МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МЭИ»

Е.В. Зелепукина, О.И. Лубенченко, Т.А. Сальникова

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОБЩЕГО КУРСА ФИЗИКИ

Учебное пособие
по дисциплинам «Высшая математика», «Физика»
для студентов, обучающихся по направлениям подготовки
бакалавров: «Радиотехника», «Биотехнические системы и
технологии», «Электроника и наноэлектроника», «Электроэнергетика и
электротехника», «Информационная безопасность», «Приборостроение»,
«Прикладная математика и информатика», «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах»;
по направлениям подготовки специалистов: «Радиоэлектронные системы
и комплексы»

Москва
Издательство МЭИ
2023

УДК 514
ББК 22.151
З-488

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

*Подготовлено на кафедре высшей математики, кафедре физики
им. В.А. Фабриканта НИУ «МЭИ»*

Рецензенты:
____
____

Зелепукина Е.В. Основы математических знаний, необходимых при изучении общего курса физики. Учебное пособие / Е.В. Зелепукина, О.И. Лубенченко, Т.А. Сальникова. – М.: Издательство МЭИ, 2023. – 42 с.

ISBN _______________

Настоящее пособие содержит сведения об элементах векторного анализа и теории поля, используемых при изучении общего курса физики.

Для подготовки студентов 1 и 2 курса ИРЭ, АВТИ, ИЭТ, ИЭЭ, обучающихся по направлениям «Радиотехника» (11.03.01), «Биотехнические системы и технологии» (12.03.04), «Электроника и наноэлектроника» (11.03.04), «Электроэнергетика и электротехника» (13.03.02), «Информационная безопасность» (10.03.01), «Приборостроение» (12.03.01), «Прикладная математика и информатика» (01.03.02), «Информатика и вычислительная техника» (09.03.01), «Управление в технических системах» (27.03.04) и по специальности «Радиоэлектронные системы и комплексы» (11.05.01).

ISBN _______________

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов первого курса технических вузов для облегчения усвоения материала, излагаемого в общем курсе физики.

На лекциях по физике приходится пользоваться математическим аппаратом, который студенты часто изучают позже в курсе высшей математики. Поэтому данное учебное пособие будет полезно для студентов младших курсов.

Основное внимание в настоящем пособии уделено понятиям и методам, широко используемым в физике. Отметим, что данное пособие не заменяет учебники по высшей математике (математическому анализу и линейной алгебре), но облегчает усвоение математических знаний на примере конкретных физических задач.

Настоящее пособие содержит шесть глав. Номера формул и рисунков в каждой главе имеют сквозную нумерацию (первая цифра соответствует номеру главы). Примеры в каждом параграфе также имеют сквозную нумерацию.

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ

1.1. Векторное представление физических величин

Использование векторов значительно упрощает запись законов физики. Например, запись второго закона Ньютона в векторной форме для материальной точки, обладающей импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$, где m – масса, $\vec{v}$ – скорость (вектор скорости) материальной точки:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

Формулировка этого закона записывается так: производная импульса материальной точки по времени определяется векторной суммой всех сил, описывающих действие других тел на материальную точку, или, другими словами, результирующей силой.

Необходимо понимать, что выражение (1.1) даёт не одно уравнение, а три уравнения соответственно для трёх проекций импульса в декартовой системе координат:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \; \frac{dp_y}{dt} = F_y, \; \frac{dp_z}{dt} = F_z. \tag{1.2}$$

В трёхмерном пространстве (x, y, z) вектор импульса $\vec{p}$ и, соответственно, вектор результирующей силы $\vec{F}$ могут быть представлены следующим образом:

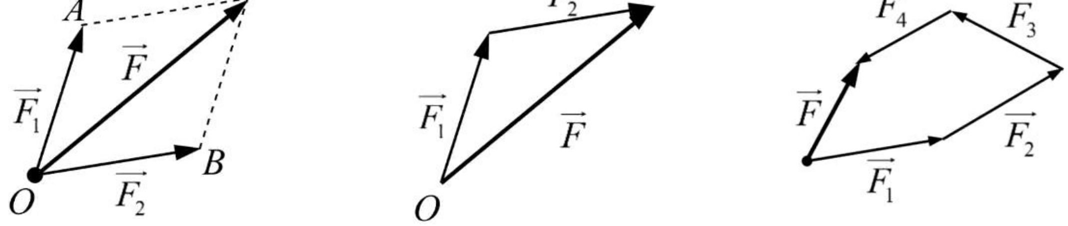
$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}, \; \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \tag{1.3}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (*орты*), соответственно, по осям x, y, z;

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Результирующий вектор $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$ равен сумме векторов $\vec{F_i}$. Существует геометрический способ сложения векторов. Рассмотрим его на примере сложения двух векторов (рис. 1.1а, б) и нескольких векторов (рис. 1.1в):

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}.$$



а) б) в)

Рис. 1.1

На рис. 1.1 показаны способы сложения векторов: а) совместим начала векторов в точке O и построим параллелограмм $OACB$, тогда диагональ OC будет представлять собой результирующий вектор $\vec{F}$ (*правило параллелограмма*); б) совместим начало вектора $\vec{F_2}$ с концом вектора $\vec{F_1}$, тогда вектор, соединяющий начало вектора $\vec{F_1}$ и конец вектора $\vec{F_2}$, представляет собой результирующий вектор $\vec{F}$ (*правило треугольника*).

Если число складываемых векторов больше двух, то удобно использовать второе правило; тогда $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$, см. рис. 1.1в.

Вычитание векторов $\vec{F} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$ легко представить как сложение вектора $\vec{F_1}$ и вектора $\left(-\vec{F_2}\right)$, т. е. вектора, противоположного вектору $\vec{F_2}$ по направлению.

Рассмотрим пример из кинематики материальной точки. Пусть в плоскости (x, y) движется материальная точка M по произвольной траектории 12 (рис. 1.2). Положение материальной точки характеризуется *радиусом-вектором* $\vec{r_1}$ (начальное положение) и $\vec{r_2}$ (конечное положение). Тогда вектор *перемещения* $\Delta\vec{r}$ по определению равен (см. рис. 1.3)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}.$$

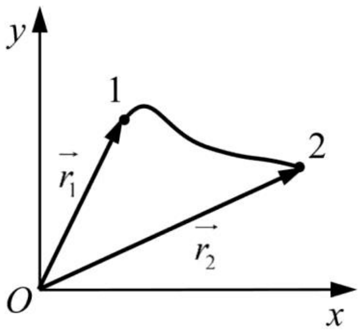


Рис. 1.2

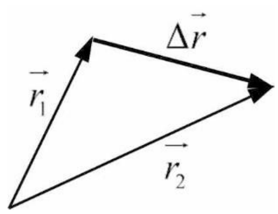


Рис. 1.3

При решении задач общего курса физики необходимо определить направление и модуль векторной величины (силы, импульса, скорости, ускорения и т. д.). *Модуль* (*длина*) некоторого вектора $\vec{F}$ равен

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.4)$$

Будем в дальнейшем использовать обозначение F без стрелки как модуль вектора $\vec{F}$.

Для записи векторного уравнения в проекции на выбранное направление необходимо определить эти проекции. Например, при движении тела вдоль наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, удобно разложить вектор силы тяжести $\vec{F_т}$ на две составляющие, направленные соответственно по осям x и y (рис. 1.4).

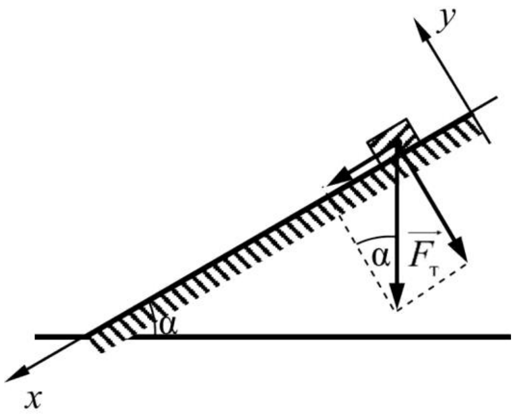


Рис. 1.4

Тогда проекции силы тяжести на оси x и y

$$F_x = mg\sin\alpha,\ F_y = -mg\cos\alpha, \qquad (1.5)$$

здесь g – ускорение свободного падения.

Перейдём к рассмотрению различных видов произведения векторов.

1.2. Умножение вектора на скаляр

Произведение вектора $\vec{a}$ и скаляра (действительного числа) k (результат умножения вектора $\vec{a}$ на скаляр k) — вектор, коллинеарный (сонаправленный или противоположно направленный) вектору $\vec{a}$, длина (модуль) которого будет в $|k|$ раз больше модуля вектора $\vec{a}$. При положительном k вектор $k\vec{a}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$, а при отрицательном k — противоположно направлен.

Пример для $k = \pm 2$ показан на рисунке 1.5 а, б.

