

УДК 537.874.31

Ю.П. АКУЛИНИЧЕВ¹, Ф.Н. ЗАХАРОВ¹, В.А. ПЕРМЯКОВ², М.С. МИХАЙЛОВ²

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

Проведен обзор работ, посвященных различным аспектам проблемы численного решения параболического волнового уравнения, проводимого для диагностики и прогнозирования условий распространения радиоволн (РРВ) над земной поверхностью. Описаны основные сеточные методы, способы введения граничных условий, учета неровностей земной поверхности при расчете как детерминированных, так и случайных полей. Отмечена особая важность детального и корректного описания физических свойств среды РРВ.

Ключевые слова: распространение радиоволн; электромагнитное поле; параболическое уравнение; численные методы; среда распространения.

Введение

Скалярное параболическое уравнение, введенное М.А. Леонтовичем [1, 2], в декартовой системе координат имеет вид

$$2ik \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 [\varepsilon(x, y, z) - 1] U(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где $U(x, y, z) = E(x, y, z) \exp(-ikx)$ – комплексная огибающая монохроматического поля $E(x, y, z)$ частоты ω , распространяющегося преимущественно в направлении оси Ox (здесь опущен временной множитель $\exp(-i\omega t)$), $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $\varepsilon(x, y, z)$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды распространения.

Параболическое волновое уравнение (ПУ) является малоугловым (реально не более 10 градусов) приближением уравнения Гельмгольца, но описывает большинство эффектов, возникающих при РРВ в неоднородных средах.

Разумеется, за прошедшее время разработан ряд приближенных методов аналитического решения ПУ [3, 4 и др.], но их использование крайне затруднено вследствие ограниченности круга типовых задач. Поэтому основными методами решения ПУ стали численные методы, которые имеют менее строгие ограничения на условия распространения и параметры среды.

Работа посвящена анализу современного состоянию вопроса численного решения ПУ и перспективам развития данного направления.

Итоги XX века

Первые численные сеточные методы основаны на формальной замене частных производных в уравнении (1) соответствующими конечными разностями, и вершиной этого направления явилась схема Кранка – Николсон (КН). В частности, при решении ПУ на плоскости xOz для каждого значения k записывается уравнение, связывающее три известных значения поля на предыдущем шаге с тремя неизвестными значениями поля на следующем шаге

$$U_{j+1, k-1} - (2 + 1/g) U_{j+1, k} + U_{j+1, k+1} = g^* / g (U_{j, k-1} + U_{j, k+1}) - (2g^* / g + 1/g) U_{j, k}, \quad (2)$$

где j – номер узла сетки вдоль оси Ox ; k – номер узла сетки вдоль оси Oz ; $g = i\Delta x / (4k\Delta z^2)$. Записав разностные уравнения (2) для всех k , получим систему линейных уравнений, которая при заданных граничных условиях допускает весьма экономное решение методом прогонки [5].

Настоящий бум в применении численных методов решения ПУ в подводной акустике начался после того, как R.N. Harkin, F.D. Tappert предложили метод преобразования Фурье с расщеплением [6].

* Работа (в части, выполненной в ТУСУР) поддержана госзаданием (проект № 3656) в сфере научной деятельности по заданию № 225/2015 на 2016 год. Работа (в части, выполненной в НИУ МЭИ) поддержана госзаданием в сфере научной деятельности в проектной части № 8.152.2014/К.

В 90-годы XX в. наблюдалось интенсивное использование этих методов для расчета характеристик радиоволн при их распространении в неоднородной тропосфере. Лидирующие позиции здесь заняли ученые США, которые безоговорочно в качестве основного приняли метод, основанный на быстром преобразовании Фурье (БПФ). В частности, в [7] указывалось, что метод численного решения ПУ стал эталонным для оценки достоверности расчетов характеристик поля УКВ в неоднородной тропосфере над пересеченной местностью, выполненных другими приближенными методами.

Первые крупные проблемы, возникшие в это время, касались корректного введения граничных условий в сеточную схему. Для учета отражений от плоской полупроводящей поверхности земли (моря) было предложено использовать смешанное синус-косинусное преобразование Фурье [8], а для схемы КН вполне адекватным оказалось использование локального граничного условия Коши [5].

Введение верхнего граничного условия (на границе со свободным пространством) оказалось существенно более сложной задачей. Для непрерывного ПУ было предложено несколько вариантов нелокального граничного условия [9, 10 и др.], но, как оказалось, почти все замечательные свойства этих методов исчезают после проведения пространственной дискретизации. То же самое происходит и с формально введенной в [11] функцией Грина верхнего полупространства. Идея использования искусственного поглощающего слоя (имитация безэховой камеры) осталась в качестве единственного приемлемого варианта, но теория построения такого слоя не разработана по сей день.

Естественно желание применить подобные методы для расчета РРВ и над неровной поверхностью земли, при этом использованы самые простые способы ее аппроксимации: ступенчатая, линейно-ломаная и т.п. [12].

Особая статья – это получение исходных данных о состоянии тропосферы. Здесь основным средством явилось высотное аэрологическое зондирование.

