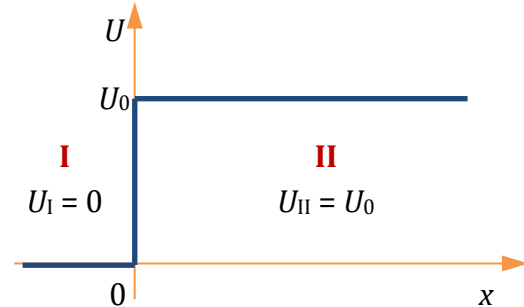


Рис. 39.2

Рассмотрим сначала бесконечный барьер ( $l \rightarrow \infty$ ), см. рис. 39.2:

$$\begin{cases} U_I = 0, \\ U_{II} = U_0. \end{cases}$$

Пусть на него налетает (из области I) частица массы  $m$  с энергией  $W < U_0$ . Запишем стационарное уравнение Шрёдингера в виде (38.7). (Задача одномерная, поэтому

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}.)$$

$$\begin{array}{l} \text{Область I} \\ \frac{d^2\psi_I}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}W\psi_I = 0. \end{array}$$

Обозначим

$$k^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}W.$$

$$\begin{array}{l} \text{Область II} \\ \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U_0)\psi_{II} = 0. \end{array}$$

Обозначим

$$\alpha^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W).$$

Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \psi_I'' + k^2\psi_I = 0, \\ \psi_{II}'' - \alpha^2\psi_{II} = 0. \end{cases}$$

Ищем решение каждого из этих уравнений в общем виде  $\psi = e^{\lambda x}$ . Тогда  $\psi' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $\psi'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ;

$$\begin{cases} \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + k^2 e^{\lambda_1 x} = 0, \\ \lambda_{II}^2 e^{\lambda_{II} x} - \alpha^2 e^{\lambda_{II} x} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + k^2 = 0, \\ \lambda_{II}^2 - \alpha^2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \pm ik, \\ \lambda_{II} = \pm \alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_I = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \\ \psi_{II} = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}. \end{cases} \quad (39.1)$$

Здесь  $i$  — мнимая единица,  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — постоянные.



Коэффициент  $A_1$  характеризует набегающую волну (налетающую частицу),  $B_1$  — отражённую волну (отлетающую от барьера частицу),  $A_2$  и  $B_2$  характеризуют вероятность нахождения частицы внутри барьера. Так как эта вероятность не может расти при погружении вглубь барьера,  $A_2 = 0$ .

Найдём коэффициент  $B_2$ . Условие непрерывности волновой функции на границе барьера:

$$\psi_1(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = B_2. \quad (39.2)$$

Условие непрерывности производных волновой функции:

$$\psi_1'(0) = \psi_{II}'(0) \Rightarrow ikA_1 - ikB_1 = -\alpha B_2. \quad (39.3)$$

Из (39.2) и (39.3) получим

$$B_2 = \frac{2ik}{ik - \alpha} A_1. \quad (39.4)$$

Вероятность нахождения частицы в точке с координатой  $x = 0$  определяется выражением  $|\psi_1(0)|^2 \sim A_1^2$ . Вероятность (плотность вероятности) нахождения частицы внутри барьера на расстоянии  $x$  от его границы

$$|\psi_{II}(x)|^2 = (|B_2|e^{-\alpha x})^2 \sim e^{-2\alpha x}.$$

Теперь «обрежем» барьер на ширине  $x = l$ . **Прозрачность (коэффициент прозрачности)** барьера — вероятность прохождения барьера частицей:

$$D = \frac{|\psi_{II}(l)|^2}{|\psi_1(0)|^2}.$$

Подставим сюда функции (39.1). С учётом (39.4) получим

$$D = \frac{|B_2|^2 e^{-2\alpha l}}{A_1^2} = \left| \frac{2ik}{ik - \alpha} \right|^2 e^{-2\alpha l} = \frac{4k^2}{k^2 + \alpha^2} e^{-2\alpha l} = \frac{4W}{U_0} e^{-2\alpha l}.$$

В большинстве реальных задач  $\frac{4W}{U_0} \approx 1$ . Тогда  $D \approx e^{-2\alpha l}$ ,

$$D = e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}}.$$

Мы доказали, что даже имея энергию, меньшую, чем высота потенциального барьера, частица может преодолеть этот барьер. В этом состоит **туннельный эффект**.

### Численная оценка

Если  $U_0 - W = 5$  эВ, то для электрона при

$l = 1 \text{ \AA}$	$D = 1 \cdot 10^{-1}$ ;
$l = 2 \text{ \AA}$	$D = 1 \cdot 10^{-2}$ ;
$l = 5 \text{ \AA}$	$D = 1 \cdot 10^{-5}$ .

Туннельный эффект широко применяется в технике. Большой ток при холодной эмиссии электронов объясняется в т. ч. туннельным эффектом.

### 5.5.4. Гармонический осциллятор

**Гармонический осциллятор** — частица, совершающая одномерное движение под действием квазиупругой силы  $F_x = -kx$ . При этом потенциальная энергия частицы в силовом поле

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

График  $U(x)$  представлен на [рис. 39.3](#). Собственная циклическая частота осциллятора  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( W - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0,$$

здесь  $W$  — полная энергия осциллятора. Это уравнение имеет точное аналитическое решение. Собственные функции слишком сложны, чтобы их здесь приводить. Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$W_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Энергия гармонического осциллятора квантуется, Уровни энергии *эквилидистантны*, т. е. отстоят друг от друга на одинаковую величину

$$\Delta W = \hbar\omega = hv.$$

Минимально возможная энергия гармонического осциллятора — *нулевая энергия*

$$W_0 = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

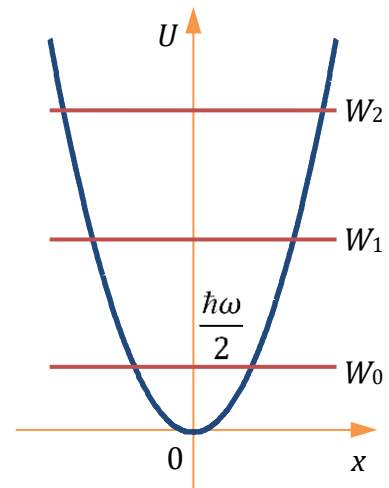


Рис. 39.3

Таким образом, доказана гипотеза Планка о том, что осциллятор излучает порциями — квантами.

## 5.6. Атом водорода

### 5.6.1. Модель атома Резерфорда–Бора

Атом состоит из положительно заряженного ядра, окружённого облаком электронов<sup>83</sup>. (С классической точки зрения это невозможно — электрон упал бы на ядро!)

Для атома водорода ([рис. 39.4](#)) масса протона  $m_p$  намного больше массы электрона  $m_e$ :

$$m_p = 1836m_e,$$

поэтому ядро можно считать неподвижным.

<sup>83</sup> По полуклассической теории Бора электроны вращаются вокруг ядра по орбитам. По квантово-механическим же представлениям об орбитах говорить бессмысленно.

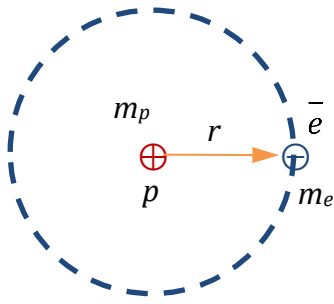


Рис. 39.4

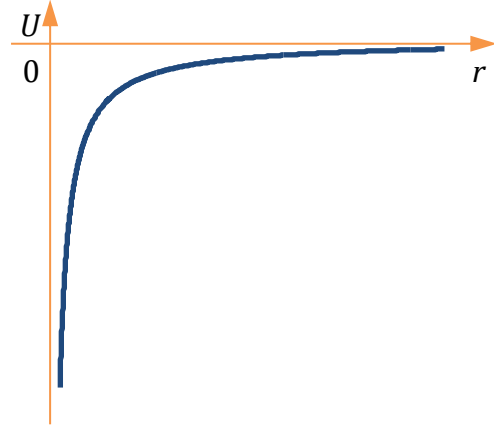


Рис. 39.5

Потенциал электростатического поля ядра

$$\varphi = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $Z$  — заряд ядра (число протонов в ядре),  $r$  — расстояние от ядра до электрона.

Потенциальная энергия электрона в этом поле

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

График зависимости  $U(r)$  представлен на [рис. 39.5](#).

Для атома водорода  $Z = 1$ . При  $Z \neq 1$  система, состоящая из ядра и одного электрона, — *водородоподобный ион*.

### 5.6.2. Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний и его решение

Стационарное уравнение Шрёдингера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

где  $m$  — масса электрона (данное обозначение используется в этом и следующем разделах).

Так как поле — центральное, перейдём к сферической системе координат. Стационарное уравнение Шрёдингера запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (39.5)$$

Предположим, что существует такое центральносимметричное состояние, в котором  $\psi = \psi_1(r)$ , с энергией  $W_1$ . Тогда

$$\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( W_1 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi_1 = 0. \quad (39.6)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде  $\psi_1 = Ce^{-\frac{r}{r_0}}$ . Производные этой функции

$$\frac{d\psi_1}{dr} = -\frac{C}{r_0} e^{-\frac{r}{r_0}} = -\frac{\psi_1}{r_0}, \quad \frac{d^2\psi_1}{dr^2} = \frac{C}{r_0^2} e^{-\frac{r}{r_0}} = \frac{\psi_1}{r_0^2}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (39.6):

$$\frac{\cancel{\psi_1}}{r_0^2} - \frac{2\cancel{\psi_1}}{r r_0} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( W_1 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \cancel{\psi_1} = 0$$

( $\psi_1 \neq 0$ ). Домножив это уравнение на  $\frac{\hbar^2}{2m}$ , получим

$$\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} + W_1 = \frac{2\cancel{\hbar^2}}{2mr_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\hbar^2}{mr_0} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right).$$

Это равенство должно выполняться при любых  $r$ , в т. ч. при  $r \rightarrow \infty$ . В таком случае правая часть этого равенства стремится к нулю, а, следовательно, и левая часть должна быть также равна нулю:

$$\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} + W_1 = 0 \Rightarrow W_1 = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}.$$

При  $r \neq 0$  должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} + W_1 = 0, \\ \frac{\hbar^2}{mr_0} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получим

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 m}, \quad W_1 = -\frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2.$$

### Численное значение

При  $Z = 1$   $W_1 = -13,6$  эВ;  $r_0 = 0,529$  Å — *первый боровский радиус*.

Вероятность обнаружения электрона в тонком сферическом слое радиуса  $r$  и толщиной  $dr$

$$dP = |\psi_1|^2 4\pi r^2 dr = C^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} 4\pi r^2 dr;$$

$$\frac{dP}{dr} = C^2 4\pi r^2 e^{-\frac{2r}{r_0}}.$$

График этой функции изображён на рис. 39.6. Максимум плотности вероятности обнаружения электрона имеет место при  $r = r_0$  (*доказать самостоятельно*).

Общее решение уравнения Шрёдингера (39.5) можно представить в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

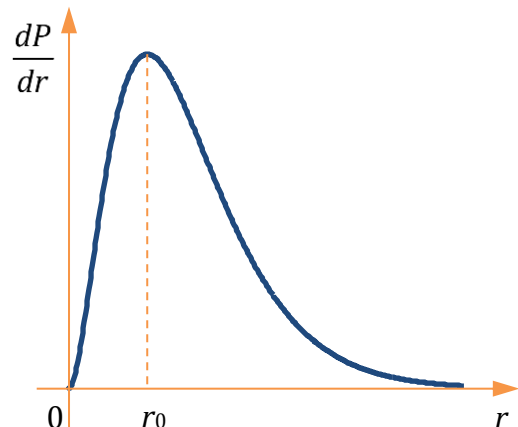


Рис. 39.6

Подставив эту функцию в уравнение (39.5), получим три уравнения, имеющих аналитические решения, которые достаточно сложны<sup>84</sup>.

---

<sup>84</sup> Заметим, что в состоянии  $\psi_1$  азимутальное квантовое число  $l = 0$  (см. РАЗДЕЛ 5.6.4), т. е. электрон не вращается.

## Лекция 40

### 5.6.3. Энергетический спектр атома водорода

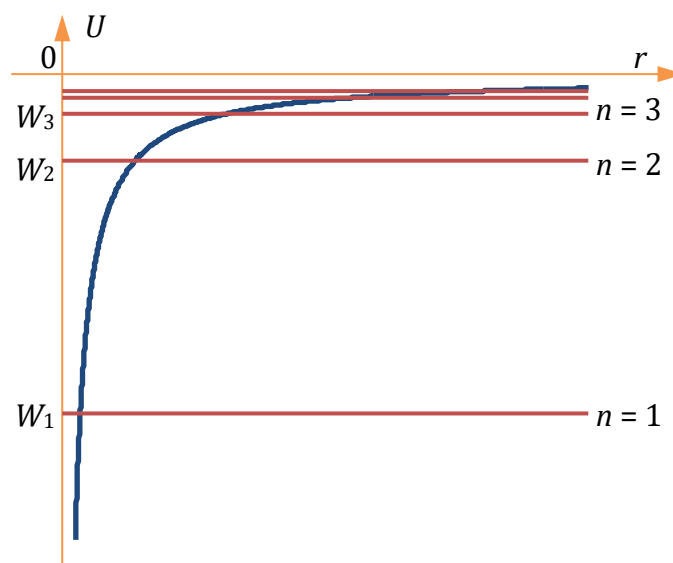
При  $W > 0$  (электрон свободный) энергия электрона может принимать любые значения.

При  $W < 0$  (когда электрон входит в состав атома) энергия электрона квантована:

$$W_n = -\frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

( $n \neq 0!$ ),  $n$  — **главное квантовое число**.

Энергетический спектр атома водорода **дискретный**. Дискретные значения энергии электрона показаны на графике потенциальной энергии ([рис. 40.1](#)).



**Рис. 40.1**

**Основное состояние:**  $n = 1$ .

При переходе системы из одного стационарного состояния в другое ( $n_1 > n_2$ ) должен выполняться закон сохранения энергии:

$$W_{n_2} - W_{n_1} = \hbar\omega,$$

где  $\hbar\omega$  — энергия фотона, излучаемого при переходе электрона из состояния с  $n_2$  в состояние с  $n_1$ ;

$$\hbar\omega = \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

При переходе на более высокий энергетический уровень ( $n_2 > n_1$ ) происходит поглощение энергии.

**Постоянная Ридберга**

$$R^* = \frac{m}{2\hbar^3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2,$$

$$R^* = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$

Таблица 40.1

$n$	Название серии	Диапазон	Энергетическая диаграмма
$n_1 = 1$	<i>Серия Лаймана</i>	УФ $\omega = R^* \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$ $n_2 = 2, 3, 4, \dots$	<p>0 ————— <math>n \rightarrow \infty</math>  ————— <math>n = 4</math>  ————— <math>n = 3</math>  ————— <math>n = 2</math>  ————— <math>n = 1</math></p>
$n_1 = 2$	<i>Серия Бальмера</i>	Видимый свет + + УФ $\omega = R^* \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$ $n_2 = 3, 4, 5, \dots$	<p>0 ————— <math>n \rightarrow \infty</math>  ————— <math>n = 4</math>  ————— <math>n = 3</math>  ————— <math>n = 2</math>  ————— <math>n = 1</math></p>
$n_1 = 3$	<i>Серия Пашена</i>	ИК $\omega = R^* \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$ $n_2 = 4, 5, 6, \dots$	<p>0 ————— <math>n \rightarrow \infty</math>  ————— <math>n = 4</math>  ————— <math>n = 3</math>  ————— <math>n = 2</math>  ————— <math>n = 1</math></p>

При  $Z = 1$

$$\omega = R^* \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Так как  $\omega = 2\pi\nu$ ,

$$\nu = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где  $R = \frac{R^*}{2\pi} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

Длина волны  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ;

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{R}{c} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R_\infty \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

$R_\infty = \frac{R}{c} = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ .

Линии спектров излучения (поглощения) атомов объединяются в *серии*. Три первые спектральные серии атомарного водорода представлены в [ТАБЛИЦЕ 40.1](#).

#### 5.6.4. Момент импульса электрона в атоме

Момент импульса любой квантовомеханической системы

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1$$

(см. [РАЗДЕЛ 5.4.4](#)),  $l$  — *азимутальное (орбитальное) квантовое число*.

При переходе из одного состояния в другое должен выполняться закон сохранения момента импульса. Так как модуль момента импульса фотона  $L_\phi = \hbar$ , возможны лишь переходы, при которых

$$\Delta l = \pm 1$$

— *правило отбора*.

Проекция момента импульса на избранное направление

$$L_z = m\hbar, \quad m = -l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l,$$

$m$  — *магнитное квантовое число*.

#### 5.6.5. Состояние электрона в атоме

Каждому главному квантовому числу  $n$  соответствует  $n^2$  состояний с одинаковыми энергиями  $W_n$ . Число  $n^2$  — *степень вырождения*.

##### ПРИМЕР

При  $n = 2$  степень вырождения  $n^2 = 4$ . Говорят, что уровень  $n = 2$  четырёхкратно вырожден.

При внешнем воздействии на атом энергия  $W_n$  (для состояний с разными  $l$  и  $m$ ) может ненамного измениться, тогда *вырождение снимается* (например, при *эффekte Зеемана*). Таким образом, состояние электрона в атоме определяется тремя (на самом деле [ЧЕТЫРЬМЯ](#)) квантовыми числами:  $n, l, m$ .



## Классификация состояний электрона в атоме

(Эта классификация относится не только к атому водорода, но и к многоэлектронным атомам.)

$l = 0$  —  $s$ -состояние

$l = 1$  —  $p$ -состояние

$l = 2$  —  $d$ -состояние

$l = 3$  —  $f$ -состояние и т. д.

Запись  $2s$  означает, что  $n = 2$ ,  $l = 0$  и т. п.

В [ТАБЛИЦЕ 40.2](#) рассмотрены возможные состояния электрона на уровнях 1 и 2.

Таблица 40.2

Энергия	Квантовые числа			Волновая функция	Обозначение состояния	Степень вырождения
	$n$	$l$	$m$			
$W_1$	1	0	0	$\psi_{100}$	1s	1
$W_2$	2	0	0	$\psi_{200}$	2s	4
	2	1	+1	$\psi_{21+1}$	2p	
	2	1	0	$\psi_{210}$	2p	
	2	1	-1	$\psi_{21-1}$	2p	

## Переходы между состояниями

При переходах из одного состояния в другое должны выполняться законы сохранения энергии и момента импульса:

$$\begin{cases} \hbar\omega = W_2 - W_1, \\ l_2 - l_1 = \pm 1. \end{cases}$$

Таким образом, спектральная *серия Лаймана* может быть получена при переходах

$$\left. \begin{array}{l} 2p \\ 3p \\ 4p \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow 1s;$$

*серия Бальмера* — при переходах

$$\left. \begin{array}{l} 3p \\ 4p \\ 5p \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow 2s, \quad \left. \begin{array}{l} 3s \\ 4s \\ 5s \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow 2p, \quad \left. \begin{array}{l} 3d \\ 4d \\ 5d \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow 2p.$$

Эти переходы изображены на энергетической диаграмме [рис. 40.2](#).

На [рис. 40.2](#) видно, что состояние  $2s$  оказывается *метастабильным*: в нём электрон задерживается значительно дольше, чем в других возбуждённых состояниях.

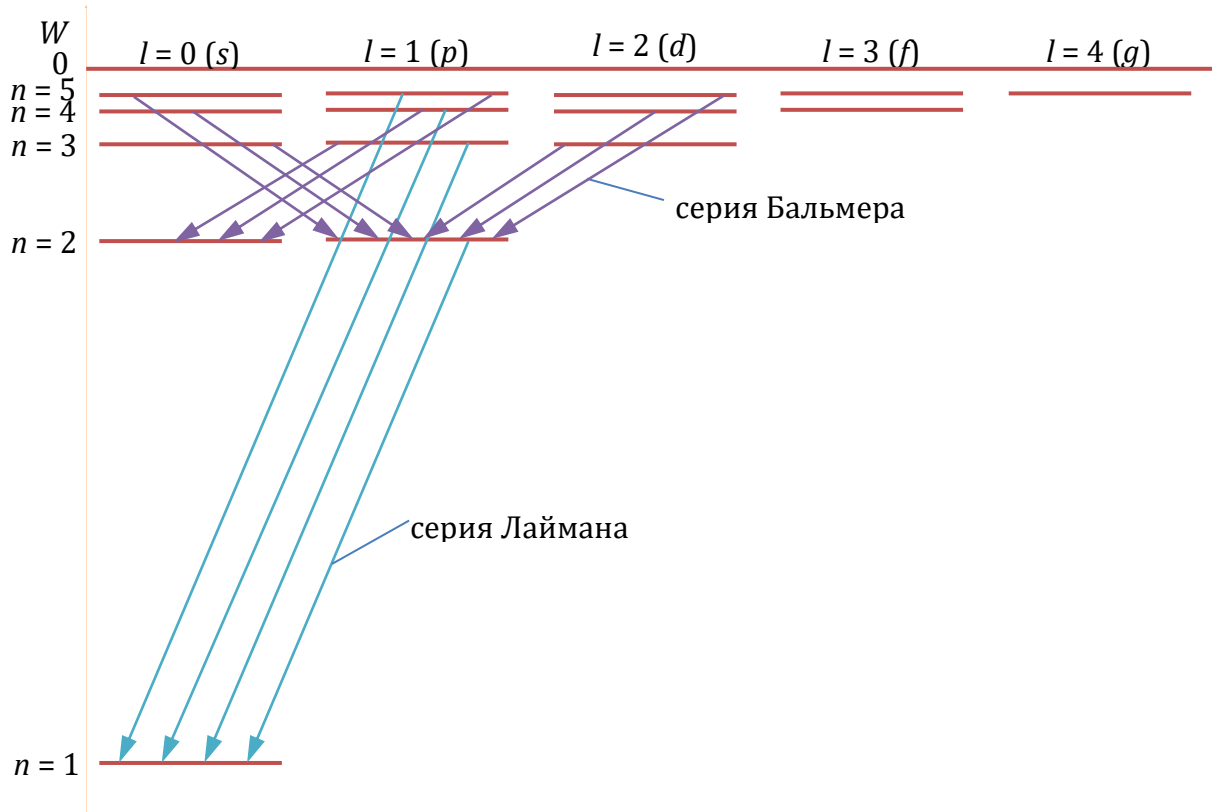


Рис. 40.2

## 5.7. Многоэлектронные атомы. Принцип Паули

### 5.7.1. Спин

Из уравнения Шрёдингера следует, что состояние электрона описывается тремя квантовыми числами:  $n$ ,  $l$ ,  $m$ . Но это уравнение — нерелятивистское. Учёт релятивистских эффектов даёт ещё одно квантовое число: **спин** — собственный момент импульса.

Модуль собственного момента импульса частицы

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

$s$  — **спиновое квантовое число**. Для электрона

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar.$$

Проекция собственного момента импульса частицы на физически выделенное направление

$$L_{sz} = m_s \hbar,$$

$m_s$  — **магнитное спиновое квантовое число**. Для электрона

$$m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Итак, состояние электрона описывается четырьмя квантовыми числами:  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $m_s$ .  
Полный момент импульса частицы

$$L_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}; \quad j = l + s, \quad |l - s|.$$

### 5.7.2. Принцип неразличимости. Принцип Паули

**Принцип неразличимости тождественных частиц:** тождественные частицы неразличимы.

Пусть имеется система из двух тождественных частиц. Рассмотрим волновую функцию  $\psi(\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — совокупности координат соответственно частиц **1** и **2**. Так как частицы неразличимы, перестановка  $\xi_1$  и  $\xi_2$  не должна изменять свойств системы, т. е.  $|\psi|^2$  должен быть одинаковым:

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2.$$

При этом возможно два случая ([ТАБЛ. 40.3](#)).

**Таблица 40.3**

Свойство волновой функции	$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1)$	$\psi(\xi_1, \xi_2) = -\psi(\xi_2, \xi_1)$
Спин	целый	полуцелый
Класс частиц (с точки зрения квантовой статистики)	<b>бозоны</b>	<b>фермионы</b>
Статистика	Бозе–Эйнштейна	Ферми–Дирака
Число частиц в одном состоянии	не ограничено	$\leq 1$
Примеры частиц	фотон, ядра с целым спином	электрон, протон, нейтрон, ядра с полуцелым спином

**Принцип Паули:** в одной квантовомеханической системе не может быть двух и более тождественных частиц с полуцелым спином, обладающих одинаковой совокупностью квантовых чисел.

Фермионы подчиняются принципу Паули, а бозоны — нет.

### 5.7.3. Многоэлектронные атомы

В состоянии с данным квантовым числом  $n$  в каждом атоме могут находиться не более  $2n^2$  электронов. Совокупность электронов, имеющих одинаковые значения  $n$ , образует **оболочку**; одинаковые  $n$  и  $l$  — **подоболочку**.

Конфигурация оболочек и подоболочек на первых трёх энергетических уровнях приведена в [ТАБЛ. 40.4](#).

#### ПРИМЕР

Построение электронной оболочки атома (в основном состоянии)

Водород	${}^1\text{H}$	$1s^1$	Бериллий	${}^4\text{Be}$	$1s^2 2s^2$
Гелий	${}^2\text{He}$	$1s^2$	Бор	${}^5\text{B}$	$1s^2 2s^2 2p^1$
Литий	${}^3\text{Li}$	$1s^2 2s^1$	Углерод	${}^6\text{C}$	$1s^2 2s^2 2p^2$
и т. д.					
Калий	${}^{19}\text{K}$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$			

Таблица 40.4

Спектроскопическое обозначение оболочки	$n$	$l$	$m$	$m_s$	Подоболочка
$K$	1	0	0	$\uparrow\downarrow$	$1s$
$L$	2	0	0	$\uparrow\downarrow$	$2s$
		1	-1	$\uparrow\downarrow$	$2p$
			0	$\uparrow\downarrow$	
			1	$\uparrow\downarrow$	
$M$	3	0	0	$\uparrow\downarrow$	$3s$
		1	-1	$\uparrow\downarrow$	$3p$
			0	$\uparrow\downarrow$	
			1	$\uparrow\downarrow$	
		2	-2	$\uparrow\downarrow$	$3d$
			-1	$\uparrow\downarrow$	
			0	$\uparrow\downarrow$	
			1	$\uparrow\downarrow$	
			2	$\uparrow\downarrow$	

## 5.8. Спонтанное и вынужденное излучение. Лазеры

### 5.8.1. Время жизни состояния

*Стационарным* (т. е. сколь угодно долго живущим) является только основное состояние атома (это релятивистский эффект).

*Время жизни* возбуждённого состояния — время, за которое число атомов, находящихся в данном возбуждённом состоянии, уменьшается в  $e$  раз.

Для возбуждённого состояния время жизни  $\tau \sim 10^{-8}$  с;

для возбуждённого метастабильного состояния  $\tau \sim 10^{-1}$  с;

для невозбуждённого (основного) состояния  $\tau \rightarrow \infty$ .

## Лекция 41

## 5.8.2. Спонтанное и вынужденное излучение



Спонтанные переходы всегда происходят сверху вниз (т. е. энергия атома уменьшается и излучается фотон).

**Коэффициент спонтанного излучения**  $A_{mn}$  — вероятность спонтанного перехода атома из состояния  $m$  в состояние  $n$  ( $m > n$ ) в единичный промежуток времени.

Если в состоянии  $m$  находится  $N_m$  атомов, то за время  $dt$  в состояние  $n$  перейдёт

$$-dN_m = A_{mn} N_m dt \Rightarrow N_m = N_{0m} e^{-A_{mn} t},$$

где  $N_{0m}$  — число атомов в состоянии  $m$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ). При

$$\frac{N_m}{N_{0m}} = e^{-1} \quad t = \tau \text{ — время жизни состояния } m, \quad A_{mn} \tau = 1,$$

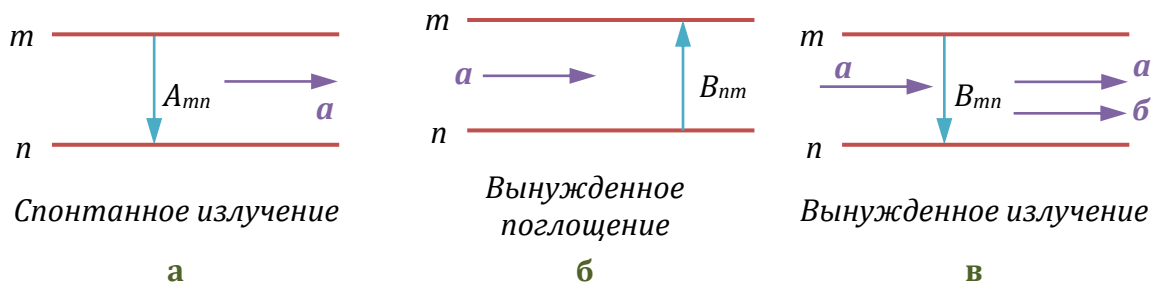
$$A_{mn} = \frac{1}{\tau}.$$

**Коэффициент вынужденного излучения**  $B_{mn}$  — вероятность вынужденного перехода атома из состояния  $m$  в состояние  $n$  в единичный промежуток времени; **коэффициент вынужденного поглощения**  $B_{nm}$  — вероятность вынужденного перехода атома из состояния  $n$  в состояние  $m$  в единичный промежуток времени;

$$B_{mn} = B_{nm}.$$

Схемы спонтанных и вынужденных переходов представлены на [РИС. 41.1А, Б, В](#).

$A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $B_{nm}$  — **коэффициенты Эйнштейна**.



**Рис. 41.1**

На [РИС. 41.1Б](#) волна **б** когерентна волне **а**.

## 5.8.3. Двухуровневая система

Пусть пучок света проходит через вещество, атомы которого могут находиться в двух состояниях:  $m$  и  $n$ . Падающий свет будет вызывать два процесса: переходы сверху вниз и снизу вверх. Первый процесс ведёт к усилению света, второй — к ослаблению.

В [ТАБЛИЦЕ 41.1](#) представлены две возможные ситуации заполнения уровней  $m$  и  $n$ : обычная и инверсная заселённость.