а б

Рис. 1.5

При умножении на скаляр все проекции вектора изменяются в k раз:

$$\left(k\vec{a}\right)_x = ka_x \text{ и т. п.}$$

1.3. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это скалярная величина, которая определяется равенством

$$c = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha, \qquad (1.6)$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Можно пояснить свойства скалярного произведения на примере вычисления элементарной работы *dA*, совершаемой силой $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{s}$:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = FdS\cos\alpha, \qquad (1.7)$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{s}$.

Выражение (1.7) можно представить в другом виде:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = F_s dS = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad (1.8)$$

где F_s – проекция вектора $\vec{F}$ на направление вектора $d\vec{s}$, *dx*, *dy*, *dz* – компоненты вектора $d\vec{s}$.

Скалярное произведение двух векторов равно нулю, если эти векторы перпендикулярны (оротогональны). Поэтому если вектор силы $\vec{F}$ перпендикулярен вектору перемещения $d\vec{s}$, то работа $dA = 0$. Например, при движении тела по наклонной плоскости (рис. 1.4) сила реакции опоры (со стороны наклонной плоскости), действующей на тело, не совершает работу.

1.4. Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяет компоненты (координаты) нового вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b}, \qquad (1.9)$$

$$\left|\vec{c}\right| = c = ab\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вектор $\vec{c}$ ортогонален обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$. Направление вектора $\vec{c}$ определяется по *правилу правого винта (буравчика)*: при условии, что при вращении буравчика от первого вектора ($\vec{a}$) ко второму ($\vec{b}$) поступательное движение буравчика покажет направление вектора $\vec{c}$.

Векторное произведение обладает свойством *антикоммутативности* – перестановка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]. \qquad (1.10)$$

Компоненты вектора $\vec{c}$ определяются по формулам:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y,\; c_y = a_z b_x - a_x b_z,\; c_z = a_x b_y - a_y b_x. \qquad (1.11)$$

Формула (1.11) для компонент векторного произведения получают, формально, из раскрытия определителя

$$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Из определения векторного произведения следует, что два вектора линейно зависимы, если их векторное произведение равно нулю.

С помощью векторного произведения определяется момент силы относительно точки (рис. 1.6 а[1]):

$$\overrightarrow{M_O}=\left[\vec{r},\vec{F}\right].$$

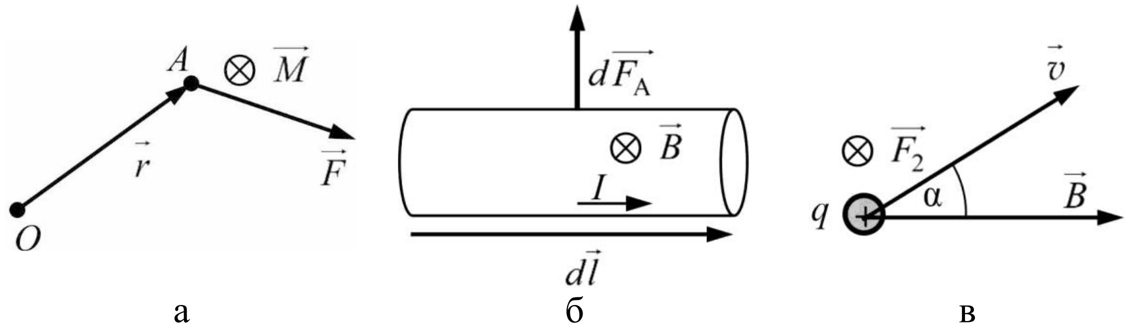


Рис. 1.6

Также через векторное произведения формулируются закон Ампера и магнитная составляющая силы Лоренца (рис. 1.6 б, в):

$$d\overrightarrow{F_A}=I\left[d\vec{l},\vec{B}\right];$$

$$\overrightarrow{F_2}=q\left[\vec{v},\vec{B}\right].$$

1.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным (скалярно-векторным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скаляр

$$d=\left(\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right), \qquad (1.13)$$

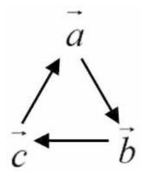
т. е. скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Смешанное произведение обладает следующим свойством:

$$\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{b}\left[\vec{c},\vec{a}\right]=\vec{c}\left[\vec{a},\vec{b}\right]. \qquad (1.14)$$

Таким образом, смешанное произведение допускает циклическую перестановку сомножителей, т. е. замену каждого из сомножителей следующим за ним в цикле

[1] Символ «⊗» на рисунках означает «от нас», т. е. одно из двух возможных направлений вектора перпендикулярно плоскости рисунка. Аналогично «⊙» – «на нас».



1.6. Двойное векторное произведение векторов

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется выражение

$$\vec{d} = \left[\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]. \qquad (1.15)$$

Векторное произведение перпендикулярно обоим сомножителям, поэтому вектор $\vec{d}$ перпендикулярен орту $\vec{n}$, определяющему направление вектора $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$. Отсюда вытекает, что вектор $\vec{d}$ лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и, следовательно, может быть представлен как линейная комбинация этих векторов:

$$\vec{d} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}, \qquad (1.16)$$

где $\alpha = \left(\vec{a},\vec{c}\right)$, $\beta = -\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Таким образом,

$$\vec{d} = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)\text{[2]}. \qquad (1.17)$$

[2] Запоминание этой формулы можно облегчить, если прочитать её как «бац минус цаб».

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛА

2.1. Производная

Если задана некоторая функция $f(t)$ аргумента t, то число, равное пределу отношения приращения функции Δf при стремлении Δt к нулю называется *производной* функции f по t и обозначается символом $\frac{df}{dt}$[3].

Рассмотрим это на примере вектора скорости $\vec{v}$. Пусть материальная точка переместилась в плоскости (x, y) из точки 1 в точку 2 (рис. 2.1).

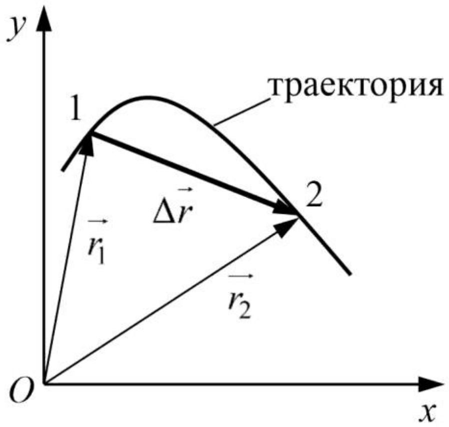


Рис. 2.1

Расстояние между точками 1 и 2, измеренное вдоль траектории, называется *путём*, его принято обозначать s. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ называется вектором *перемещения*, векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы, характеризующие положение материальной точки в пространстве. Рассмотрим перемещение $\Delta\vec{r}$ за малый промежуток времени Δt. Отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ даёт среднюю скорость за время Δt. Если брать всё меньшие промежутки Δt, то отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ в пределе даст *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.1}$$

Найдём модуль выражения (2.1), т. е. модуль скорости v:

$$v = \left|\vec{v}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

---

[3] Также производную можно обозначить f_t' или $\dot{f}$, если t – время. Но в физике удобнее использовать обозначение $\frac{df}{dt}$.

В выражении (2.2) нельзя записать Δr вместо $|\Delta\vec{r}|$, так как символ $|\Delta\vec{r}|$ означает модуль приращения вектора $\vec{r}$, в то время как Δr означает приращение модуля вектора $\vec{r}$,

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r .$$

В примере на рисунке 2.2 $|\vec{r}+\Delta\vec{r}| = |\vec{r}| = r$, поэтому приращение модуля вектора $\Delta r = 0$.

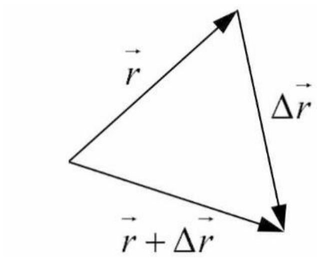


Рис. 2.2

Вектор скорости $\vec{v}$ можно представить в виде

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \tag{2.3}$$

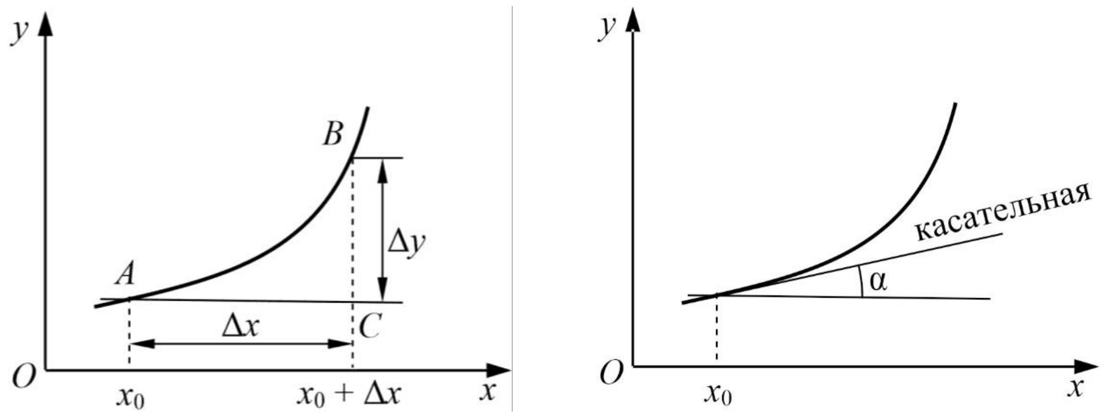
где v_x, v_y, v_z – проекции вектора $\vec{v}$ на оси x, y, z соответственно, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты системы координат. Радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – функции времени. Следовательно,

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{2.4}$$

модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} . \tag{2.5}$$

Перейдём к выяснению геометрического смысла производной. На рисунке 2.3 изображён график некоторой функции $y = f(x)$; x_0 – значение аргумента, для которого вычисляется производная $\dfrac{dy}{dx}$.



