

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 2]. Варианты к задачам 1.1-1.3 даны в **ПРИЛОЖЕНИИ 1.А.**

В отчет следует включить постановки задач, результаты расчетов и их анализ.

Задача 1.1. Найти значения машинного нуля, машинной бесконечности и машинного эпсилон. (см. **Приложение 1.В**)

Задача 1.2. Исследовать поведение погрешности приближения функции $F(x)$ частичными суммами на отрезке $[a,b]$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя разложения стандартных функций в ряд Тейлора в окрестности нуля, получить разложение функции $F(x)$ по степеням x .
2. Составить процедуру, вычисляющую частичную сумму N членов ряда $S(x,N)$.
3. Построить графики исходной функции и первых пяти частичных сумм: $S(x,1), \dots, S(x,5)$.
4. Составить функции, вычисляющие абсолютную погрешность $\Delta(x, N) = |S(x, N) - F(x)|$ и относительную погрешность $\delta(x, N) = \Delta(x, N) / |S(x, N)|$. Построить графики погрешностей первых пяти частичных сумм.
5. Определить количество членов ряда N , при котором величина относительной погрешности в средней точке отрезка станет меньше машинного эпсилон. Величину относительной погрешности вычислять как отношение прибавляемого члена к накопленной частичной сумме $S(x, N)$, взятое по модулю.
6. При найденном значении N построить графики абсолютной погрешности $\Delta(x, N)$ и относительной погрешности $\delta(x, N)$.
7. Составить программу округления вычислений результата до t разрядов мантииссы и произвести расчеты п. 4 с учетом округления.
8. Сравнить полученные результаты и составить отчет по задаче.

Задача 1.3. Дана функция $f(a,b,c)$. Значения переменных указаны в варианте со всеми верными цифрами. Оценить погрешность результата двумя способами: а) используя оценки погрешности для арифметических операций, б) используя общую формулу погрешностей. Результат представить в двух формах записи: с явным указанием погрешностей и с учетом количества верных цифр. (см. **Приложение 2.В**)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1

ВНИМАНИЕ! Номер варианта N для лабораторных работ вычисляется по следующей формуле:

- 1) $N = I$ для группы А-5-19;
- 2) $N = 10 + I$ для группы А-13а-19
- 3) $N = 20 + I$ для группы А-13б-19
- 4) $N = 30 + I$ для группы А-14-19
- 5) $N = 60 - I$ для группы А-16-19

(здесь I — индивидуальный номер студента по журналу).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.А