Появились первые коммерческие программные продукты анализа РРВ методом численного решения ПУ: РСРЕМ (использован метод преобразования Фурье над плоской земной поверхностью); FDRPM (использован метод конечных разностей над неровной земной поверхностью); TERPEM [13]; CARPET [14].

Венцом усилий явились разработка и внедрение в ВМФ США системы прогнозирования AR-EPS [15]. В области теории век завершился изданием замечательной книги М. Levy [16].

В нашей стране активный интерес к применению численного решения ПУ в этих задачах возник после работы [17]. Численные решения ПУ были применены к анализу РРВ в ионосфере в работах Ю.Н. Черкашина Ю.Н. с соавт. [18, 19], к анализу РРВ в тропосфере в работах Г.М. Стрелкова с соавт. [20, 21]. Обзор работ по применению ПУ на 1995 г. дан в [22]. Дальнейшее развитие метода отражено в работах Г.М. Стрелкова [23–25].

Исследования в XXI веке

Вопреки ожиданиям, бурного повышения активности в области численного решения ПУ не наблюдается, хотя и получен ряд важных результатов и расширен круг приложений метода ПУ [26–30]. Можно выделить следующие вопросы, решение которых крайне необходимо для практического использования рассматриваемых численных методов.

Введение верхнего граничного условия. Для задачи решения двумерного ПУ по схеме КН задача успешно решена: для ряда типичных ситуаций предложены точные методы введения верхнего нелокального граничного условия [31] и намечены пути минимизации вычислительных затрат при их применении, например, за счет использования рекурсивного фильтра.

Что касается искусственного поглощающего слоя, то ввиду отсутствия теории делались лишь интуитивные попытки оптимизации его формы [32], при этом было показано, что лучшие результаты получаются при использовании существенно более слабого слоя, нежели традиционное окно Хэннинга [15].

Разработка методов численного решения ПУ над неровной подстилающей поверхностью. Использование предложенного ранее метода ступенчатой аппроксимации поверхности сопровождается слишком высоким ослаблением поля, обусловленным потерей отраженных волн. Лучшие результаты дает метод линейно-кусочной аппроксимации с построением соответствующей ломаной сетки или с использованием «вращающегося» ПУ [15], но они сложнее в использо-

вании. Значительно проще в применении метод конформного отображения, который позволяет задачу РРВ в однородной тропосфере над неровной земной поверхностью преобразовать в традиционную задачу РРВ над плоской поверхностью, но в присутствии искусственно введенных неоднородностей индекса преломления тропосферы [33].

С использованием этого метода достаточно легко решается, например, задача оценки амплитуды и фазы когерентной плоской волны, зеркально отраженной от взволнованной поверхности моря [34]. К сожалению, метод применим лишь для двумерного пространства, хотя делаются попытки найти приближенный эквивалент конформного отображения и для трехмерного пространства.

Разработка различных вариантов широкоугольного ПУ и методов его решения основаны на строгом применении теории псевдодифференциальных операторов (ПДО) [16, 35] к уравнению Гельмгольца. Это позволило применить численное решение ПУ при меньших размерах антенн и неоднородностей среды РРВ [16, 36].

К сожалению, от математических работ по теории ПДО [35], базирующихся на современных достижениях функционального анализа, пока не переброшен мостик к прикладным исследованиям инженерно-физического плана. Поэтому в прикладных работах после проведения факторизации в уравнении Гельмгольца ПДО упрощаются с использованием различных нестрогих рассуждений. В сущности, это является чисто технической работой, и основной, временной, проблемой является увеличение вычислительных затрат, обусловленное необходимостью уменьшения размеров ячеек расчетной сетки как по высоте, так и по дальности. Однако нестрогость применяемых упрощений требует практической проверки границ их применимости сравнением со строгими аналитическими решениями либо численными решениями уравнения Гельмгольца.

Разработка численных методов решения ПУ в 3-мерном пространстве. Такие работы эпизодически появляются [37–41], но до широкого практического использования не доходят. Причины: 1) большой объем вычислений, что препятствует применению методов для оперативного прогнозирования, когда результат нужно получить за время, не превышающее 1 мин; 2) трудности с введением граничных условий, особенно на неровной поверхности земли [42]. С последними отечественными работами в этом направлении можно ознакомиться по [43–45].

Разработка численных методов решения ПУ для расчета поля в случайно-неоднородной среде над случайно-неровной земной поверхностью. Несмотря на наличие различных приближенных методов аналитического решения ПУ в этой ситуации [46] и простоту формального введения их сеточных аналогов, последние пока не нашли практически никакого применения. Основная проблема – это слишком большой объем вычислений при прямом использовании таких методов. По этой же причине подавляющее большинство исследований посвящено вопросам расчета детерминированного поля.

Этот недостаток частично преодолен. Для определенных условий предложен сеточный метод расчета среднего поля [47], позволяющий достаточно корректно учитывать наличие корреляции неоднородностей индекса преломления тропосферы, а по вычислительным затратам сопоставимый с методом расчета детерминированного поля. А использование гауссовской аппроксимации пространственной ковариационной функции поля позволило в марковском приближении вычислять ее параметры при вычислительных затратах на 2–3 порядка меньших, чем потребовалось бы без такой аппроксимации [48].