а б

Рис. 2.3

По построению длина катета AC на рисунке 2.3а равна приращению аргумента Δx, а длина катета BC – приращению аргумента Δy. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ равно тангенсу угла BAC. При стремлении приращения аргумента Δx к нулю секущая AB стремится к положению касательной к графику функции $y(x)$ в точке x_0, а значение производной равно тангенсу угла α – угла наклона касательной к оси абсцисс в точке x_0:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha . \qquad (2.6)$$

Это и есть геометрический смысл производной.

2.2. Интеграл

Рассмотрим задачу вычисления пути, если известен модуль скорости в каждый момент времени, найти путь, пройденный материальной точкой от момента времени t_1 до t_2. Весь путь можно представить как сумму Δs_1, Δs_2, …, Δs_i, …, Δs_n – участков равномерного движения со скоростями, по модулю, соответственно, равными v_1, v_2, …, v_i, …, v_n. Тогда полный путь

$$s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i . \qquad (2.7)$$

Полученное выражение представляет собой *определённый интеграл* от функции $v(t)$, взятый в пределах от t_1 до t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt . \qquad (2.8)$$

Если изобразить график модуля скорости $v(t)$, то пройденный путь можно представить как площадь фигуры, ограниченной кривой $v(t)$ и прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$ (рис. 2.4).

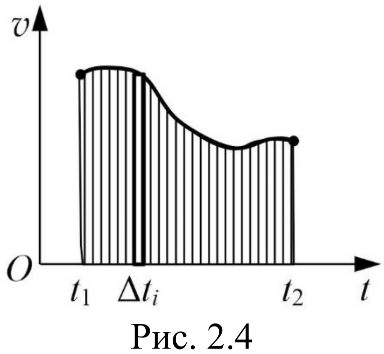


Рис. 2.4

Среднее значение модуля скорости за время от t_1 до t_2 равно

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1} . \qquad (2.9)$$

Подставив сюда выражение (2.8), получим

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,. \qquad (2.10)$$

Аналогично вычисляются средние значения любых скалярных величин.

3. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ УРОВНЯ

3.1. Скалярное поле

Пусть в пространстве или некоторой части пространства задана функция $U = U(x, y, z)$, зависящая от трёх независимых переменных. В таком случае говорят, что задано *скалярное поле*. Если (x, y, z) рассматривать как координаты точки $M(x, y, z)$ в выбранной системе координат, то скалярное поле можно задать в виде $U(M)$. Поэтому в скалярном поле каждой точке M заданной области D соответствует определённое число $U(M)$.

Если в плоскости или части плоскости задана функция $U = U(x, y)$, то говорят, что задано *плоское* скалярное поле. Примерами скалярных полей являются поле температур, поле давлений и т. д.

3.2. Векторное поле

Если в пространстве или его части задан переменный вектор

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

где

$$F_x = P(x,y,z),\ F_y = Q(x,y,z),\ F_z = R(x,y,z),$$

определённый в каждой точке данной области D, то говорят, что задано *векторное поле*.

Если вектор задан в плоскости или в части плоскости, то говорят, что задано плоское векторное поле. В этом случае

$$\vec{F} = F_x(x,y)\vec{i} + F_y(x,y)\vec{j}$$

и проекция вектора зависит лишь от двух независимых переменных.

Векторными полями являются, например, поле скоростей, поле тяготения, поле напряжённости электрического поля[4] и т. д.

В дальнейшем будем предполагать, что функции $U(x, y, z)$, $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ непрерывны и дифференцируемы до первого и второго порядка[5] в рассматриваемой области D.

3.3. Некоторые виды скалярных полей

Пусть задана некоторая плоскость π. Если значение скалярного поля во всех точках, лежащих на каждом перпендикуляре, проведённом к этой плоскости, одинаково, то такое поле будет плоским. В самом деле, если принять плоскость π за координатную плоскость (x, y), то на всех плоско-

---

[4] Поле в физике, например, электромагнитное поле – физический объект. В этой главе мы рассматриваем математическое понятие поля.

[5] *Дифференцируемость* означает существование производной в каждой точке (x, y, z) рассматриваемой области пространства. *Производная второго порядка* – производная (по x, y, z) от производной (по x, y, z).

стях, параллельных плоскости (x, y), поле будет иметь одно и то же значение. Следовательно, это поле является плоским: $U = U(x, y)$ и не зависит от z.

На рисунке 3.1 точки M_1 и N_1 лежат в плоскости (x, y), прямые MM_1 и NN_1 перпендикулярны плоскости (x, y): $U(M) = U(M_1)$, $U(N) = U(N_1)$.

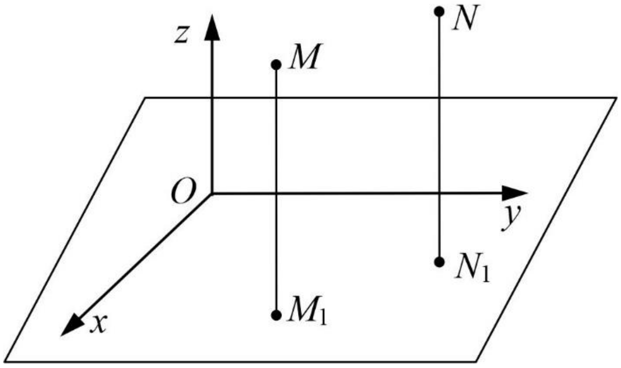


Рис. 3.1

В различных приложениях часто рассматривают сферические и цилиндрические поля.

Скалярное поле называется *сферическим*, если $U(M) = U(r)$, т. е. если скалярная функция задана как функция радиуса-вектора точки M, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, см. рис. 3.2.

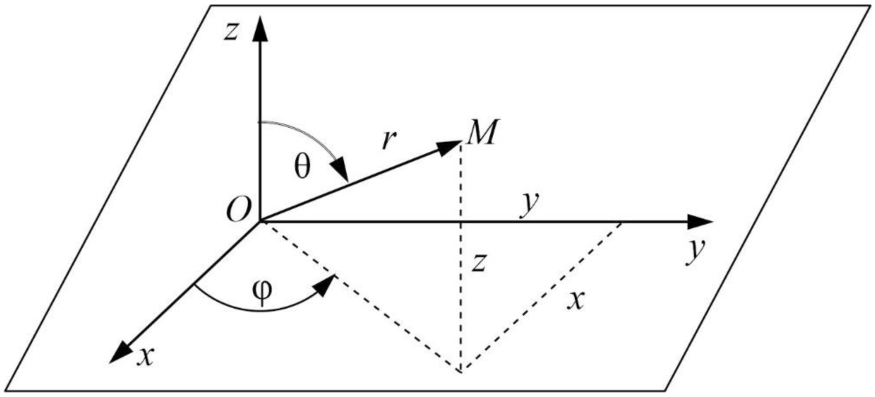


Рис. 3.2

Положение точки M удобно задать азимутальным углом φ и полярным углом θ. Эти углы связаны с x, y и r, как видно из рис. 3.2:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta. \qquad (3.1)$$

Если же скалярное поле задаётся в виде $U(M) = U(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то поле называется *цилиндрическим*, см. рис. 3.3;

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi. \qquad (3.2)$$

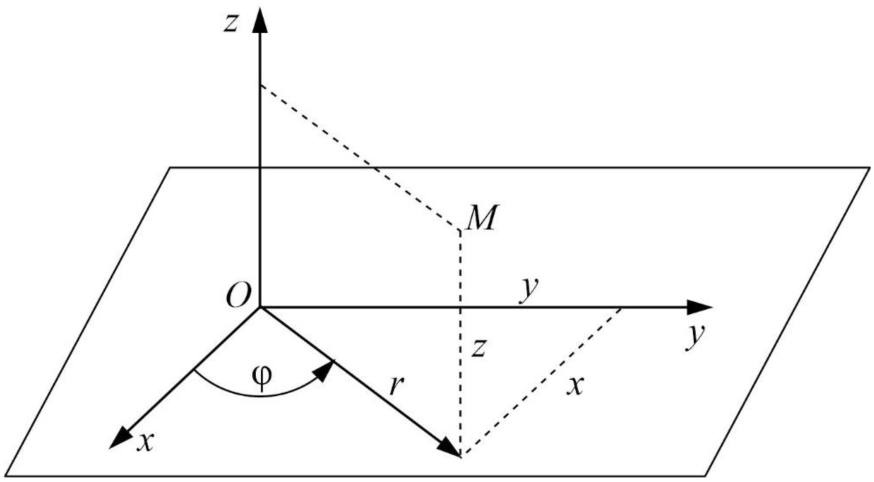


Рис. 3.3

3.4. Поверхности уровня

Пусть задано скалярное поле $U = U(M) = U(x, y, z)$. Рассмотрим множество таких точек M, в которых функция $U(M)$ имеет одно и то же значение $U(M) = C$, т. е. $U(x, y, z) = C$. Полученное уравнение (в случае если функция $U(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные[6], одновременно не обращающиеся в нуль) определяет некоторую поверхность, на которой $U(M)$ имеет постоянное значение C. Эта поверхность и называется *поверхностью уровня*. В любой её точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ значение функции $U(M) = C = U(x_0, y_0, z_0)$. Задавая различные значения постоянной C, мы будем получать различные поверхности уровня: $U(M) = C_1$, $U(M) = C_2$, … в заданном поле. Через каждую точку проходит единственная поверхность уровня. Очевидно, поверхности уровня не пересекаются.