Таблица 41.1

$N_m < N_n$ Обычная заселённость	$N_m > N_n$ Инверсная заселённость
<p>Число актов поглощения больше числа актов излучения. Свет ослабляется. Это естественная ситуация. Заселённость уровней по распределению Больцмана</p> $N = N_0 e^{-\frac{W}{kT}},$ <p>(<math>W</math> — энергия уровня).</p>	<p>Число актов излучения больше числа актов поглощения. Свет усиливается. Это искусственная ситуация (<math>T &lt; 0</math>).</p>

#### 5.8.4. Оптический квантовый генератор (лазер)

##### 1. Рубиновый лазер

Рабочее тело — корунд ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) с примесью 0,03–0,05% хрома ( $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ) — рубин. На торцы рубинового стержня нанесено зеркальное напыление, они образуют параллельные зеркала, пропускающие 8% света (рис. 41.2). Пространство между зеркалами играет роль резонатора. Источник энергии — импульсная ксеноновая лампа (с её помощью происходит *оптическая накачка* рубина).

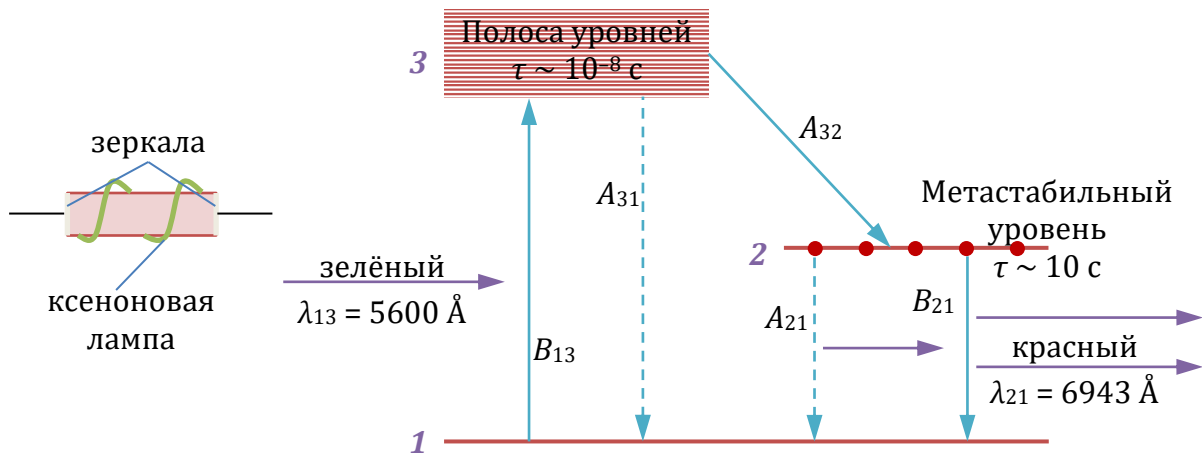


Рис. 41.2

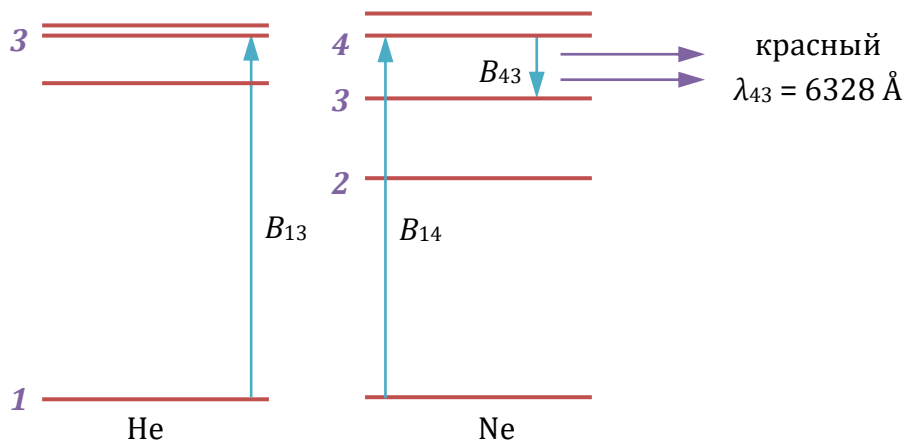
Рис. 41.3

Схема энергетических уровней рубина показана на рис. 41.3.

При накачке ионы  $\text{Cr}^{3+}$  переходят из основного состояния **1** в возбуждённое состояние **3**. Время жизни этого состояния мало. Так как  $A_{32} > A_{31}$ , большая часть электронов переходит в состояние **2** (время жизни около  $10^{-1}$  с). Создаётся инверсная заселённость уровней **2** и **1**. Электрон может перейти с уровня **2** на уровень **1** (сверху вниз,  $A_{21}$ ) с излучением фотона. Этот фотон может вызвать вынужденное излучение ( $B_{21}$ ). Фотоны, двигаясь между зеркальными торцами, создают эффект лавины.

## 2. Гелий-неоновый лазер

В газоразрядной трубке содержится смесь гелия под давлением 1 мм рт. ст. и неона под давлением 0,1 мм рт. ст. На торцах трубки находятся два зеркала, одно из которых полупрозрачно. Источник энергии — газовый разряд.



**Рис. 41.4**

Энергетическая диаграмма показана на [рис. 41.4](#). Третий уровень гелия и четвёртый уровень неона совпадают. В результате газового разряда происходит возбуждение атомов гелия (коэффициент Эйнштейна  $B_{13}$ ) и неона ( $B_{14}$ ). Столкновения возбуждённых атомов гелия с невозбуждёнными атомами неона приводят к резонансной передаче возбуждения. Так как атомов гелия в 10 раз больше, чем атомов неона, заселённость четвёртого уровня неона резко увеличивается. Вместе с быстрым опустошением уровня 3 это создаёт инверсную заселённость уровней 4 и 3 неона. Так как резонатор лазера настроен на длину волны  $\lambda_{43}$ , это приводит к созданию лавины фотонов именно этой длины волны.

### Свойства лазерного излучения

1. Высокая временная и пространственная когерентность
2. Высокая степень монохроматичности (ширина линии генерации  $\Delta\lambda \approx 0,1 \text{ \AA}$ )
3. Высокая плотность потока энергии
4. Узкая направленность пучка

## 6. Статистическая физика. Физика твёрдого тела

### 6.1. Макросистемы и способы их описания. Фазовое пространство<sup>85</sup>

#### 6.1.1. Макросистемы и способы их описания

**Макросистема** — система, состоящая из огромного числа частиц.

**Закрыва́тая система** — макросистема с постоянным числом  $N$  частиц.

**Откры́тая система** — макросистема с переменным числом частиц.



#### 6.1.2. Термодинамическое описание состояния макросистемы

**Термодинамическое описание** — это описание макросостояния системы в целом.

Будем рассматривать равновесное состояние системы. **Равновесное состояние (состояние термодинамического равновесия)** — макросостояние макросистемы, в котором она может находиться сколь угодно долго при неизменных внешних условиях.

**Термодинамические параметры (макропараметры)** — параметры, описывающие макросистему в целом: давление  $p$ , объём  $V$ , температура  $T$ , внутренняя энергия  $U$ , энтропия  $S$  и т. п. Термодинамические параметры можно определить для системы в целом только в её равновесном состоянии.

И начало термодинамики:

$$dU = \delta Q - \delta A,$$

$Q$  — количество теплоты, переданное системе,  $A$  — работа, совершённая системой.

Так как  $\delta A = pdV$ ,  $dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обрат}}$ , для закрытой системы

$$dU = TdS - pdV.$$

Для открытой системы внутренняя энергия может изменяться и за счёт изменения числа частиц:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN,$$

где  $\mu$  — **химический потенциал** — термодинамический параметр системы. Его смысл прост. Для теплоизолированной ( $dS = 0$ ) системы при  $V = \text{const}$

$$dU = \mu dN \Rightarrow \mu = \left( \frac{dU}{dN} \right)_{\substack{S=\text{const} \\ V=\text{const}}};$$

<sup>85</sup> Материал этого параграфа во многом повторяет содержание разделов [2.1.2](#), [2.1.3](#) и [2.6.2](#). Но так как рассматриваемые темы впервые изучались в I семестре, нужно повторить определение термодинамической системы и т. д.



$$[\mu] = \text{Дж}.$$

Химический потенциал равен изменению внутренней энергии теплоизолированной системы постоянного объёма при увеличении числа её частиц на единицу.

Возможно  $\mu \geq 0$ . Для идеального газа  $\mu < 0$ ; для фотонного газа  $\mu = 0$ .

Контакт двух теплоизолированных макросистем

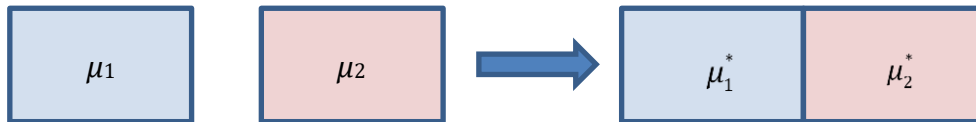


Рис. 41.5

При контакте двух теплоизолированных макросистем с химическими потенциалами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (рис. 41.5) поток энергии (энергия, переносимая сквозь границу между системами за какой-либо промежуток времени) слева направо на рисунке будет равен потоку энергии справа налево:

$$dU_{1 \rightarrow 2} = dU_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow \mu_1^* dN_{12} = \mu_2^* dN_{21},$$

где  $\mu_1^*$ ,  $\mu_2^*$  — химические потенциалы систем **1** и **2** после приведения их в контакт;  $dN_{12}$ ,  $dN_{21}$  — число частиц, переходящих из системы **1** в систему **2** и наоборот за один и тот же малый промежуток времени. Так как  $dN_{12} = dN_{21}$ ,

$$\mu_1^* = \mu_2^*$$

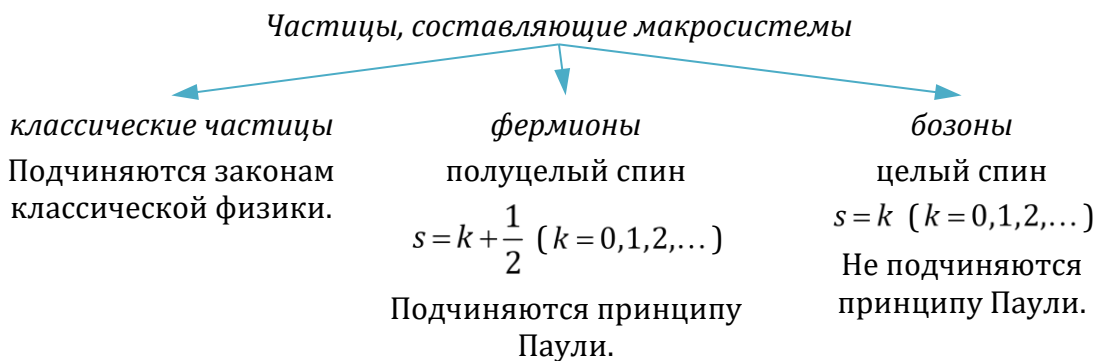
— в состоянии термодинамического равновесия химические потенциалы макросистем равны.

### 6.1.3. Статистическое описание состояния макросистемы

**Микропараметры** — параметры, характеризующие состояние каждой частицы, входящей в состав макросистемы: масса, импульс, координата, энергия и т. п.

Задача статистической физики — установление связи между микро- и макропараметрами.

Пусть имеется система  $N$  тождественных, слабо взаимодействующих частиц (*газ*). Благодаря взаимодействию между частицами система может прийти в равновесное состояние.



### 6.1.4. Фазовое пространство в классической физике

**Фазовое пространство** — 6-мерное пространство координат и проекций импульса:  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ .

Каждой частице сопоставляется *изобразительная точка*, координаты которой в фазовом пространстве полностью характеризуют состояние частицы. Изобразительная точка движется по *фазовой траектории*.

**ПРИМЕР**

Колебания пружинного маятника

Запишем закон сохранения механической энергии в применении к пружинному маятнику:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = W = \text{const},$$

где  $m$  — масса груза,  $v$  — его скорость,  $x$  — отклонение груза от положения равновесия,  $k$  — жёсткость пружины. Выразим энергию маятника через координаты двумерного фазового пространства — проекцию  $p_x$  импульса груза на направление колебаний и координату груза:

$$W = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

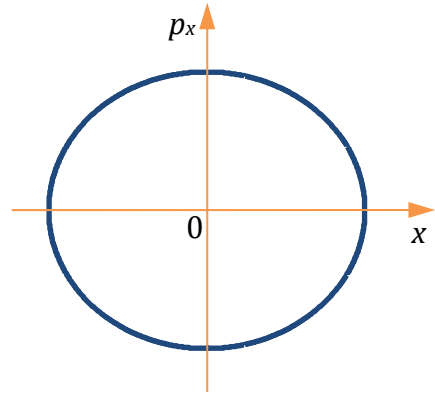


Рис. 41.6

Это уравнение фазовой траектории частицы, которая имеет форму эллипса (рис. 41.6).

Для макросистемы из  $N$  частиц имеем шестимерное облако из  $N$  изобразительных точек. Таким образом полностью задаётся микросостояние системы. Нас интересует форма этого облака и распределение изобразительных точек в нём.

Разобьём фазовое пространство на ячейки объёма  $dy = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  (микросостояние частицы задаётся с соответствующей точностью). Микросостояние системы определяется плотностью заполнения ячеек с учётом индивидуальных номеров частиц.

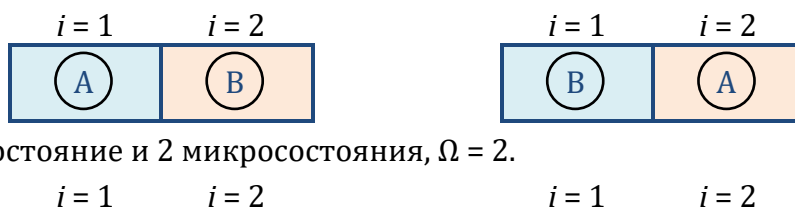
Число микросостояний, с помощью которых реализуется данное макросостояние, — *статистический вес*  $\Omega$  макросостояния.

Равновесному состоянию соответствует макросостояние с максимальным статистическим весом, т. е. то, которое реализуется наибольшим числом микросостояний.

Пронумеруем частицы и ячейки. Таким образом, состояние определённой частицы будет задаваться номером фазовой ячейки, в которой находится соответствующая изобразительная точка. Будем обозначать энергию частицы в  $i$ -ой ячейке  $\varepsilon_i$ . Макросостояние системы будет определяться числом изобразительных точек в каждой ячейке без учёта индивидуальных номеров частиц.

**ПРИМЕР**

Распределение двух изобразительных точек (частиц) по двум фазовым ячейкам



Это 1 макросостояние и 2 микросостояния,  $\Omega = 2$ .



1 макросостояние

1 микросостояние

$$\Omega = 1$$



1 макросостояние

1 микросостояние

$$\Omega = 1$$

## Лекция 42

## 6.1.5. Фазовое пространство в квантовой физике

В квантовой механике координата и соответствующая проекция импульса одновременно не измеримы. Соотношения неопределённостей Гейзенберга:

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}. \end{cases}$$

В результате этого на объём фазовой ячейки накладывается ограничение

$$\Delta \gamma = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \geq \frac{\hbar^3}{8}.$$

Различным фазовым ячейкам будут соответствовать различные квантовые состояния, если  $\Delta \gamma \sim \hbar^3$ . Одной ячейке соответствует одно квантовое состояние.

Примеры заполнения фазовых ячеек в различных квантовых термодинамических системах приведены на [рис. 42.1](#).

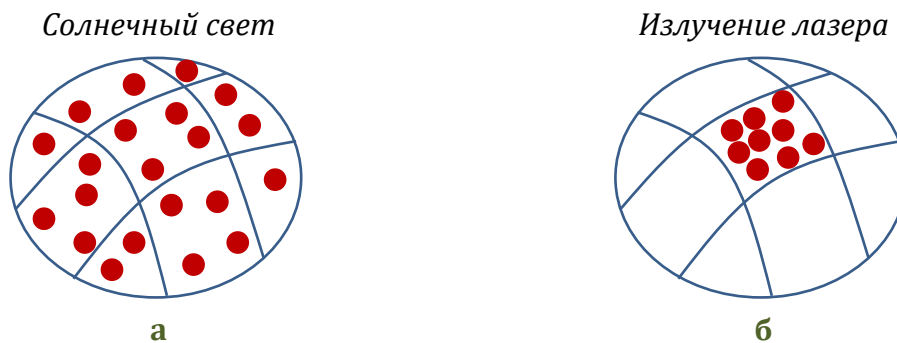


Рис. 42.1

Заполнение фазовых ячеек

Классические частицы



В одной ячейке —  
любое число  
изобразительных точек.

Квантовые частицы



фермионы

Подчиняются  
принципу Паули.  
В одной ячейке —  
2 изобразительные точки  
с противоположными  
спинами ( $\uparrow\downarrow$ ).



бозоны

Не подчиняются  
принципу Паули.  
В одной ячейке —  
любое число  
изобразительных точек.

Лучше взять ячейку объёмом

$$\Delta \gamma = \frac{h^3}{2}.$$

Найдём плотность заполнения фазовых ячеек, которая бы соответствовала равновесному состоянию системы. Будем исходить из условий, приведённых в [ТАБЛИЦЕ 42.1](#).

Таблица 42.1

	Классическая статистика	Квантовые статистики
1.	На размер ячейки не накладываются ограничения. Пусть $\Delta\gamma = \frac{h^3}{2}$ .	Объём ячейки $\Delta\gamma \geq \frac{h^3}{8}$ . Пусть $\Delta\gamma = \frac{h^3}{2}$ .
2.	Все частицы одинаковы, но различимы. Перестановка частиц изменяет микросостояние системы.	Частицы одинаковы и неразличимы. Перестановка частиц не изменяет микросостояние системы.
3.	Внутри ячейки может быть любое число изобразительных точек.	Для фермионов внутри ячейки может находиться не более 1 изобразительной точки. Для бозонов число изобразительных точек в ячейке не ограничено.
4.	Все допустимые микросостояния замкнутой системы равновероятны.	
5.	В замкнутой системе внутренняя энергия $U = \text{const}$ и число частиц $N = \text{const}$ (для бозонов — необязательно).	
6.	Равновесное состояние реализуется наибольшим числом микросостояний.	

**ПРИМЕР**

Распределение двух изобразительных точек по двум фазовым ячейкам

В [ТАБЛ. 42.2](#) показаны все возможные микросостояния такой макросистемы в случае, если она состоит из классических частиц, фермионов и бозонов. **Статистический вес макросистемы**  $\Omega_0$  — общее число микросостояний, в которых может находиться данная макросистема.

Таблица 42.2

Классические частицы		Бозоны		Фермионы	
(А)	(В)	○	○	○	○
(В)	(А)	○ ○			
(А) (В)			○ ○		
	(А) (В)				
$\Omega_0 = 4$		$\Omega_0 = 3$		$\Omega_0 = 1$	

**6.1.6. Функция распределения**

**Функция распределения** (см. [2.7.1](#))  $f(\varepsilon_i)$  определяется средней заполняемостью фазовых ячеек изобразительными точками (числом точек в одной ячейке) в малой области фазового пространства:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{dN(\varepsilon_i)}{dg(\varepsilon_i)},$$

где  $dN(\varepsilon_i)$  — число частиц, а  $dg(\varepsilon_i)$  — число ячеек, в которых энергия частицы принимает значения от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_i + d\varepsilon$ .

Проведя термодинамический расчёт, можно получить функции распределения, которые приведены в [ТАБЛ. 42.3](#) ( $k$  — постоянная Больцмана). **Это распределение частиц по ячейкам  $\varepsilon_i$ , а не по энергиям  $\varepsilon$ !**

Таблица 42.3

	Классические частицы	Фермионы	Бозоны
Спин	свойства частиц не важны	полуцелый	целый
Статистика	<i>Максвелла-Больцмана</i>	<i>Ферми-Дирака</i>	<i>Бозе-Эйнштейна</i>
Плотность заполнения ячеек	$\frac{N}{g} \ll 1$	$\frac{N}{g} \leq 1$	$\frac{N}{g} \sim 1$
Функция распределения	$f(\varepsilon_i) = e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}$	$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}$	$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}$
Химический потенциал	$\mu < 0$	$\mu < 0$	$\mu \leq 0$
Температура (см. <a href="#">6.1.7</a> )	$T > T_{кр}$	$T < T_{кр}$	

### 6.1.7. Критерий вырождения газа

Индивидуальные свойства частиц влияют на поведение макросистемы только при высокой плотности заполнения фазовых ячеек  $\left(\frac{N}{g} \sim 1, \frac{N}{g} > 1\right)$ . Такая система подчиняется квантовой статистике. Подобный газ называется **вырожденным**.

При низкой плотности заполнения ячеек  $\left(\frac{N}{g} \ll 1\right)$  индивидуальные свойства частиц не важны и работают законы классической физики. Такой газ называется **невырожденным**.

Параметром, который разграничивает вырожденный и невырожденный газ, является температура. Если  $T > T_{кр}$ , где  $T_{кр}$  — **критическая температура**, то газ не вырожден. Если  $T < T_{кр}$ , то газ вырожден.

Можно показать, что

$$T_{кр} \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{3k m_0},$$

где  $n$  — концентрация газа,  $m_0$  — масса частицы.

#### Численная оценка

Для идеального газа, состоящего из молекул,  $T_{кр} \sim 5$  К, т. е. этот газ при условиях, близких к нормальным, не вырожден.

Для электронного газа в металле  $T_{кр} \sim 5 \cdot 10^4$  К, т. е. этот газ вырожден.

## 6.2. Распределение молекул идеального газа по энергиям. Химический потенциал идеального газа

Эта тема рассматривалась в I семестре (2.7.2, 2.7.3). Подойдём к этому вопросу с другой стороны.

Функция распределения

$$f(\varepsilon_i) = e^{-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}, \quad (42.1)$$

$\mu < 0$ ; график функции распределения представлен на рис. 42.2. Газ не вырожден, т. е.  $f(\varepsilon_i) \ll 1$ .

Подсчитаем число частиц, энергия которых лежит в интервале от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_i + d\varepsilon$ . По определению функции распределения

$$f(\varepsilon_i) = \frac{dN_{\varepsilon_i}}{dg_{\varepsilon_i}} \Rightarrow dN_{\varepsilon_i} = f(\varepsilon_i) dg_{\varepsilon_i}.$$

Далее индекс  $i$  опустим. Число фазовых ячеек

$$dg = \frac{d\Gamma}{\Delta\gamma},$$

где  $d\Gamma$  — объём области фазового пространства, соответствующей энергиям частиц от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ ;  $\Delta\gamma = \frac{h^3}{2}$  — объём фазовой ячейки.

Пусть энергия молекулы не зависит от её координаты. Тогда

$$d\Gamma = \left( \iiint_V dx dy dz \right) dp_x dp_y dp_z = V d\Gamma_p,$$

$V$  — объём сосуда, в котором находится газ;

$$dg = \frac{V d\Gamma_p}{h^3/2}. \quad (42.2)$$

Найдём  $d\Gamma_p$  — элемент объёма в пространстве импульсов — трёхмерном подпространстве фазового пространства. Выразим энергию частицы через её импульс:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m_0}.$$

Энергия частицы зависит только от модуля импульса. Поэтому разбиваем подпространство импульсов на бесконечно тонкие сферические слои радиусом  $p$  и толщиной  $dp$  (рис. 42.3). Объём такого слоя

$$d\Gamma_p = 4\pi p^2 dp.$$

Подставим это выражение в (42.2):

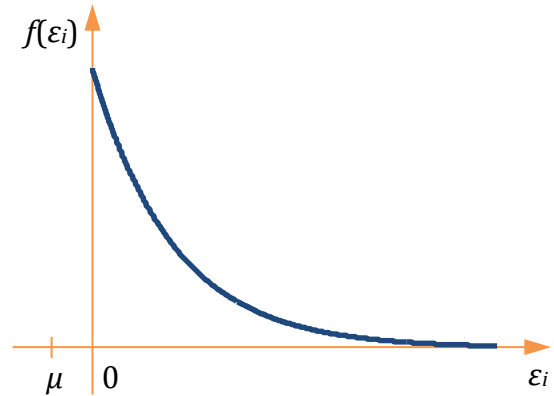


Рис. 42.2

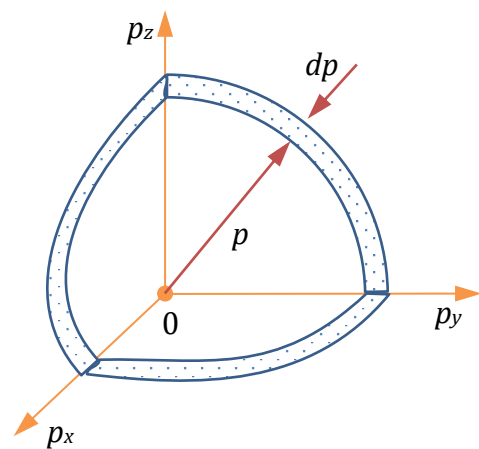


Рис. 42.3

$$dg = \frac{V4\pi p^2 dp}{h^3/2}.$$

Перейдём от  $p$  к  $\varepsilon$ :

$$p = \sqrt{2m_0\varepsilon}, \quad dp = \sqrt{2m_0} \frac{d\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{m_0}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}};$$

$$dg = \frac{V4\pi \cdot 2m_0\varepsilon}{h^3/2} \sqrt{\frac{m_0}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{16\pi V m_0^{3/2}}{h^3 \sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Число частиц, учитывая вид функции распределения (42.1),

$$dN_\varepsilon = f(\varepsilon) dg = \frac{16\pi V m_0^{3/2}}{h^3 \sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} d\varepsilon.$$

Найдём химический потенциал из условия нормировки  $\int dN_\varepsilon = N$ :

$$N = \int_0^\infty \frac{16\pi V m_0^{3/2}}{h^3 \sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{4\pi V (2m_0)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon =$$

$$= \frac{4\pi V (2m_0)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (kT)^{3/2} = \frac{2V (2\pi m_0 kT)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{\mu}{kT}};$$

$$\mu = kT \ln \frac{Nh^3}{2V (2\pi m_0 kT)^{3/2}};$$

$$e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{Nh^3}{2V (2\pi m_0 kT)^{3/2}},$$

$$dN_\varepsilon = \frac{16\pi V m_0^{3/2}}{h^3 \sqrt{2}} \frac{Nh^3}{2V (2\pi m_0 kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \frac{2N}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon.$$

Введём функцию распределения частиц по энергиям как плотность вероятности попадания частицы в данный интервал энергий:

$$F(\varepsilon) = \frac{dN_\varepsilon}{Nd\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Графики этой функции при разных температурах газа представлены на [рис. 42.4](#).

Среднее значение энергии частицы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty F(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{3}{2} kT.$$



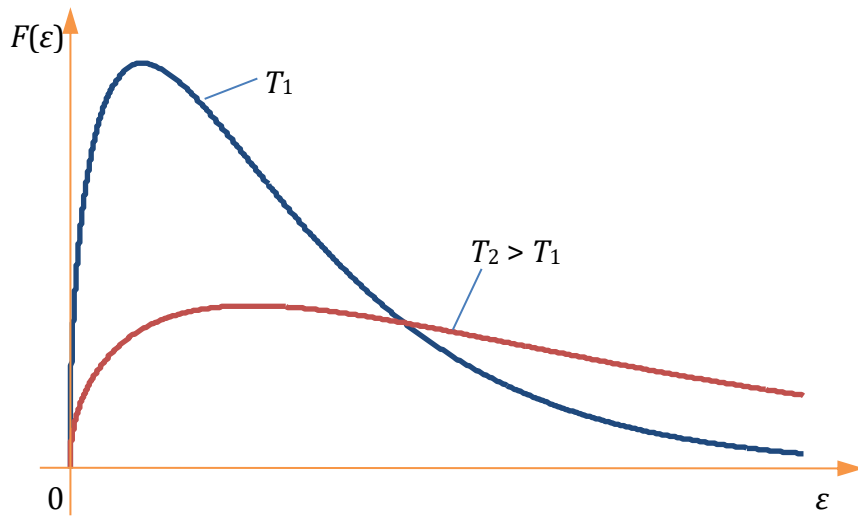


Рис. 42.4

## Лекция 43

## 6.3. Тепловое излучение. Фотонный газ

## 6.3.1. Тепловое излучение и его характеристики

**Тепловое излучение** — электромагнитное излучение, испускаемое телами за счёт их внутренней энергии. Оно свойственно всем телам при любой температуре. Речь пойдёт о *равновесном излучении*, т. е. находящемся в термодинамическом равновесии с излучающим телом.

**Энергетическая светимость (интегральная излучательная способность)** — энергия, испускаемая телом в единичный промежуток времени с единичного участка поверхности тела по всем направлениям:

$$R_T = \frac{dW}{dSdt},$$

$$[R_T] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

**Спектральная излучательная (испускательная) способность** — энергия, испускаемая с единичного участка поверхности тела в единичный промежуток времени по всем направлениям в единичном интервале частот<sup>86</sup> (длин волн):

$$r_{\omega,T} = \frac{dW}{dSdt d\omega}, \quad r_{\lambda,T} = \frac{dW}{dSdt d\lambda};$$

$$[r_{\omega,T}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}, \quad [r_{\lambda,T}] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Связь интегральной и спектральной излучательных способностей:

$$r_{\omega,T} = \frac{dR_T}{d\omega}, \quad r_{\lambda,T} = \frac{dR_T}{d\lambda};$$

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda.$$

Связь  $r_{\omega,T}$  и  $r_{\lambda,T}$ :

$$d\lambda = d\left(\frac{2\pi v}{\omega}\right) = -\frac{2\pi v}{\omega^2} d\omega;$$

$$r_{\omega,T} d\omega = r_{\lambda,T} d\lambda \Rightarrow r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} \frac{d\omega}{d\lambda} = r_{\omega,T} \frac{d\omega \cdot \omega^2}{2\pi v d\omega} = \frac{4\pi^2 v^2}{2\pi v \lambda^2} r_{\omega,T} = \frac{2\pi v}{\lambda^2} r_{\omega,T}, \quad (43.1)$$

здесь  $v$  — скорость света в среде.

**Спектральная поглощательная способность** — безразмерная величина, равная доле энергии, падающей на поверхность тела в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , которая поглощается этим телом:

<sup>86</sup> В этом параграфе частота — это циклическая частота  $\omega$ . Все формулы, содержащие эту величину, можно записать через частоту  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ .

$$a_{\omega, T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}.$$

**Плотность энергии излучения** — энергия излучения в единичном объёме:

$$w_T = \frac{dW}{dV}, [w_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

**Спектральная плотность энергии излучения** — плотность энергии излучения, приходящаяся на единичный интервал частот<sup>87</sup>:

$$u_{\omega, T} = \frac{dw_T}{d\omega},$$

$$[u_{\omega, T}] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Связь  $u_{\omega, T}$  и  $w_T$ :

$$w_T = \int_0^{\infty} u_{\omega, T} d\omega.$$

Спектральная и интегральная плотность энергии равновесного теплового излучения не зависят от природы излучающего тела, а зависят только от температуры (спектральная плотность энергии — от частоты/длины волны).