И еще одна проблема, которая, в конечном итоге, и определяет перспективы практического использования указанных численных методов – это **проблема сравнения экспериментальных данных с результатами расчета характеристик поля на той же трассе**. Совпадение результатов над водной поверхностью на трассах прямой видимости и в зоне дифракции можно считать вполне удовлетворительным (см., например, [49, 50]).

Известные еще с 40-х годов прошлого века эффекты волноводного РРВ продолжают оставаться предметом детальных исследований. В [51–56] проведены экспериментальные исследования РРВ на морских маловысотных (до 20 м) радиотрассах, при этом измерялись в динамике энергетические характеристики радиолиний и одновременно проводились измерения метеопараметров. В результате были восстановлены профили показателя преломления (ППП) в приводном слое тропосферы и проведен расчет энергетического потенциала радиолиний по программе AREPS, показавший в среднем хорошее согласие с экспериментом. Особо отметим, что измерение ППП на морской платформе в эксперименте RED [51, 56] дало хорошее согласие с теоретической моделью ППП, предложенной в работах Jeshke, Paulus на основе теории Колмогорова–Обухова. Судя по

результатам экспериментов [51, 56], они относятся к благоприятным погодным условиям РРВ в волноводах испарения. С другой стороны, в [54] отмечены значительные изменения уровня принимаемого сигнала как по высоте, так и во времени на интервалах порядка нескольких минут. Последние результаты согласуются с экспериментальными исследованиями динамики профилей показателя преломления, выполненными ранее на Черном море [57]. Также из экспериментов [57] следует, что измерения ППП на берегу дают значительные отличия от ППП, предложенного Jeshke, Paulus.

Проведенные в [51–56] исследования недостаточны для прогноза работы радиолиний на волноводах испарения с учетом различных ограничивающих факторов, действующих в реальных условиях (затухание радиоволн в воздухе, гидрометеорах, нерегулярность ППП как по вертикали, так и вдоль поверхности моря, рассеяние радиоволн на морском волнении, турбулентность нижнего слоя тропосферы). В связи с этим представляет интерес цикл работ Г.М.Стрелкова по анализу РРВ в волноводе испарения и приповерхностном волноводе [23–25], а также работы [58–60]. В последних работах были проведены исследования влияния перечисленных выше факторов на РРВ в волноводе испарения путем численного моделирования методом ПУ с использованием программы, составленной автором [43]. Следует также отметить обзор по анализу РРВ в условиях морского волнения [61] и работы [62, 63], в которых изучалось влияние факторов турбулентности и морского волнения на РРВ в волноводе испарения. При измерениях на суше или морских трассах ДТР соответствие существенно хуже.

И здесь мы подходим к главной причине, которая препятствует широкому практическому использованию численных методов для диагностики и прогнозирования условий РРВ и их ожидаемых характеристик. Точность расчета поля, которую способны обеспечить современные численные методы решения ПУ, вполне достаточна для большинства практических приложений, иногда, правда, за счет некоторой потери оперативности. Но для этого необходимо столь же детально и точно задавать исходные характеристики: поле индекса преломления тропосферы в окрестности трассы, а также профиль и электрические характеристики подстилающей поверхности. В частности, необходимо задать значение индекса преломления воздуха в каждом узле расчетной сетки, то есть, с шагом порядка метра.

К сожалению, существующие методы измерения характеристик среды зачастую не могут обеспечить необходимые точность и детализацию. Например, в работе [64] была проведена оценка точности решения ПУ на загоризонтных трассах при использовании результатов аэрологического зондирования атмосферы и показано, что точность решения сильно зависит от метеорологических условий и качества зондирования. Таким образом, перспективы широкого практического использования численных методов решения ПУ в значительной степени зависят от решения именно этой проблемы.

Впрочем, и в этой области имеется прогресс. Для определенного круга задач, например, при обеспечении работы радиотехнических систем в волноводе испарения, разумно использовать определение показателя преломления тропосферы на высотах до 20–30 м по измерению метеопараметров. Такой подход использовался в программе экспериментов RED, австралийских и других экспериментальных работах последнего времени. Современные профессиональные автоматические метеостанции (АМС) позволяют получать профили метеопараметров с заданным шагом по высоте в режиме реального времени и в объединении с методом ПУ давать оперативный прогноз РРВ. Для прогноза по радиолинии АМС должны быть установлены, по крайней мере, в двух пунктах радиолинии.

Применение метода ПУ к исследованию физических закономерностей распространения радиоволн в реальных условиях. Значительная часть упомянутых выше работ по применению ПУ к анализу РРВ была посвящена развитию вычислительных аспектов метода, а примеры применения ПУ к задачам РРВ носили иллюстративный характер. В последнее время появились работы по применению ПУ к изучению закономерностей РРВ в различных физических условиях. Ниже остановимся на двух примерах таких применений ПУ.