В плоском скалярном поле, задавая постоянные величины $U(M) = C$, мы получим *линии уровня* (*изолинии*). Примеры: линии равных давлений – изобары или линии равных температур – изотермы.

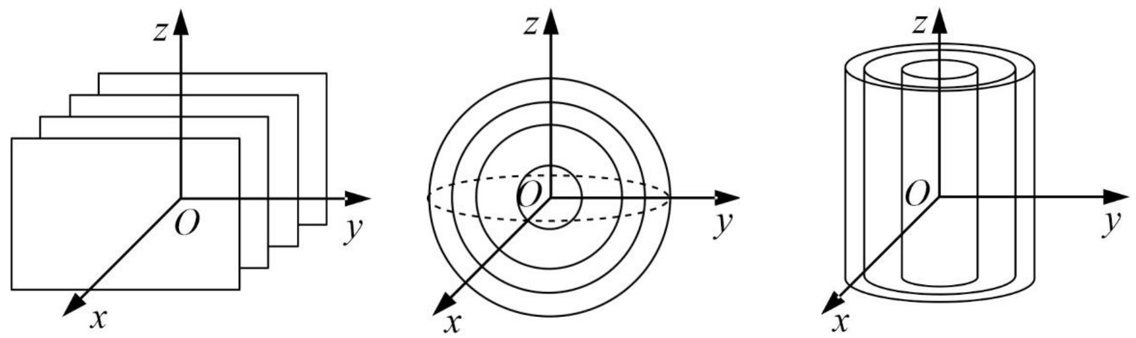
Рассмотрим примеры скалярных полей с поверхностями уровня простейшей формы. Пусть задано плоское поле $U = U(x)$, например $U(M) = \alpha x^2$ (α – постоянная). Поверхностями уровня будут плоскости $x = C$ рис. 3.4а).

Пусть задано сферическое поле $U(M) = U(r)$, например, $U(M) = \beta r^2$ (β – постоянная). Поверхностями уровня будут сферы $r = C$, $C > 0$ (или $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$; рис. 3.4б).

В цилиндрическом поле волновыми поверхностями являются бесконечно длинные круговые цилиндры с осью Oz; $r = C$, $C > 0$ (рис. 3.4в).

---

[6] Частной производной называется производная функции нескольких переменных по одной из них, вычисляемая как обычная производная при принятии других переменных за константы: $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и т. п.



а б в

Рис. 3.4

4. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Пусть задано скалярное поле

$$U=U(x,y,z)=U(M) \qquad (4.1)$$

в области D. (Функция $U(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка, которые одновременно не обращаются в нуль.) Тогда *градиентом* этого скалярного поля называется вектор

$$\vec{F}=\mathrm{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}, \qquad (4.2)$$

проекциями которого являются частные производные первого порядка от функции (4.1).

Пример:

$$U=x^2y+2xz+y^2;$$

$$\mathrm{grad}U=(2xy+2x)\vec{i}+\left(x^2+2y\right)\vec{j}+2x\vec{k}.$$

В случае плоского поля $U = U(x, y)$

$$\mathrm{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}.$$

Векторное поле $\vec{F}$ называется *потенциальным*, если существует скалярная функция $U(x, y, z)$ такая, что $\mathrm{grad}U=\vec{F}$. Функция $U = U(M) = U(x, y, z)$ в таком случае называется *потенциалом* поля.

Рассмотрим подробнее понятие градиента. Пусть задано скалярное поле $U = U(x, y, z)$. Возьмём поверхность уровня в этом поле:

$$U(x,y,z)=C \ \ (C=\mathrm{const}).$$

Возьмём на этой поверхности некоторую точку $M_0(X, Y, Z)$ и проведём касательную плоскость к этой поверхности. Уравнение этой плоскости

$$\frac{\partial U}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial U}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial U}{\partial z}(Z-z)=0,$$

а нормальный вектор в точке M_0

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right\}.$$

Отсюда следует, что градиент есть вектор нормали к поверхности уровня $U(x, y, z) = C$ в точке M_0. Модуль градиента

$$\left|\mathrm{grad}U\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \qquad (4.3)$$

Выясним смысл этой величины. Рассмотрим поверхность уровня $U(x, y, z) = C$ и в точке M_0 на этой поверхности найдём производную по некоторому направлению $\vec{l}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma .$$

Рассмотрим единичный вектор направления $\vec{l}$ – вектор $\vec{l_0}$:

$$|l_0|=1,\ \vec{l_0}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k} .$$

Тогда производную по направлению $\vec{l}$ можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\left(\mathrm{grad}U,\vec{l_0}\right)=|\mathrm{grad}U|\cos\varphi , \qquad (4.4)$$

где φ – угол между направлением $\vec{l}$ и градиентом (т. е. направлением нормали $\vec{n}$).

Очевидно, что производная (4.4) будет иметь наибольшее значение при $\cos\varphi = 1$, т. е. когда направление $\vec{l}$ совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через точку M_0 (рис. 4.1):

$$\max\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial n}=|\mathrm{grad}U| . \qquad (4.5)$$

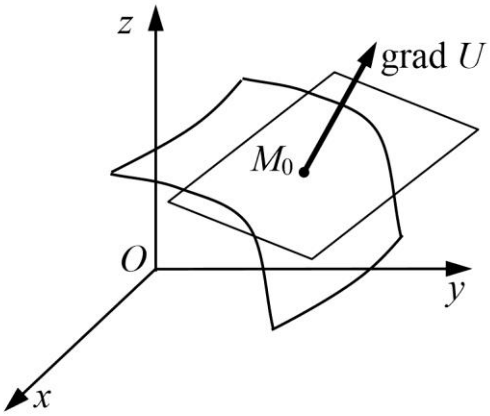


Рис. 4.1

Итак, модуль градиента скалярного поля есть наибольшая скорость возрастания данного скалярного поля в точке M_0.

Пусть задано сферическое поле $U = f(r)$. Как уже отмечалось ранее, все поверхности уровня этого поля являются сферическими поверхностями с общим центром в начале координат. Требуется найти градиент поля.

Очевидно, градиент направлен по радиусу-вектору $\vec{r}$, а длина его равна производной по направлению радиуса-вектора произвольной точки $M(x, y, z)$:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k};\ \cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r}.$$

Тогда

$$\vec{r_0}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r}=\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k} = f'(r)\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r},$$

следовательно,

$$\operatorname{grad} U = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

С помощью градиента очень удобно находить единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности, заданной уравнением $U(x, y, z) = C$. Эта поверхность является одной из поверхностей уровня в скалярном поле $U = U(x, y, z)$; градиент этого поля

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k};$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{|\operatorname{grad} U|},\ \cos\beta = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{|\operatorname{grad} U|},\ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{|\operatorname{grad} U|}, \tag{4.6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к этой поверхности. Следовательно, единичный вектор нормали запишется в виде

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}}{|\operatorname{grad} U|} = \frac{\operatorname{grad} U}{|\operatorname{grad} U|}. \tag{4.7}$$

Пример. Дана сферическая поверхность, описываемая уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Найти единичный вектор нормали $\vec{n}$ к этой поверхности в точке $M(x, y, z)$, лежащей на заданной сфере.

Заданная сферическая поверхность является поверхностью уровня, заданной в скалярном поле $U = x^2 + y^2 + z^2$. Следовательно, градиент этого поля

$$\operatorname{grad} U = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

По формуле (4.7)

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} U}{|\operatorname{grad} U|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{2} = \frac{\vec{r}}{2},$$

Понятие градиента скалярной функции широко используется в курсе общей физики. Рассмотрим пример связи потенциальной энергии с потенциальной силой.