Таблица к задаче 1.1

№	$F(x)$	$[a, b]$	№	$F(x)$	$[a, b]$	№	$F(x)$	$[a, b]$
1.1.1	xe^x	$[-5, -3]$	1.1.21	$x \cos(x)$	$[1, 4]$	1.1.41	$x^2(1 - \cos(x))$	$[2, 7]$
1.1.2	$\sin(x)$	$[0, 1.6]$	1.1.22	$x^2(e^x - x - 1)$	$[-4, 0]$	1.1.42	$x \sin(x)$	$[-8, -5]$
1.1.3	$e^x - 2$	$[-3, -1]$	1.1.23	$x \cos(x^2)$	$[1, 4.5]$	1.1.43	$x^2 e^{-x}$	$[-7, -4]$
1.1.4	$\ln(1 + x^2)$	$[0.2, 0.8]$	1.1.24	$\ln(1 + x) - x$	$[0, 0.5]$	1.1.44	$\ln(1 + x) / x$	$[0.3, 0.9]$
1.1.5	$\arctg(x) / x$	$[0.1, 0.9]$	1.1.25	$\arctg(x)$	$[0, 0.8]$	1.1.45	$\arctg(x) - x$	$[0.2, 0.7]$
1.1.6	$\sin(x^2)$	$[-3, 0]$	1.1.26	$\ln(1 + x^2) - x^2$	$[0.5, 0.9]$	1.1.46	$(1 - \cos(x)) / x$	$[-9, -6]$
1.1.7	$x(e^x - 1)$	$[-4, 0]$	1.1.27	$\sin(x) / x$	$[1, 8]$	1.1.47	$e^x - 1$	$[-7, -1]$
1.1.8	$\cos(x)$	$[1, 3]$	1.1.28	$(e^x - x - 1) / x$	$[6, 9]$	1.1.48	$1 - \cos(x)$	$[-6, -2]$
1.1.9	$x \ln(1 + x)$	$[0.2, 0.8]$	1.1.29	$1 - \ln(1 + x)$	$[0, 0.5]$	1.1.49	$\ln(1 + x^2) / x$	$[0.3, 0.9]$
1.1.10	$2x \cdot \arctg(x)$	$[0.1, 0.9]$	1.1.30	$x - \arctg(x)$	$[0, 0.8]$	1.1.50	$\arctg(x^2)$	$[-0.9, 0]$
1.1.11	$x(1 - \cos(x))$	$[2, 6]$	1.1.31	$2 - e^{-x}$	$[2, 5]$	1.1.51	$\sin(x) - \cos(x)$	$[-1, 4]$
1.1.12	$(e^x - 1) / x$	$[-7, -3]$	1.1.32	$1 - \ln(1 + x) / x$	$[0.2, 0.7]$	1.1.52	$e^{-x} + \cos(x)$	$[1, 7]$
1.1.13	$3x \sin(x)$	$[1, 7]$	1.1.33	$e^x + \cos(x)$	$[-2, 2]$	1.1.53	$\sin(x^2) - x^2$	$[-5, -1]$
1.1.14	$\arctg(2x)$	$[-0.2, 0.4]$	1.1.34	$\arctg(x) - 1 / x$	$[0.1, 1]$	1.1.54	$\sin(x) - e^{-x}$	$[-1, 3]$
1.1.15	$\ln(1 + x^2)$	$[-0.8, 0]$	1.1.35	$x^2 - x \sin(x)$	$[1, 6]$	1.1.55	$\ln(1 + x) + x^2 / 2$	$[-0.9, 0]$
1.1.16	$x^2 \cos(x)$	$[-5, -2]$	1.1.36	$e^{-x} + \sin(x)$	$[-1, 5]$	1.1.56	$1 / x + \cos(x)$	$[1, 8]$
1.1.17	$e^x - x - 1$	$[-9, -5]$	1.1.37	$e^x - e^{-x}$	$[-2, 1]$	1.1.57	$\arctg(x) / x - 1$	$[0.2, 0.8]$
1.1.18	$\ln(1 + x) - x + x^2 / 2$	$[0.4, 0.8]$	1.1.38	$\sin(x) + \cos(x)$	$[-6, 2]$	1.1.58	$e^x + e^{-x}$	$[-3, 4]$
1.1.19	$x - \sin(x)$	$[1.5, 4]$	1.1.39	$\ln(1 + x) + 1 / x$	$[0.3, 0.9]$	1.1.59	$1 / x + \sin(x)$	$[1, 8]$
1.1.20	$2 - \cos(x)$	$[-5, 0]$	1.1.40	$2 \sin(x^2)$	$[-6, -4]$	1.1.60	$x + \cos(x)$	$[0, 4]$