1. Влияние леса на РРВ над земной поверхностью обсуждалось в [65, 66], поэтому остановимся только на вопросах применения ПУ к РРВ в лесу. Особенностью является использование модели леса как сплошной среды с заданной эффективной диэлектрической проницаемостью, но это ограничивает применение ПУ частотами не более 1 ГГц. На частотах более 1 ГГц предпочтительны статистические модели леса.

РРВ в лесу в приближении скалярного ПУ (двумерные модели среды) рассматривалось в работах [67–69]. В [68, 69] проводилось сопоставление расчетов ослабления поля в лесу с экспериментальными данными. Отмечено, что метод ПУ вполне приемлем для прогноза РРВ в лесу в условиях, когда передающая и приемная антенны находятся вне леса. Случай, когда одна или обе антенны находятся в лесу, требует дополнительной методической проработки, хотя принципиальных трудностей ожидать не следует. Влияние трехмерной модели лесного массива на поле ФАР в зоне Френеля на основе методики, развитой в [43], рассмотрено в [44].

2. Методы расчета полей сложных антенных систем над земной поверхностью находятся в начальной стадии изучения. В [70] рассмотрено поле антенной решетки из 2×5 элементов, диаграмма направленности (ДН) каждого из которых задавалась в гауссовском приближении. Более сложные модели рассмотрены в [43, 45, 71]. В [43, 71] реализована следующая методика расчета плоской ФАР вертикальной поляризации. При расположении полотна ФАР перпендикулярно направлению изменения профиля земной поверхности, который полагается одномерным, вначале рассчитываются поля от одной линейки вибраторов по радиальным направлениям, а далее суммируются поля от всех линеек с учетом их смещения в пространстве и изменения ДН соседних линеек. В [43, 45] реализована более общая схема расчета поля ФАР в трехмерном пространстве, в которой профиль земной поверхности может быть двумерным и кроме того учитываются одиночные строения и лесные массивы. В обеих методиках [43, 45, 71] задаются ДН отдельных элементов ФАР в дальней зоне элемента, и рассчитывается поле ФАР над однородной плоской землей в приближении геометрической оптики в зоне Френеля ФАР в целом [72]. Далее найденное таким образом поле ФАР используется как начальное условие для расчета поля ФАР методом ПУ.

На втором этапе расчета учитываются профиль местности, строения и лесные массивы. Число элементов ФАР в методиках [43, 45, 71] может достигать нескольких тысяч. Влияние взаимодействия между элементами на их диаграммы направленности при необходимости учитывается предварительными расчетами поля ФАР в свободном пространстве по универсальным программам электродинамического моделирования (CST Microwave Studio и другие). Методики [43, 45, 71] использовались для расчетов границ санитарно-защитной зоны и зоны ограничения застройки в районе расположения ФАР.

Отметим также работу [73], в которой рассмотрен расчет зеркальной антенны сложной геометрии, при этом учтено взаимодействие между антенными элементами с использованием параболических уравнений, описывающих встречные потоки электромагнитного поля.

Заключение

В обзоре проведен анализ различных аспектов проблемы численного решения параболического уравнения, которое сейчас является одним из самых удобных инструментов для решения теоретических и прикладных задач, связанных с распространением волн в различных средах. Основное внимание в обзоре уделено анализу РРВ над неровной земной поверхностью с учетом влияния неоднородной тропосферы, чему посвящено большое число работ.

Отмечено, что выход книги М. Levi [15] можно считать завершением важного этапа, после которого темпы развития численных методов решения ПУ несколько снизились. Тем не менее сохраняется интерес к ряду перспективных направлений, таких как применение метода к численному анализу РРВ в средах с регулярно и случайно неоднородной структурой, к трехмерным и векторным задачам, к анализу сложных антенных систем в реальных условиях. Следует ожидать увеличения числа работ по созданию новых методов исследования текущего физического состояния среды РРВ, крайне необходимых для применения метода ПУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтович М. А. // Изв. АН СССР. – 1944. – Т. 8. – № 16. – С. 16–22.
2. Леонтович М. А., Фок В. А. // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – № 7. – С. 557–573.
3. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970. – 517 с.
4. Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. – 1987. – Т. 30. – № 7. – С. 811–839.
5. Самарский А. А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
6. Hardin R. H., Tappert F. D. // Siam Rev. – 1973. – V. 15. – No. 2. – P. 423.
7. Sevgi L., Akleman F., Felsen L. B. // IEEE Antennas and Propagation Magazine – 2002. – V. 44. – No. 1. – P. 55–75.
8. Kuttler J. R., Dockery G. D. // Radio Science. – 1991. – V. 26. – No. 2. – P. 381–393.
9. Verenger J. - P. // J. Comput. Phys. – 1994. – No. 114. – P. 185–200.