### 6.3.2. Чёрное и серое тело. Закон Кирхгофа

**Серое тело** — тело, спектральная поглощательная способность которого не зависит от частоты (длины волны) падающего излучения, притом что она меньше единицы:

$$a_{\omega, T} = a_T < 1.$$

**Чёрное тело (абсолютно чёрное тело)** — тело, поглощающее всё падающее на него излучение:

$$a_{\omega, T}^0 = a_T^0 = 1.$$

#### Модель чёрного тела

Абсолютно чёрных тел в природе не бывает, но можно создать объект, по своим оптическим свойствам сколь угодно приближенный к чёрному телу. В закрытом сосуде (лучше с зачернённой внутренней поверхностью) нужно сделать малое по сравнению с размерами сосуда отверстие (рис. 43.1). Если на это отверстие падает свет, то, проходя через отверстие, он либо поглощается внутренней поверхностью сосуда, либо отражается от неё, затем снова падает на внутреннюю поверхность, опять поглощается или отражается и т. д. Таким образом, свет, падающий на отверстие, практически не выходит из него, т. е. отверстие является чёрным телом.

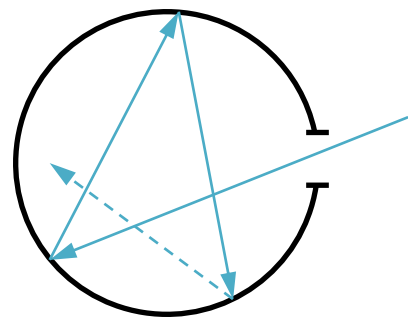


Рис. 43.1

**Демонстрация:** Модель абсолютно чёрного тела

<sup>87</sup> Аналогично можно ввести  $u_{\lambda, T}$ ,  $a_{\lambda, T}$ .

**Закон Кирхгофа:** отношение спектральной излучательной и поглощательной способностей тела не зависит от его природы, а является универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры, равной спектральной излучательной способности чёрного тела;

$$\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = r_{\omega,T}^0.$$

### Доказательство

Пусть внутри чёрной оболочки помещено нечёрное тело (рис. 43.2). Так как оба тела находятся в равновесии с излучением, энергия, поглощённая участком поверхности нечёрного тела площадью  $dS$  в любом малом интервале частот  $d\omega$  за время  $dt$ , равно излучённой энергии в том же интервале:

$$dW_{\text{погл}} = dW_{\text{изл}}.$$

По определению спектральной поглощательной способности

$$dW_{\text{погл}} = a_{\omega,T} dW_{\text{пад}},$$

где  $dW_{\text{пад}}$  — энергия излучения в том же диапазоне, падающего на ту же площадку в тот же промежуток времени; по определению спектральной излучательной способности

$$dW_{\text{изл}} = r_{\omega,T} d\omega dS dt.$$

На участок поверхности чёрного тела площадью  $dS$  падает за время  $dt$  столько же излучения, что и на участок поверхности нечёрного тела той же площади:

$$dW_{\text{пад}} = dW_{\text{пад}}^0.$$

Но чёрное тело поглощает всё падающее на него излучение и, следовательно, столько же излучает:

$$dW_{\text{пад}}^0 = dW_{\text{погл}}^0 = dW_{\text{изл}}^0 = r_{\omega,T}^0 d\omega dS dt.$$

Из этих равенств следует, что

$$r_{\omega,T} d\omega dS dt = a_{\omega,T} r_{\omega,T}^0 d\omega dS dt \Rightarrow \frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = r_{\omega,T}^0, \text{ ч. т. д.}$$

### Демонстрация: Кубок Лесли

Связь  $r_{\omega,T}^0$  и  $u_{\omega,T}$ :

$$r_{\omega,T}^0 = \frac{v}{4} u_{\omega,T}. \quad (43.2)$$

### Доказательство

Пусть в единичном объёме полости, заполненной равновесным тепловым излучением, находится  $dn_{\omega}$  фотонов с циклической частотой от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Энергия этих фотонов

$$dW = \varepsilon dn_{\omega} = \hbar \omega dn_{\omega} = u_{\omega,T} d\omega.$$

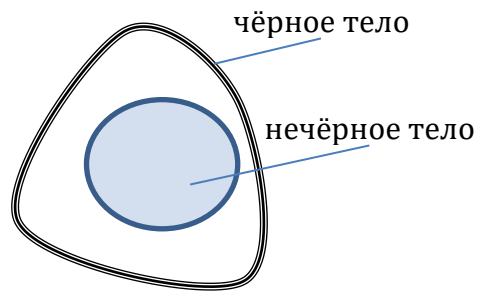


Рис. 43.2

Фотоны летят внутри полости по всем направлениям. Число ударов фотонов о стенку в единичный промежуток времени равно  $\frac{1}{4}v dn_\omega$ . Поэтому энергия излучения, падающего на единичный участок поверхности тела в единичный промежуток времени,

$$dW_{\text{пад}} = \frac{v}{4} \hbar \omega dn_\omega.$$

Эта же величина равна энергии, излучённой тем же участком поверхности в единичный промежуток времени,  $dW_{\text{изл}} = r_{\omega,T}^0 d\omega$ . Из этого следует

$$r_{\omega,T}^0 d\omega = \frac{v}{4} \hbar \omega dn_\omega = \frac{v}{4} u_{\omega,T} d\omega \Rightarrow \frac{r_{\omega,T}^0}{u_{\omega,T}} = \frac{v}{4}, \text{ ч. т. д.}$$

### 6.3.3. Фотонный газ. Подсчёт числа фотонов с энергией от $\varepsilon$ до $\varepsilon + d\varepsilon$

Так как фотоны — бозоны (спин фотона  $s = 1$ ), они подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна; функция распределения по фазовым ячейкам

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}.$$

Разберёмся, чему равен химический потенциал  $\mu$  фотонного газа. Число частиц  $N \neq \text{const}$ , так как фотоны непрерывно поглощаются и излучаются. Фотонный газ стремится к минимуму внутренней энергии  $U$  за счёт изменения  $N$ :

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0.$$

Но по определению химического потенциала  $\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{V=\text{const}, S=\text{const}}$ . Поэтому

$$\mu = 0.$$

С учётом равенства нулю химического потенциала функция распределения запишется как

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}$$

(здесь и далее в этом разделе мы опускаем индекс  $i$ ).

По определению функции распределения

$$f(\varepsilon) = \frac{dN_\varepsilon}{dg},$$

где  $dN_\varepsilon$  — число фотонов с энергией от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ ,  $dg$  — число ячеек, соответствующих этой энергии.

Число фазовых ячеек в фазовом объёме  $d\Gamma$ , в котором энергия частиц лежит  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ ,

$$dg = \frac{d\Gamma}{h^3/2},$$

так как  $h^3/2$  — объём фазовой ячейки. Поскольку энергия фотона не зависит от координаты,

$$d\Gamma = \left( \iiint_V dx dy dz \right) dp_x dp_y dp_z = V d\Gamma_p,$$

где  $V$  — объём полости, в которой находится фотонный газ,  $d\Gamma_p$  — элемент объёма в подпространстве импульсов. Так как энергия фотона зависит только от модуля импульса, а не от его направления, выбираем  $d\Gamma_p$  в виде тонкого сферического слоя радиуса  $p$  и толщины  $dp$  (рис. 42.3):

$$d\Gamma_p = 4\pi p^2 dp.$$

Так как энергия фотона  $\varepsilon = cp$  ( $c$  — скорость света в вакууме; если излучение распространяется в веществе, в всех формулах этого параграфа следует заменить  $c$  на  $v$ ),

$$p = \frac{\varepsilon}{c}, dp = \frac{d\varepsilon}{c} \Rightarrow d\Gamma_p = \frac{4\pi\varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3};$$

$$dg = \frac{V \cdot 2 \cdot 4\pi\varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3 h^3} = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon;$$

$$dN_\varepsilon = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}$$

или

$$dN_\varepsilon = \frac{V}{\pi^2 c^3 h^3} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \quad (43.3)$$

#### 6.3.4. Спектральная излучательная способность чёрного тела

Энергия фотонов, у каждого из которых энергия от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ , в объёме  $V$

$$dW = \varepsilon dN_\varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon = \hbar\omega$ , спектральная плотность энергии излучения

$$u_{\omega,T} = \frac{dW}{V d\omega} = \frac{\hbar\omega dN_\varepsilon}{V d\omega}.$$

Подставив сюда выражение (43.3), получим

$$u_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega}{V} \frac{V}{\pi^2 c^3 h^3} \frac{\hbar^2 \omega^2 \hbar d\omega}{\left( e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right) d\omega},$$

$$u_{\omega,T} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Из соотношения (43.2) следует, что

$$r_{\omega,T} = \frac{c}{4} u_{\omega,T} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Из (43.1)

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c}{\lambda^2} r_{\omega,T} = \frac{2\pi c \hbar}{4\pi^2 c^2 \lambda^2} \frac{8\pi^3 c^3}{\lambda^3 \left( e^{\frac{2\pi \hbar c}{\lambda k T}} - 1 \right)} = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{\left( e^{\frac{2\pi \hbar c}{\lambda k T}} - 1 \right)} = \frac{2\pi c^2 \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{\left( e^{\frac{\hbar c}{\lambda k T}} - 1 \right)}.$$

Итак,

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar \omega}{k T}} - 1}, \quad r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{\left( e^{\frac{\hbar c}{\lambda k T}} - 1 \right)} \quad (43.4)$$

— *формула Планка*.

График функции  $r_{\omega,T}$  представлен на [рис. 43.3](#), а функции  $r_{\lambda,T}$  — на [рис. 43.4](#).

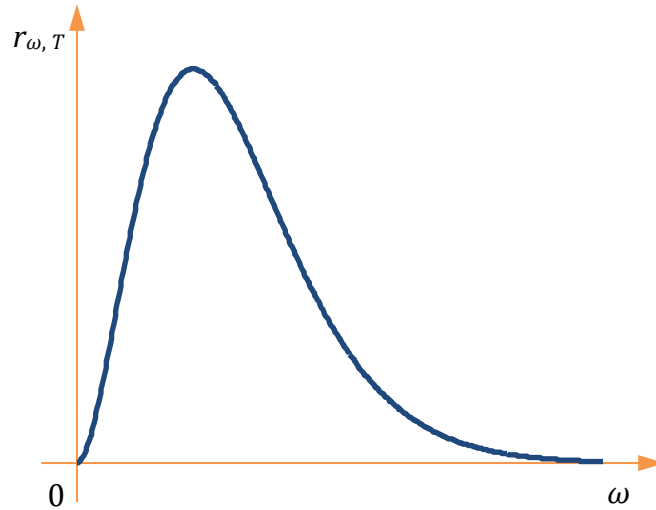


Рис. 43.3

### 6.3.5. Законы излучения чёрного тела

1. Закон Кирхгофа
2. Закон Планка
3. **Закон Стефана-Больцмана:** интегральная излучательная способность чёрного тела пропорциональна четвёртой степени термодинамической температуры:

$$R_T = \sigma T^4,$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$  — *постоянная Стефана-Больцмана*.

#### Доказательство

Интегральная излучательная способность чёрного тела

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \omega^3 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{k T}} - 1 \right)^{-1} d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{k T}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \left( \frac{\hbar \omega}{k T} \right)^3 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{k T}} - 1 \right)^{-1} d \left( \frac{\hbar \omega}{k T} \right).$$

Обозначим  $\frac{\hbar \omega}{k T} \equiv \xi$ ;

$$R_T = \frac{k^4}{4\pi^2 c \hbar^3} T^4 \int_0^\infty \xi^3 (e^\xi - 1)^{-1} d\xi.$$

Интеграл в этом выражении — это константа, табличная величина. Поэтому  $R_T \sim T^4$ , ч. т. д.

- 4. Закон смещения Вина:** длина волны, соответствующая максимуму спектральной излучательной способности чёрного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре;

$$\lambda_m T = b,$$

где  $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$  м·К — *постоянная Вина*.

**Доказательство**

Условие максимума спектральной излучательной способности

$$\frac{dr_{\lambda,T}}{d\lambda} = 0.$$

Из формулы Планка

$$\begin{aligned} -5\lambda^{-6} \left( e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right) + \lambda^{-5} e^{\frac{hc}{kT\lambda}} \frac{hc}{kT\lambda^2} &= 0, \\ -5e^{\frac{hc}{kT\lambda}} + 5 + \frac{hc}{kT\lambda} e^{\frac{hc}{kT\lambda}} &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим  $\frac{hc}{kT\lambda} \equiv x$ ; получим

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0.$$

Это трансцендентное уравнение, имеющее корень  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{hc}{kT\lambda_m}, \quad \lambda_m T = \frac{hc}{kx_0} = \text{const}, \text{ ч. т. д.}$$

На [рис. 43.4](#) показано, как изменяется спектральная излучательная способность  $r_{\lambda,T}$  в зависимости от температуры излучающего чёрного тела. Более нагретое тело излучает больше во всём диапазоне длин волн; максимум его спектральной излучательной способности смещён в сторону более коротких волн.

**Демонстрация:** Постепенное расширение спектра при повышении температуры лампы накаливания (закон Вина)



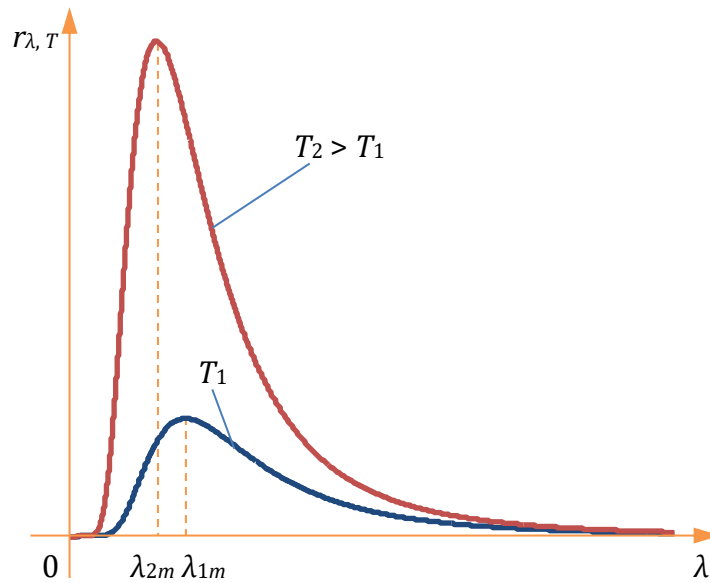


Рис. 43.4

### 5. Формула Рэля–Джинса

Из классических соображений можно получить формулу

$$r_{\omega,T} = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^2 c^2}$$

— *формула Рэля–Джинса*. Из этой формулы следует

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega \rightarrow \infty$$

— «*ультрафиолетовая катастрофа*». Получается, что энергия излучения тела бесконечно велика, что противоречит закону сохранения энергии.

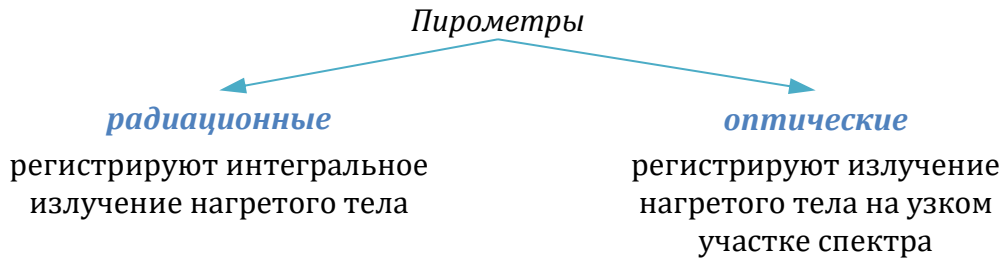
Ультрафиолетовая катастрофа была преодолена Планком, который при выводе формулы для спектральной излучательной способности воспользовался гипотезой о том, что энергия гармонического осциллятора может принимать только дискретный ряд значений:  $\hbar\omega$ ,  $2\hbar\omega$ ,  $3\hbar\omega$  и т. д., кратных *кванту энергии*. Формула Рэля–Джинса — частный случай формулы Планка при малых частотах излучения  $\left(\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1\right)$ :

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \approx \frac{\cancel{\hbar}}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3 kT}{\cancel{\hbar}\omega} = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^2 c^2}.$$

## Лекция 44

## 6.3.6. Оптическая пирометрия

**Оптическая пирометрия** — совокупность оптических методов измерения температур, основанных на законах теплового излучения. Приборы, которые при этом используются, называются **пирометрами**.



Введём ряд энергетических характеристик излучения<sup>88</sup>.

**Поток излучения**  $\Phi$  — средняя мощность оптического излучения за время, много большее периода световой волны.

**Энергетическая освещённость** — поток излучения, приходящийся на единичный участок поверхности тела, на которое падает свет:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}; [E] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

**Энергетическая сила света** — поток излучения тела в определённом направлении (под углом  $\varphi$  к нормали поверхности излучающего тела), приходящийся на единичный телесный угол:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}; [I] = \frac{\text{Вт}}{\text{ср}}.$$

**Энергетическая яркость** — энергетическая сила света, испускаемого с единичного участка поверхности тела в направлении нормали к поверхности:

$$B = \frac{dI}{dS \cos \varphi}; [B] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср}}.$$

Смысл обозначений  $dS$ ,  $d\Omega$ ,  $\varphi$  показан на [рис. 44.1](#).

**Спектральная плотность энергетической яркости** — энергетическая яркость в единичном диапазоне частот (длин волн):

$$b_\omega = \frac{dB}{d\omega}, b_\lambda = \frac{dB}{d\lambda};$$

$$[b_\omega] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср}}, [b_\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{ср}}.$$

**Радиационная температура**  $T_p$  — температура чёрного тела, при которой его энергетическая яркость равна энергетической яркости исследуемого тела:

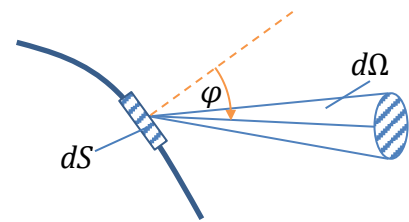


Рис. 44.1

<sup>88</sup> Следует отличать вводимые ниже характеристики от аналогичных фотометрических величин, которые вводятся для видимого излучения и привязаны к чувствительности глаза к оптическому излучению.

$$B^0(T_p) = B.$$

**Яркостная температура**  $T_{\text{я}}$  — температура чёрного тела, при которой его спектральная плотность энергетической яркости равна спектральной плотности энергетической яркости исследуемого тела для данной длины волны:

$$b_{\lambda}^0(T_{\text{я}}) = b_{\lambda}.$$

**Цветовая температура**  $T_{\text{ц}}$  — температура чёрного тела, при которой относительные распределения спектральной плотности энергетической яркости исследуемого тела и чёрного тела близки в видимой области спектра:

$$\frac{b_{\lambda}^0(\lambda_1, T_{\text{ц}})}{b_{\lambda}^0(\lambda_2, T_{\text{ц}})} = \frac{b_{\lambda}(\lambda_1, T)}{b_{\lambda}(\lambda_2, T)}.$$

Обычно  $\lambda_1 = 660$  нм (красный) и  $\lambda_2 = 470$  нм (зелёно-голубой).

Цветовая температура серого тела совпадает с его истинной (термодинамической) температурой и может быть найдена из закона смещения Вина.

## 6.4. Электронный газ в металле

### 6.4.1. Общие положения. Модель свободных электронов

Электронные оболочки атомов, находящихся в узлах кристаллической решётки, перекрываются, в результате этого валентные электроны обобществляются и становятся свободными. Можно считать, что сила, с которой кристаллическая решётка, а также соседние электроны действуют на электрон, равна нулю. Поэтому в первом приближении электронный газ можно представить как коллектив электрически нейтральных частиц с массой  $m = m_e$ , находящихся в сосуде объёмом, равном объёму образца металла.

Свойства электронного газа

1. Электроны находятся внутри потенциального ящика. Энергия электронов квантована.
2. Электронный газ вырожден (критическая температура  $T_{\text{кр}} \sim 5 \cdot 10^4$  К).
3. Спин электрона  $s = \frac{1}{2}$ . Электроны подчиняются статистике Ферми–Дирака.

Функция распределения (плотность заполнения фазовых ячеек)

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}.$$

### 6.4.2. Распределение электронов по энергиям

Подсчитаем число электронов с энергией от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_i + d\varepsilon$ . По определению функции распределения

$$f(\varepsilon_i) = \frac{dN_{\varepsilon_i}}{dg}.$$

(Далее индекс  $i$  опускаем.) Число фазовых ячеек, в которых энергия частицы лежит от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_i + d\varepsilon$ ,

$$dg = \frac{d\Gamma}{h^3/2} = \frac{2Vd\Gamma_p}{h^3},$$

здесь  $V$  — объём образца,  $d\Gamma_p$  — элемент фазового объёма в подпространстве импульсов;

$$d\Gamma_p = 4\pi p^2 dp.$$

Выразим импульс электрона через его энергию:

$$p = \sqrt{2m\varepsilon}, \quad dp = \frac{\sqrt{2m}d\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}};$$

$$d\Gamma_p = \frac{4\pi \cdot 2m\varepsilon \cdot m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 4\pi m \sqrt{2m\varepsilon} d\varepsilon;$$

$$dg = \frac{2V}{h^3} 4\pi m \sqrt{2m\varepsilon} d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Число электронов с энергией от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$

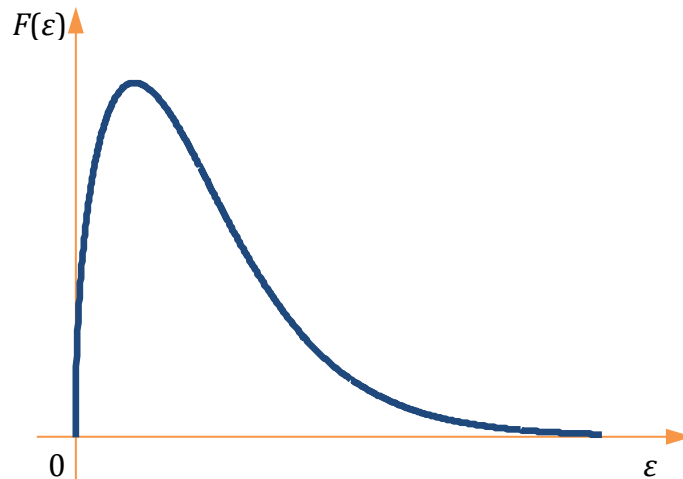
$$dN_\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

**Функция распределения электронов по энергиям**

$$F(\varepsilon) = \frac{dN_\varepsilon}{d\varepsilon},$$

$$F(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

График этой функции представлен на [рис. 44.2](#).



**Рис. 44.2**

### 6.4.3. Электронный газ при $T = 0$

#### 1. Функции распределения электронов по энергетическим ячейкам и по энергиям

В потенциальной яме имеется система энергетических уровней. При  $T = 0$  заполняется  $\frac{N}{2}$  нижних уровней ( $N$  — общее число электронов). Последний заполненный энергетический уровень при  $T = 0$  — **уровень Ферми**, а энергия электрона, соответствующая этому уровню, — **энергия Ферми**  $\varepsilon_F$ . При  $T = 0$  заполнены все энергетические ячейки с  $\varepsilon_i \leq \varepsilon_F$ . Поэтому функция распределения по энергетическим ячейкам при  $T = 0$

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i) = 1, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_F, \\ f(\varepsilon_i) = 0, & \varepsilon_i > \varepsilon_F; \end{cases}$$

график этой функции изображён на [рис. 44.3А](#). С другой стороны, подставляя  $T = 0$  в функцию распределения Ферми-Дирака, получим

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu_0}{kT}} + 1} \Big|_{T \rightarrow 0} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1, & \varepsilon \leq \mu_0, \\ \frac{1}{e^{\infty} + 1} = 0, & \varepsilon > \mu_0, \end{cases}$$

здесь  $\mu_0$  — химический потенциал электронного газа при  $T = 0$ . Таким образом,

$$\mu_0 = \varepsilon_F$$

(в общем случае  $\mu \neq \varepsilon_F$ ).

Функция распределения электронов по энергиям

$$F(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}, & \varepsilon \leq \mu_0, \\ 0, & \varepsilon > \mu_0. \end{cases}$$

График этой функции представлен на [рис. 44.3Б](#).

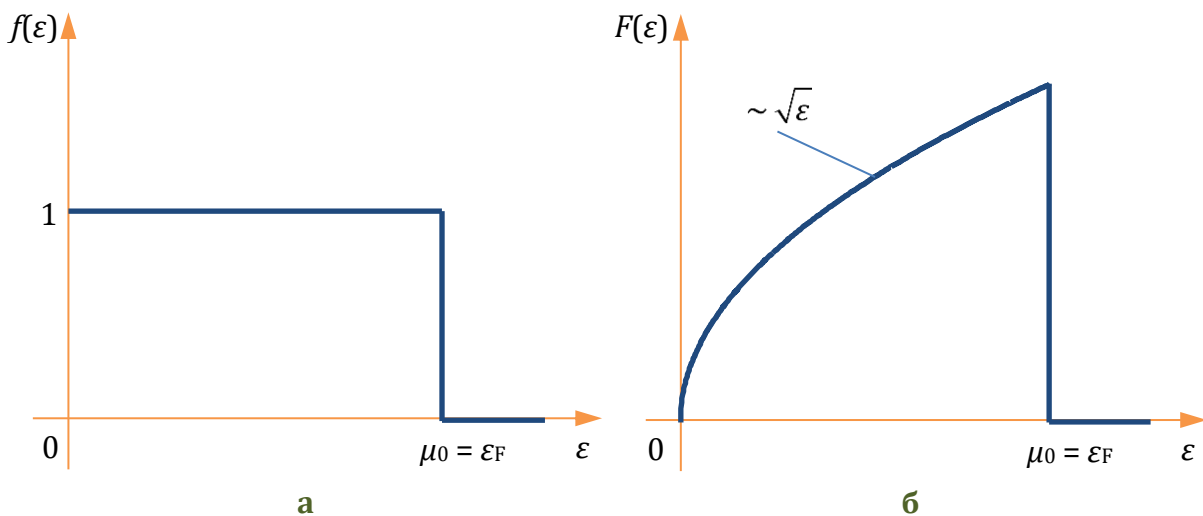


Рис. 44.3

## 2. Расчёт энергии Ферми

Условие нормировки функции  $F(\varepsilon)$ :

$$N = \int dN_\varepsilon = \int_0^\infty F(\varepsilon) d\varepsilon.$$

При  $T = 0$

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{\varepsilon_F}^\infty 0 d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon_F^{3/2}}{3/2} = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2},$$

$$\varepsilon_F = \left( \frac{3Nh^3}{8\pi V} \right)^{2/3} \frac{1}{2m} = \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{8m}, \quad (44.1)$$

где  $n = \frac{N}{V}$  — концентрация электронов.

### Численная оценка

$$n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}, m \sim 10^{-30} \text{ кг} \Rightarrow \varepsilon_F = (3 \div 10) \text{ эВ}$$

## 3. Расчёт средней энергии электрона

Среднее значение энергии электрона

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty F(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon}{N}$$

При  $T = 0$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\varepsilon_F} \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{4\pi}{nh^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon_F^{5/2}}{5/2} = \frac{8\pi}{5nh^3} (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{5/2}.$$

Так как из (44.1) следует

$$n = \frac{\pi \varepsilon_F^{3/2} (8m)^{3/2}}{3 h^3},$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{8\pi (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{5/2} 3h^3}{5h^3 \pi \varepsilon_F^{3/2} (8m)^{3/2}} = \frac{3}{5} \varepsilon_F.$$

### Численная оценка

Средняя энергия электрона

$$\langle \varepsilon \rangle \approx \frac{3}{5} \cdot 5 \text{ эВ} = 3 \text{ эВ};$$

среднеквадратичная скорость электрона

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{2\langle \varepsilon \rangle}{m}} \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

## 4. Внутренняя энергия электронного газа

Внутренняя энергия 1 моля электронного газа

$$U = N_A \langle \varepsilon \rangle,$$

$N_A$  — число Авогадро.

Найдём эффективную температуру классического идеального газа, внутренняя энергия 1 моля которого равна внутренней энергии 1 моля электронного газа при  $T = 0$ :

$$N_A \langle \varepsilon \rangle = N_A \langle \varepsilon_{ид} \rangle \Rightarrow \frac{3}{2} kT_{эфф} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \Rightarrow T_{эфф} = \frac{2}{5} \frac{\varepsilon_F}{k}.$$

### Численная оценка

Внутренняя энергия 1 моля электронного газа при  $T = 0$

$$U = 6 \cdot 10^{23} \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 300 \text{ кДж}.$$

Для сравнения: внутренняя энергия 1 моля классического идеального газа при  $T = 300 \text{ К}$

$$U_{ид} = \frac{3}{2} RT \approx 3,7 \text{ кДж!}$$

(Здесь  $R$  — универсальная газовая постоянная.)

Эффективная температура классического идеального газа при  $\varepsilon_F = 5 \text{ эВ}$

$$T_{эфф} = \frac{2}{5} \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ К}.$$

Между классическими и квантовыми представлениями огромная разница!

### 6.4.4. Влияние температуры на функции распределения

При повышении температуры от абсолютного нуля до  $T$  электрон приобретает энергию

$$\Delta \varepsilon \approx kT.$$

Повышение температуры влияет на электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми в полосе шириной  $kT$ <sup>89</sup>.

Можно получить, что химический потенциал электронного газа

$$\mu = \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right].$$

Так как  $kT \ll \varepsilon_F$ , можно считать, что  $\mu \approx \varepsilon_F$ .

Функция распределения электронов по фазовым ячейкам

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1}, \quad (44.2)$$

график этой функции показан на [рис. 44.4А](#).

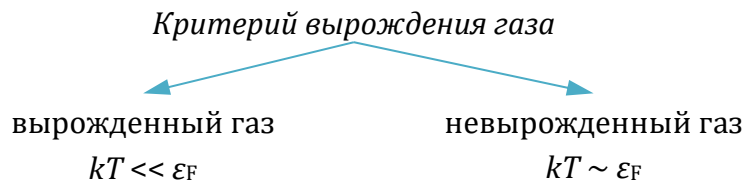
Функция распределения по энергиям

$$F(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1}, \quad (44.3)$$

<sup>89</sup> Это выражение нужно понимать так: энергия электронов отличается от уровня Ферми не более, чем на величину порядка  $kT$ .