Таблица к задаче 1.2

№	$f(a,b,c)$	a	b	c	№	$f(a,b,c)$	a	b	c
1.2.1	$\frac{a}{a^2 + bc}$	0.0125	0.283	0.0187	1.2.31	$\frac{a + b^2}{a^2 - bc}$	4.41	18.5	1.4
1.2.2	$\frac{a - b}{a^2 + bc}$	14.29	13.81	10.98	1.2.32	$\frac{a - c^2}{a^2 + b}$	16.5	4.2	1.23
1.2.3	$\frac{a^2}{ab - bc}$	12.28	13.21	12.19	1.2.33	$\frac{a + b}{b - c}$	52.31	48.95	47.81
1.2.4	$\frac{a + b}{a^2 + bc}$	0.328	0.781	0.0129	1.2.34	$\frac{ac + bc}{a^2 - b^2}$	4.81	4.52	9.28
1.2.5	$\frac{a + c}{a^2 - b^2}$	14.85	15.49	10.1	1.2.35	$\frac{ac - bc}{a^2 + b^2}$	16.21	16.18	21.23
1.2.6	$\frac{ab}{a^2 + bc}$	12.31	0.035 2	10.82	1.2.36	$\frac{a^2 + b^2}{abc}$	121	0.324	1.25
1.2.7	$\frac{a - b}{a^2 + b^2}$	12.45	11.98		1.2.37	$\frac{a^2 + b^2}{a - c}$	25.18	24.98	23.18
1.2.8	$\frac{a^2 b}{c}$	3.456	0.642	7.12	1.2.38	$\frac{c}{a^2 - b^2}$	3.1415	3.1411	10.91
1.2.9	$\frac{a^3 b}{c}$	1.245	0.121	2.34	1.2.39	$\frac{ab^2}{c}$	3.14	1.57	0.0921
1.2.10	$\frac{ab + b^2}{a^2 + c^2}$	13.12	0.145	15.18	1.2.40	$\frac{ac}{a^2 - b^2}$	14.85	15.49	0.16
1.2.11	$\frac{ab^3}{c}$	0.643	2.17	5.843	1.2.41	$\frac{ac + b}{ac - b}$	5.325	5.152	5.481
1.2.12	$\frac{ab}{c^2}$	0.3575	2.63	0.854	1.2.42	$\frac{a + c}{a^2 + b^2}$	71.4	4.82	49.5
1.2.13	$\frac{ab + b^2}{a^2 - c^2}$	14.91	0.485	14.18	1.2.43	$\frac{a^2 + b}{c}$	4.356	4.32	0.246
1.2.14	$\frac{ac}{a - b^2}$	16.5	4.12	0.198	1.2.44	$\frac{a^3 - b}{c}$	3.42	5.124	0.221
1.2.15	$\frac{c^2}{a^2 + b}$	5.21	14.9	0.295	1.2.45	$\frac{ab}{c^3}$	0.5761	3.622	0.0685
1.2.16	$\frac{2a}{a^2 + 2bc}$	1.25	2.83	0.0187	1.2.46	$\frac{b^2}{a - 6c}$	4.41	8.5	1.4
1.2.17	$\frac{a - 3b}{a^2 + 3c}$	4.29	13.8	10.98	1.2.47	$\frac{2a - c^2}{a^2 + b}$	16.5	4.2	1.23
1.2.18	$\frac{a^2}{ab - 4bc}$	12	13.21	3.2	1.2.48	$\frac{a + b}{b - c}$	52.31	48.95	47.81

1.2.19	$\frac{4a+b}{a^2+2bc}$	0.328	1.781	0.0129	1.2.49	$\frac{ac+bc}{a^2-b^2}$	4.81	4.52	9.28
1.2.20	$\frac{2a+c}{a^2-5b^2}$	11.5	15.45	5.1	1.2.50	$\frac{ac-bc}{a^2+b^2}$	16.21	16.18	21.23
1.2.21	$\frac{10ab}{a^2+c}$	12.315	0.035 2	10.82	1.2.51	$\frac{a^2+b^2}{abc}$	121	0.324	1.25
1.2.22	$\frac{a}{b^2}+c$	12.45	11.98	8.6	1.2.52	$\frac{a^2+b^2}{a-c}$	25.18	24.98	23.18
1.2.23	$\frac{b}{c}+a^2$	3.456	0.642	7.12	1.2.53	$\frac{c}{a^2-b^2}$	3.1415	3.1411	10.91
1.2.24	$a^3-\frac{b}{c}$	1.245	12.1	2.34	1.2.54	$\frac{a+b^2}{c}$	3.14	1.57	0.0921
1.2.25	$2b^2-\frac{a}{c^2}$	13.123	1.45	3.18	1.2.55	$\frac{ac}{a^2-b^2}$	14.85	15.49	0.16
1.2.26	$\frac{5a+2b^3}{c}$	0.643	1.17	0.5843	1.2.56	$\frac{ac+b}{ac-b}$	5.325	5.152	5.481
1.2.27	$\frac{b}{c^2-4a}$	0.675	12.63	1.54	1.2.57	$\frac{a+c}{a^2+b^2}$	71.4	4.82	49.5
1.2.28	$c+\frac{5ab}{c^2}$	14.91	0.485	4.18	1.2.58	$\frac{a^2+b}{c}$	4.356	4.32	0.246
1.2.29	$\frac{a+4c}{3ab^2}$	16.5	4.12	0.198	1.2.59	$\frac{a^3-b}{c}$	3.42	5.124	0.221
1.2.30	$\frac{c^2-8a}{a^2+b}$	5.21	14.9	6.8	1.2.60	$\frac{ab}{c^3}$	0.5761	3.622	0.0685

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. В

Задача 1.1. Постановка задачи: для пакета найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон.