10. Baskakov V. A., Popov A. V. // Wave Motion. – 1991. – V. 14. – P. 123–128.
11. Marcus S. W. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1992. – V. 40. – No. 12. – P. 1451–1458.
12. Barrios A. E. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1994. – V. 42. – No 1. – P. 90–98.
13. TERPEM package [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.signalscience.com/TERPEM.htm
14. CARPET (Computer-Aided Radar Performance Evaluation Tool) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.tno.nl/downloads/carpet.pdf>.
15. Advanced Refractive Effects Prediction System (AREPS) // Atmospheric Propagation Branch. Ver. 3.6. – 2005. – 284 p.
16. Levy M. Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation. – London: The IEE, 2000. – 336 p.
17. Литвак А.Г., Таланов В.И. // Изв. вузов. Радиофизика. – 1967. – Т. 10. – № 4. – С. 539.
18. Черкашин Ю.Н., Чернова В.А. // XII Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. – Томск, 1978. – Ч. 1. – С. 174–175.
19. Лобачевский Л.А., Попов А.В., Черкашин Ю.Н., Крашенинникова И.В. // XV Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. – Алма-Ата, 1987. – С. 124–125.
20. Гордин М.П., Стрелков Г.М. // II Всесоюзная школа-симпозиум по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. Тезисы лекций и докладов. – Фрунзе: Илим, 1985. – С. 72–75.
21. Гордин М.П., Стрелков Г.М. // XV Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. – Алма-Ата, 1987. – С. 285–286.
22. Власов С.Н., Таланов В.И. // Изв. вузов. Радиофизика. – 1995. – Т. 38. – № 2. – С. 3–19.
23. Стрелков Г.М. // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 5. – С. 517–524.
24. Стрелков Г.М. // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 11. – С. 1291–1297.
25. Стрелков Г.М. // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. – Т. 39. – Вып. 7. – С. 882–890.
26. Попов А.В. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46. – № 9. – С. 1675–1681.
27. Ахияров В.В. // Успехи современной радиоэлектроники. – 2010. – Т. 39. – С. 72–80.
28. Ахияров В.В., Чернавский С.В. // Радиотехника. – 2011. – № 10. – С. 101–110.
29. Ахияров В.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – Т. 15. – № 3. – С. 38–46.
30. Дудов Р.А. Методы моделирования процессов распространения радиоволн в урбанизированной среде: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – МГУ, 2010. – 189 с.
31. Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schadle A. // Communications in Computational Physics. – 2008. – V. 4. – No. 4. – P. 729–796.
32. Акулиничев Ю.П., Абрамов П.В., Ваулин И.Н. // Доклады ТУСУРа. – 2007. – № 2 (16). – С. 139–145.
33. Новиков А.В., Акулиничев Ю.П. // Доклады ТУСУРа. – 2011. – № 1 (23). – С. 55–59.
34. Захаров Ф.Н., Акулиничев Ю.П. // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 3 (37). – С. 5–11.
35. Taylor M. E. Pseudodifferential Operators. – Princeton University Press, 1981.
36. Thomson D. J., Chapman N. R. // Journal of the Acoustical Society of America. – 2000. – V. 74. – P. 1848–1854.
37. Zellely C. A., Constantinou C. C. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1999. – V. 47. – No. 10. – P. 1586–1596.
38. Thiem K. B. // Naval Postgraduate School. – Monterey, California, 2001. – 108 p.
39. Cheng R., Morris P., Brentner K. // Thirteenth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. – Rome, 2007. – V. 3564.
40. Awadallah R. S., Gehman J. Z., Kuttler J. R., Newkirk M. H. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2005. – V. 53. – No. 1. – P. 420–434.
41. Zhang R., Wang H., Zhang L. // General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS), 2014 XXXIth URSI. IEEE. – 2014. – P. 1–4.
42. Silva M. A. N., Costa E., Liniger M. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2012. – V. 60. – No. 4. – P. 2138–2143.
43. Михайлов М.С. Расчет энергетических характеристик фазированных антенных решеток над нерегулярной поверхностью методом параболического уравнения: дис. ... канд. техн. наук. – М.: НИУ «МЭИ», 2015. – 135 с.
44. Пермяков В.А., Михайлов М.С., Малевич Е.С., Мандель В.И. // Труды XXV Всероссийской конференции по распространению радиоволн. – Томск, 2016. – Т. 3. – С. 134–137.
45. Михайлов М.С., Пермяков В.А., Сазонов Д.М. // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). – 2014. – № 12. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/dec14/24/text.pdf>.
46. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
47. Захаров Ф.Н., Акулиничев Ю.П. // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 2 (36). – С. 10–18.
48. Захаров Ф.Н., Акулиничев Ю.П. // Успехи современной радиоэлектроники. – 2015. – № 10. – С. 14–18.
49. Ровкин М.Е., Акулиничев Ю.П., Хлусов В.А., Ковалев В.Н., Бутько В.А., Павлова Л.В., Ваулин И.Н., Пурик Д.В. // Доклады ТУСУРа. – 2005. – № 4 (12). – С. 61–67.
50. Акулиничев Ю.П., Ваулин И.Н., Ровкин В.Е. // Изв. вузов. Физика. – 2007. – Т. 50. – № 5. – С. 87–92.
51. Anderson K. D., Paulus R. A. // Proceedings of the Battlespace Atmospherics & Cloud Impact on Military Operations Conference, BACIMO. – Fort Collins, USA, 2000.
52. Kerans A., Kulesa A., Woods G., Hermann J. // Proc. AP. – Davos, Switzerland, 2000.