Пусть частица находится в поле потенциальных сил. Рассмотрим малое перемещение материальной точки в направлении оси x. Такое перемещение сопровождается совершением над частицей работы

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = F_x dx, \tag{4.8}$$

при этом компоненты перемещения dy и dz равны нулю. Элементарная работа dA равна убыли потенциальной энергии $U(x, y, z)$:

$$dA = -dU.$$

Отсюда следует

$$F_x dx = -dU \quad \text{или} \quad F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (y = \text{const}, z = \text{const}).$$

Тогда можно записать

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Для компонент силы по осям y и z получаются аналогичные выражения:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Зная компоненты, можно найти вектор силы:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4.9)$$

Согласно определению градиента скалярной функции $U(x, y, z)$ можно записать кратко

$$\vec{F} = -\text{grad}U.$$

Написание формул векторного анализа значительно упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом ∇ (набла) и носящий название оператора *набла* или *оператора Гамильтона*. Под этим оператором подразумевается вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, следовательно,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4.10)$$

Сам по себе этот вектор не имеет смысла. Он приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, на которую он символически умножается. Так, если умножить ∇ на скалярную функцию U, то получится вектор

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}, \qquad (4.11)$$

который представляет собой градиент скалярной функции U:

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U. \qquad (4.12)$$

Пример. Электростатическое поле можно описать с помощью векторной величины $\vec{E}$ (напряжённость электрического поля) либо с помощью скалярной величины φ (потенциал). Так как электростатическое поле потенциальное, напряжённость поля пропорциональна силе, с которой поле действует на точечный заряд, а потенциал – потенциальной энергии $W_п$ этого заряда, можно воспользоваться соотношением (4.12):

$$\vec{F} = -\nabla W_п,\ \vec{F} = q\vec{E},\ W_п = q\varphi;$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\operatorname{grad}\varphi. \qquad (4.13)$$

Проекция вектора $\vec{E}$ на произвольное направление $\vec{l}$ равна производной от потенциала φ по l, взятой с обратным знаком, т. е. скорости убывания потенциала при перемещению по направлению $\vec{l}$:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

Поясним полученные соотношения на примере точечного заряда q. Потенциал такого поля (если принять потенциал равным нулю в бесконечно удалённой точке) выражается формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

здесь ε_0 – электрическая постоянная.

Перейдём к декартовой системе координат:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = -\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3};$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3},$$

что соответствует формуле вектора напряжённости электрического поля точечного заряда.

5. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ДИВЕРГЕНЦИЯ

5.1. Поток

Пусть задано векторное поле $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, а также задана поверхность S: $U(x, y, z) = C$, где C – постоянная величина. Пусть функции $F_x = P(x, y, z)$, $F_y = Q(x, y, z)$, $F_z = R(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными. В таком случае *потоком* векторного поля $\vec{F}$ сквозь поверхность S называется поверхностный интеграл, взятый по определённой стороне поверхности, определяемой выбором направления нормали $\vec{n}$:

$$\Phi = \iint\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS = \iint\limits_S F_n dS \; . \qquad (5.1)$$

Поток векторного поля – скалярная величина.

Рассмотрим гидродинамическую задачу, которая приводит к понятию векторного потока. Пусть некоторая область пространства заполнена движущейся жидкостью, скорость движения которой $\vec{F}$ зависит от координат и времени t. Возьмём в данной области проницаемую двустороннюю поверхность S (гладкую или кусочно-гладкую) и подсчитаем массу жидкости, протекающей через выбранную нами сторону поверхности S (соответствующую определённому направлению нормали) в единичный промежуток времени.

Разобьём поверхность S на бесконечно малые элементы dS. На таком элементе возьмём некоторую точку M. Пусть скорость течения жидкости через точку M в данный момент времени равна $\vec{F}(M)$. Тогда объём жидкости, протекающей через элемент dS за время dt, равен объёму цилиндра с основанием dS и образующими, параллельными вектору скорости, длина которых соответственно равна $|F_n|dt$, где F_n – проекция вектора $\vec{F}$ на выбранное направление нормали в точке M (рис. 5.1).

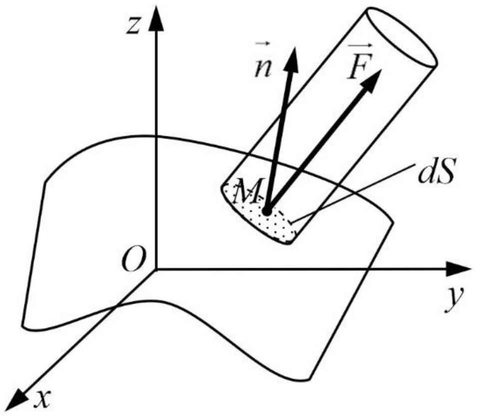


Рис. 5.1

Масса жидкости, протекающей через площадку dS в заданном направлении в единичный промежуток времени, равна $\rho \cdot F_n dS$, где ρ –

плотность жидкости. Масса всей жидкости, протекающей через поверхность S, равна

$$m = \iint\limits_S \rho\left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS = \iint\limits_S \rho F_n dS .$$

Понятие векторного потока применяется не только в гидродинамике, где заданное векторное поле является полем скоростей, но и в других областях физики, где рассматриваются векторные поля, например, поток тепла, магнитный поток, поток вектора напряжённости электрического поля и т. д.

Если поверхность S кусочно-гладкая, то поток вычисляется как сумма потоков векторного поля сквозь каждый из гладких участков поверхности S_1, S_2, …, S_n, образующих поверхность S.

Поток (5.1) можно записать в разных формах. С учётом того, что

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad \vec{n} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k},$$

$$\Phi = \iint\limits_S \left(F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma\right) dS = \iint\limits_S \left(F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdy\right).$$

В большинстве случаев удобнее вычислять поток с помощью проецирования поверхности S на одну из координатных плоскостей и вычислять по формуле (5.1).

Пример. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x^2 \vec{i} + xz \vec{j} + y^2 \vec{k}$ сквозь поверхность параболоида S: $x^2 + y^2 = 4 - z$ $(z > 0)$ в сторону нормали $\vec{n}$, образующей острые углы с положительными направлениями осей координат, т. е. $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$ (по верхней стороне поверхности) (рис. 5.2).

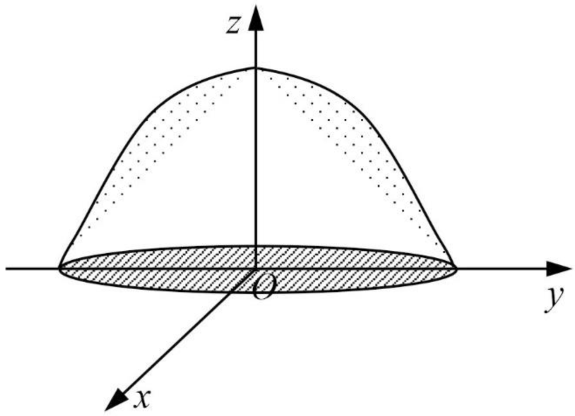


Рис. 5.2

Поверхность S является поверхностью уровня скалярного поля $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, следовательно, градиент этого поля по формуле (4.10)

$$\operatorname{grad} U = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k},$$

а его модуль

$$|\mathrm{grad}\,U| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Тогда по формуле (4.6)

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Спроецируем поверхность S на плоскость XOY. Проекция σ поверхности S на плоскость XOY – плоская область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 4$. Косинус угла φ между нормалью $\vec{n}$ и нормалью к поверхности σ равен направляющему косинусу нормали $\vec{n}$ с осью Oz, т. е. $\cos\gamma$. По формуле (4.6)

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Малый участок dS поверхности S проецируется на малый участок $d\sigma$ поверхности σ:

$$dS = \frac{d\sigma}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\cdot dxdy.$$

Теперь вычислим скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{n}$ через их проекции:

$$\vec{F}\vec{n} = \frac{2x^3 + 2xyz + y^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Поток векторного поля $\vec{F}$ равен двойному интегралу

$$\Phi = \iint\limits_{\sigma} \left[2x^3 + 2xy\left(4 - x^2 - y^2\right) + y^2\right] dxdy$$

(по области σ, ограниченной кривой $x^2 + y^2 = 4$, после замены z его значением). Переходя к полярным координатам

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta; \end{cases}$$

$$d\sigma = r d\theta dr,$$

получим

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(2r^4\cos^3\theta + 4r^3\sin 2\theta - r^5\sin 2\theta + r^6\sin^2\theta\right) d\theta dr.$$

Первые три интеграла равны нулю и, следовательно, поток равен

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2}\int_0^2 r^3 dr = 4\pi.$$

В физике понятие потока векторного поля широко используется в электростатике и в электромагнетизме.

Теорема Остроградского–Гаусса для электрического поля в вакууме: поток вектора напряжённости электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную[7].

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \,. \qquad (5.2)$$

При вычислении потока сквозь замкнутую поверхность положительной считается внешняя нормаль.

Пример 1. Поле равномерно заряженной плоскости

Пусть поверхностная плотность заряда во всех точках плоскости одинакова и равна $\sigma > 0$ (рис. 5.3).