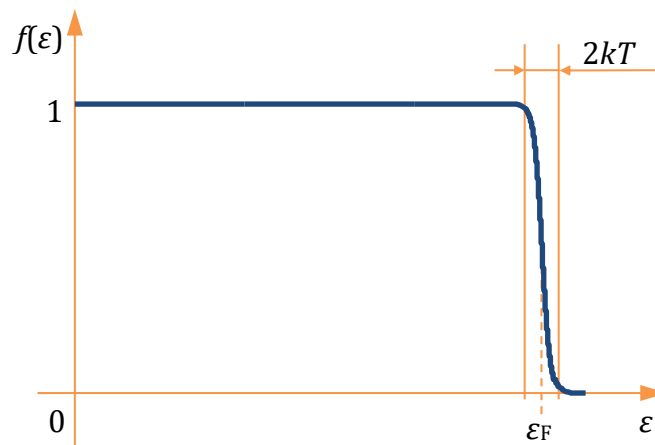
график на [рис. 44.4б](#).

При  $kT \sim \varepsilon_F$  функция распределения (44.2) превращается в функцию распределения Максвелла–Больцмана.

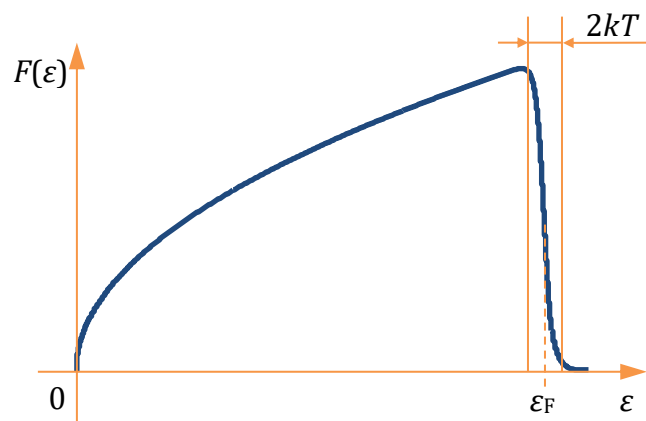


Критическая температура электронного газа

$$T_{\text{кр}} = \frac{\varepsilon_F}{k} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ К.}$$



**а**



**б**

**Рис. 44.4**

#### 6.4.5. Теплоёмкость электронного газа

При  $T \neq 0$  средняя энергия электрона

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right].$$

Молярная теплоёмкость электронного газа



$$C_e = N_A \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} = \frac{3}{5} N_A \varepsilon_F \frac{5\pi^2 k^2 2T}{12 \varepsilon_F^2} = \frac{\pi^2 kRT}{2 \varepsilon_F},$$

$$R = kN_A.$$

По закону Дюлонга и Пти молярная теплоёмкость кристаллической решётки

$$C_{\text{реш}} = 3R.$$

Сравним эти теплоёмкости:

$$\frac{C_e}{C_{\text{реш}}} = \frac{\pi^2 kT}{6\varepsilon_F}.$$

При низких температурах  $C_e \ll C_{\text{реш}}$ .

## Лекция 45

## 6.5. Электропроводность металлов

При возникновении в проводнике электрического поля напряжённостью  $\vec{E}$  возникает электрический ток, т. е. упорядоченное движение электронов — **дрейф**. Средняя скорость этого движения — **скорость дрейфа**  $\vec{u}$ . Электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми, под действием электрического поля переходят на вышележащие уровни.

Рассмотрим малый участок проводника сечением  $S_{\perp}$ , который электрон со средней дрейфовой скоростью проходит за время  $dt$  (рис. 45.1). Модуль плотности тока

$$j = \frac{dQ}{S_{\perp} dt} = \frac{enS_{\perp} u dt}{S_{\perp} dt} = enu;$$

где  $n$  — концентрация электронов; с учётом знака заряда электрона

$$\vec{j} = -en\vec{u}.$$

**Численная оценка**

Дрейфовая скорость  $u \approx 1 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ , среднеквадратичная скорость теплового движения

электрона (см. 6.4.3)  $v_{\text{кв}} \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow v_{\text{кв}} \gg u$ .

Найдём, как зависит дрейфовая скорость электрона от напряжённости электрического поля. Рассмотрим процесс резкого включения и выключения поля: после включения поля электроны не сразу разгоняются, а после выключения не сразу останавливаются. Поэтому изменение тока запаздывает по отношению к изменению поля.

Запишем II закон Ньютона для электрона в металле:

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} + \vec{F}_c, \quad (45.1)$$

где  $m^*$  — **эффективная масса** электрона,  $\vec{v}$  — его скорость,  $\vec{F}_c$  — тормозящая сила, описывающая влияние соударений электрона с неоднородностями и узлами кристаллической решётки (рис. 45.2). Положим  $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$ .

Спроецируем уравнение (45.1) на ось  $x$ :

$$m^* \frac{dv}{dt} = eE - \alpha v.$$

Разделим переменные и умножим уравнение на  $(-\alpha)$ :

$$\frac{-\alpha dv}{eE - \alpha v} = -\frac{\alpha}{m^*} dt;$$

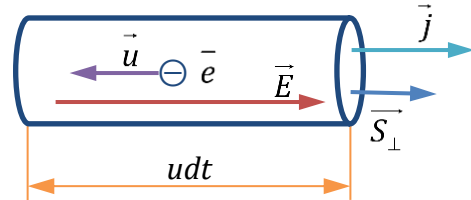


Рис. 45.1

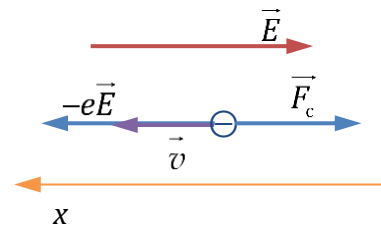


Рис. 45.2

$$\ln \frac{eE - \alpha v}{C} = -\frac{\alpha t}{m^*},$$

$C$  — постоянная интегрирования;

$$eE - \alpha v = Ce^{-\frac{\alpha t}{m^*}}.$$

При  $t = 0$   $v = 0$ , поэтому  $C = eE$ ,

$$eE - \alpha v = eEe^{-\frac{\alpha t}{m^*}} \Rightarrow v = \frac{eE}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha t}{m^*}} \right).$$

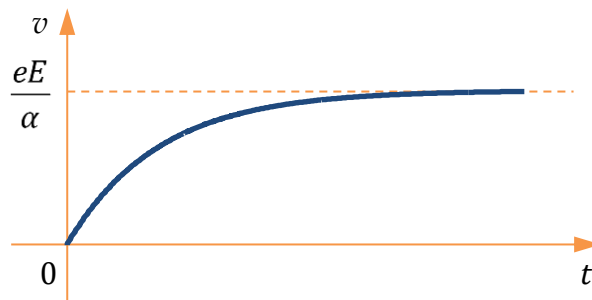
График этой функции представлен на [рис. 45.3](#). При  $t \rightarrow \infty$

$$v_{\infty} = u = \frac{eE}{\alpha}.$$

*Время релаксации* — время, за которое скорость электрона уменьшается в  $e$  раз,

$$\tau = \frac{m^*}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{m^*}{\tau},$$

$$v = u \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$



**Рис. 45.3**

В векторной форме

$$\vec{u} = -\frac{e\tau}{m^*} \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{e^2 n \tau}{m^*} \vec{E}.$$

Коэффициент в последней формуле — константа, зависящая от свойств вещества:

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m^*}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

— закон Ома в дифференциальной форме;  $\sigma$  — удельная электропроводность вещества. Таким образом, мы подтвердили справедливость закона Ома, исходя из электронных представлений.

Благодаря тепловому движению электрон теряет скорость, соударяясь с другими электронами. *Средняя длина транспортного пробега* — расстояние, после прохождения которого скорость электрона уменьшается в  $e$  раз:

$$L = (v_{\text{KB}} + u) \tau = v_{\text{KB}} \tau.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{L}{v_{\text{KB}}} \Rightarrow \sigma = \frac{e^2 n L}{m^* v_{\text{KB}}}$$

Электрическое поле сначала воздействует на электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми (см. [рис. 44.4Б](#));

$$\sigma = \frac{e^2 n L_F}{m^* v_F}, \quad (45.2)$$

где  $L_F$  — средняя длина транспортного пробега электронов, находящихся вблизи уровня Ферми;  $v_F$  — средняя квадратичная скорость этих же электронов. В этой формуле от температуры зависит только  $L_F$ . Расчёт показывает, что при низких температурах  $\sigma \sim T^{-5}$ , при высоких температурах —  $\sigma \sim T^{-1}$ .

### Численная оценка

Для меди при  $T = 300 \text{ К}$   $L = 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ ,  $v_F = v_{\text{KB}} = 1,57 \cdot 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ; при  $T = 4 \text{ К}$   $L = 0,3 \text{ см}$ .

## 6.6. Зонная теория проводимости твёрдых тел

Валентные электроны в кристалле движутся не вполне свободно, так как на них действует периодическое поле кристаллической решётки ([рис. 45.4](#)). Спектр возможных значений энергии электрона деформируется и образуются зоны запрещённых и разрешённых значений энергии.

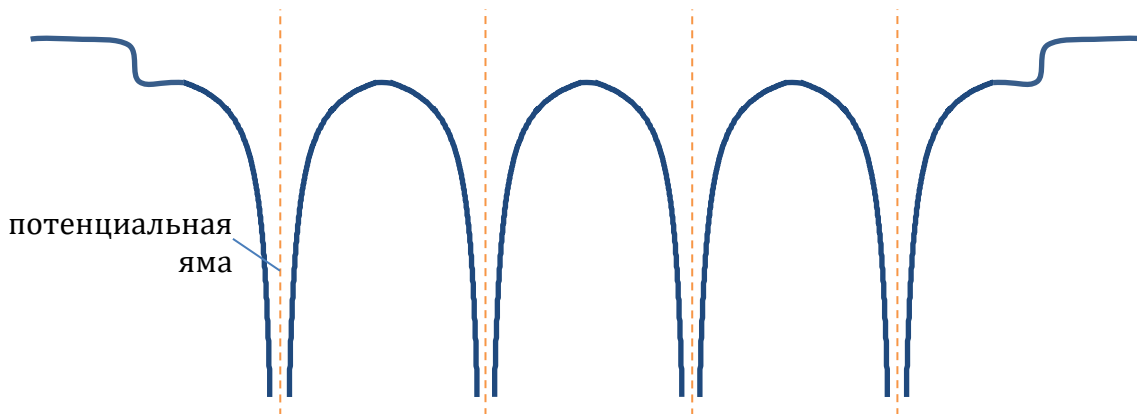


Рис. 45.4

### 6.6.1. Расщепление энергетических уровней электронов в кристаллической решётке

Рассмотрим изолированный атом лития и кристаллическую решётку лития ([рис. 45.5](#)). **Кристалл — единая квантовомеханическая система!**

Электроны могут туннелировать сквозь потенциальные барьеры. В результате этого каждый уровень расщепляется на  $N$  подуровней ( $N$  — число атомов в решётке) — должен выполняться принцип Паули!

Каждому энергетическому уровню изолированного атома соответствует **зона разрешённых энергий (разрешённая зона)**: уровню  $1s$  — зона  $1s$ , уровню  $2s$  — зона  $2s$  и т. д. Зоны разрешённых энергий разделены **зонами запрещённых энергий (запрещёнными зонами)** ( $\varepsilon_g$  — ширина запрещённой зоны). На внутренних оболочках взаимное влияние атомов меньше, поэтому по мере приближения к ядру зоны уже.

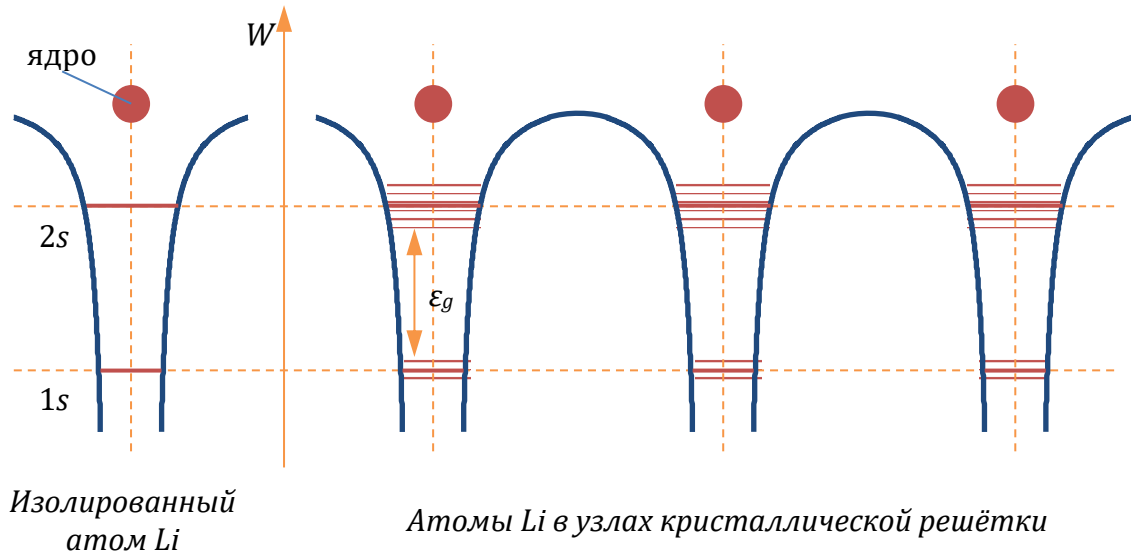


Рис. 45.5

### Численная оценка

В  $1 \text{ м}^3$  вещества содержится  $N \sim 10^{28}$  атомов. Ширина энергетических зон — около 1 эВ. Расстояние между уровнями в зоне — около  $10^{-28}$  эВ.

#### 6.6.2. Заполнение энергетических зон при $T = 0$

Нижние энергетические уровни заполняются полностью. Верхняя из заполненных зон заполняется либо полностью (**валентная зона**), либо частично (**зона проводимости**) (см. энергетическую диаграмму на [рис. 45.6](#)).

Наложим на образец внешнее электрическое поле. Ширина запрещённой зоны  $\epsilon_g \sim 5$  эВ. Энергия, которую может получить электрон на средней длине транспортного пробега, равна  $10^{-4} \div 10^{-8}$  эВ. Этого не хватит для перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости через запрещённую зону, но хватит для перехода электрона на другой уровень в зоне проводимости (переход показан стрелкой на [рис. 45.6](#)). В образце, в котором зона проводимости заполнена частично, будет идти ток, а в котором она пуста — не будет.

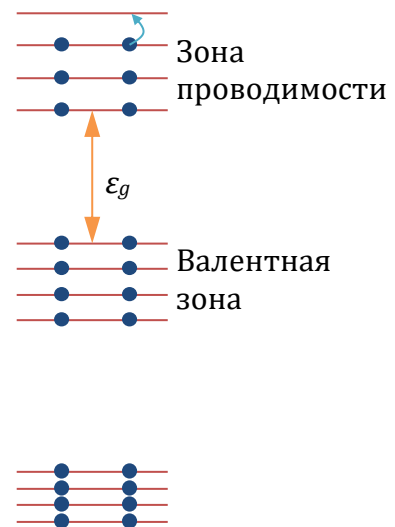
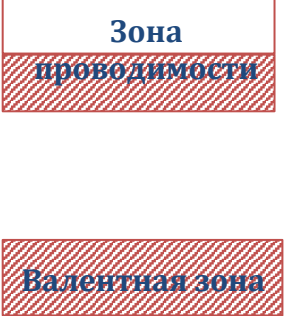



Рис. 45.6

#### 6.6.3. Деление твёрдых тел на проводники, диэлектрики и полупроводники

Деление веществ в твёрдом состоянии на проводники, диэлектрики и полупроводники с точки зрения зонной теории показано на энергетических диаграммах в [ТАБЛ. 45.1](#).

Таблица 45.1

Проводники	Диэлектрики	Полупроводники
 <p>Зона проводимости</p> <p>Валентная зона</p>	 <p>Зона проводимости</p> <p>5 эВ</p> <p>Валентная зона</p>	 <p>Зона проводимости</p> <p>1 эВ</p> <p>Валентная зона</p>

#### 6.6.4. Проводники

Существуют два варианта строения энергетических зон в проводнике — либо зона проводимости частично заполнена (рис. 45.7), либо она перекрывается с валентной зоной (рис. 45.8).

##### 1. Зона проводимости частично заполнена

Имеются вакантные места выше уровня Ферми. Можно создать электрический ток.

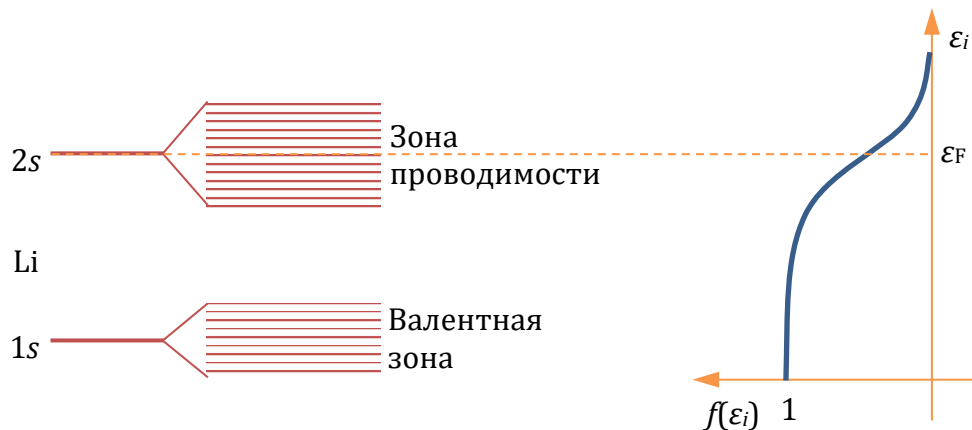


Рис. 45.7

##### 2. Зона проводимости перекрывается с валентной зоной

Валентная зона (зона 2s на диаграмме рис. 45.8) заполнена полностью, но она перекрывается с незаполненной зоной 2p. Можно создать электрический ток.

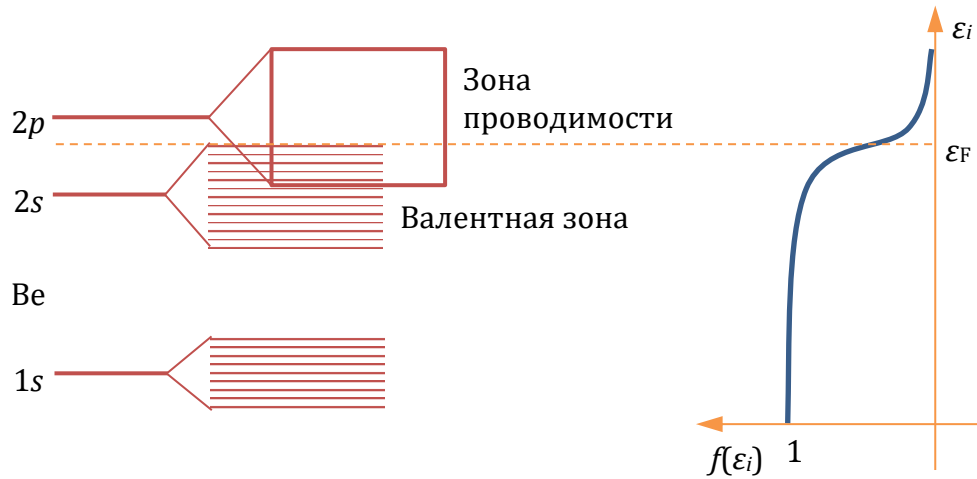


Рис. 45.8

Зонная теория объясняет, почему трёхвалентный алюминий проводит электрический ток хуже, чем одновалентная медь (см. диаграмму [рис. 45.9](#); на этой диаграмме показана только зона проводимости). Электропроводность проводника зависит не от числа свободных электронов, а от соотношения между числом электронов в зоне проводимости и числом вакантных мест в этой зоне. Не все электроны могут создавать ток.



Рис. 45.9

### 6.6.5. Диэлектрики

Электрический ток создать нельзя. Уровень Ферми расположен посередине запрещённой зоны ([рис. 45.10](#)).

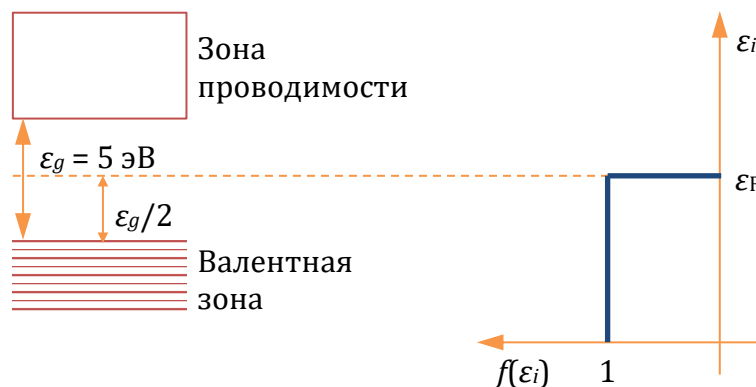


Рис. 45.10

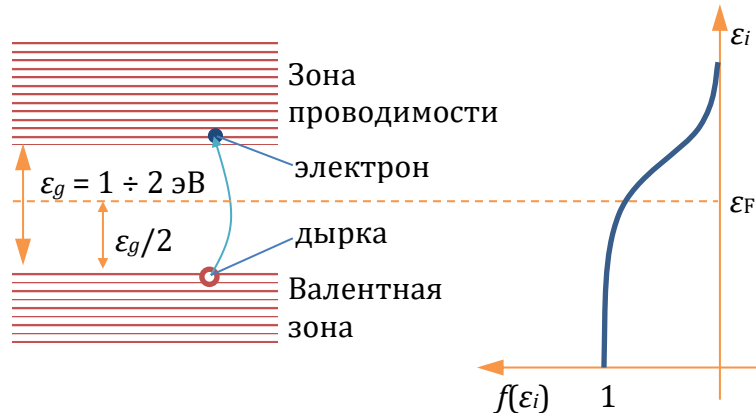
### 6.6.6. Полупроводники

К полупроводникам относятся кремний Si, германий Ge, теллур Te и ряд химических соединений, например, арсенид галлия GaAs. Химически чистые полупровод-

ники — *собственные полупроводники*. При абсолютном нуле температуры валентная зона полупроводника полностью заполнена, а зона проводимости — пуста. Ширина запрещённой зоны  $\varepsilon_g$  у полупроводников меньше, чем у диэлектриков.

### 1. Собственная проводимость

При повышении температуры валентные электроны могут переходить из валентной зоны в зону проводимости, принимая участие в создании тока ([рис. 45.11](#)). Но в валентной зоне возникают вакантные места — *дырки*, на которые могут переходить электроны с других уровней валентной зоны и участвовать в создании тока. Дырки — *квазичастицы*, несущие положительный заряд.



**Рис. 45.11**

Собственная проводимость полупроводника складывается из двух составляющих — *электронной* и *дырочной проводимостей*.

С ростом температуры электропроводность полупроводника растёт. Число электронов, перебрасываемых в зону проводимости тепловым воздействием, согласно функции распределения электронов по энергиям ([44.3](#))

$$\Delta N_\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\sqrt{\varepsilon} \Delta\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1};$$

$\Delta\varepsilon \sim kT \approx 0,025$  эВ; расстояние от нижнего края зоны проводимости до уровня Ферми

$$\varepsilon - \varepsilon_F = \frac{\varepsilon_g}{2} \approx 0,5 \text{ эВ},$$

т. е.  $\varepsilon - \varepsilon_F \gg kT$  и  $e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} \gg 1$ ;

$$\sqrt{\varepsilon} \approx \sqrt{\varepsilon_F + \frac{\varepsilon_g}{2}} = \text{const}$$

— константа, слабо зависящая от температуры.

Концентрация электронов в зоне проводимости

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon_F + \frac{\varepsilon_g}{2}} \Delta\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon_g}{2kT}} = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_g}{2kT}},$$

$n_0$  — константа, слабо зависящая от температуры. Концентрация носителей равна  $2n$  (электроны и дырки).

Удельная электропроводность полупроводника, согласно формуле ([45.2](#)),



$$\sigma = \frac{e^2 L_F}{m^* v_F} 2n_0 e^{-\frac{\varepsilon_g}{2kT}} = \sigma_0 e^{-\frac{\varepsilon_g}{2kT}},$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\varepsilon_g}{2kT}},$$

$\sigma_0$  — константа, слабо зависящая от температуры. Эта формула позволяет найти ширину запрещённой зоны  $\varepsilon_g$  экспериментально:

$$\ln \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{\varepsilon_g}{2kT}.$$

Построив график  $\ln \sigma \left( \frac{1}{T} \right)$ , получим прямую

(рис. 45.12); наклон этой прямой  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_g}{2k}$ .

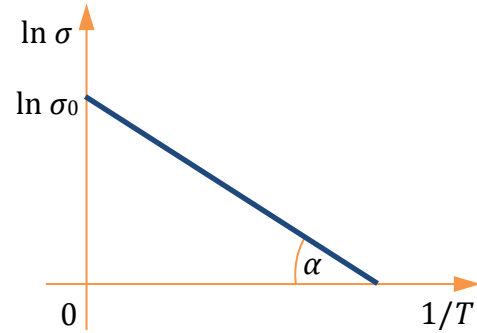


Рис. 45.12

## Лекция 46

## 6.6.6. Полупроводники (продолжение)

## 2. Примесная проводимость

а) Полупроводники *n*-типа (электронная проводимость)

Если в процессе изготовления монокристаллического образца кремния Si ввести фосфор P, то при образовании ковалентной связи один электрон атома фосфора не задействован (рис. 46.1А). Это означает, что возникают дополнительные энергетические уровни вблизи дна зоны проводимости — **донорные уровни**. Они заселены и электроны с них могут переходить в зону проводимости и участвовать в создании тока (энергетическая диаграмма показана на рис. 46.1Б).

(Так как для освобождения «незанятого» электрона требуется значительно меньшая энергия, чем для разрыва ковалентной связи атомов кремния, энергетический уровень  $\epsilon_d$  донорной примеси располагается вблизи дна зоны проводимости.)

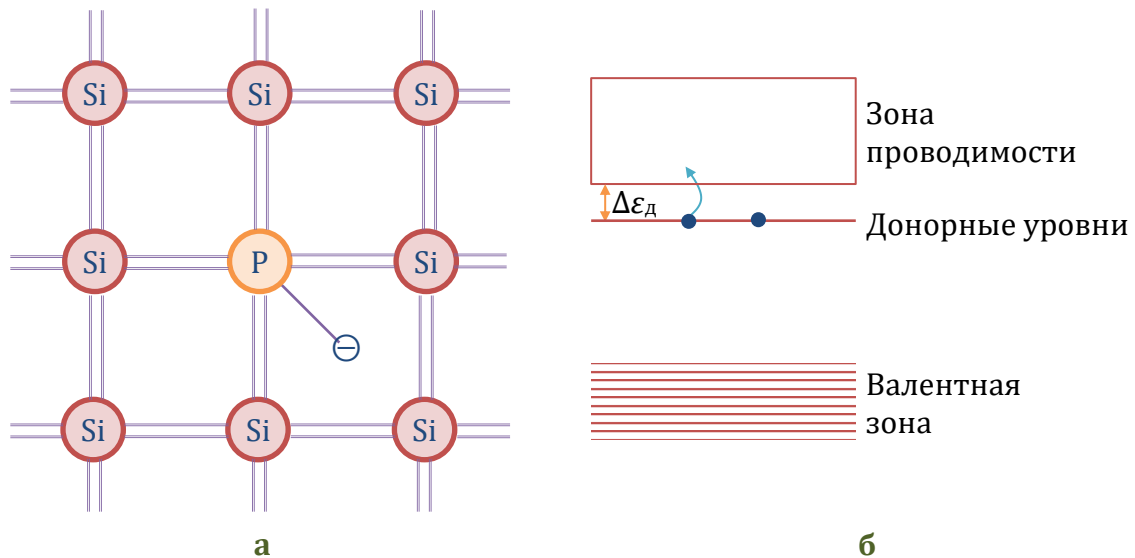


Рис. 46.1

Расстояние от донорных уровней до дна зоны проводимости

$$\Delta\epsilon_d \approx 0,1 \text{ эВ.}$$

Носители тока в таких полупроводниках — *электроны*.

б) Полупроводники *p*-типа (дырочная проводимость)

Если в монокристалл кремния Si ввести примесь бора B, то при образовании ковалентной связи примесь может захватить четвёртый электрон (рис. 46.2А). У потолка валентной зоны появляются энергетические уровни, не занятые электронами, — **акцепторные уровни**. Так как расстояние  $\Delta\epsilon_a$  от потолка валентной зоны до акцепторных уровней невелико, электроны из валентной зоны могут переходить на акцепторные уровни, оставляя в валентной зоне дырки (энергетическая диаграмма показана на рис. 46.2Б).

Носители тока в таких полупроводниках — *дырки*.