53. French G., Kerans A., Kulesa A., Woods G., Lensson E. // *Antennas and Propagation International Symposium*. – 2002. – V. 3. – P. 692–695.
54. French G., Kerans A., Woods G., Lensson E. // *Workshop on the Applications of Radio Science F*. – 2002. – V. 3.
55. Kerans, A.S., Kulesa A.S., Woods G.S., Hermann J.A. // *Journal of Battlefield Technology*. – 2003. – V. 6 (3). – P. 25–28.
56. Kenneth D. A. // *Bulletin of American Meteorological Society*. – 2004. – P. 1355–1365.
57. Лобкова Л. М. Распространение радиоволн над морской поверхностью. – М.: Радио и связь, 1991. – 256 с.
58. Махалов А. М., Михайлов М. С., Пермяков В. А. // 25-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2015). – Севастополь, 2015. – С. 1114–1115.
59. Махалов А. М., Михайлов М. С., Пермяков В. А. // III Всероссийская микроволновая конференция. – Москва: ИРЭ РАН, 2015. – С. 331–335.
60. Пермяков В. А., Михайлов М. С., Махалов А. М. // Труды XXV Всероссийской конференции по распространению радиоволн. – Томск, 2016. – Т. 3. – С. 130–133.
61. Karimian A., Yardim C., Gerstoff P., Hodgkiss W.S., Barrios A.E. // *Radio Science*. – 2011. – Т. 46. – No. 6.
62. Chou Y.-H., Kiang J.-F. // *Forum Electromag. Res. Methods Appl. Technol (FERMAT)*. – 2014. – V. 1.
63. Chou Y. H., Kiang J. F. // *Progress In Electromagnetics Research B*. – 2014. – V. 60. – P. 301–315.
64. Zakharov F.N., Akulinichev Yu.P., Anikin A.S., Krutikov M.V. // *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. – Omsk, 2015.
65. Пермяков В. А. // II Всероссийские Армандовские чтения. – МИ ВЛГУ, 2012. – С. 264–270.
66. Попов В. И. Распространение радиоволн в лесах. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 392 с.
67. Cavalcante G.P.S., Sanches M.A.R., Oliveira R.A.N. // *Journal of Microwaves and Optoelectronics*. – 1999. – V. 1. – No. 4. – P. 42–52.
68. Holm P., Eriksson G., Kraus P., Lundborg B., Lofsved E., Sterner U., & Waern A. // *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. The 13th IEEE International Symposium on IEEE*. – 2002. – V. 1. – P. 140–145.
69. Holm P., Lundborg B., Waern A. // *Report Sweden FOI-R--1050--SE*. – 2003. – P. 28.
70. Apyudin G., Sevgi L. // *IEEE AP Magazine*. – 2013. – V. 55. – No. 3. – P. 244–262.
71. Пермяков В. А., Михайлов М. С. // Доклады I Всероссийской микроволновой конференции. – М., 2013. – С. 289.
72. Пермяков В. А., Михайлов М. С. // *Радиотехника*. – 2013. – № 10. – С. 83–88.
73. Ахияров В. В. // *Электромагнитные волны и электронные системы*. – 2014. – Т. 19. – № 2. – С. 12–18.

¹ Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 13.09.16.

² Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия

Акулиничев Юрий Павлович, д.т.н., профессор, профессор каф. РТС, e-mail: ayur63@mail.ru;

Захаров Федор Николаевич, к.т.н., ассистент каф. РТС, e-mail: ZakharovFN@main.tusur.ru;

Пермяков Валерий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, профессор каф. РТПиАС, e-mail: valerypermyakov@yandex.ru;

Михайлов Михаил Сергеевич, к.т.н., ассистент каф. РТПиАС, e-mail: mihailovms@mail.ru.

Yu.P. AKULINICHEV¹, F.N. ZAKHAROV¹, V.A. PERMYAKOV², M.S. MIKHAILOV²

STATE OF THE ART METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE PARABOLIC EQUATION

The report provides an overview of works on various aspects of the problem of numerical solution of the parabolic wave equation for the purpose of diagnosis and prediction of radio propagation conditions over the earth's surface. There were introduced the basic grid methods, methods of accounting for the earth's surface irregularities in the boundary conditions, differences in calculation of deterministic and random fields. The particular importance of a detailed and accurate description of the physical properties of the path environment was outlined.

Keywords: radiowave propagation; electromagnetic field; parabolic equation; numerical calculations; propagation medium.

REFERENCES

1. Leontovich M.A. (1944). *Izv. AN USSR*, 8(16), 16–22.
2. Leontovich M.A., Fok V.A. (1946). *J. Phys. USSR*, 10(5), 399–420.
3. Fok V.A. *Problems of Diffraction and Propagation of Electromagnetic Waves*. Moscow, Sov. radio Publ., 1970, 517 p.
4. Kukushkin A.V., Freylicher V.D., Fuchs I.M. (1987). *Radiophysics and Quantum Electronics*, 30(7), 597–620.
5. Samarskiy A.A. *Introduction to Numerical Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 288 p.
6. Hardin R. H., Tappert F. D. (1973). *Siam Rev*, 15(2), 423.
7. Sevgi L., Akleman F., Felsen L.B. (2002). *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 44(1), 55–75.