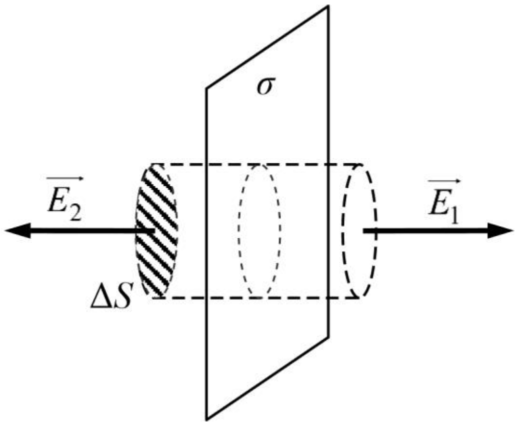


Рис. 5.3

Из соображений симметрии вытекает, что напряжённость электрического поля в любой точке имеет направление, перпендикулярное плоскости. Действительно, поскольку плоскость бесконечна и заряжена равномерно, нет никаких оснований к тому, чтобы вектор $\vec{E}$ отклонялся в какую-либо сторону от нормали к плоскости. Очевидно также, что в симметричных относительно плоскости точках напряжённость поля будет одинакова по модулю ($E_1 = E_2 = E$) и противоположна по направлению. Проведём мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS, расположенными относительно плоскости симметрично (рис. 5.3). Поток вектора $\vec{E}$ сквозь боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как $\vec{E} \perp \vec{n}$, где $\vec{n}$ – вектор единичной нормали, а $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Теорема Остроградского–Гаусса даёт

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 2\int_{\Delta S} \vec{E}d\vec{S} = 2\int_{\Delta S} EdS\cos 0 = 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}. \qquad (5.3)$$

[7] Это формулировка теоремы Остроградского–Гаусса для напряжённости электрического поля в СИ.

Из (5.3) следует, что

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (5.4)$$

Если взять плоскую пластину конечных размеров, то полученный результата будет справедлив только для точек, расстояние от которых до края пластин значительно превышает расстояние до самой пластины. По мере удаления от пластины поле будет отличаться от полученного результата (5.4). На больших расстояниях, значительно превышающих размеры пластины, поле пластины можно рассматривать как поле точечного заряда.

Пример 2. Поле объёмно заряженного шара

Пусть в вакууме имеется скопление зарядов с постоянной объёмной плотностью ρ в виде шара радиуса R (рис. 5.4).

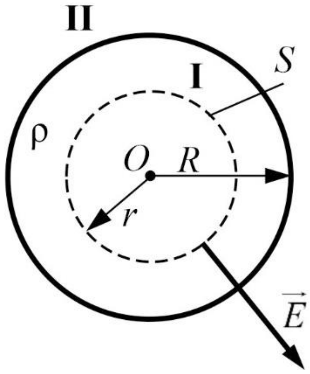


Рис. 5.4

Построим поверхность интегрирования в области I ($r < R$) в виде сферы. Направление вектора $\vec{E}$ и положительной внешней нормали $\vec{n}$ совпадают. Поэтому для области I применение теоремы Остроградского–Гаусса даёт следующий результат:

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \oint_S EdS\cos 0 = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0},$$

отсюда

$$E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Аналогично для области II

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \oint_S EdS\cos 0 = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0},$$

$$E_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

5.2. Дивергенция

Пусть дано поле вектора скорости несжимаемой неразрывной жидкости. Рассмотрим поле скоростей $\vec{F}$ этой жидкости, пронизывающее поверхность *S*.

Как мы видели, объём жидкости, протекающей через поверхность *S*, вычисляется по формуле

$$\Phi = \iint_S F_n dS .$$

Знак величины потока указывает на направление течения жидкости, т. е. течёт ли жидкость в сторону положительного направления нормали $\vec{n}$ к поверхности *S* или в противоположном направлении. Однако, может сложиться ситуация, что в одной части поверхности *S* движение жидкости направлено в одну сторону ($F_n > 0$), а в другой части – в обратном направлении ($F_n < 0$). Тогда величина потока Ф даёт баланс жидкости. Это значит, что поток Ф равен разности между объёмом жидкости, вытекающей через поверхность и втекающей в неё. Если поверхность *S* – замкнутая, то поток сквозь эту поверхность будет представлять собой разность объёма жидкости, вытекающей в сторону внешней нормали и втекающей в сторону внутренней нормали. Если поток больше нуля, то это значит, что вытекает больше жидкости, чем втекает внутрь. Это указывает на наличие источников, откуда вытекает жидкость. Если поток меньше нуля, то должен существовать сток (воронка), куда стекает жидкость. Если жидкость вытекает из объёма *V*, ограниченного замкнутой поверхностью *S*, столько же, сколько втекает, то поток равен нулю.

Средней интенсивностью (плотностью) источников (стоков), непрерывно распределённых в объёме *V*, называется объём жидкости, приходящей или выходящей в единичный промежуток времени из единичного объёма:

$$I = \frac{1}{V}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS . \qquad (5.5)$$

Если в объёме *V* находится точечный источник (или сток) *M*, то величина (5.5) будет средней плотностью источников в некотором малом объёме, окружающем точку *M* с координатами (*x*, *y*, *z*). В пределе, когда этот объём стягивается в точку *M*, мы получим *плотность источников* в точке *M*:

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \operatorname{div}\vec{F} . \qquad (5.6)$$

Эта величина называется *дивергенцией* поля скоростей и обозначается $\operatorname{div}\vec{F}$. Если $\operatorname{div}\vec{F} > 0$, то в точке *M* находится источник, если $\operatorname{div}\vec{F} < 0$, то сток.

Пусть теперь задано произвольное векторное поле $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, тогда дивергенцией этого поля называется скалярная величина

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS. \qquad (5.7)$$

При таком определении дивергенция не зависит от выбора осей координат. Отметим, что термины, принятые в гидростатике, используются и для произвольного векторного поля.

Найдём выражение для дивергенции произвольного вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат. Рассмотрим в окрестности точки M (x, y, z) малый объём в форме параллелепипеда с рёбрами, перпендикулярными координатным осям (рис. 5.5).

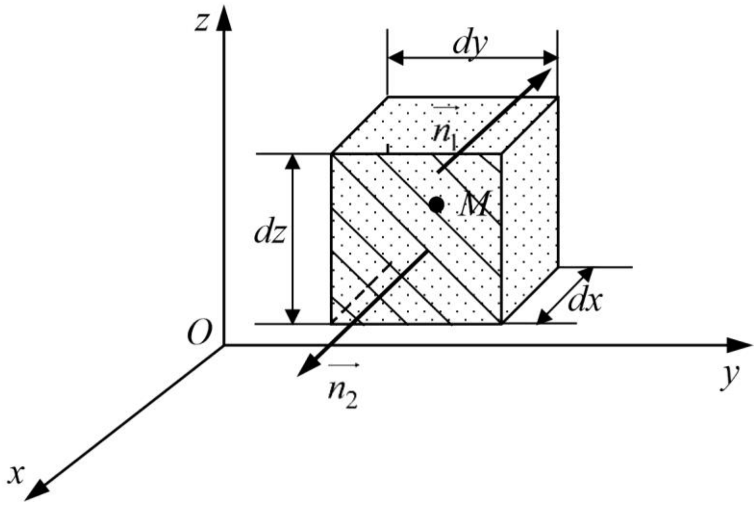


Рис. 5.5

Поток векторного поля сквозь поверхность параллелепипеда образуется из потоков сквозь грани 1 и 2 (обозначены на рис. 5.5 штриховкой); внешние нормали к этим граням, соответственно, $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$. Поток сквозь грань 2 равен

$$\Delta\Phi_2 = a_{x2}\Delta y\Delta z,$$

где a_{x2} – значение a_x, усреднённое по грани 2. Поток сквозь грань 1 равен

$$\Delta\Phi_1 = -a_{x1}\Delta y\Delta z,$$

где a_{x1} – значение a_x, усреднённое по грани 1. Суммарный поток сквозь эти две грани равен

$$\Delta\Phi = \left(a_{x2} - a_{x1}\right)\Delta y\Delta z.$$

Разность ($a_{x2} - a_{x1}$) представляет собой приращение среднего (по грани) значения a_x при смещении вдоль оси x на Δx. Ввиду того, что объём параллелепипеда $\Delta V \to 0$, это приращение можно представить в виде

$$a_{x2} - a_{x1} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x,$$

где $\frac{\partial a_x}{\partial x}$ вычисляется в точке *M*. Тогда поток сквозь грани 1 и 2 можно представить в виде

$$\Delta\Phi_x = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta V .$$

Аналогично для других граней

$$\Delta\Phi_y = \frac{\partial a_y}{\partial x}\Delta V \text{ и } \Delta\Phi_z = \frac{\partial a_z}{\partial x}\Delta V .$$

Тогда полный поток вектора $\vec{a}$ сквозь эту замкнутую поверхность

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\Delta V .$$

Выражение для дивергенции вектора $\vec{a}$ в точке *M* (*x*, *y*, *z*):

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} . \qquad (5.8)$$

Это выражение можно записать проще, используя оператор набла. Если этот оператор умножить скалярно на вектор $\vec{a}$, получим

$$\left(\nabla, \vec{a}\right) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\vec{a}.$$

Пример 1. Теорема Остроградского–Гаусса для электрического поля в диэлектрике

Теорема Остроградского–Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$: поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных (сторонних) зарядов, заключённых внутри этой поверхности;

$$\oint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = \int_V \rho dV . \qquad (5.9)$$

Тогда в дифференциальной форме можно записать

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho ,$$

где ρ – объёмная плотность свободных зарядов.