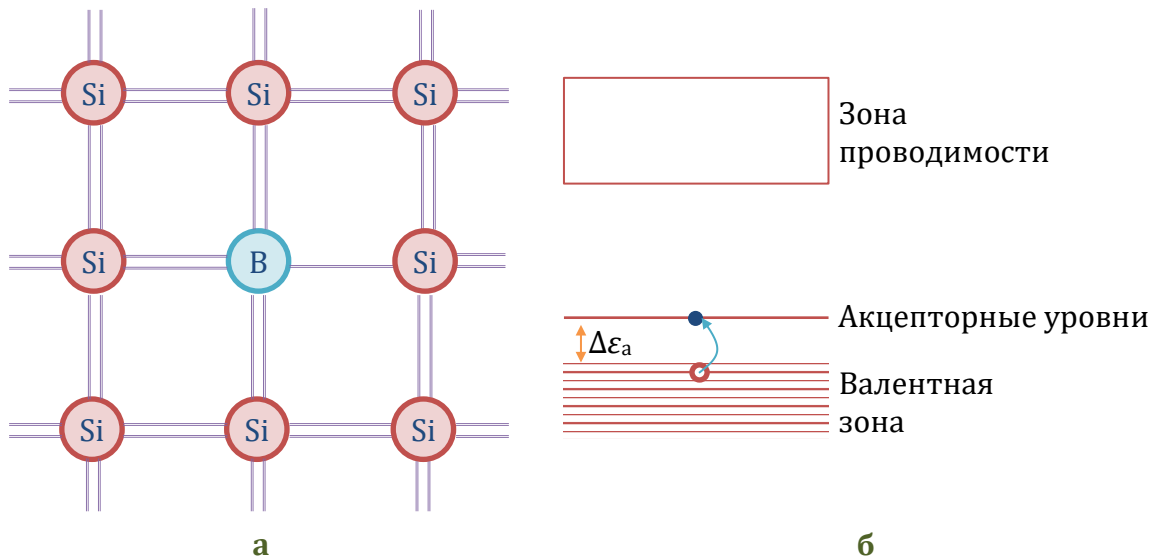


Рис. 46.2

## 6.7. Контактные явления

### 6.7.1. Работа выхода

Электроны в металле находятся в потенциальной яме (рис. 46.3);  $U_0$  — глубина ямы. **Работа выхода** — минимальная энергия, которую нужно затратить, чтобы удалить электрон из металла:

$$A = U_0 - \varepsilon_F;$$

$A = (1 \div 5)$  эВ.

Электроны могут покинуть металл в результате фото-, авто-, термоэлектронной эмиссии.

Уходящие электроны создают избыточный положительный заряд. Электрическое поле заставляет электроны вернуться назад. Поэтому вблизи поверхности металла возникает электронное облако — *двойной электрический слой*.

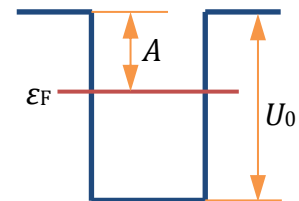


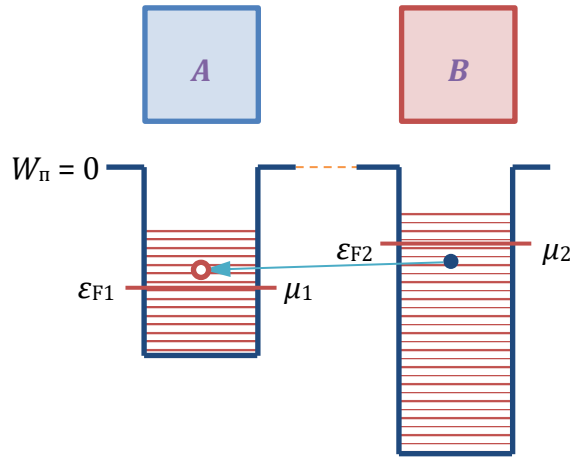
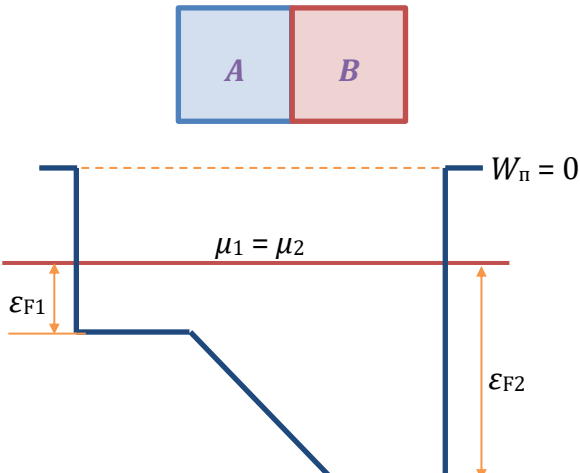
Рис. 46.3

### 6.7.2. Контакт двух металлов

Если привести два образца, состоящих из разных металлов, в соприкосновение, то между ними возникнет электростатическое поле, характеризуемое *контактной разностью потенциалов*.

Когда рассматриваемые металлы изолированы друг от друга, их электронный газ характеризуется химическими потенциалами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . После приведения металлов в контакт их химические потенциалы выравниваются (см. табл. 46.1).

Таблица 46.1

До контакта	После контакта
 <p>При контакте металлов электроны из металла <i>B</i> в металл <i>A</i> будут переходить до тех пор, пока не выровняются химические потенциалы металлов. Условие равновесия:</p> $\mu_1 = \mu_2.$	 <p>Образец <i>A</i> заряжается отрицательно до потенциала <math>\varphi_A</math>, все его энергетические уровни поднимаются. Химический потенциал</p> $\mu_1 = \varepsilon_{F1} - e\varphi_A.$ <p>Образец <i>B</i> заряжается положительно до потенциала <math>\varphi_B</math>, все его энергетические уровни опускаются. Химический потенциал</p> $\mu_2 = \varepsilon_{F2} - e\varphi_B.$

Из условия равновесия следует, что

$$\varepsilon_{F1} - e\varphi_A = \varepsilon_{F2} - e\varphi_B \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \frac{\varepsilon_{F1} - \varepsilon_{F2}}{e}$$

— **внутренняя контактная разность потенциалов.**

Так как энергия Ферми  $\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}$  [см. (44.1)],

$$\varphi_A - \varphi_B = \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{8em} (n_A^{2/3} - n_B^{2/3}).$$

Обычно  $|\varphi_A - \varphi_B| \approx 0,1$  В. Это электрическое поле локализуется в пределах двойного электрического слоя (рис. 46.4).

Как только химические потенциалы выравниваются, перетекание электронов из одного металла в другой прекращается. Если электрон выйдет из образца *A*, то в точке **1** (рис. 46.4) его потенциальная энергия  $W_1 = A_1$ , где  $A_1$  — работа выхода металла *A*, а в точке **2**  $W_2 = A_2$ , где  $A_2$  — работа выхода металла *B*. **Внешняя контактная разность потенциалов**

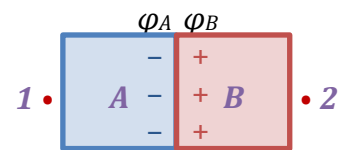


Рис. 46.4

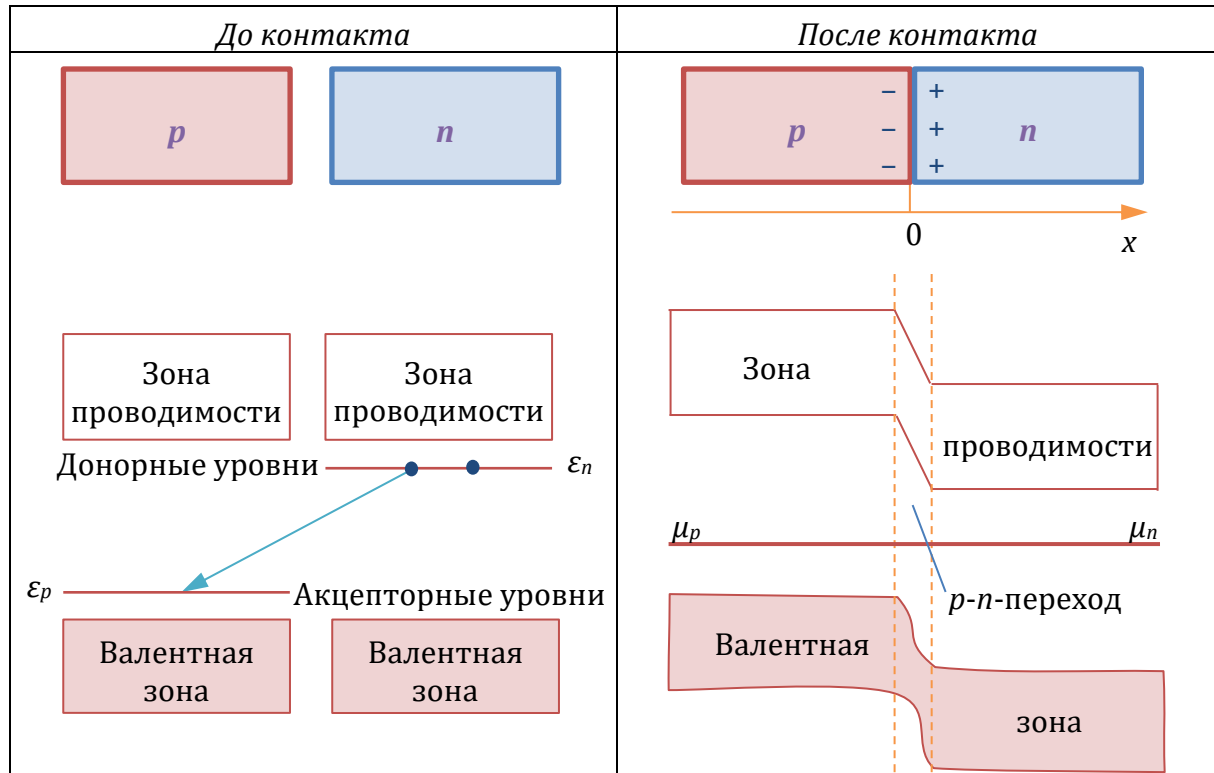
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_1 - A_2}{-e} = \frac{A_2 - A_1}{e}.$$

Обычно  $|\varphi_1 - \varphi_2| \approx 1$  В.

### 6.7.3. Контакт двух полупроводников

Рассмотрим контакт полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа (ТАБЛ. 46.2).

Таблица 46.2



В полупроводнике  $n$ -типа много свободных электронов, а в полупроводнике  $p$ -типа их нет — там дырки. Из-за этого электроны из полупроводника  $n$ -типа диффундируют в полупроводник  $p$ -типа. Этот процесс продолжается до выравнивания химических потенциалов. В области  $p$ - $n$ -перехода дырки и электроны рекомбинируют и создаётся область, обеднённая носителями заряда и обладающая большим электрическим сопротивлением. После выравнивания химических потенциалов полупроводник  $p$ -типа заряжается отрицательно, а полупроводник  $n$ -типа — положительно. В области  $p$ - $n$ -перехода для электронов и дырок образуется потенциальный барьер (рис. 46.5А), который в равновесном состоянии носители преодолеть не могут (графики зависимости потенциальной энергии носителей от координаты  $x$  представлены на рис. 46.5Б; координата  $x$  отсчитывается от середины  $p$ - $n$ -перехода). Если наложить внешнее электрическое поле, то оно может либо увеличить величину барьера (обратное включение  $p$ - $n$ -перехода), либо уменьшить её (прямое включение). Соответствующие электрические схемы и графики представлены в ТАБЛИЦЕ 46.3.

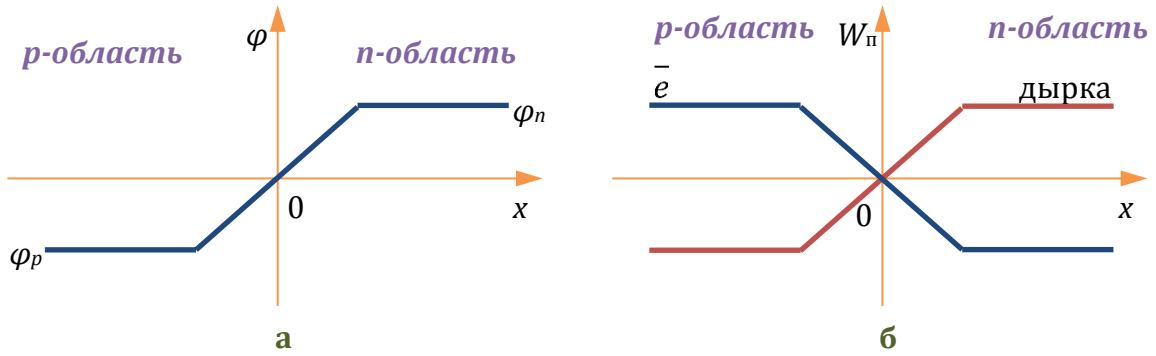


Рис. 46.5

Таблица 46.3

Прямое включение p-n-перехода	Обратное включение p-n-перехода
<p>Высота потенциального барьера для электронов и дырок уменьшается. В цепи идёт ток.</p>	<p>Высота потенциального барьера для электронов и дырок увеличивается. Ток не идёт.</p>

(В ТАБЛ. 46.3 штриховыми линиями построены графики зависимости потенциала от координаты  $x$  в отсутствие внешнего электрического поля.)

Таким образом, *p-n*-переход обладает *односторонней проводимостью* и может выполнять функцию диода в электрических цепях. Вольт-амперная характеристика *p-n*-перехода показана на [рис. 46.6](#).

Вольт-амперная характеристика *p-n*-перехода

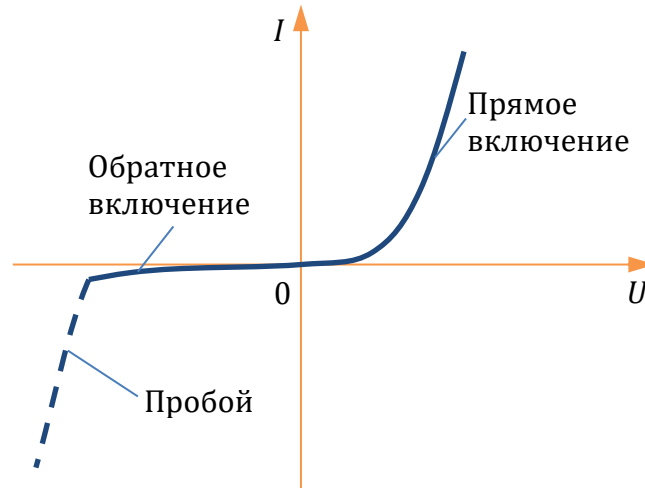


Рис. 46.6

#### 6.7.4. Внутренний фотоэффект

**Внутренний фотоэффект** — явление резкого возрастания удельной электропроводности полупроводника при освещении его поверхности.

Энергетические диаграммы, показывающие причину внутреннего фотоэффекта, приведены в [табл. 46.4](#).

Таблица 46.4

Нет освещения	На полупроводник падает свет
<p>п/п</p>	<p>п/п</p>
<p>Зона проводимости</p> <p><math>\epsilon_g</math></p> <p>Валентная зона</p>	<p>Зона проводимости</p> <p><math>\epsilon_g</math></p> <p><math>\hbar\omega &gt; \epsilon_g</math></p> <p>Валентная зона</p>
Тока нет.	Появляются свободные носители заряда. Сопротивление полупроводника резко падает и идёт ток.

**Красная граница внутреннего фотоэффекта** — минимальная частота (максимальная длина волны) падающего излучения, при которой наблюдается внутренний фотоэффект. Она определяется шириной запрещённой зоны:

$$\nu_0 = \frac{\varepsilon_g}{h}, \quad \lambda_0 = \frac{hc}{\varepsilon_g};$$

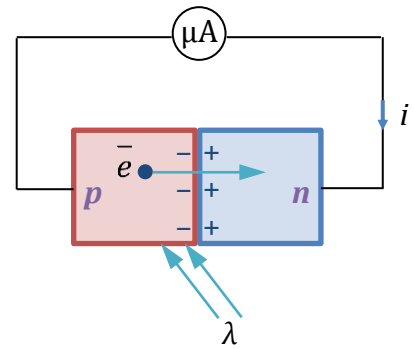
$c$  — скорость света в вакууме.

### 6.7.5. Фотовольтаический эффект

В области  $p$ - $n$ -перехода возникает электростатическое поле, характеризуемое внутренней контактной разностью потенциалов, однако в замкнутой цепи (в отсутствие источника) ток не идёт, так как эта область обеднена носителями заряда. При освещении  $p$ -области благодаря внутреннему фотоэффекту образуются свободные электроны и дырки. Скатываясь с потенциальной горки (см. [рис. 46.5Б](#)), электроны создают ток. Для дырок, образующихся в  $p$ -области, существует потенциальный барьер, поэтому их наличие лишь повышает высоту горки.

**Фотовольтаический эффект** — явление протекания электрического тока в замкнутой цепи, содержащей  $p$ - $n$ -переход, при освещении одной из сторон  $p$ - $n$ -перехода ([рис. 46.7](#)).

**Демонстрация:** Применение фотоэффекта



**Рис. 46.7**



## Лекция 47

### 6.8. Электропроводность газов

#### 6.8.1. Газовый разряд

Прохождение электрического тока в газах называется **газовым разрядом**.

Носителями тока в газе являются электроны и положительные ионы. Модуль плотности тока в проводнике, в котором носителями являются электроны,

$$j = env,$$

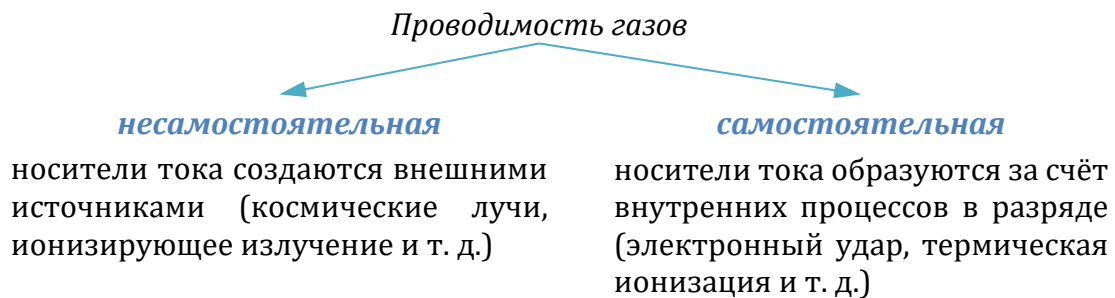
где  $n$  — концентрация носителей,  $e$  — элементарный заряд,  $v$  — средняя дрейфовая скорость носителей (см. 6.5). Так как  $v \sim E$ ,  $v = u_0 E$ , где  $u_0$  — *подвижность* носителей;

$$[u_0] = \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Плотность тока в газе с учётом того, что имеются два типа носителей,

$$\vec{j} = en(u_0^+ + u_0^-)\vec{E},$$

где  $u_0^-$  — подвижность электронов,  $u_0^+$  — подвижность ионов.



#### 6.8.2. Несамостоятельная проводимость

Пусть имеются два электрода, между которыми находится газ;  $l$  — расстояние между электродами,  $S$  — площадь электродов. Кроме того, имеется внешний источник ионизации определённой мощности. Рассмотрим две ситуации.

1. На электроды не подаётся напряжение ([рис. 47.1](#))

В этом случае в газе идут два процесса.

<i>Ионизация</i>	<i>Рекомбинация</i>
$\Delta n_i$ — скорость образования пар носителей $\left[ \frac{\text{число пар}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right]$ . Определяется мощностью источника ионизации.	$\Delta n_r$ — скорость уничтожения пар носителей $\left[ \frac{\text{число пар}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right]$ .

Пусть  $n^+$  — концентрация положительных зарядов (ионов),  $n^-$  — концентрация отрицательных зарядов (электронов),  $n$  — концентрация пар носителей. Очевидно, что  $n^+ = n^- = n$ .

Скорость рекомбинации  $\Delta n_r$  определяется вероятностью встречи положительного и отрицательного заряда, а эта вероятность пропорциональна концентрации зарядов. Отсюда  $\Delta n_r \sim n^+$ ,  $\Delta n_r \sim n^-$ , поэтому  $\Delta n_r \sim n^2$  или

$$\Delta n_r = rn^2,$$

где  $r$  — коэффициент рекомбинации;

$$[r] = \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

В равновесном состоянии  $\Delta n_i = \Delta n_r$  или  $\Delta n_i = rn^2$ . Тогда концентрация пар носителей в газе может быть найдена по формуле

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}.$$

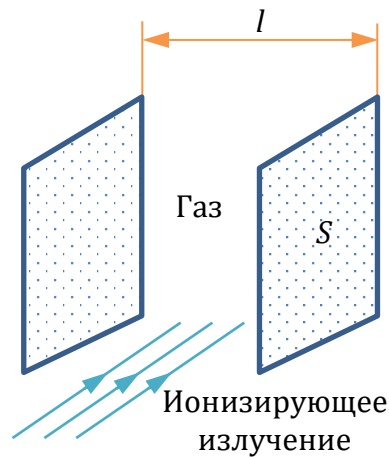


Рис. 47.1

**ПРИМЕР**

В воздухе за счёт космического излучения (ионизатор) в  $1 \text{ см}^3$  за 1 секунду образуется 5–10 пар ионов, т. е.  $\Delta n_i = 5 \div 10 \frac{\text{пар}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}$ . Для сухого воздуха  $r = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$ . Отсюда число пар носителей заряда

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} \approx 1000 \frac{\text{пар}}{\text{см}^3}.$$

Это очень малая величина, поэтому воздух — плохой проводник.

2. На электроды подаётся разность потенциалов  $U$  (рис. 47.2)

При подаче напряжения убыль пар носителей происходит не только за счёт рекомбинации, но и за счёт отхода носителей под действием электрического поля к электродам. В газе между электродами идут три процесса.

<p>Ионизация</p> $\Delta n_i \left[ \frac{\text{число пар}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right]$	<p>Рекомбинация</p> $\Delta n_r \left[ \frac{\text{число пар}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right]$	<p>Отвод пар носителей электрическим полем</p> $\Delta n_j \left[ \frac{\text{число пар}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right]$
---	--	---

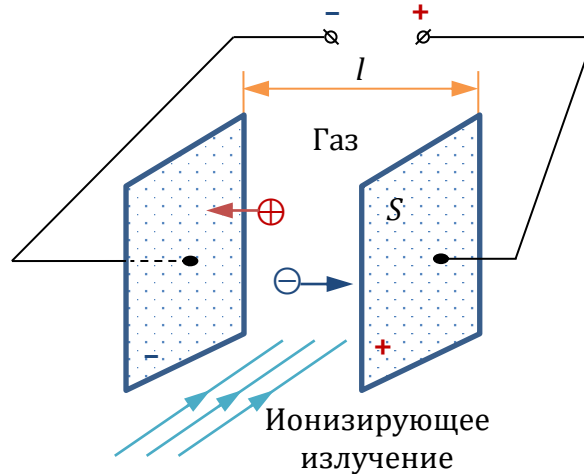


Рис. 47.2

Если из объёма газа в единичный промежуток времени уходит  $\Delta n_j$  пар носителей заряда, то за это же время на электрод попадает заряд  $e\Delta n_j S l$  и ток в цепи  $I = e\Delta n_j S l$ .

Плотность тока  $j = \frac{I}{S} = e\Delta n_j l$ . Отсюда

$$\Delta n_j = \frac{j}{el}$$

В состоянии равновесия

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j$$

или

$$\Delta n_i = rn^2 + \frac{j}{el}$$

определяется мощностью источника
определяется природой газа
определяется разностью потенциалов

Возможны две предельные ситуации.

*а) Слабое электрическое поле*

Если напряжённость поля  $\vec{E}$  мала, то  $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ , т. е. убыль носителей определяется процессом рекомбинации;

$$\Delta n_i = rn^2.$$

Отсюда

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}$$

Плотность тока

$$\vec{j} = en(u_0^+ + u_0^-)\vec{E}$$

или

*б) Сильное электрическое поле*

Все ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать и, следовательно,  $\Delta n_j \gg \Delta n_r$ . Тогда

$$\Delta n_i = \frac{j}{el}.$$

Отсюда

$$j_{\max} = el\Delta n_i.$$

Это максимальное значение плотности тока, которое может быть получено при данной мощности ионизатора.

$$\vec{j} = e \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} (u_0^+ + u_0^-) \vec{E}$$

Поэтому удельная электропроводность газа  $\sigma = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} e (u_0^+ + u_0^-) = \text{const}$  и, следовательно, при слабых полях в газах выполняется закон Ома

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

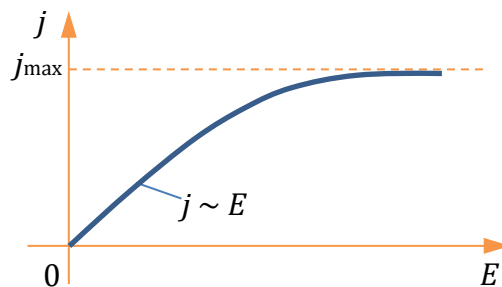
**Численная оценка:**

Для воздуха  $u_0^+ \approx 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{В}}$ . При  $n = 10^3 \text{ см}^{-3}$  и  $E = 1 \text{ В/м}$   $j = 10^{-14} \text{ А/м}^2$ .

**Численная оценка:**

Для воздуха при  $l = 10 \text{ см}$ ,  $\Delta n_i \approx 10 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$   
 $j_{\text{max}} = 1,6 \cdot 10^{-13} \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ . Эта плотность тока есть *плотность тока насыщения*.

При средних полях происходит переход от линейной зависимости к току насыщения. Вольтамперная характеристика газового разряда показана на [рис. 47.3](#).



**Рис. 47.3. ВАХ несамостоятельного газового разряда**

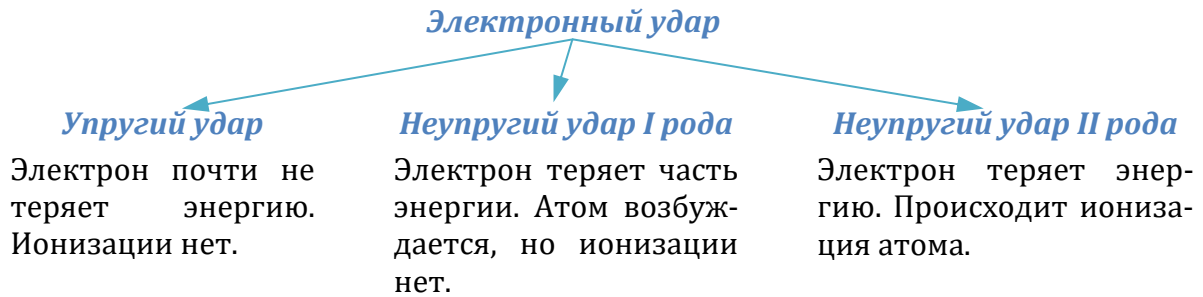
Так как ток насыщения пропорционален мощности ионизатора, по его значению можно судить о ионизирующей способности излучателя. На этом принципе работают ионизационные камеры (в частности, счётчик Гейгера).

**6.8.3. Самостоятельная проводимость**

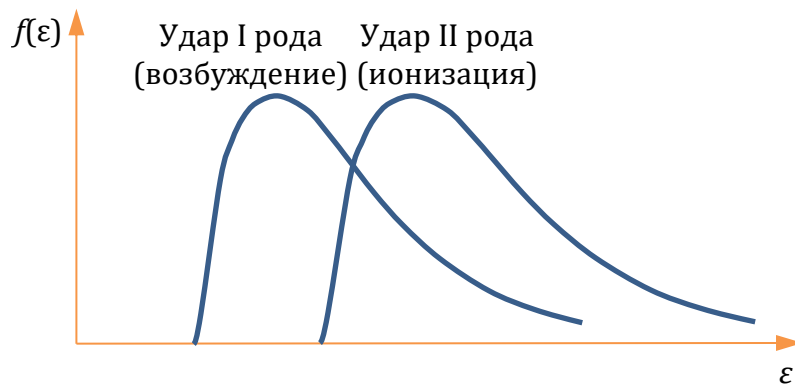
Газовый разряд становится самостоятельным, если в нём работает независимый механизм образования пар носителей. К таким механизмам относятся:

1. *Термоэлектронная эмиссия* (испускание электронов нагретым катодом)
2. *Вторичная электронная эмиссия* (выбивание электронов с поверхности катода при бомбардировке электронами)
3. *Автоэлектронная эмиссия* (вырывание электронов с поверхности катода сильным электрическим полем с учётом туннельного эффекта)
4. *Фотоэлектронная эмиссия*

Все эти механизмы приводят к появлению электронов и ионизации газа *электронным ударом*.



К возбуждению или ионизации атома (молекулы) приводит не любое соударение. Вероятность этого зависит от энергии  $\varepsilon$  налетающего электрона. Чем быстрее летит электрон, тем меньше время его взаимодействия с атомом. Поэтому плотность вероятности  $f(\varepsilon) = \frac{dP}{d\varepsilon}$ , достигнув максимума, быстро убывает (см. диаграмму на [рис. 47.4](#)).



**Рис. 47.4**

Виды самостоятельного разряда

1. Искровой разряд
2. Дуговой разряд
3. Коронный разряд
4. Тлеющий разряд

#### 6.8.4. Тлеющий разряд

Рассмотрим *тлеющий разряд* — один из видов самостоятельного разряда, возникающего благодаря явлению ионизации электронным ударом.

Имеется колба с газом — *газоразрядная трубка*, в которой находятся два электрода, подключённые к источнику высокого напряжения (длина трубки  $l \approx 30 \div 50$  см). Рассмотрим вкратце и качественно, что происходит в колбе в двух случаях — при различной величине давления газа.

##### 1. Высокое давление

Разряда в колбе нет и потенциал в объёме колбы распределён линейно ([рис. 47.5](#)).

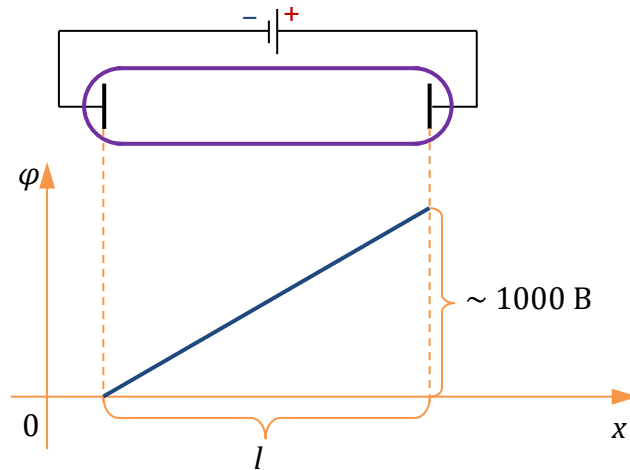


Рис. 47.5

## 2. Низкое давление

При давлении  $p \approx 50$  мм рт. ст. появляется светящийся шнур. При  $p \approx 5$  мм рт. ст. возникает устойчивое свечение, заполняющее всю трубку.

За счёт различной подвижности электронов и ионов в трубке образуется большой объёмный положительный заряд, наличие которого приводит к перераспределению потенциала внутри трубки (рис. 47.6). Особенно большое падение напряжения имеет место у катода.