8. Kuttler J.R., Dockery G.D. (1991). *Radio Science*, 26(2), 381–393.
9. B'erenger J.-P. (1994). *J. Comput. Phys.*, 114, 185–200.
10. Baskakov V. A., Popov A. V. (1991). *Wave Motion*, 14, 123–128.
11. Marcus S.W. (1992). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(12), 1451–1458.
12. Barrios A.E. (1994). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(1), 90–98.
13. TERPEM package: www.signalscience.com/TERPEM.htm
14. CARPET (Computer-Aided Radar Performance Evaluation Tool): <http://www.tno.nl/downloads/carpet.pdf>
15. *Advanced Refractive Effects Prediction System (AREPS). Atmospheric Propagation Branch*. Ver. 3.6. 2005, 284 p.
16. Levy M. *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*. London, The IEE, 2000, 336 p.
17. Litvak A.G., Talanov V.I. (1967). *Radiophysics and Quantum Electronics*, 10(4), 296–302.
18. Cherkashin Yu.N., Chernova V.A. *XII Union Conference on Radiowave Propagation*. Tomsk, 1978, vol. 1, pp. 174–175.
19. Lobachevskii L.A., Popov A.V., Cherkashin Yu.N., Krashenninnikov I.V. *XV Union Conference on Radiowave Propagation*. Alma-Ata, 1987, pp. 124–125.
20. Gordin M.P., Strelkov G.M. *II Union School-Symposium on the Spread of Millimeter and Submillimeter Waves in the Atmosphere*. Abstracts of lectures and presentations. Frunze, Ilim Publ., 1985, pp. 72–75.
21. Gordin M.P., Strelkov G.M. *XV Union Conference on Radiowave Propagation*. Alma-Ata, 1987, pp. 285–286.
22. Vlasov S.N. Talanov V.I. (1995). *Radiophysics and Quantum Electronics*, 38(1–2), 1–12.
23. Strelkov G.M. (1996). *Journal of Communications Technology and Electronics*, 41(6), 477–483.
24. Strelkov G.M. (1996). *Journal of Communications Technology and Electronics*, 41(14), 1199–1205.
25. Strelkov G.M. (1996). *Radiophysics and Quantum Electronics*, 39(7), 585–590.
26. Popov A.V. (2006). *Journal of Communications Technology and Electronics*, 46(9), 1595–1600.
27. Akhmyarov V.V. (2010). *Uspehi sovremennoj radioelektroniki*, 39, 72–80.
28. Akhmyarov V.V., Chernavskii S.V. (2011). *Radiotekhnika*, 10, 101–110.
29. Akhmyarov V.V. (2010). *Jelektromagnitnye volny i jelektronnye sistemy*, 15(3), 38–46.
30. Dudov R.A. *Metody modelirovanija processov rasprostraneniya radiovoln v urbanizirovannoj srede*. Dis. kand. fiz.-mat. nauk. Voscov, MGU, 2010, 189 p.
31. Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schadle A. (2008). *Communications in Computational Physics*, 4(4), 729–796.
32. Akulinichev Ju.P., Abramov P.V., Vaulin I.N. (2007). *Doklady TUSURa*, 2 (16), 139–145.
33. Novikov A.V., Akulinichev Ju.P. (2011). *Doklady TUSURa*, 1 (23), 55–59.
34. Zaharov F.N., Akulinichev Ju.P. (2015). *Doklady TUSURa*, 3 (37), 5–11.
35. Taylor M.E. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, 1981.
36. Thomson D.J., Chapman N.R. (2000). *Journal of the Acoustical Society of America*, 74, 1848–1854.
37. Zelle C.A., Constantinou C.C. (1999). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(10), 1586–1596.
38. Thiem K.B. *Naval Postgraduate School*. Monterey, California, 2001, 108 p.
39. Cheng R., Morris P., Brentner K. *Thirteenth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Rome, 2007, vol. 3564.
40. Awadallah R.S., Gehman J.Z., Kuttler J.R., Newkirk M.H. (2005). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(1), 420–434.
41. Zhang R., Wang H., Zhang L. *General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS), 2014 XXXIth URSI*. IEEE. 2014, pp. 1–4.
42. Silva M.A.N., Costa E., Liniger M. (2012). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 60(4), 2138–2143.
43. Mihajlov M.S. *Raschet jenergeticheskikh harakteristik fazirovannykh antennykh reshetok nad nereguljarnoj poverhnost'ju metodom parabolicheskogo uravnenija*. Dis. kand. tehn. nauk. Moscow, NIU «MJeI», 2015, 135 p.
44. Permjakov V.A., Mihajlov M.P., Malevich E.P., Mandel' V.I. *Proceedings of the XXV All-Russian Conference on Radiowave Propagation*. Tomsk, 2016, vol. 3, pp. 134–137.
45. Mihajlov M.S., Permjakov V.A., Sazonov D.M. (2014). *Zhurnal radioelektroniki*, 12. <http://jre.cplire.ru/jre/dec14/24/text.pdf>.
46. Rytov S.M., Kravtsov Yu.A., Tatarskii V.I. *Principles of Statistical Radiophysics. vol. 3, 4. Wave Propagation Through Random Media*. Springer Verlag, 1989, 464 p.
47. Zaharov F.N., Akulinichev Ju.P. (2015). *Doklady TUSURa*, 2 (36), 10–18.
48. Zaharov F.N., Akulinichev Ju.P. (2015). *Uspehi sovremennoj radioelektroniki*, 10, 14–18.
49. Rovkin M.E., Akulinichev Ju.P., Hlusuov V.A., Kovalev V.N., But'ko V.A., Pavlova L.V., Vaulin I.N., Purik D.V. (2005). *Doklady TUSURa*, 4 (12), 61–67.
50. Akulinichev Ju.P., Vaulin I.N., Rovkin M.E. (2007). *Russian Physics Journal*, 50(5), 509–515.
51. Anderson K. D., Paulus R. A. // *Proceedings of the Battlespace Atmospherics & Cloud Impact on Military Operations Conference, BACIMO*. Fort Collins, USA. 2000.
52. Kerans A., Kulesa A., Woods G., Hermann J. *Proc. AP*. Davos, Switzerland, 2000.
53. French G., Kerans A., Kulesa A., Woods G., Lensson E. (2002). *Antennas and Propagation International Symposium*, 3, 692–695.
54. French G., Kerans A., Woods G., Lensson E. *Workshop on the Applications of Radio Science F. 2002*, vol. 3.
55. Kerans A.S., Kulesa A.S., Woods G.S., Hermann J.A. (2003). *Journal of Battlefield Technology*, 6 (3), 25–28.
56. Kenneth D.A. *Bulletin of American Meteorological Society*. 2004, pp. 1355–1365.
57. Lobkova L.M. *Radiowave Propagation over Sea Surface*. Moscow, Radio i svjaz' Publ., 1991, 256 p.
58. Mahalov A.M., Mihajlov M.S., Permjakov V.A. *25th Int. Crimean Conf. «Microwave & Telecommunication Technology» (CriMiCo '2015)*. Sevastopol, 2015, pp. 1114–1115.
59. Mahalov A.M., Mihajlov M.S., Permjakov V.A. *III All-Russian Conference Microwave*. Moscow, IRJe RAN, 2015, pp. 331–335.