Аналогично для потока вектора поляризации (поляризованности) $\vec{P}$:

$$\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -\int_V \rho' dV$$

или

$$\operatorname{div}\vec{P} = -\rho' , \qquad (5.10)$$

где ρ′ – объёмная плотность связанных (поляризационных) зарядов. Связанные заряды отличаются от свободных лишь тем, что они не могут покинуть пределы молекул, в состав которых они входят. Они также являются источниками электрического поля.

Пример 2. Пример расчёта электростатического поля

Диэлектрический шар (относительная диэлектрическая проницаемость ε_1) радиуса R заряжен с объёмной плотностью $\rho = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2}$, где r – расстояние от центра шара, ρ_0 – положительная постоянная. Шар погружён в среду, относительная диэлектрическая проницаемость которой изменяется по закону $\varepsilon_2 = \dfrac{2r}{r+R}$. Найти зависимости электрического смещения $D_r(r)$, напряжённости $E_r(r)$, поляризованности $P_r(r)$ и объёмной плотности связанных зарядов $\rho'(r)$.

В данной задаче симметрия распределения заряда – сферическая, поэтому применим теорему Остроградского–Гаусса для поля в веществе, выбрав поверхности интегрирования в виде сфер, концентричных заряженному шару (см. рис. 5.4). Пространство разобьём на две области: I при $r < R$ и II при $r > R$.

Сначала ответим на все вопросы для области I. Теорема Остроградского–Гаусса для вектора электрического смещения:

$$\oint\limits_{S_\mathrm{I}} \left(\vec{D}, d\vec{S_\mathrm{I}}\right) = \int\limits_{V_\mathrm{I}} \rho dV_\mathrm{I}\,.$$

Поток вектора электрического смещения, в силу сферической симметрии,

$$\oint\limits_{S_\mathrm{I}} \left(\vec{D}, d\vec{S_\mathrm{I}}\right) = D_{\mathrm{I}r} \cdot 4\pi r^2\,.$$

Так как заряд распределён по шару неравномерно, для того чтобы вычислить интеграл в правой части теоремы Остроградского–Гаусса, т. е. свободный заряд, охваченный поверхностью S_I, нужно разбить шар на тонкие сферические слои объёмом $dV = 4\pi r^2 dr$. В таком тонком слое содержится заряд

$$dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_0 \frac{R^2}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi \rho_0 R^2\,.$$

Свободный заряд, охваченный поверхностью S_I:

$$Q(r) = \int\limits_0^r 4\pi \rho_0 R^2 dr = 4\pi \rho_0 R^2 r\,.$$

Отсюда

$$D_{\mathrm{I}r} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \rho_0 R^2 r$$

и

$$D_{1r} = \frac{\rho_0 R^2}{r}.$$

Напряжённость электрического поля находим через связь напряжённости электрического поля и электрического смещения в изотропном диэлектрике:

$$\overrightarrow{D_{\mathrm{I}}} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \overrightarrow{E_{\mathrm{I}}}$$

(здесь ε_0 – электрическая постоянная), поэтому

$$E_{\mathrm{I}r} = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 r}.$$

Найдём поляризованность диэлектрика. По определению вектора электрического смещения

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Отсюда

$$P_{\mathrm{I}r} = D_{\mathrm{I}r} - \varepsilon_0 E_{\mathrm{I}r} = \frac{\rho_0 R^2}{r}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Теперь найдём объёмную плотность связанных зарядов в области I. По формуле (5.10)

$$\rho'_{\mathrm{I}} = -\mathrm{div}\,\overrightarrow{P_{\mathrm{I}}}.$$

Формула для дивергенции векторного поля $\vec{a}$ в сферических координатах[8] в сферически симметричном случае:

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2 a_r\right)\right].$$

Вычислим дивергенцию поля $\overrightarrow{P_{\mathrm{I}}}$ и найдём

$$\rho' = -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{\rho_0 R^2}{r} - \varepsilon_0 \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 r}\right)\right]\right\} = -\frac{\rho_0 R^2}{r^2}\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}.$$

Теперь вычислим электрическое смещение в области II по теореме Остроградского–Гаусса:

$$\oint_{S_{\mathrm{II}}}\left(\vec{D}, d\overrightarrow{S_{\mathrm{II}}}\right) = \int_{V_{\mathrm{II}}} \rho dV_{\mathrm{II}},$$

$$\oint_{S_{\mathrm{II}}}\left(\vec{D}, d\overrightarrow{S_{\mathrm{II}}}\right) = D_{\mathrm{II}r} \cdot 4\pi r^2.$$

$$\int_{V_{\mathrm{II}}} \rho dV_{\mathrm{II}} = Q(R) = 4\pi\rho_0 R^3,$$

$$D_{\mathrm{II}r} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho_0 R^3,$$

---

[8] Вывод этой формулы см., например, в книге [3].

$$D_{\mathrm{II}r} = \frac{\rho_0 R^3}{r^2}.$$

Найдём напряжённость электрического поля в области II:

$$\overrightarrow{D_{\mathrm{II}}} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \overrightarrow{E_{\mathrm{II}}},$$

$$E_{\mathrm{II}r} = \frac{\rho_0 R^3 (r + R)}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

Поляризованность в области II:

$$P_{\mathrm{II}r} = D_{\mathrm{II}r} - \varepsilon_0 E_{\mathrm{II}r} = \frac{\rho_0 R^3}{r^2} - \frac{\rho_0 R^3 (r + R)}{2r^3} = \frac{\rho_0 R^3}{r^2}\left(1 - \frac{r + R}{r}\right).$$

Объёмная плотность связанных зарядов в области II:

$$\rho'_{\mathrm{II}} = -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{d}{dr}\left[\rho_0 R^3 \left(1 - \frac{r + R}{r}\right)\right]\right\} = -\frac{\rho_0 R^4}{2r^4}.$$

6. ЦИРКУЛЯЦИЯ И РОТОР

6.1. Циркуляция

Циркуляцией вектора $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру l называется выражение

$$\Gamma = \oint_l \left(\vec{a}, d\vec{l}\right) = \oint_l a_l dl = \oint_l a dl \cos\alpha, \qquad (6.1)$$

где $d\vec{l}$ – бесконечно малый вектор, направленный по касательной к контуру l в заданном направлении обхода контура, a_l – проекция вектора $\vec{a}$ на направление $d\vec{l}$, α – угол между векторами $\vec{a}$ и $d\vec{l}$ (рис. 6.1).

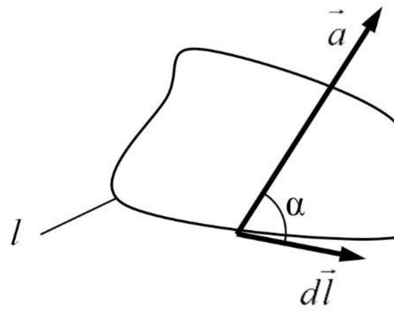


Рис. 6.1

Пример. Дано векторное поле $\vec{F} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$. Вычислить циркуляцию этого поля по контуру l, заданному уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1,\; x + y + z = 3$$

в направлении против часовой стрелки.

Запишем уравнение контура l в параметрической форме, положив

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$$

тогда

$$z = 3 - \cos t - \sin t$$

и циркуляция

$$\Gamma = \oint_l \vec{F} d\vec{l} = \oint_l \left(2y dx - 3x dy + x dz\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t - 3\cos^2 t + \cos t \sin t - \cos^2 t\right) dt = -3\int_0^{2\pi} dt = -6\pi.$$

6.2. Ротор

Пусть задано векторное поле в некоторой области D: $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, где проекции F_x, F_y, F_z непрерывны, а также непрерывны их частные производные. В таком случае векторное поле

$$\vec{c} = \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}, \tag{6.2}$$

называется *ротором (вихрем)* поля $\vec{F}$. Проекции ротора $\vec{c} = \operatorname{rot}\vec{F}$: c_x, c_y, c_z, где

$$\begin{cases} c_x = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}, \\ c_y = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x}, \\ c_z = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Пример. Дано векторное поле, задаваемое векторным произведением $\vec{F} = \left[\vec{G}, \operatorname{grad} U\right]$, где $\vec{G} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $U = xy + yz + xz$. Найти дивергенцию и ротор поля $\vec{F}$.