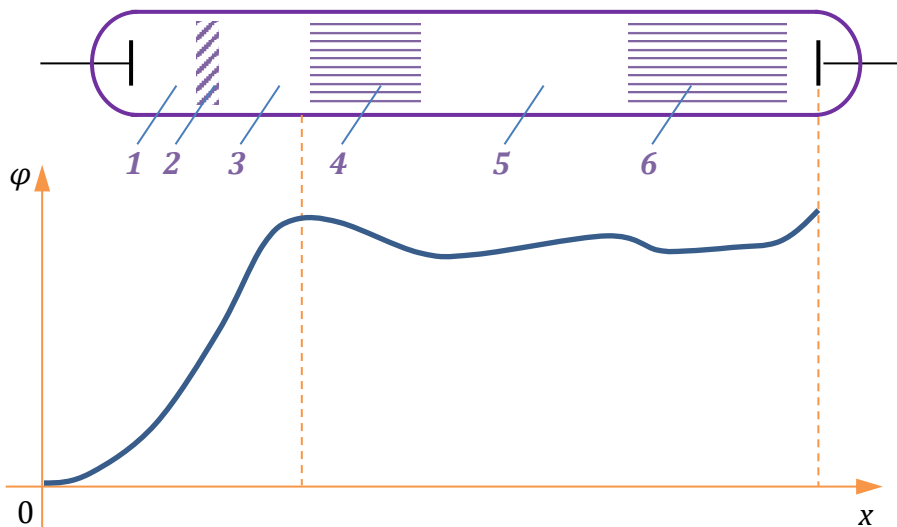


Рис. 47.6

На рис. 47.6 обозначены следующие области внутри газоразрядной трубки:

### 1. Астоново тёмное пространство

Ионы за счёт большого падения напряжения в этой области разгоняются и бомбардируют катод, выбивая электроны. Электроны не успевают разогнаться до энергии возбуждения атомов. Свечения нет.

### 2. Светящаяся катодная плёнка

Электроны набрали достаточную скорость для возбуждения атомов (неупругий удар I рода, см. энергетическую диаграмму на рис. 47.7;  $\varepsilon_1$  —

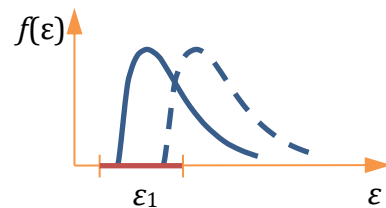


Рис. 47.7

энергия, необходимая для возбуждения атома). Возбуждённые атомы испускают свет.

### 3. Катодное тёмное пространство

Электроны набрали достаточную скорость для удара II рода. Идёт процесс ионизации. Свечения нет, так как вероятность ионизации больше, чем возбуждения (см. энергетическую диаграмму на [рис. 47.8](#);  $\varepsilon_2$  — энергия, необходимая для ионизации атома).

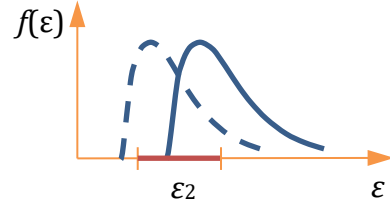


Рис. 47.8

### 4. Тлеющий разряд

Свечение возникает из-за рекомбинации электронов и ионов.

### 5. Фарадеево тёмное пространство

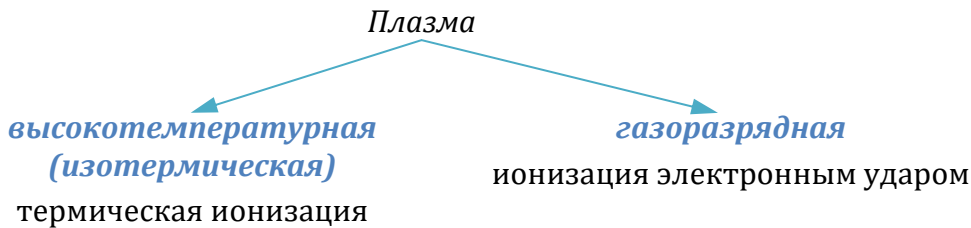
Здесь нет быстрых электронов. Ионы уже рекомбинировали. Идёт медленный разгон электронов.

### 6. Светящийся положительный столб

Разогнанные электроны возбуждают атомы (удар I рода), которые, в свою очередь, высвечиваются.

## 6.8.5. Плазма

**Плазма** — это ионизованный квазинейтральный газ, занимающий настолько большой объём, что в нём не происходит сколько-нибудь заметного нарушения квазинейтральности из-за тепловых флуктуаций. *Квазинейтральность* означает, что количество положительных и отрицательных зарядов почти одинаково в любом малом объёме газа.



Оценим размер области, в пределах которой могут происходить заметные нарушения квазинейтральности. Мысленно выделим в плазме некоторый объём  $MNAB$  ([рис. 47.9](#)). Пусть по причине тепловой флуктуации электроны из этого объёма сместились вверх от границы  $MN$  на расстояние  $l$ . Тогда на границе  $AB$  останутся нескомпенсированные положительные ионы. Поверхностная плотность заряда на границах  $MN$  и  $AB$  будет равна  $\sigma = \frac{enlS}{S} = enl$ , где  $n$  — концентрация электронов и ионов,  $S$  — площадь граничной поверхности. Модуль напряжённости электрического поля в этой области (см. [ПРИМЕР 3 В РАЗДЕЛЕ 3.2.3](#))  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{enl}{\varepsilon_0}$ .

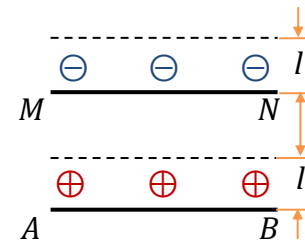


Рис. 47.9

Объёмная плотность энергии электрического поля  $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{e^2 n^2 l^2}{2\varepsilon_0}$ .

Так как энергия поля черпается из кинетической энергии теплового движения, она не может превосходить величины  $2n\frac{3}{2}kT$  (на одну степень свободы приходится энергия  $\frac{1}{2}kT$ ), т. е.

$$\frac{e^2 n^2 l^2}{2\varepsilon_0} \leq 3nkT,$$

откуда

$$l \leq \sqrt{\frac{6\varepsilon_0 kT}{e^2 n}}.$$

Более точный расчёт даёт формулу  $l \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2e^2 n}}$ .

Величина  $l$  характеризует размеры области, в пределах которой возможны флуктуационные нарушения квазинейтральности плазмы. Эта величина носит название **радиуса Дебая**;

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2e^2 n}}.$$

Для того чтобы ионизированный газ был плазмой, необходимо, чтобы размеры области, которую он занимает, были много больше радиуса Дебая. В этом случае плазма выступает как связанный коллектив. В ней могут возникать колебания, распространяться волны. Дебаевский радиус определяет также глубину проникновения электрического поля в плазму.

#### **Численная оценка:**

Для воздуха при  $n = 10^3 \text{ см}^{-3}$  и  $T = 300 \text{ К}$   $D = 2,7 \text{ см}$ . Воздух в сосуде, линейные размеры которого больше этой величины, можно считать плазмой.

Из-за большой разности в подвижности электронов и ионов в плазме возможно такое квазиравновесное состояние, которое может характеризоваться двумя температурами. Если плазму предоставить самой себе, то в ней сначала устанавливается максвелловское распределение по энергиям электронов, а затем ионов. Такая плазма называется **неизотермической (двухтемпературной)**. Так, в положительном столбе тлеющего разряда температура электронов  $t_e \approx 50\,000^\circ\text{С}$ , а температура ионов — несколько сотен градусов.



Лекция 48<sup>90</sup>

## 7. Физика атомного ядра и элементарных частиц

### 7.1. Атомное ядро

#### 7.1.1. Нуклон

Ядро атома состоит из протонов и нейтронов — **нуклонов** (ТАБЛ. 48.1). Нуклон — это одна частица в различных квантовых состояниях.

Таблица 48.1

Характеристика	Протон	Нейтрон
Электрический заряд	$q_p = e$	$q_n = 0$
Масса покоя	$m_p = 1836m_e = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,28 \text{ МэВ}/c^2$	$m_n = 1838,5m_e = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 939,55 \text{ МэВ}/c^2$
Спин	$s = \frac{1}{2}$	$s = \frac{1}{2}$
Магнитный момент	$\mu_p = 2,79\mu_0 = 1,411 \cdot 10^{-26} \text{ А} \cdot \text{м}^2$	$\mu_n = -1,91\mu_0 = -9,647 \cdot 10^{-27} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Время жизни (период полураспада)	$T_p \rightarrow \infty$	$T_n = 16 \text{ мин}$ (в свободном состоянии)

Здесь  $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 0,511 \text{ МэВ}/c^2$  — масса электрона;  $\mu_0 = 5,051 \cdot 10^{-27} \text{ А} \cdot \text{м}^2$  — ядерный магнетон;  $c$  — скорость света в вакууме.

#### 7.1.2. Состав ядра

##### Заряд ядра

$$Q = Ze,$$

где  $Z$  — число протонов в ядре (*зарядовое число*) — порядковый номер химического элемента в периодической системе.

##### Масса ядра

$$m = Am_1, \quad A = Z + N,$$

где  $A$  — *массовое число*,  $N$  — число нейтронов в ядре;

$$m_1 = \frac{m(^{12}_6\text{C})}{12} = 1 \text{ а. е. м.} = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,50 \text{ МэВ}/c^2$$

— *атомная единица массы*.

**Обозначение ядра:**  $^A_Z\text{X}$

<sup>90</sup> Лекции 48–51 представлены в дополнительных материалах к настоящему ЭУМК в виде презентации.

**ПРИМЕР**

Калий-40:

$${}_{19}^{40}\text{K}: A = 40, Z = 19, N = 40 - 19 = 21.$$

**Изотопы** — ядра одного химического элемента, имеющие разную массу (разные массовые числа при одинаковом зарядовом числе).

**ПРИМЕР**

Изотопы водорода

$${}^1_1\text{H} — \text{протий}, T \rightarrow \infty;$$

$${}^2_1\text{H} = {}^2_1\text{D} — \text{дейтерий}, T \rightarrow \infty;$$

$${}^3_1\text{H} = {}^3_1\text{T} — \text{третий}, T = 12 \text{ лет.}$$

**Изобары** — ядра, имеющие одинаковое массовое число, но разный заряд.

**ПРИМЕРЫ**

$${}^{15}_7\text{N} \text{ и } {}^{15}_8\text{O}, {}^3_1\text{H} \text{ и } {}^3_2\text{He}$$

**7.1.3. Размер ядра****Радиус ядра**

$$r_0 = (1,2 \div 1,3) \sqrt[3]{A} \text{ фм.}$$

Для сравнения: размер атома

$$r \sim 10^{-10} \text{ м} \Rightarrow r_0 \approx 10^{-5} r.$$

Объём ядра

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \approx 9,2A \cdot 10^{-45} \text{ м}^3.$$

Плотность ядра

$$\rho \approx 1,3 \cdot 10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

**7.1.4. Спин ядра**

**Спин ядра**  $I$  равен сумме спинов и орбитальных моментов нуклонов.

В основном состоянии стабильных ядер  $I \leq \frac{9}{2}$ . У всех ядер с чётным числом нуклонов в основном состоянии  $I = 0$ .

**7.1.5. Масса и энергия связи ядра**

(Ниже в данном разделе используются обозначения:  $m_p$  — масса протона,  $m_n$  — масса нейтрона,  $m_{\text{я}}$  — масса ядра,  $m$  — масса атома,  $m_{\text{н}}$  — масса атома водорода.)

Масса ядра меньше суммарной массы нуклонов, из которых оно состоит:

$$m_{\text{я}} < \sum (m_p + m_n).$$

**Энергия связи**  $W_{\text{св}}$  — работа, которую нужно совершить для полного разделения ядра на свободные нуклоны.

Полная энергия ядра

$$W = mc^2;$$

$$W_{\text{св}} = \sum (m_p + m_n)c^2 - m_{\text{я}}c^2,$$

$$W_{\text{св}} = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2$$

или, с учётом массы электронов,

$$W_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_n - m]c^2.$$

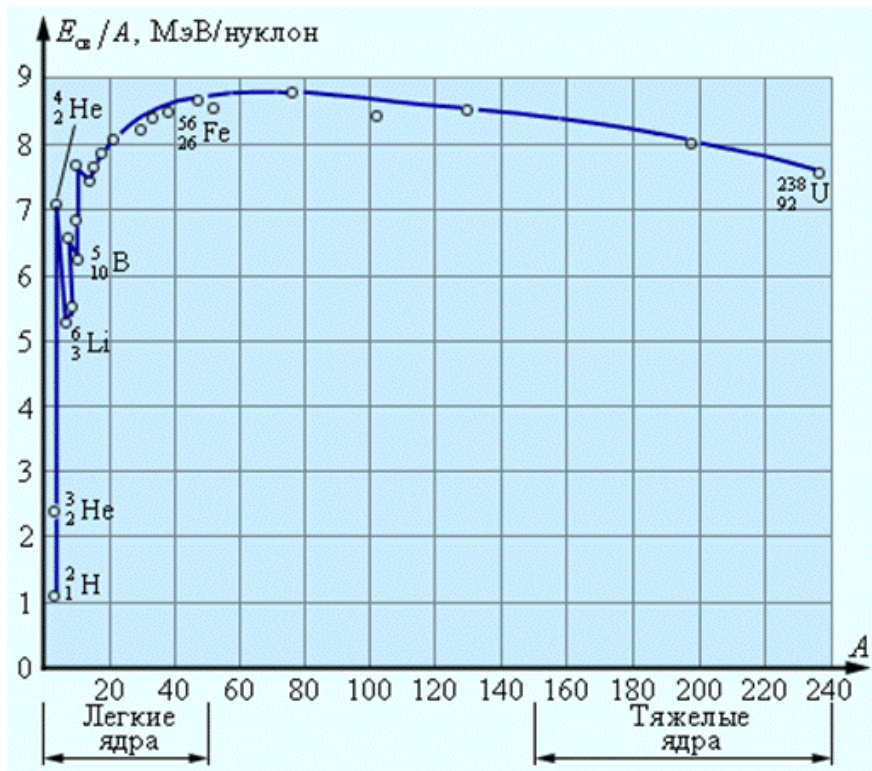
*Дефект масс*

$$\Delta = Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{я}}.$$

*Удельная энергия связи* — энергия связи ядра, приходящаяся на один нуклон:

$$w_{\text{св}} = \frac{W_{\text{св}}}{A}.$$

График зависимости удельной энергии связи ядер от массового числа представлен на [рис. 48.1](#).



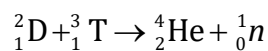
**Рис. 48.1**

Тяжёлым ядрам энергетически выгодно делиться, а лёгким — сливаться.

**ПРИМЕРЫ**

При делении ядра урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$  выделяется около 200 МэВ.

При синтезе ядер гелия



выделяется около 17,6 МэВ.

### 7.1.6. Ядерные силы

Существование атомных ядер обусловлено сильным взаимодействием, описываемым **ядерными силами**.

Свойства ядерных сил

1. **Притяжение**; ядерные силы притяжения намного больше кулоновских отталкивания.
2. **Короткодействие** (радиус действия ядерных сил  $r \sim 10^{-15}$  м). На расстояниях, много больших  $r$ , притяжение нуклонов сменяется кулоновским отталкиванием.
3. **Зарядовая независимость**: силы взаимодействия двух протонов, двух нейтронов и протона с нейтроном одинаковы.
4. **Нецентральность**: ядерные силы нецентральны.
5. **Насыщение**: каждый нуклон взаимодействует с ограниченным числом нуклонов.
6. Взаимодействие нуклонов наиболее эффективно, если их спины сонаправлены.

### 7.1.7. Виртуальные частицы

Частицы-переносчики сильного взаимодействия в ядрах — виртуальные  **$\pi$ -мезоны**.

**Виртуальные частицы** — частицы, испускание и поглощение которых происходит с кажущимся нарушением закона сохранения энергии.

Соотношение неопределённостей:

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

— виртуальная частица с энергией  $W = m_{\pi}c^2$  ( $m_{\pi}$  — масса  $\pi$ -мезона) может возникнуть ниоткуда и существовать в течение времени, не превышающего

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{W}.$$

Получается, что  $m_{\pi} \approx 270m_e$ .

Если поблизости от нуклона нет других сильновзаимодействующих частиц, то все испущенные нуклоном  $\pi$ -мезоны поглощаются этим же нуклоном. Одиночный нуклон окружён т. н. **мезонной шубой**. Когда два нуклона сближаются и их мезонные шубы начинают соприкасаться, создаются условия для обмена виртуальными мезонами.

### 7.1.8. Модели атомного ядра

Атомное ядро — система многих частиц. Квантовомеханическая задача многих частиц сложна для решения. Поэтому были созданы модели атомного ядра.

#### 1. Капельная модель

Ядро — капля заряженной несжимаемой жидкости с очень высокой плотностью. Эта модель позволяет вывести формулу для энергии связи ядра, обуславливает процесс деления ядра.

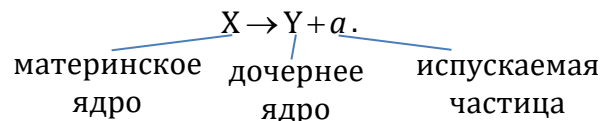
## 2. Оболочечная модель

Каждый нуклон движется в поле остальных нуклонов ядра. Энергетические уровни заполняются с учётом принципа Паули и формируют оболочки. Данная модель объясняет спин и магнитный моменты основных и возбуждённых состояний ядер. Полностью заполненные оболочки образуют особо устойчивые структуры — **магические ядра**:  $Z, N$  или оба этих числа равны 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

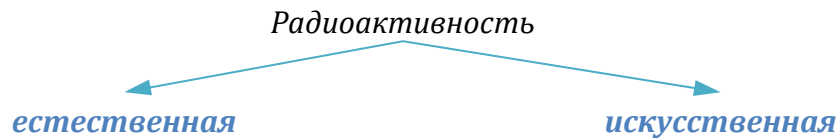
### 7.2. Радиоактивность

**Радиоактивность** — явление самопроизвольного распада атомных ядер с испусканием одной или нескольких частиц. Самопроизвольно распадающиеся ядра называются **радиоактивными**.

Общий вид уравнения радиоактивного распада:



Радиоактивный распад происходит с выделением энергии:  $m_X > m_Y + m_a$ .



#### 7.2.1. Закон радиоактивного распада

Пусть в некоторый момент времени имеется  $N$  ядер некоторого радиоактивного изотопа. Число ядер  $dN$ , распадающихся за малый промежуток времени  $dt$ , пропорционально  $N$  и  $dt$ :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (48.1)$$

$\lambda$  — **постоянная распада** — характеристика радиоактивного вещества,

$$[\lambda] = \text{с}^{-1}.$$

Проинтегрируем выражение (48.1) (в начальный момент времени было  $N_0$  ядер):

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} \quad (48.2)$$

— **основной закон радиоактивного распада**.

График зависимости (48.2) изображён на рис. 48.2.

**Активность** препарата  $A$  — число радиоактивных ядер, распадающихся за единственный промежуток времени. Из (48.1) следует, что

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N \Rightarrow \boxed{A = \lambda N};$$

$$[A] = \text{Бк (беккерель)} = \frac{\text{распад}}{\text{с}}.$$

Внесистемная единица: кюри (Ки);  $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$ .

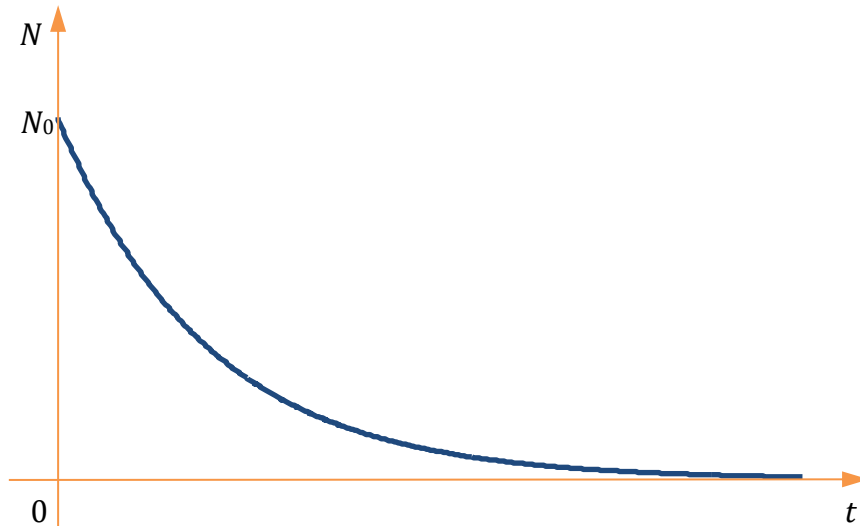


Рис. 48.2

**Удельная активность** — активность препарата единичной массы:

$$a = \frac{A}{m},$$

$$[a] = \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}, \frac{\text{Ки}}{\text{кг}}$$

(здесь  $m$  — масса радиоактивного препарата).

**Период полураспада**  $T$  — время, за которое распадается половина начального количества радиоактивных ядер:

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

**Среднее время жизни** радиоактивного ядра

$$\tau = -\frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN(t) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot \lambda N dt = \frac{N_0}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} t dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} z e^z dz = \frac{1}{\lambda}$$

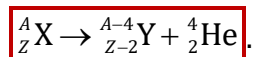
(здесь сделана замена переменных  $z = -\lambda t$ );

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, T = \tau \ln 2.$$

### 7.2.2. Альфа-распад

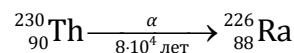
**$\alpha$ -частица** — ядро  ${}^4_2\text{He}$ .

**$\alpha$ -распад** — самопроизвольное испускание  $\alpha$ -частицы ядром. Общий вид уравнения  $\alpha$ -распада:



$\alpha$ -частицы испускают только тяжёлые ядра ( $Z > 82$ ).

#### ПРИМЕР



Кинетическая энергия  $\alpha$ -частиц  $W_{\alpha} \sim 1$  МэВ. Энергетический спектр  $\alpha$ -частиц, испускаемых одним изотопом, дискретен:  $W_{\alpha} = W_{\alpha 1}, W_{\alpha 2}, \dots$ , так как дочерние ядра образуются в различных возбуждённых состояниях.

$\alpha$ -распад обусловлен сильным взаимодействием.

Покидая ядро,  $\alpha$ -частица преодолевает потенциальный барьер (рис. 48.3), высота которого больше её кинетической энергии:  $U_C > W_{\alpha}$ .  $\alpha$ -распад происходит благодаря туннельному эффекту.

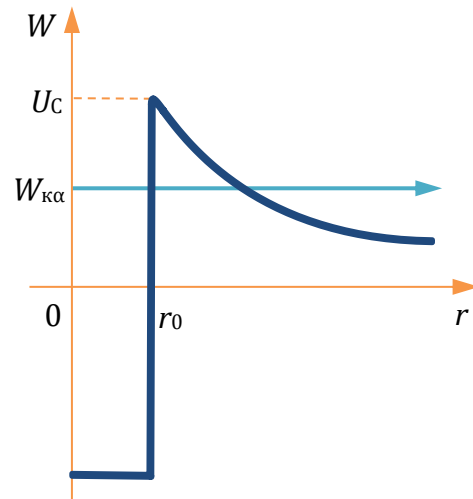


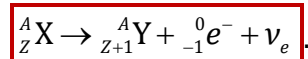
Рис. 48.3

### 7.2.3. Бета-распад

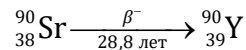
**$\beta$ -распад** — самопроизвольный процесс, в котором материнское ядро превращается в дочернее ядро с тем же массовым числом, но с зарядовым числом, отличающимся от исходного на  $\pm 1$ .

#### 1. Электронный $\beta$ -распад

При **электронном  $\beta$ -распаде** из ядра вылетает электрон (и электронное антинейтрино), а заряд ядра увеличивается на единицу:

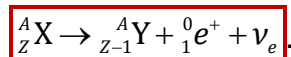


#### ПРИМЕР

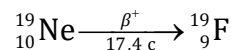


#### 2. Позитронный $\beta$ -распад

При **позитронном  $\beta$ -распаде** из ядра вылетает позитрон (античастица электрона) и электронное нейтрино, а заряд ядра уменьшается на единицу:

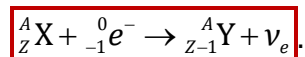


#### ПРИМЕР

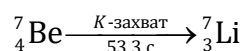


#### 3. К-захват

**К-захват** — захват ядром электрона К-оболочки (оболочки с главным квантовым числом  $n = 1$ ):



#### ПРИМЕР



На рис. 48.4 представлен график экспериментальной зависимости плотности распределения  $\beta$ -частиц по энергиям  $\frac{dN}{dW}(W)$ . Эта зависимость (в отличие от  $\alpha$ -распада) непрерывна, так как в результате распада образуются не две частицы, а три

— дочернее ядро, электрон (позитрон) и антинейтрино (нейтрино). Максимальная энергия вылетающей  $\beta$ -частицы (электрона или позитрона)

$$W_{\max} = (m_X - m_Y)c^2,$$

где  $m_X$  и  $m_Y$  — массы материнского и дочернего ядер соответственно.

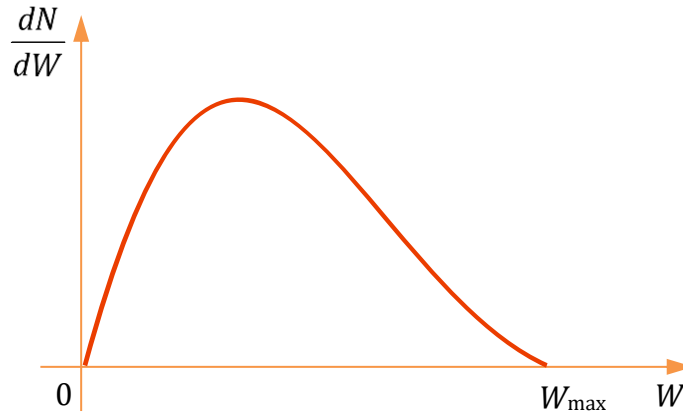


Рис. 48.4

$\beta$ -распад — внутринуклонный, а не внутриядерный процесс, обусловленный слабым взаимодействием.  $\beta$ -распад сводится к следующим процессам:

электронный  $\beta$ -распад — распад нейтрона:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ;

позитронный  $\beta$ -распад — распад протона:  $p \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e$ ;

K-захват:  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ .

#### 7.2.4. Гамма-радиоактивность

$\gamma$ -радиоактивность — испускание  $\gamma$ -квантов ядром при переходе ядра из возбуждённого в основное состояние. Энергетическая диаграмма показана на рис. 48.5.

Энергия испускаемых  $\gamma$ -квантов  $W_\gamma = 10$  кэВ ÷ 5 МэВ. Спектр  $\gamma$ -излучения — дискретный.

Существуют и другие виды радиоактивности: спонтанное деление, протонная, кластерная радиоактивность.

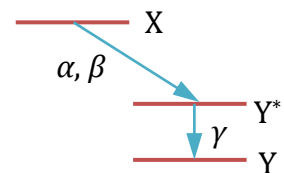
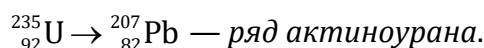
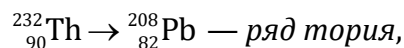
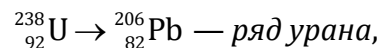


Рис. 48.5

#### 7.2.5. Радиоактивные ряды

Возникающие в результате радиоактивного распада ядра сами могут быть радиоактивны, их продукты распада также радиоактивны и т. д.: происходит целый ряд радиоактивных превращений.

В природе имеют место **3 радиоактивных ряда (семейства)**:



Все эти ряды заканчиваются на разных стабильных изотопах свинца; они приведены целиком в ТАБЛ. 48.2. Также там представлен радиоактивный ряд, начинающийся на искусственном химическом элементе — нептунии:



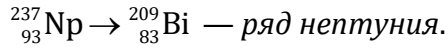


Таблица 48.2

Элемент	НЕПТУНИЙ № 93	УРАН № 92	ПРОТАКТИНИЙ № 91	ТОРИЙ № 90	АКТИНИЙ № 89	РАДИЙ № 88	ФРАНЦИЙ № 87	РАДОН № 86	АСТАТ № 85	ПОЛОНИЙ № 84	БИСМУТ № 83	СВИНЕЦ № 82	ТАЛЛИЙ № 81	
Ряд тория (4n)				${}^{232}\text{Th}$ 1,405 · 10 <sup>10</sup> лет	$\alpha$	${}^{228}\text{MsTh}_1$ 5,76 лет								
					$\beta$	${}^{228}\text{MsTh}_2$ 6,13 ч								
				${}^{228}\text{RdTh}$ 1,913 лет	$\alpha$	${}^{224}\text{ThX}$ 3,66 сут	$\alpha$	${}^{220}\text{Tn}$ 55,6 с	$\alpha$	${}^{216}\text{ThA}$ 0,150 с	$\alpha$	${}^{212}\text{ThB}$ 10,64 ч		
										$\beta$	${}^{212}\text{ThC}$ 60,55 с	$\alpha$	${}^{208}\text{ThC''}$ 3,053 мин	
Ряд нептуния (4n+1)	${}^{237}\text{Np}$ 2,14 · 10 <sup>6</sup> лет	$\alpha$	${}^{233}\text{Pa}$ 27 сут											
	${}^{233}\text{U}$ 1,585 · 10 <sup>5</sup> лет	$\alpha$	${}^{229}\text{Th}$ 7,34 · 10 <sup>3</sup> лет	$\alpha$	${}^{225}\text{Ra}$ 14,8 сут									
					$\beta$	${}^{225}\text{Ac}$ 10 сут	$\alpha$	${}^{221}\text{Fr}$ 4,9 мин	$\alpha$	${}^{217}\text{At}$ 32,3 мкс	$\alpha$	${}^{213}\text{Bi}$ 45,65 мин	$\alpha$	${}^{209}\text{Tl}$ 2,2 мин
										$\beta$	${}^{213}\text{Po}$ 4,2 мкс	$\alpha$	${}^{209}\text{Pb}$ 3,253 ч	
Ряд урана-радия (4n+2)	${}^{238}\text{UI}$ 4,468 · 10 <sup>9</sup> лет	$\alpha$	${}^{234}\text{UX}_1$ 24,1 сут											
			${}^{234\text{m}}\text{UX}_2$ 1,17 мин	$\beta$	${}^{234}\text{UZ}$ 6,7 ч	$\alpha$	${}^{230}\text{Io}$ 7,7 · 10 <sup>4</sup> лет	$\alpha$	${}^{226}\text{Ra}$ 1600 лет	$\alpha$	${}^{222}\text{Rn}$ 3,823 сут	$\alpha$	${}^{218}\text{RaA}$ 3,05 мин	
				$\beta$	${}^{234}\text{UII}$ 2,445 · 10 <sup>5</sup> лет									
										$\beta$	${}^{218}\text{At}$ ~2 с	$\alpha$	${}^{214}\text{RaB}$ 26,8 мин	
Ряд актиноурана (4n+3)	${}^{235}\text{AcU}$ 7,938 · 10 <sup>8</sup> лет	$\alpha$	${}^{231}\text{UY}$ 25,52 ч											
			${}^{231}\text{Pa}$ 3,276 · 10 <sup>4</sup> лет	$\alpha$	${}^{227}\text{Ac}$ 21,773 лет	$\alpha$	${}^{223}\text{AcK}$ 21,8 мин	$\alpha$	${}^{219}\text{At}$ 0,9 мин	$\alpha$	${}^{215}\text{Bi}$ 7,4 мин			
				$\beta$	${}^{227}\text{RdAc}$ 18,718 сут	$\alpha$	${}^{223}\text{AcX}$ 9,43 сут	$\alpha$	${}^{219}\text{An}$ 3,96 с	$\alpha$	${}^{215}\text{AcA}$ 1,78 · 10 <sup>-3</sup> с	$\alpha$	${}^{211}\text{AcB}$ 36,1 м	
									$\beta$	${}^{215}\text{At}$ 0,1 мкс	$\alpha$	${}^{211}\text{AcC}$ 2,14 мин	$\alpha$	${}^{207}\text{AcC''}$ 4,77 мин
									$\beta$	${}^{211}\text{AcC'}$ 0,516 с	$\alpha$	${}^{207}\text{AcD}$ (стабилен)		

${}^{231}\text{Pa}$  ← массовое число  
 ${}^{231}\text{Pa}$  ← символ нуклида  
 $3,276 \cdot 10^4$  лет ← период полураспада

## Лекция 49

### 7.3. Ядерные реакции

**Ядерная реакция** — явление взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, сопровождающегося преобразованием ядер. Ядерные реакции обусловлены сильным взаимодействием. Общий вид уравнения ядерной реакции:



Налетающая частица  $a$  и испускаемая частица  $b$  — это, чаще всего,  $n$ ,  $p$ ,  $d$  (дейтрон — ядро дейтерия),  $\alpha$ ,  $\gamma$ . Ядерная реакция может идти по нескольким каналам с разными вероятностями.