Теоретический материал. В ЭВМ для вещественных чисел используется двоичная система счисления и принята форма представления чисел с плавающей точкой $x = \mu \cdot 2^p$, $\mu = \pm(\gamma_1 \cdot 2^{-1} + \gamma_2 \cdot 2^{-2} + \dots + \gamma_t \cdot 2^{-t})$. Здесь μ - мантисса; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ - двоичные цифры, причем всегда $\gamma_1 = 1$, p - целое число называемое двоичным порядком. Количество t цифр, которое отводится для записи мантиссы, называется разрядностью мантиссы. Диапазон представления чисел в ЭВМ ограничен конечной разрядностью мантиссы и значением числа p . Все представимые числа на ЭВМ удовлетворяют неравенствам: $0 < X_0 \leq |x| < X_\infty$, где $X_0 = 2^{-(p_{\max} + 1)}$, $X_\infty = 2^{p_{\max}}$. Все числа, по модулю большие X_∞ , не представимы на ЭВМ и рассматриваются как машинная бесконечность. Все числа, по модулю меньшие X_0 , для ЭВМ не отличаются от нуля и рассматриваются как машинный нуль. Машинным эпсилон ε_M называется относительная точность ЭВМ, то есть граница относительной погрешности представления чисел в ЭВМ. Покажем, что $\varepsilon_M \approx 2^{-t}$. Пусть $x^* = \mu \cdot 2^p$, тогда граница абсолютной погрешности представления этого

числа равна $\overline{\Delta}(x^*) \approx 2^{-t-1} \cdot 2^p$. Поскольку $\frac{1}{2} \leq \mu < 1$, то величина относительной погрешности представления

оценивается так:

$$\overline{\delta}(x^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(x^*)}{|x^*|} \approx \frac{2^{-t-1} \cdot 2^p}{\mu \cdot 2^p} = \frac{2^{-t-1}}{\mu} \leq \frac{2^{-t-1}}{2^{-1}} = 2^{-t}.$$

Машинное эpsilon определяется разрядностью мантииссы и способом округления чисел, реализованным на конкретной ЭВМ.

Примем следующие способы определения приближенных значений параметров, требуемых в задаче:

1. Положим $X_\infty = 2^n$, где n - первое натуральное число, при котором происходит переполнение.
2. Положим $X_0 = 2^{-m}$, где m - первое натуральное число, при котором 2^{-m} совпадает с нулем.
3. Положим $\varepsilon_M = 2^{-k}$, где k - наибольшее натуральное число, при котором сумма вычисленного значения $1 + 2^{-k}$

еще больше 1. Фактически ε_M есть граница относительной погрешности представления числа $x^* \approx 1$.

Результаты вычислительного эксперимента:

Машинная бесконечность $X_\infty \approx$

Машинный нуль $X_0 \approx$

Машинное эpsilon $\varepsilon_{\text{маш}} \approx$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. В

Задача 1.3. Для нахождения погрешности функции следует использовать следующие утверждения.

Утверждение 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

Утверждение 2. Если $\delta(a^*) \ll 1$ и $\delta(b^*) \ll 1$, то для оценки границ относительных погрешностей произведения и частного можно использовать приближенные равенства: $\delta(a^* b^*) \approx \delta(a^*) + \delta(b^*)$,

$$\delta(a^* / b^*) \approx \delta(a^*) + \delta(b^*)$$

Утверждение 3. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - дифференцируемая функция m переменных, вычисление которой производится при приближенно заданных значениях аргументов $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$. Тогда если $x^* \approx x$, то можно

использовать равенства:
$$\Delta f(x^*) \approx \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \right| \Delta(x_j^*), \quad \delta f(x^*) \approx \frac{\Delta f(x^*)}{|f(x^*)|}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.
2. Казенкин К.О. Указания к решению задач по вычислительной математике. Теория погрешностей. Нелинейные уравнения. Системы линейных алгебраических уравнений. М, Изд. Дом МЭИ, 2009.
3. Амосова О.А., Вестфальский А.Е., Крупин Г.В. Упражнения по основам численных методов. М, Изд-во МЭИ, 2016.