60. Permjakov V.A., Mihajlov M.S., Mahalov A.M. *Proceedings of the XXV All-Russian Conference on Radiowave Propagation*. Tomsk, 2016, vol. 3, pp. 130–133.
61. Karimian A., Yardim C., Gerstoff P., Hodgkiss W.S., Barrios A.E. (2011). *Radio Science*, 46(6).
62. Chou Y.-H., Kiang J.-F. *Forum Electromag. Res. Methods Appl. Technol (FERMAT)*. 2014, vol. 1.
63. Chou Y. H., Kiang J. F. (2014). *Progress In Electromagnetics Research B*, 60, 301–315.
64. Zakharov F.N., Akulinichev Yu.P., Anikin A.S., Krutikov M.V. *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. Omsk, 2015.
65. Permjakov V.A. *II Vserossijskie Armandovskie chtenija*. MI VLGU, 2012, pp. 264–270.
66. Popov V.I. *Radiowave Propagation in the Woods*. Moscow, Gorjachaja linija-Telekom Publ., 2015, 392 p.
67. Cavalcante G.P.S., Sanches M.A.R., Oliveira R.A.N. (1999). *Journal of Microwaves and Optoelectronics*, 1(4), 42–52.
68. Holm P., Eriksson G., Kraus P., Lundborg B., Lofsved, E., Sterner, U., & Waern, A. *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. The 13th IEEE International Symposium on IEEE*. 2002, vol. 1, pp. 140–145.
69. Holm P., Lundborg B., Waern A. Report Sweden FOI-R--1050--SE. 2003, p. 28.
70. Apaydin G., Sevgi L. (2013). *IEEE AP Magazine*, 55(3), 244–262.
71. Permjakov V.A., Mihajlov M.S. Report I All-Russian Conference of the Microwave. Moscow, 2013, p. 289.
72. Permjakov V.A., Mihajlov M.S. (2013). *Radiotekhnika*, 10, 83–88.
73. Akhiyarov V.V. (2014). *Jeletromagnitnye volny i jelektronnye sistemy*, 19(2), 12–18.

¹ Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia

² National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

Akulinichev Yuri Pavlovich, Doctor of Science, Professor of the Department Radio Engineering Systems, e-mail: ayup63@mail.ru;

Zakharov Fedor Nikolaevich, Ph.D., Research Staff of the Department Radio Engineering Systems, e-mail: ZakharovFN@main.tusur.ru;

Permyakov Valeri Alexandrovich, Doctor of Science, Professor of the Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems, e-mail: valerypermyakov@yandex.ru;

Mikhailov Mihail Sergeevich, Ph.D., Research Staff of the Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems, e-mail: mikhailovms@mail.ru.