Ядерные реакции обусловлены сильным взаимодействием.

#### 7.3.1. Выход ядерной реакции

**Эффективное сечение реакции**  $\sigma$  — площадь сечения исходного ядра  $X$ , попадая в которую, налетающая частица вызывает реакцию;

$$[\sigma] = \text{барн} = 10^{-28} \text{ м}^2.$$

Если мишень *тонкая*, т. е. ядра не перекрывают друг друга, то доля площади  $S$  мишени, перекрытая ядрами  $X$ , равна  $\frac{\sigma n S}{S}$ , где  $n$  — число ядер на участке мишени единичной площади. В этом случае вероятность реакции — **выход реакции**

$$P = \frac{\Delta N}{N} = \sigma n,$$

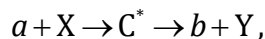
где  $N$  — число ядер мишени,  $\Delta N$  — число прореагировавших ядер.

Если мишень не тонкая, то

$$P = 1 - e^{-\sigma n}.$$

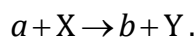
#### 7.3.2. Типы ядерных реакций

1. Реакции, вызываемые *медленными* частицами:



$C^*$  — **составное (промежуточное) ядро**. Ядро  $C^*$  находится в возбуждённом состоянии, его время жизни  $\tau \sim 10^{-14}$  с.

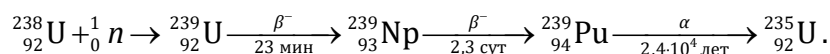
2. Реакции, вызываемые *быстрыми* частицами (энергия налетающей частицы  $W_a \geq 10^2$  МэВ):



Это прямые реакции.

#### ПРИМЕР

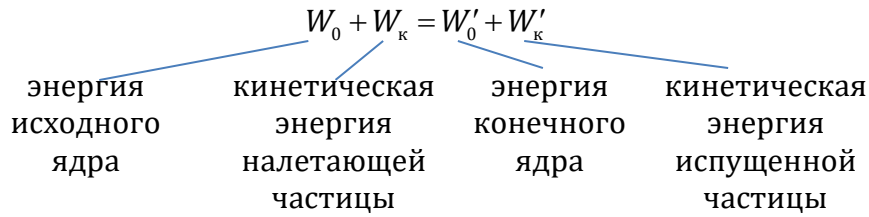
Синтез трансурановых химических элементов



Здесь имеет место резонансный захват нейтрона.

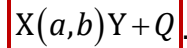
### 7.3.3. Энергия ядерной реакции

Применим к ядерной реакции закон сохранения энергии:



#### Энергия реакции

$$Q = W_0 - W'_0 = W'_{\text{к}} - W_{\text{к}};$$



**Экзоэнергетическая реакция** — реакция, протекающая с выделением энергии:  $Q > 0$ .

**Эндоэнергетическая реакция** — реакция, протекающая с поглощением энергии:  $Q < 0$ .

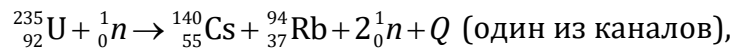
Выразим энергию реакции через массы частиц, участвующих в реакции, и их дефекты масс:

$$Q = \begin{cases} [(m_a + m_x) - (m_b + m_y)]c^2, \\ [(\Delta_b + \Delta_y) - (\Delta_a + \Delta_x)]c^2. \end{cases}$$

### 7.3.4. Реакция деления атомного ядра

Это реакция 1-го типа — ядро проходит через ряд промежуточных состояний.

На исходное ядро налетает нейтрон и оно разделяется на два осколка с испусканием двух нейтронов:



$$Q \approx 200 \text{ МэВ.}$$

При одном налетающем нейтроне образуются два. Если имеются другие исходные ядра, то возможна *цепная реакция* с лавинообразным нарастанием числа нейтронов (рис. 49.2).

Пусть имеется образец радиуса  $R$ , изготовленный из делящегося материала. Так как число выходящих из образца нейтронов пропорционально площади его поверхности ( $R^2$ ), а число рождающихся нейтронов пропорционально объёму образца ( $R^3$ ), то существует некоторый **критический радиус**  $R_{\text{кр}}$ , а также **критическая масса**  $m_{\text{кр}}$ : при  $R > R_{\text{кр}}$  ( $m > m_{\text{кр}}$ ) начинается цепная реакция.

Для  ${}_{92}^{235}\text{U}$  критический радиус  $R_{\text{кр}} = 6$  см, критическая масса  $m_{\text{кр}} = 20$  кг. Такой образец изображён на рис. 49.1.

При превышении этих параметров происходит **неуправляемая реакция** деления, т. е. ядерный взрыв.



Рис. 49.1

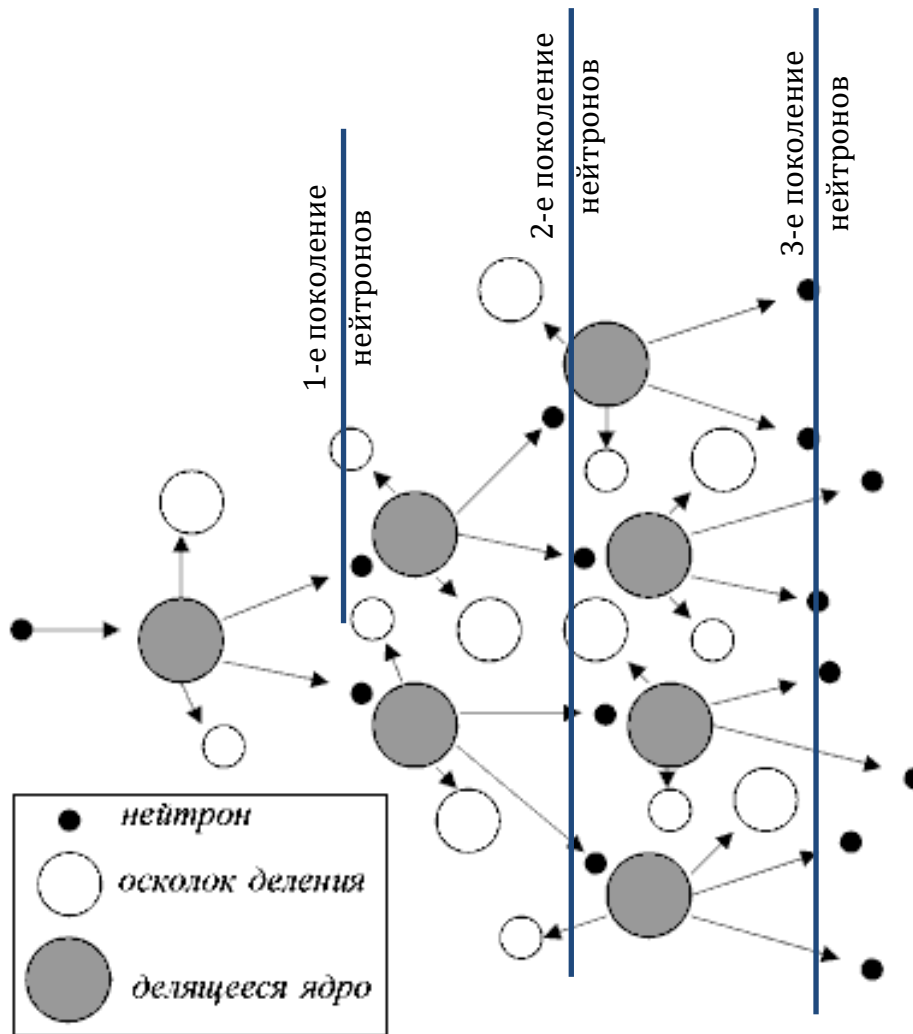


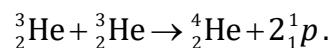
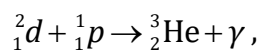
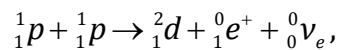
Рис. 49.2

Для осуществления *управляемой реакции* нужно поддерживать число нейтронов внутри образца постоянным. Это осуществляется путём ввода внутрь зоны, где происходит реакция деления, поглотителей, изготовленных из материала с высоким сечением реакции захвата нейтрона (например, кадмия).

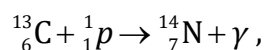
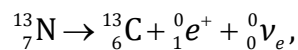
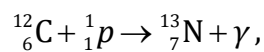
### 7.3.5. Реакция синтеза атомного ядра

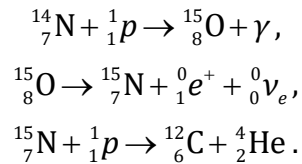
*Реакция (термоядерного) синтеза* — слияние лёгких ядер в одно ядро.

#### 1. Протон-протонный цикл



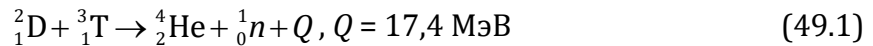
#### 2. Углеродно-азотный цикл



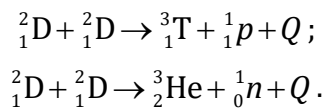


Результат обоих этих циклов — превращение четырёх протонов в ядро гелия с рождением двух позитронов и  $\gamma$ -излучения. На одно ядро гелия выделяется энергия  $Q = 26,8$  МэВ. Именно за счёт энергии, высвобождающейся при таких термоядерных реакциях, светят звёзды.

Другие реакции синтеза



— эту реакцию предполагается использовать для получения энергии при управляемом термоядерном синтезе;



Реакция термоядерного синтеза протекает в плазме.

Требования к осуществлению реакции термоядерного синтеза

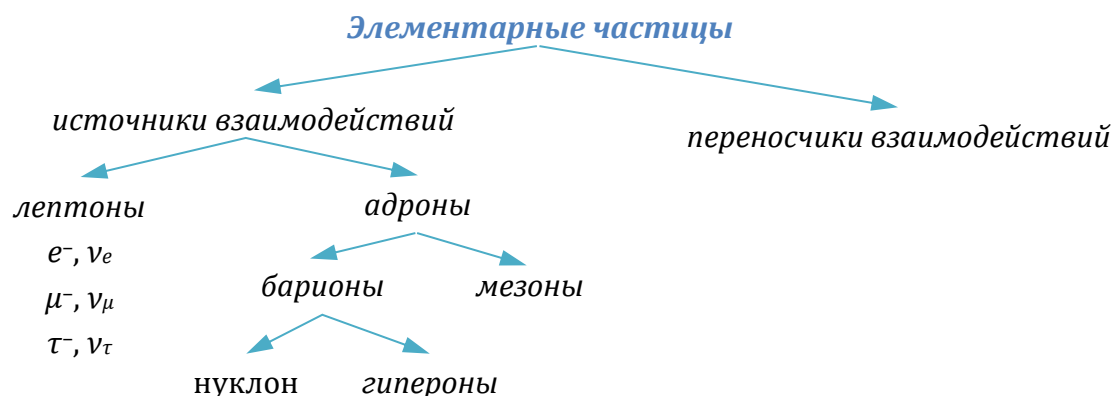
1. Достижение минимальной температуры
2. Достижение минимального значения величины  $n\tau$ , где  $n$  — концентрация исходных частиц,  $\tau$  — время удержания плазмы.

Для реакции (49.1)  $n\tau > 10^{16} \text{ м}^{-3}\cdot\text{с}$ ,  $T > 10^8 \text{ К}$ .

Лекция 50<sup>91</sup>7.4. Элементарные частицы<sup>92</sup>

## 7.4.1. Классификация элементарных частиц

Элементарные частицы — частицы, проявляющие себя как бесструктурные.



Примеры всех типов частиц приведены в [ТАБЛИЦАХ 50.1, 50.2, 50.3](#).

## 7.4.2. Фундаментальные взаимодействия

См. [ТАБЛИЦУ 1.1](#).

## 7.4.3. Античастицы

Каждой элементарной частице соответствует своя античастица. **Античастица** отличается от частицы только знаками зарядов (электрического, лептонного, барионного, странности и т. д.). Масса, спин и время жизни частицы и античастицы одинаковы.

**Истинно нейтральная частица** — частица, которая совпадает со своей античастицей.

**ПРИМЕРЫ**

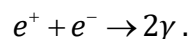
Фотон  $\gamma$ ,  $\pi^0$ -мезон,  $\eta^0$ -мезон

**Аннигиляция** — превращение пары частица-античастица в истинно нейтральные частицы. Обратный процесс — **рождение пары**.

Процессы аннигиляции и рождения пары происходят с соблюдением законов сохранения.

**ПРИМЕР**

Реакция аннигиляции электрона и позитрона



## 7.4.4. Взаимодействие частиц. Фейнмановские диаграммы

Все процессы сводятся к испусканию, распространению и поглощению реальных и виртуальных частиц.

<sup>91</sup> Материал лекций 50–51 может быть дан на **самостоятельное изучение**.

<sup>92</sup> В этом параграфе содержится в том числе материал, изложенный в [ПАРАГРАФЕ 0](#). В частности, [ТАБЛ. 1.1](#) мы здесь второй раз не воспроизводим, но на «живой» лекции её, конечно, нужно записать ещё раз.

Взаимодействие частиц осуществляется путём испускания и поглощения виртуальных частиц-переносчиков, для которых  $m^2 c^4 \neq W^2 - c^2 p^2$  ( $m$  — масса покоя,  $W$  — энергия,  $p$  — модуль импульса частицы).

Взаимодействие, соответствующее обмену виртуальными частицами массы  $m$ , описывается *потенциалом Юкавы*

$$U(r) = -\frac{\alpha \hbar c}{r} e^{-\frac{r}{\hbar/mc}} \text{ } ^{93},$$

здесь  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  — *постоянная тонкой структуры*;  $\frac{\hbar}{mc}$  — комптоновская длина волны частицы массы  $m$  (делённая на  $2\pi$ ). Этот потенциал резко падает с ростом  $m$ . При анализе различных процессов удобно пользоваться *диаграммами Фейнмана*.

Элементы и правила построения диаграмм Фейнмана

1. *Линии* описывают распространение частиц.
2. *Вершины* — места соединения линий — описывают испускание и поглощение частиц.
3. Реальные частицы изображаются *лучами* — линиями, приходящими из бесконечности или уходящими в бесконечность.
4. Виртуальные частицы изображаются *отрезками* — линиями, соединяющими другие линии.
5. Фермионы изображаются *прямыми линиями*, бозоны — *волнистыми линиями*.

Вероятность процесса определяется квадратом модуля его амплитуды. Фейнмановская диаграмма задаёт алгоритм вычисления этой амплитуды.

Каждому элементу диаграммы отвечают определённые множители.

1. Линиям реальных частиц соответствуют волновые функции этих частиц.
2. Вершинам соответствуют константы взаимодействий.
3. Линиям виртуальных частиц соответствуют функции распространения (*пропагаторы*)  $\sim \frac{1}{P^2}$  ( $P$  — модуль 4-импульса виртуальной частицы).

<sup>93</sup> Эта формула записана в системе СГС, т. к. СИ в физике элементарных частиц не используется. В

СИ:  $U(r) = -\frac{\alpha \hbar c}{4\pi \epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\hbar/mc}}$ .

**ПРИМЕРЫ**

1) Упругое рассеяние электрона на протоне (рис. 50.1)

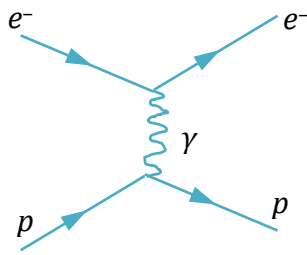


Рис. 50.1

2) Неупругое рассеяние электрона на протоне (рис. 50.2)

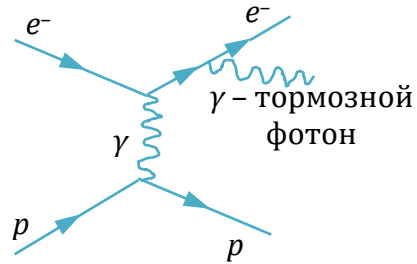


Рис. 50.2

3) Аннигиляция электрона и позитрона в два фотона (рис. 50.3)

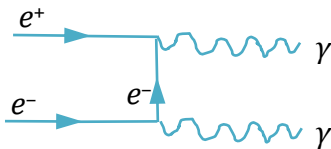


Рис. 50.3

4) Аннигиляция электрона и позитрона в три фотона (рис. 50.4)

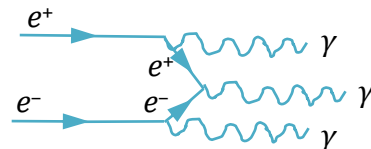


Рис. 50.4

5) Распад мюона (рис. 50.5)

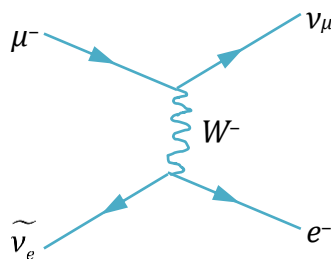


Рис. 50.5

6) Рассеяние мюонного нейтрино электроном (рис. 50.6)

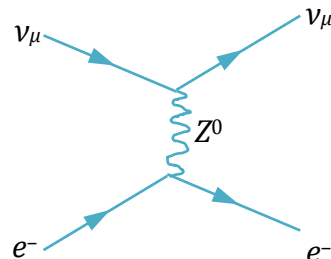


Рис. 50.6

**7.4.5. Законы сохранения****Законы сохранения****точные**

(выполняются для всех фундаментальных взаимодействий)

ЗС энергии

ЗС импульса

ЗС момента импульса

ЗС электрического заряда

ЗС лептонных зарядов

**приближённые**

(могут не выполняться при слабом взаимодействии)

ЗС барионного заряда

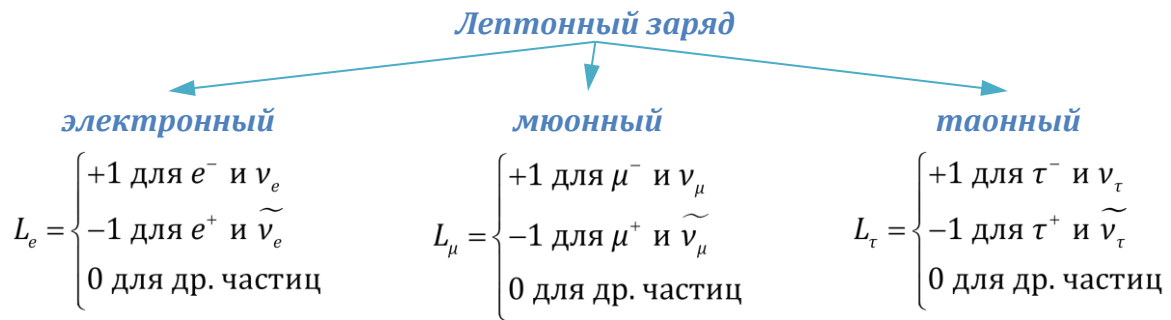
ЗС чётности

ЗС изоспина

ЗС странности, очарования и красоты



## 1. Лептонные заряды



**Закон сохранения лептонных зарядов:** во всех процессах суммарные лептонные заряды закрытой системы остаются неизменными:

$$L_e = \text{const}, L_\mu = \text{const}, L_\tau = \text{const}.$$

**ПРИМЕРЫ**

$$n \rightarrow p + e^- + \nu_e, p + \nu_\mu \rightarrow n + \mu^+$$

## 2. Барионный заряд

$$B = \begin{cases} +1 \text{ для барионов,} \\ -1 \text{ для антибарионов,} \\ 0 \text{ для др. частиц.} \end{cases}$$

**Закон сохранения барионного заряда:** во всех процессах барионный заряд закрытой системы остаётся неизменным:

$$B = \text{const}.$$

**ПРИМЕР**

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

антипротон

## 3. Странность

**Странность**  $S$  — квантовое число, отличное от нуля для некоторых гиперонов и мезонов, распадающихся за счёт слабого взаимодействия.

**Закон сохранения странности:** во всех процессах, обусловленных электромагнитным и сильным взаимодействиями, странность закрытой системы остаётся неизменной, а в процессах, обусловленных слабым взаимодействием, может изменяться на  $\pm 1$ .

**ПРИМЕР**

$$p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+$$

$\Lambda^0$ -гиперон,  $S = -1$        $K^+$ -мезон,  $S = +1$

4. Шарм (очарование)  $C$ , красота (прелесть)  $b$ , истина  $t$ 

Эти квантовые числа — аналог странности  $S$ .

**Закон сохранения шарма, красоты и истины:** во всех процессах, обусловленных электромагнитным и сильным взаимодействиями, шарм, красота и истина закрытой системы остаются неизменными, а в процессах, обусловленных слабым взаимодействием, могут изменяться на  $\pm 1$ .

## 5. Изоспин

Адроны, близкие по физическим свойствам, можно разбить на группы — **изотопические мультиплеты**.

*Характеристики частиц в изотопическом мультиплете*

1. Примерно равные массы  $m$
2. Равные барионный заряд  $B$ , спин  $s$ , странность  $S$
3. Различный электрический заряд  $Q$
4. Равный **изотопический спин (изоспин)  $T$**
5. Различные **проекции изотопического спина  $T_z$**

Общее число частиц в мультиплете равно  $2T + 1$ .

Частицы с большим электрическим зарядом  $Q$  имеют большие  $T_z$ .

### ПРИМЕР

Нуклон:  $T = \frac{1}{2}$ ;  $T_z(p) = +\frac{1}{2}$ ,  $T_z(n) = -\frac{1}{2}$ .

### 7.4.6. Чётность. $C$ -, $P$ -, $T$ -симметрии. Поляризация частиц

**Чётность** — свойство физической величины сохранять свой знак (или изменять его на противоположный) при некоторых дискретных преобразованиях:

$$A' = PA,$$

где  $A$  — физическая величина до преобразования,  $A'$  — эта же величина после преобразования;

$$P = \pm 1.$$

При  $P = +1$  величина **чётная**, при  $P = -1$  — **нечётная**.

Дискретные симметрии

**$C$ -симметрия (зарядовая симметрия)** — симметрия относительно зарядового сопряжения, т. е. относительно замены всех частиц в некотором процессе на соответствующие античастицы.

**$P$ -симметрия (зеркальная симметрия)** — симметрия относительно зеркального отражения, т. е. относительно замены некоторого процесса зеркально отражённым.

**$T$ -симметрия (временная симметрия)** — симметрия относительно обращения времени, т. е. относительно замены некоторого процесса на обратный.

Поляризация частиц

Все частицы, рождающиеся в процессах, обусловленных слабым взаимодействием, **поляризованы продольно**: спин частицы направлен параллельно её импульсу:

$$\vec{L}_s \parallel \vec{p}.$$

**Правополяризованная частица** — частица, спин которой сонаправлен импульсу.

**Левополяризованная частица** — частица, спин которой направлен против импульса.

Частицы рождаются левополяризованными, а античастицы — правополяризованными. Это означает нарушение  $C$ - и  $P$ -симметрии — несохранение  $C$ - и  $P$ -чётности.

**ПРИМЕРЫ**

Распад каона ( $K$ -мезона):

$$K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-, K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0.$$

Эти процессы идут с нарушением  $CP$ -симметрии. Вероятность этих процессов около  $10^{-6}$ .

$CPT$ -симметрия не нарушается никогда.

**7.4.7. Стабильные и долгоживущие адроны<sup>94</sup>**

Мезоны

**Таблица 50.1**

Частица	Обозначение	Античастица	Масса покоя, МэВ/ $c^2$	$Q$	$B$	$S$	Время жизни, с	Основные каналы распада
Пион	$\pi^+$	$\pi^-$	139,6	+1	0	0	$2,60 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$
	$\pi^0$	$\pi^0$	135,0	0	0	0	$8,3 \cdot 10^{-17}$	$2\gamma$
Каон	$K^+$	$K^-$	493,7	+1	0	+1	$1,24 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu, \pi^+ \pi^0$
	$K_S^0$	$K_S^0$	497,7	0	0	+1	$8,9 \cdot 10^{-11}$	$\pi^+ \pi^-, 2\pi^0$
	$K_L^0$	$K_L^0$	497,7	0	0	+1	$5,2 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ e^+ \nu_e,$ $\pi^+ \mu^\pm \nu_\mu, 3\pi^0$
$\eta$ -мезон	$\eta^0$	$\eta^0$	548,8	0	0	0	$< 10^{-18}$	$2\gamma, 3\pi^0$

<sup>94</sup> [Таблицы 50.1, 50.2, 50.3](#) не стоит воспроизводить во время лекции целиком на доске, а показать в виде компьютерной презентации.

## Барионы

Таблица 50.2

Частица	Обозначение	Античастица	Масса покоя, МэВ/с <sup>2</sup>	Q	B	S	Время жизни, с	Основные каналы распада
Протон	$p$	$\bar{p}$	938,3	+1	+1	0	Стабилен	
Нейтрон	$n$	$\bar{n}$	939,5	0	+1	0	920	$pe^- \nu_e$
Лямбда	$\Lambda^0$	$\bar{\Lambda}^0$	1115,6	0	+1	-1	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^-, n\pi^0$
Сигма	$\Sigma^+$	$\bar{\Sigma}^+$	1189,4	+1	+1	-1	$8,0 \cdot 10^{-11}$	$p\pi^0, n\pi^+$
	$\Sigma^0$	$\bar{\Sigma}^0$	1192,5	0	+1	-1	$6 \cdot 10^{-20}$	$\Lambda^0 \gamma$
	$\Sigma^-$	$\bar{\Sigma}^-$	1197,3	-1	+1	-1	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$n\pi^-$
Кси	$\Xi^0$	$\bar{\Xi}^0$	1315	0	+1	-2	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \pi^0$
	$\Xi^-$	$\bar{\Xi}^-$	1321	-1	+1	-2	$1,64 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \pi^-$
Омега	$\Omega^-$	$\bar{\Omega}^+$	1672	-1	+1	-3	$8,2 \cdot 10^{-11}$	$\Sigma^0 \pi^0, \Lambda^0 K^-$

## 7.4.8. Лептоны

Таблица 50.3

Частица	Обозначение	Античастица	Масса покоя, МэВ/с <sup>2</sup>	Электрический заряд Q	Время жизни, с	Основные каналы распада
Электрон	$e^-$	$e^+$ позитрон	0,511	-1	Стабилен	
Электронное нейтрино	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	0	0	Стабильно	
Мюон	$\mu^-$	$\mu^+$	105,7	-1	$2,20 \cdot 10^{-6}$	$e^- \nu_e \nu_\mu$
Мюонное нейтрино	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	0	Стабильно	
$\tau$ -лептон (таон)	$\tau^-$	$\tau^+$	1784,0	-1	$< 4 \cdot 10^{-13}$	$\mu^- \nu_\mu \nu_\tau,$ $e^- \nu_e \nu_\tau,$ адроны
$\tau$ -нейтрино	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	Стабильно	

## Лекция 51

### 7.5. Кварковая модель адронов

#### 7.5.1. Фундаментальные фермионы. Поколения лептонов и кварков

Все адроны состоят из частиц, называемых *кварками*.

Имеется 6 типов (*ароматов*) кварков (см. [ТАБЛ. 51.2](#)).

Все кварки имеют спин  $s = \frac{1}{2}$ , дробный электрический заряд, барионный заряд  $B = \frac{1}{3}$ .

*Антикварки* отличаются от кварков знаками зарядов  $Q, B, S, C, b, t$ .

Лептоны и кварки группируются в три *поколения* ([ТАБЛ. 51.1](#)). Частицы I поколения — самые лёгкие, III поколения — самые тяжёлые.

Таблица 51.1

Поколения лептонов и кварков

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$e^-$	$\mu^-$	$\tau^-$
$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
$d$	$s$	$b$
$u$	$c$	$t$

Таблица 51.2

Обозначение (аромат) кварка	Электрический заряд $Q$	Странность $S$	Шарм $c$	Красота $b$	Истина $t$
$u$ верхний	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0
$d$ нижний	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$s$ странный	$-\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
$c$ очарованный	$\frac{2}{3}$	0	1	0	0
$b$ прекрасный	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	0
$t$ истинный	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1

#### 7.5.2. Взаимодействие кварков и образование адронов

Сильное взаимодействие между кварками осуществляется через обмен *глюонами*  $g$ . Фейнмановская диаграмма взаимодействия кварков показана на [рис. 51.1](#).

Спин глюона  $s = 1$ , чётность  $P = -1$ .

Кварки не наблюдаются в свободном состоянии. Имеет место пленение кварков — **конфайнмент**.