Вычислим градиент скалярного поля U:

$$\operatorname{grad} U = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

Вычислим векторное поле $\vec{F}$ по формуле (1.12):

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (2x+y+z)\vec{i} + (-x-2y-z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}.$$

Дивергенция поля $\vec{F}$:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2 - 2 = 0.$$

Ротор поля $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y+z & -x-2y-z & x-y \end{vmatrix} = -2\vec{k}.$$

6.3. Физический смысл ротора

Пусть твёрдое тело движется вокруг неподвижной точки M_0, тогда

$$\vec{F} = \vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$$

– поле скоростей точек *M* этого тела, $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость тела, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точек *M*. Если вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси *Oz*, то $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ и

$$\vec{F} = \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} = -\omega\left(y\vec{i} - x\vec{j}\right).$$

Ротор поля скоростей точек тела:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega},$$

откуда

$$\vec{\omega} = \frac{\operatorname{rot}\vec{F}}{2},$$

т. е. мгновенная угловая скорость тела равна половине $\operatorname{rot}\vec{F}$.

6.3. Векторная формулировка теоремы Стокса

Пусть задано векторное поле в односвязной[9] области *D*: $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, где $F_x = P(x, y, z)$, $F_y = Q(x, y, z)$, $F_z = R(x, y, z)$ – непрерывные функции с непрерывными частными производными в области *D*.

Формула Стокса в координатной форме, как известно, имеет вид

$$\oint_l \left(Pdx + Qdy + Rdz\right) =$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{6.3}$$

Но *P*, *Q*, *R* – проекции заданного векторного поля $\vec{F}$, следовательно, в левой части равенства (6.3) стоит циркуляция поля $\vec{F}$ по контуру *l* и этот интеграл можно записать как $\oint_l \vec{F}d\vec{l}$, где $d\vec{l}$ – направленный отрезок дуги, $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Под знаком интеграла в правой части выражения (6.3) стоит скалярное произведение ротора векторного поля $\vec{F}$ и единичного

[9] Односвязной областью называется область, обладающая следующим свойством: любой замкнутый контур, принадлежащий этой области, можно непрерывным образом стянуть в точку, не покидая пределов области.

вектора нормали $\vec{n}$ к поверхности S, ограниченной контуром l, по её выбранной стороне;

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

Значит, под знаком поверхностного интеграла стоит $\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n} = \operatorname{rot}_n\vec{F}$, т. е. проекция ротора на выбранное направление нормали к поверхности S. Тогда

$$\iint\limits_S \left(c_x\cos\alpha + c_y\cos\beta + c_z\cos\gamma\right)dS = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

и теорема Стокса формулируется так: циркуляция векторного поля по замкнутому контуру l равна потоку ротора этого поля сквозь произвольную поверхность, натянутую на этот контур, в сторону, соответствующую выбранному обходу контура.

Пример. Дано векторное поле $\vec{F} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$. Вычислить циркуляцию этого поля по контуру l: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (обход против часовой стрелки) а) непосредственно и б) по формуле Стокса (S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$).

а) Полагая

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = 0, \end{cases}$$

вычислим циркуляцию:

$$\Gamma = \oint\limits_l \left(x^2y^3dx + dy + zdz\right) = \int\limits_0^{2\pi}\left(-a^6\cos^2 t\sin^4 t + a\cos t\right)dt = -\frac{\pi a^6}{8}.$$

б) Найдём $\operatorname{rot}\vec{F}$ и вычислим его поток сквозь поверхность S, изображённую на рис. 6.2.

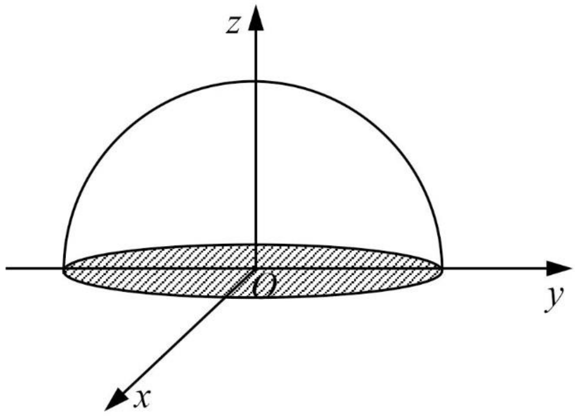


Рис. 6.2

Ротор поля $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}=-3x^2y^2\vec{k}.$$

Рассмотрим S как поверхность уровня в скалярном поле

$$U=x^2+y^2+z^2.$$

Вектор единичной нормали к этой поверхности

$$\vec{n}=\frac{\operatorname{grad}U}{|\operatorname{grad}U|}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{a}.$$

Далее

$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}=-\frac{3}{a}x^2y^2z=-\frac{3}{a}x^2y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{a}=\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a},$$

$$dS=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\Gamma=\Phi\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)=3\iint\limits_{\sigma}x^2y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

(σ – проекция поверхности S на плоскость XOY) или, переходя к полярным координатам

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

получим

$$\Gamma=\Phi\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)=3\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int\limits_0^a r^5dr=-\frac{\pi a^6}{8}.$$

Выражение для ротора вектора $\vec{F}$ можно записать через оператор Гамильтона (оператор набла):

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left[\nabla\vec{F}\right].$$

Пример. Применим понятия циркуляции и ротора к электростатическому полю. Это поле является потенциальным, поэтому работа этого поля по любому замкнутому контуру l равна нулю:

$$A=\oint\limits_l\left(q\vec{E},d\vec{l}\right)=0.$$

Сократив на q, получим

$$\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0.$$

Применим теорему Стокса:

$$\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\operatorname{rot}\vec{E}, d\vec{S}\right) = 0.$$

Полученное соотношение должно выполняться для любой поверхности *S*, опирающийся на произвольный контур *l*. Это возможно лишь в том случае, если ротор вектора $\vec{E}$ в любой точке поля равен нулю:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0.$$

Электростатическое поле является безвихревым.

Пример. Рассмотрим дивергенцию и ротор магнитного поля. Линии вектора магнитной индукции $\vec{B}$ замкнуты, поэтому поток вектора $\vec{B}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность *S* должен быть равен нулю (см. главу 5):

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0.$$

Тогда

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_V \operatorname{div}\vec{B} dV = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

это соотношение должно выполняться для любого произвольно выбранного объёма *V*.

Теперь рассмотрим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для расчёта поля в вакууме:

$$\oint_l \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = \mu_0 \sum_i I_i$$

– циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по любому замкнутому контуру пропорциональна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром. Если токи текут во всём пространстве, где расположен контур, то сумму токов можно представить в виде

$$\sum_i I_i = \int_S \left(\vec{j}, \vec{n} dS\right).$$

Здесь $\vec{j}$ – плотность тока, $d\vec{S} = \vec{n} dS$, где $\vec{n}$ – положительная нормаль к площадке dS (т. е. нормаль, образующая с направлением обхода контура при вычислении циркуляции правовинтовую систему), μ_0 – магнитная постоянная.

Применим теорему Стокса:

$$\oint_l \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\operatorname{rot}\vec{B}, d\vec{S}\right),$$

$$\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{B}, d\vec{S}\right) = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right).$$

Полученное равенство должно выполняться при произвольном выборе поверхности S, это возможно лишь в случае, если подынтегральные функции в каждой точке имеют одинаковые значения. Таким образом,

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Можем сравнить эти формулы с формулами для электростатического поля:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0;$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Сопоставление формул показывает, что электростатическое и магнитное поле имеют существенно различный характер.

Векторное поле $\vec{a}$, для которого $\operatorname{rot}\vec{a} \neq 0$, называется *вихревым* или *соленоидальным (трубчатым)*.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

В таблице приведены интегралы, часто встречающиеся в физических задачах. указаны неопределённые интегралы.

Функция	**Интеграл**
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
$\dfrac{1}{a^2 + b^2x^2}$	$\dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\dfrac{bx}{a} + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\dfrac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$	$-\dfrac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^{1/2}} + C$
$\dfrac{x}{x(a + bx)}$	$-\dfrac{1}{a}\ln\left\lvert\dfrac{a + bx}{x}\right\rvert + C$
$\dfrac{x}{(b - x)^2}$	$\ln\lvert b - x\rvert + \dfrac{b}{b - x} + C$
$\dfrac{x}{a + bx}$	$\dfrac{1}{b^2}\left[(a + bx) - a\ln\lvert a + bx\rvert\right] + C$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Детлаф А.А.**, Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Издательство «Академия», 2014
2. **Савельев И.В.** Курс общей физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2007
3. **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике. – М.: Издательство АСТ, 2019. – 703с.

Учебное издание

Зелепукина Елена Владимировна
Лубенченко Ольга Игоревна
Сальникова Татьяна Анатольевна

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ,
НЕОБХОДИМЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ
ОБЩЕГО КУРСА ФИЗИКИ

Учебное пособие

Редактор ________________
Компьютерная вёрстка ________________

Темплан издания МЭИ, 2023		Подписано в печать ________
Печать офсетная	Формат 60×84/16	Физ. печ. л. ______
Тираж ________	Изд. № ________	Заказ № ______

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ»:
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ»:
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.