Потенциал типа воронки, описывающий конфайнмент кварка внутри адрона, показан на [рис. 51.2](#) ( $r_0 \approx 10^{-15}$  м).

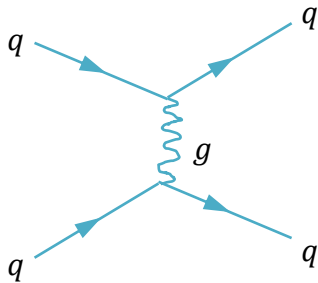


Рис. 51.1

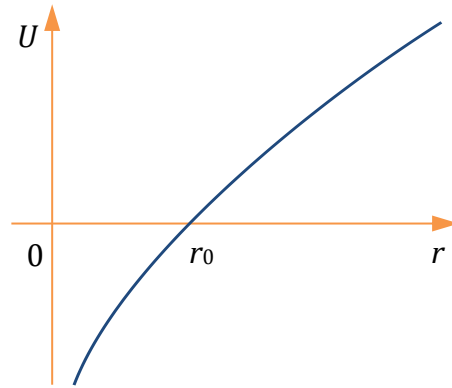


Рис. 51.2

Мезоны состоят из кварка и антикварка.

Барионы состоят из трёх кварков; гипероны состоят из трёх кварков, не все из которых — *u* или *d*.

Спин адрона:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{L}_s$$

сумма орбитальных  
моментов кварков
сумма спинов  
кварков

**Системы, состоящие из одной и той же комбинации кварков, но с разным суммарным спином, являются разными элементарными частицами!**

#### ПРИМЕРЫ

Пи-мезоны —  $\pi^+ : ud(\uparrow\downarrow)$ ,  $\pi^- : d\tilde{u}(\uparrow\downarrow)$ .

Протон —  $p : uud(\uparrow\downarrow\uparrow)$ .

Нейтрон —  $n : udd(\uparrow\downarrow\uparrow)$ .

Каоны —  $K^+ : u\tilde{s}(\uparrow\downarrow)$ ,  $K^0 : d\tilde{s}(\uparrow\downarrow)$ .

Лямбда-гиперон —  $\Lambda^0 : uds(\uparrow\downarrow\uparrow)$ .

#### 7.5.3. Цвет

Кварки характеризуются ещё одним квантовым числом — **цветом**. Цвет может принимать три значения ([ТАБЛ. 51.3](#))

При испускании и поглощении глюонов кварк изменяет цвет, но его аромат при этом сохраняется.

Антикварки характеризуются **антицветом**.

Глюоны характеризуются цветом и антицветом.

**Закон сохранения цвета:** цветовой заряд закрытой системы не изменяется.

Закон сохранения цвета не выполняется в процессах, обусловленных слабым взаимодействием.

Таблица 51.3

Цвет	Антицвет
Красный	Антикрасный (зелёный)
Жёлтый	Антижёлтый (фиолетовый)
Синий	Антисиний (оранжевый)

**ПРИМЕРЫ**

Испускание глюона кварком:

$$q_k \rightarrow q_j + g_{kj}, \quad q_k \rightarrow q_c + g_{kc}.$$

Поглощение глюона кварком:

$$q_k + g_{jk} \rightarrow q_j, \quad q_k + g_{ck} \rightarrow q_c, \quad q_k + g_{cc} \rightarrow q_k.$$

Так как глюон имеет цветовой заряд, он испускает глюоны. На расстояние больше  $r_0$  цветовые заряды вырваться не могут. Поэтому в свободном виде могут существовать только *бесцветные (белые)* комбинации цветовых зарядов.

**Принцип бесцветности адронов:** возможны только те сочетания кварков разных цветов, смесь которых бесцветна.

**7.5.4. Распад кварков**

Аромат кварков может изменяться в процессах, обусловленных слабым взаимодействием.

**ПРИМЕРЫ**1)  $\beta$ -распад нейтрона

Распад нейтрона (свободного или связанного в  $\beta^-$ -радиоактивном ядре)

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

эквивалентен распаду  $d$ -кварка

$$d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e.$$

Фейнмановские диаграммы этих процессов изображены на [рис. 51.3А, Б](#).

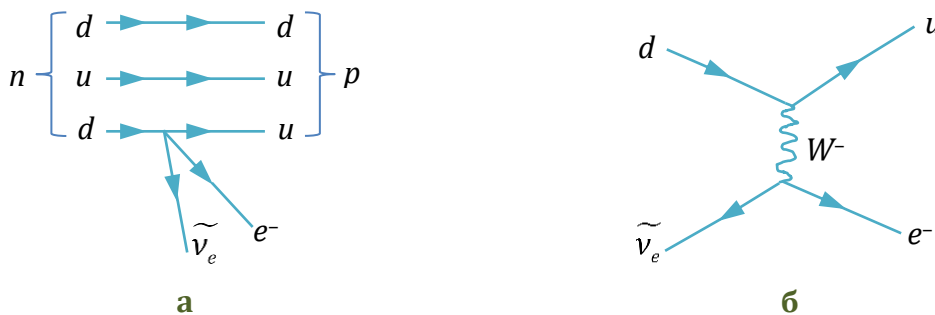


Рис. 51.3

## 2) Распад пиона (рис. 51.4)

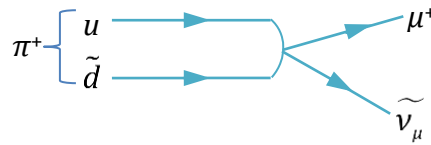


Рис. 51.4

## 7.6. Теории фундаментальных взаимодействий

## 1. Квантовая электродинамика

**Квантовая электродинамика** — теория взаимодействия фотонов и электронов.

## 2. Квантовая хромодинамика

**Квантовая хромодинамика** — теория взаимодействия глюонов и кварков.

## 3. Стандартная теория электрослабого взаимодействия

**Стандартная теория** описывает слабое и электромагнитное взаимодействия как единое взаимодействие.

**Электрослабая симметрия:** должны существовать 4 фундаментальных безмассовых бозона — 2 заряженных и 2 нейтральных + массивный **бозон Хиггса**.

Экспериментально доказано существование 1 фундаментального безмассового бозона (фотона) и 3 массивных ( $W^\pm$  и  $Z^0$ ).

*Константы взаимодействий*

**Константа  
электромагнитного взаимодействия**

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

**Константа  
слабого взаимодействия**

$$\alpha_w = \frac{g_w^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{30} g_w,$$

$g_w$  — слабый заряд;  $g_w > e$

*Характеристики бозона Хиггса*

1. Энергия  $W \approx 116 \div 130$  ГэВ
2. Спин  $s = 0$
3. Электрический заряд  $Q = 0$

*Роль бозона Хиггса*

1. Массы лептонов, кварков и промежуточных бозонов
2. Нарушение  $CP$ - и  $P$ -симметрий при слабом взаимодействии
3. Количественное преобладание  $u$ -кварков над  $d$ -кварками

## 4. Теория Великого объединения

**Теория Великого объединения** описывает сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия как единое взаимодействие.

**Константа сильного взаимодействия**

$$\alpha_s = \alpha_{GV} \approx \frac{1}{40}.$$



Заряды — сильный, слабый, электрический — функции 4-импульса; соответственно, константы взаимодействий также зависят от 4-импульса. Причина этого — **поляризация вакуума**. (Это явление аналогично поляризации диэлектрика.)

Благодаря поляризации вакуума с ростом 4-импульса сильный  $g_s$  и слабый  $g_w$  заряды падают, а электрический заряд  $e$  — растёт.

Константы взаимодействий выравниваются и цветовая и электрослабая симметрии объединяются при энергиях

$$W \approx 10^{14} \div 10^{15} \text{ ГэВ.}$$

**Единая симметрия:** должны существовать 24 фундаментальных бозона — глюоны, промежуточные бозоны, фотон,  $X$ -,  $Y$ -бозоны.

**Характеристики  $X$ -,  $Y$ -бозонов**

1. Энергия  $W \approx 10^{15}$  ГэВ
2. Спин  $s = 1$
3. Электрический заряд  $Q_X = \frac{4}{3}$ ,  $Q_Y = \frac{1}{3}$
4. Каждый бозон характеризуется 3 цветами.

**ПРИМЕРЫ**

1) Превращение протона в позитрон  
(рис. 51.5)

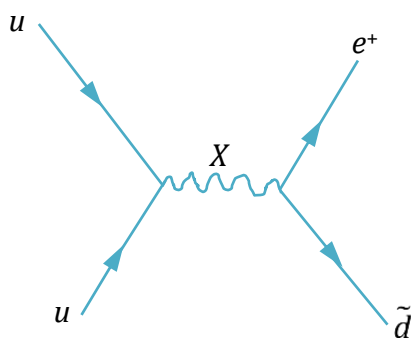


Рис. 51.5

2) Превращение нейтрона в электронное антинейтрино  
(рис. 51.6)

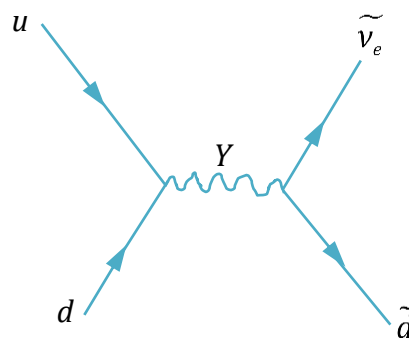


Рис. 51.6

## 5. Суперобъединение

**Теория суперобъединения** описывает все фундаментальные взаимодействия как одно взаимодействие.

**Суперсимметрия** реализуется при энергиях  $W \approx 10^{19}$  ГэВ и на расстояниях  $r \approx 10^{-33}$  см для объектов массой порядка  $m_{\text{Pl}} = 10^2$  кг (**масса Планка**). При таких условиях энергия гравитационного поля сравнивается с кинетической энергией частиц при их электромагнитном взаимодействии.

При энергиях и импульсах порядка массы Планка гравитационное взаимодействие становится определяющим.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. Вывод преобразований Лоренца

Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта, одна из которых ( $K'$ ) движется относительно другой ( $K$ ) с постоянной по величине и направлению скоростью  $\vec{v}$  (рис. 8.1). С системами  $K$  и  $K'$  связаны декартовы системы координат, соответственные оси которых параллельны. Вектор  $\vec{v}$  сонаправлен осям  $x$  и  $x'$ .

**Преобразования Лоренца** — это соотношения, связывающие значения координат и времени наступления любого события в системе  $K'$  со значениями координат и времени наступления того же события в системе  $K$ :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{f}(\vec{r}, t, \vec{v}), \\ t' = g(\vec{r}, t, \vec{v}). \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

Найдём вид функций  $\vec{f}$  и  $g$ , опираясь на однородность пространства и времени, изотропность пространства (см. ТАБЛИЦУ 1.2) и принцип относительности (см. ПАГРАФ 1.11). Если к этим требованиям добавить постулат об абсолютности времени, то должны получиться преобразования Галилея (ТАБЛИЦА 8.1).

Пусть два события разделены в системе  $K$  пространственным вектором  $\Delta\vec{r}$  и временным промежутком  $\Delta t$ . Значения соответствующих промежутков в системе  $K'$  согласно (П.1):

$$\begin{cases} \Delta\vec{r}' = \vec{f}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t, \vec{v}) - \vec{f}(\vec{r}, t, \vec{v}), \\ \Delta t' = g(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t, \vec{v}) - g(\vec{r}, t, \vec{v}). \end{cases} \quad (\text{П.2})$$

Значения  $\Delta\vec{r}'$  и  $\Delta t'$  зависят от  $\Delta\vec{r}$  и  $\Delta t$  (и от  $\vec{v}$ ), но не должны зависеть от  $\vec{r}$  и  $t$  в силу однородности пространства и времени. Но тогда из (П.2) вытекают равенства

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t, \vec{v})}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, t, \vec{v})}{\partial \vec{r}} \quad (\alpha = x, y, z), \quad \frac{\partial \vec{f}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t, \vec{v})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{r}, t, \vec{v})}{\partial t},$$

$$\frac{\partial g(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t, \vec{v})}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial g(\vec{r}, t, \vec{v})}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{\partial g(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t, \vec{v})}{\partial t} = \frac{\partial g(\vec{r}, t, \vec{v})}{\partial t}.$$

Эти равенства должны быть справедливы при произвольных  $\Delta\vec{r}$  и  $\Delta t$ , а это означает, что производные  $\partial f_\alpha / \partial \vec{r}$ ,  $\partial \vec{f} / \partial t$ ,  $\partial g / \partial \vec{r}$  и  $\partial g / \partial t$  не должны зависеть от  $\vec{r}$  и  $t$ , а сами функции  $\vec{f}$  и  $g$  должны быть линейны по этим аргументам.

В дальнейшем в обеих системах  $K$  и  $K'$  будем отсчитывать координаты и время от одного и того же события. При этом  $\vec{f}$  и  $g$  будут однородными функциями  $\vec{r}$  и  $t$ .

Изотропность пространства требует, чтобы радиус-вектор  $\vec{r}'$  и время  $t'$  были представлены соответственно в виде векторной и скалярной функций аргументов  $\vec{r}$ ,  $t$  и  $\vec{v}$ . С точностью до скалярных множителей, зависящих лишь от  $\vec{v}$ , из величин  $\vec{r}$ ,  $t$  и  $\vec{v}$  можно составить только четыре вектора, линейных и однородных по  $\vec{r}$  и  $t$ :  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}(\vec{r}\vec{v})$ ,  $[\vec{r}\vec{v}]$  и  $\vec{v}t$ . А линейных и однородных по  $\vec{r}$  и  $t$  скаляров можно составить только два:  $(\vec{r}\vec{v})$  и  $t$ . Поэтому искомые преобразования должны иметь вид

$$\begin{cases} \vec{r}' = a_1 \vec{r} + a_2 \frac{\vec{v}(\vec{r}\vec{v})}{v^2} + a_3 \vec{v}t + a_4 \frac{[\vec{r}\vec{v}]}{|v|}, \\ t' = a_5 t + a_6 \frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2}. \end{cases} \quad (\text{П.3})$$

В этих равенствах  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) — не известные пока функции скорости  $\vec{v}$ . Эти функции скалярны, поэтому скалярными должны быть и их аргументы. Значит, каждая из величин  $a_n$  зависит только от  $|v|$ <sup>95</sup>.

Равенства (П.3) специально записаны в таком виде, чтобы все  $a_n$  оказались безразмерными. Но у безразмерной функции безразмерными должны быть и аргументы. Поэтому функции  $a_n$  могут не свестись все одновременно к постоянным лишь при наличии хотя бы одной универсальной константы с размерностью скорости.

Первое из соотношений (П.3) не инвариантно относительно пространственной инверсии (и относительно обращения времени). Требование наличия такой инвариантности сразу приводит к равенству  $a_4 = 0$ . Однако мы пока не будем использовать это равенство и получим его позже, не прибегая к указанному требованию.

Рассмотрим ряд событий, происходящих в начале координат системы  $K'$  ( $\vec{r}' = 0$ ) в различные моменты времени  $t'$ . В системе  $K$  эти же события будут происходить в моменты времени  $t$  в точках с  $\vec{r} = \vec{v}t$ . Подставляя эти значения в (П.3), получаем

$$\begin{cases} 0 = a_1 \vec{v}t + a_2 \frac{\vec{v}(\vec{v}t, \vec{v})}{v^2} + a_3 \vec{v}t + a_4 \frac{[\vec{v}t, \vec{v}]}{|v|}, \\ t' = a_5 t + a_6 \frac{(\vec{v}t, \vec{v})}{v^2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 = (a_1 + a_2 + a_3) \vec{v}t, \\ t' = (a_5 + a_6) t, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (\text{П.4})$$

Рассмотрим теперь события, происходящие в начале координат системы  $K$  ( $\vec{r} = 0$ ) в различные моменты времени  $t$ . В системе  $K'$  эти же события будут происходить в моменты времени  $t'$  в точках с  $\vec{r}' = -\vec{v}t'$ , так как система  $K$  движется относительно  $K'$  со скоростью  $-\vec{v}$ . При подстановке значений  $\vec{r} = 0$  и  $\vec{r}' = -\vec{v}t'$  в равенства (П.3) находим

$$\begin{cases} -\vec{v}t' = a_3 \vec{v}t, \\ t' = a_5 t, \end{cases}$$

откуда вытекает, что

$$a_3 = -a_5. \quad (\text{П.5})$$

<sup>95</sup> В уравнениях (П.3) и далее  $v$  (без модульных скобок или вектора) — это проекция вектора скорости  $\vec{v}$  на направление оси, т. е.  $v = v_x$ . Поэтому  $v$  может быть отрицательным.

Перепиcывая равенства (П.3) с учётом (П.4) и (П.5), имеем

$$\begin{cases} \vec{r}' = a_1 \vec{r} + (a_5 - a_1) \frac{\vec{v}(\vec{r}\vec{v})}{v^2} - a_5 \vec{v}t + a_4 \frac{[\vec{r}\vec{v}]}{|v|}, \\ t' = a_5 t + a_6 \frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2}. \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

Представим  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + \vec{r}_\perp, \quad \vec{r}' = x'\vec{i} + \vec{r}'_\perp, \quad (\text{П.7})$$

где  $\vec{i}$  — орт прямой, параллельно которой направлена скорость  $\vec{v}$  ( $\vec{v} = v_x \vec{i} = v\vec{i}$ ), а  $\vec{r}_\perp$  и  $\vec{r}'_\perp$  ортогональны  $\vec{v}$ . Тогда из (П.6) получим

$$\begin{cases} x' = a_5(v)(x - vt), \\ t' = a_5(v)t + a_6(v)\frac{x}{v}, \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

$$\vec{r}'_\perp = a_1(v)\vec{r}_\perp + a_4(v)[\vec{r}_\perp, \vec{e}_v], \quad (\text{П.9})$$

где  $\vec{e}_v = \vec{v}/|v| = v\vec{i}/|v|$ . В соотношениях (П.8) и (П.9) явно указана зависимость функций  $a_n$  от  $v$  — относительной скорости систем отсчёта  $K'$  и  $K$ . Нужно помнить, что фактически эти функции зависят от  $|v|$ .

Рассмотрим наряду с  $K$  и  $K'$  ещё одну инерциальную систему отсчёта  $K''$ , движущуюся относительно системы  $K'$  со скоростью  $\vec{v}' = v'\vec{i}$ . Скорость  $K''$  относительно системы  $K$  обозначим  $\vec{v}'' = v''\vec{i}$ . Ввиду эквивалентности всех инерциальных систем формулы, связывающие координаты и время наступления событий в системах  $K''$  и  $K$ , имеют такую же структуру, как и формулы (П.8) и (П.9), относящиеся к паре систем  $K'$  и  $K$ . Различаются они лишь обозначением переменных.

Пусть некоторое событие характеризуется в системе  $K$  радиусом-вектором  $\vec{r}$  и временем  $t$ , в системе  $K'$  — радиусом-вектором  $\vec{r}'$  и временем  $t'$ , а в системе  $K''$  — радиусом-вектором  $\vec{r}''$  и временем  $t''$ . Радиус-вектор  $\vec{r}''$  и время  $t''$  можно выразить через  $\vec{r}$  и  $t$  двояко. С одной стороны, можно использовать формулы, непосредственно связывающие  $\vec{r}'' = x''\vec{i} + \vec{r}''_\perp$  и  $t''$  с  $\vec{r}$  и  $t$ :

$$\begin{cases} x'' = a_5(v'')(x - v''t), \\ t'' = a_5(v'')t + a_6(v'')\frac{x}{v''}, \\ \vec{r}''_\perp = a_1(v'')\vec{r}_\perp + a_4(v'')[\vec{r}_\perp, \vec{e}_v''], \end{cases}$$

где  $\vec{e}_v'' = \vec{v}''/v'' = v''\vec{i}/|v''|$ . С другой стороны, можно вначале воспользоваться формулами

$$\begin{cases} x'' = a_5(v')(x' - v't'), \\ t'' = a_5(v')t' + a_6(v')\frac{x'}{v'}, \end{cases}$$

$$\vec{r}_\perp'' = a_1(v')\vec{r}_\perp' + a_4(v')\left[\vec{r}_\perp', \vec{e}'_v\right],$$

где  $\vec{e}'_v = \vec{v}'/v' = v'\vec{i}/|v'|$ , а затем подставить в них выражения для  $x'$ ,  $t'$  и  $\vec{r}_\perp'$  из (П.8) и (П.9). Результат должен быть один и тот же, но для этого должны выполняться соотношения:

$$a_5(v'') = a_5(v')a_5(v)\left(1 - \frac{v'a_6(v)}{va_5(v)}\right), \quad (\text{П.10})$$

$$v''a_5(v'') = a_5(v')a_5(v)(v' + v), \quad (\text{П.11})$$

$$\frac{a_6(v'')}{v''} = \frac{a_6(v')a_5(v)}{v'} + \frac{a_6(v)a_5(v')}{v}, \quad (\text{П.12})$$

$$a_5(v'') = a_5(v')a_5(v)\left(1 - \frac{va_6(v')}{v'a_5(v')}\right), \quad (\text{П.13})$$

$$a_1(v'') = a_1(v')a_1(v) - (\vec{e}'_v \vec{e}'_v) a_4(v')a_4(v), \quad (\text{П.14})$$

$$\vec{e}''_v a_4(v'') = \vec{e}'_v a_4(v')a_1(v) + \vec{e}'_v a_4(v)a_1(v'). \quad (\text{П.15})$$

Из сравнения (П.10) и (П.13) видно, что должно быть

$$\frac{v'a_6(v)}{va_5(v)} = \frac{va_6(v')}{v'a_5(v')}$$

или же

$$\frac{a_6(v)}{v^2 a_5(v)} = \frac{a_6(v')}{v'^2 a_5(v')}. \quad (\text{П.16})$$

В левой и правой части равенства (П.16) стоит одна и та же функция, но при разных значениях аргумента. Так как  $v$  и  $v'$  могут меняться совершенно независимо друг от друга, эта функция должна равняться постоянной, которую мы обозначим через  $b$ . В результате имеем

$$a_6(v) = bv^2 a_5(v). \quad (\text{П.17})$$

Подставляя это выражение для  $a_6(v)$  в (П.10) или (П.13), получаем

$$a_5(v'') = a_5(v')a_5(v)(1 - bvv'). \quad (\text{П.18})$$

Если система  $K''$  совпадает с  $K$ , то  $v'' = 0$  и  $v' = -v$ . Подставляя эти значения в (П.18) и учитывая, что  $a_5(-v) = a_5(v)$  и  $a_5(0) = 1$ , находим

$$a_5(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + bv^2}}. \quad (\text{П.19})$$

С учётом (П.17) и (П.19) из соотношений (П.8) имеем

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + bv^2}}, \quad (\text{П.20})$$

$$t' = \frac{t + bvx}{\sqrt{1 + bv^2}}. \quad (\text{П.21})$$

Из (П.11) и (П.18) получаем

$$v'' = \frac{v + v'}{1 - bv'}. \quad (\text{П.22})$$

Равенство (П.12) при подстановке в него функции  $a_6$  из (П.17) сводится к равенству (П.11) и поэтому ничего нового не даёт. Равенства (П.14) и (П.15) рассмотрим позже.

Соотношение (П.22) представляет собой закон сложения скоростей, направленных вдоль одной прямой. Конкретное значение константы  $b$  можно определить только эмпирическим путём. Теоретически можно лишь проанализировать и сопоставить различные возможности.

Если принять постулат об абсолютности времени, то из (П.21) должно следовать равенство  $t' = t$  при произвольных значениях  $v$  и  $x$ . А это возможно лишь при  $b = 0$ . При этом из (П.22) получается обычный нерелятивистский закон сложения скоростей

$$v'' = v + v'. \quad (\text{П.23})$$

Случаи  $b > 0$  и  $b < 0$  проанализируем для упрощённой ситуации, когда  $v' = v$  и соответственно

$$v'' = \frac{2v}{1 - bv^2}. \quad (\text{П.24})$$

Функция, стоящая в правой части равенства (П.24), нечётная. Поэтому достаточно рассмотреть её поведение лишь при  $v \geq 0$ .

Рассмотрим вначале случай  $b > 0$ . При  $v > 1/\sqrt{b}$  равенство (П.24) даёт абсурдный результат: сложение двух равных по модулю, одинаково направленных скоростей ( $v > 0$ ) приводит к противоположно направленной скорости ( $v'' < 0$ ). При  $0 \leq v \leq 1/\sqrt{b}$  получается  $v'' \geq 0$ , но если  $v \rightarrow 1/\sqrt{b}$ , то  $v'' \rightarrow \infty$ , т. е. результат опять абсурден: сложение двух равных по модулю конечных скоростей приводит к скорости, модуль которой не ограничен. На основании этого можно утверждать, что константа  $b$  не может быть положительной.

Теперь рассмотрим случай  $b < 0$ . В этом случае скорость  $v''$  конечна при любом значении  $v$ . В то же время при  $v > 1/\sqrt{-b}$  с ростом  $v$  скорость  $v''$  убывает. При тех же значениях  $v > 1/\sqrt{-b}$  значения  $x'$  и  $t'$  согласно (П.20) и (П.21) оказываются чисто мнимыми. Абсурдность этих результатов показывает, что значения  $v > 1/\sqrt{-b}$  физически не осуществимы. При  $0 \leq v \leq 1/\sqrt{-b}$  с ростом  $v$  скорость  $v''$  растёт, причём при  $v = 1/\sqrt{-b}$  имеем также  $v'' = 1/\sqrt{-b}$ .

Из соотношения (П.22) следует, что в случае  $b < 0$  при  $v' = \pm 1/\sqrt{-b}$  получится  $v'' = \pm 1/\sqrt{-b}$  при любом значении  $v$ , не равном  $-v'$ , т. е. если бы система  $K''$  двигалась относительно системы  $K'$  со скоростью  $\pm 1/\sqrt{-b}$ , то с такой же скоростью она двигалась бы и относительно системы  $K$  вне зависимости от относительной скорости систем  $K$  и  $K'$ . Другими словами, при  $b < 0$  существовала бы инвариантная скорость, по абсолютной величине равная  $1/\sqrt{-b}$ . (При  $b > 0$  инвариантная скорость была бы мнимой.) Как явно из изложенного выше, такая скорость была бы единственной и имела бы наибольшее значение из всех допустимых значений скоро-

стей. При этом не обязательно должен существовать объект, движущийся с инвариантной скоростью, но наличие такого объекта однозначно свидетельствовало бы о реализации в природе случая  $b < 0$ .

Обозначим инвариантную скорость буквой  $c$ , т. е. положим

$$b = -\frac{1}{c^2}. \quad (\text{П.25})$$

Обратимся к равенствам [\(П.14\)](#) и [\(П.15\)](#). Возведя левые и правые части этих равенств в квадрат и затем сложив результаты, получим

$$a_1^2(v'') + a_4^2(v'') = [a_1^2(v') + a_4^2(v')] [a_1^2(v) + a_4^2(v)]. \quad (\text{П.26})$$

Если система  $K''$  совпадает с  $K$ , то  $v'' = 0$  и  $v' = -v$ . Подставляя эти значения в [\(П.26\)](#) и учитывая, что  $a_1(-v) = a_1(v)$ ,  $a_4(-v) = a_4(v)$ ,  $a_1(0) = 1$  и  $a_4(0) = 0$ , находим

$$a_1^2(v) + a_4^2(v) = 1. \quad (\text{П.27})$$

Разделив равенство [\(П.15\)](#) на равенство [\(П.14\)](#), т. е. разделив левую часть на левую, а правую на правую, получим

$$\varphi(v'') = \frac{\varphi(v) + \varphi(v')}{1 - \varphi(v)\varphi(v')}, \quad (\text{П.28})$$

где

$$\varphi(v) = \frac{va_4(v)}{|v|a_1(v)}. \quad (\text{П.29})$$

Пусть  $v' = c$ . Тогда и  $v'' = c$  при произвольном  $v$ . Подставляя эти значения в [\(П.28\)](#), имеем

$$\varphi(c) = \frac{\varphi(c) + \varphi(v)}{1 - \varphi(c)\varphi(v)},$$

откуда получаем

$$\varphi(v)[1 + \varphi^2(c)] = 0. \quad (\text{П.30})$$

Из [\(П.30\)](#) следует, что  $\varphi(v) = 0$ . А это, согласно [\(П.29\)](#) и [\(П.27\)](#), означает, что

$$a_4(v) = 0, \quad a_1(v) = 1. \quad (\text{П.31})$$

Таким образом, мы нашли (при  $b = -1/c^2 < 0$ ) все шесть функций  $a_n(v)$ , входящих в соотношения [\(П.3\)](#), и можем записать преобразования Лоренца в окончательном виде

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + (\Gamma - 1) \frac{\vec{v}(\vec{r}\vec{v})}{v^2} - \Gamma \vec{v}t, \\ t' = \Gamma \left( t - \frac{(\vec{r}\vec{v})}{c^2} \right), \end{cases} \quad (\text{П.32})$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{П.33})$$

В проекциях на оси координат (ось  $x'$  совпадает с осью  $x$ , а оси  $y'$ ,  $z'$  параллельны осям  $y$  и  $z$  соответственно) преобразования Лоренца имеют вид

$$x' = \Gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \Gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \quad (\text{П.34})$$

Обратные преобразования получаются из (П.34) путём замены штрихованных величин на соответствующие нештрихованные и наоборот с одновременным изменением знака скорости  $\vec{v}$ :

$$x = \Gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \Gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \quad (\text{П.35})$$

При  $c \rightarrow \infty$  ( $b \rightarrow 0$ ) преобразования Лоренца (П.34) сводятся к преобразованиям Галилея:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (\text{П.36})$$

Соотношения (П.32) оказались инвариантны относительно пространственной инверсии и относительно обращения времени, хотя при выводе этих соотношений соответствующие требования не выдвигались. (Этот результат нетривиален. Например, при  $b > 0$  система уравнений (П.14) и (П.15) имеет как решение  $a_1 = 1$ ,  $a_4 = 0$ , так и решение  $a_1 = 1/\sqrt{1 + bv^2}$ ,  $a_4 = \pm\sqrt{b}|v|/\sqrt{1 + bv^2}$ . При втором решении формулы преобразования оказались бы неинвариантными относительно пространственной инверсии и обращения времени.)

Выше отмечалось, что существование объектов, движущихся с инвариантной скоростью, не обязательно. Однако фактически такие объекты существуют. Например, инвариантна скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Поэтому константу  $c$  принято называть скоростью света. Она равна приблизительно  $3 \cdot 10^8$  м/с (см. 3.1.4).