Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

д.т.н. проф. ______ Драгунов В.К.

«27» мая 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

специальной дисциплины 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Профиль: Дифференциальные уравнения

Москва 2022

Программа составлена на основе паспорта специальности научных работников и программы - минимум кандидатского экзамена по специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» в действующей редакции и в соответствии с Положением о подготовке научных и научно- педагогических кадров в аспирантуре (адьюнктуре), утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации от 30 ноября 2021г. № 2122.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью дисциплины является изучение основных разделов теории дифференциальных уравнений и математической физики.

Задачами дисциплины являются: изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений с частными производными, функционального анализа.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ПРОГРАММЫ АСПИРАНТУРЫ

Специальная дисциплина в структуре программы аспирантуры входит в Блок 2 «Образовательный компонент. Общая трудоемкость составляет 7 зачетных единиц (з.е.). Педагогическая практика выполняется в течение всего периода обучения. Распределение ее общего объема по годам обучения приводится в учебном плане программы аспирантуры. Педагогическая практика является стационарной, проводится на кафедрах НИУ «МЭИ».

Формула специальности

Специальность «Дифференциальные уравнения и математическая физика» – область математики, посвященная изучению дифференциальных уравнений. Основными составными частями специальности являются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Главные научные цели специальности: исследование разрешимости дифференциальных уравнений, описание качественных и количественных характеристик, приложения.

Области исследований

1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем обыкновенных уравнений.
2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
3. Спектральные задачи для дифференциальных операторов.
4. Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
5. Динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях.

6. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

7. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

8. Теория псевдодифференциальных операторов.

9. Теория дифференциально-операторных уравнений.

10. Теория дифференциально-функциональных уравнений и нелокальных краевых задач.

11. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

12. Теория дифференциальных включений и вариационных неравенств.

13. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления.

Отрасль науки

– физико-математические науки.

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, функциональный анализ.

Программа разработана на основе программы - минимум кандидатского экзамена по специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика», утвержденной экспертным советом Высшей аттестационной комиссии.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

Устойчивость по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

Уравнения с частными производными

Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).

Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения возмущений, функция источника и др.).

Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн и др.).

Ньютонов потенциал и его свойства. Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал. Объемный параболический потенциал и его свойства. Потенциал Пуассона и его свойства. Волновые потенциалы и их свойства. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.

Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства. Решение краевых задач для параболических и эллиптических уравнений методом потенциалов.

Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.

Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаэдо-Галеркина. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.

Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.

Функциональный анализ

Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категории. Теорема Хаусдорфа о пополнении. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических пространствах. ε-сеть. Вполне ограниченные множества. Критерий относительной компактности в $C(K)$ (теорема Асколи-Арцела).

Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимость. Свойства слабо сходящихся последовательностей. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

Теорема Банаха-Штейнгауза.

Ряд Неймана. Теоремы о существовании обратного оператора.

Сопряженное пространство. Теорема Рисса-Фреше о представлении линейного ограниченного функционала. Спектр оператора. Сопряженные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.

Преобразование Фурье и его свойства. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини. Преобразование Фурье функций из $S^{\infty}(R^{m})$. Преобразование Фурье свертки. Преобразование Фурье-Планшереля. Равенство Парсеваля.

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато.

Пространства $L_p(E)$, $1 \le p \le \infty$ и их полнота. Неравенства Гельдера и Минковского. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множеств простых, непрерывных и непрерывных финитных функций. Свойство непрерывности функций из $L_p(E)$ относительно сдвига.

Усреднение функций из $L_p(E)$. Средние функции и их свойства. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций. Критерий Рисса предкомпактности в $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$.

Обобщенные производные и их свойства. Пространства Соболева W_p^l и их свойства: полнота, рефлексивность, сепарабельность. Усреднение функций из пространств Соболева. Плотность гладких функций в пространствах Соболева. Пространства $\overset{0}{W}{}_p^l$ и их свойства. Продолжение функций из пространств Соболева. Теоремы вложения. Эквивалентность норм в пространствах Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

Пространства основных функций. Обобщенные функции и действия над ними. Дифференцирование обобщенных функций. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций. Свертка обобщенных функций.

Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

Вопросы для самоконтроля и проведения кандидатского экзамена

1. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.
3. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).
4. Устойчивость по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя.
5. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
6. Теорема Четаева о неустойчивости.
7. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
8. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.
9. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина.
10. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
11. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
12. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.
13. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума).
14. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
15. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).
16. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения возмущения, функция источника и др.).
17. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн и др.).
18. Ньютонов потенциал и его свойства. Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал.
19. Объемный параболический потенциал и его свойства.
20. Потенциал Пуассона и его свойства.
21. Волновые потенциалы и их свойства. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.
22. Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства. Решение краевых задач для параболических и эллиптических уравнений методом потенциалов.

23. Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.

24. Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

23. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

24. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

25. Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаэдо-Галеркина.

26. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.

27. Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.

28. Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

29. Теорема Бэра о категории.

30. Теорема Хаусдорфа о пополнении.

31. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений.

32. Компактность в метрических пространствах. ε -сеть. Вполне ограниченные множества.

33. Критерий относительной компактности в $C(K)$ (теорема Асколи-Арцела).

34. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

35. Сильная и слабая сходимость. Свойства слабо сходящихся последовательностей.

36. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

37. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

38. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

39. Ряд Неймана. Теоремы о существовании обратного оператора.

40. Сопряженное пространство.

41. Теорема Банаха-Штейнгауза.

42. Теорема Рисса- Фреше о представлении линейного ограниченного функционала.

43. Спектр оператора.

44. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.

45. Преобразование Фурье и его свойства.

46. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини.

47. Преобразование Фурье функций из $S^{\infty}(R^m)$.

48. Преобразование Фурье свертки.

49. Преобразование Фурье-Планшереля. Равенство Парсеваля.

50. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато.

52. Пространства $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского.

53. Полнота пространств $L_p(E)$.

54. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множеств простых, непрерывных и непрерывных финитных функций.

55. Свойство непрерывности функций из $L_p(E)$ относительно сдвига.

56. Пространство $L_\infty(E)$ и его полнота.

57. Усреднение функций из $L_p(E)$. Средние функции и их свойства. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций.

58. Определение обобщенной производной и ее свойства.

59. Пространства Соболева W_p^l и их свойства: полнота, рефлексивность, сепарабельность.

60. Усреднение функций из пространств Соболева. Плотность гладких функций в пространствах Соболева.

61. Пространства $\overset{0}{W}{}_p^{\,l}$ и их свойства.

62. Продолжение функций из пространств Соболева.

63. Теоремы вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций.

64. Эквивалентность норм в пространствах Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

65. Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

66. Пространства основных функций.

67. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций.

68. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции.

69. Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций.

70. Свертка обобщенных функций.

71. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена.

Требования и критерии оценивания ответов экзамена

В процессе экзамена оценивается уровень научно-исследовательской компетентности аспиранта, что проявляется в квалифицированном представлении результатов обучения.

При определении оценки учитывается грамотность представленных ответов, стиль изложения и общее оформление, способность ответить на поставленный вопрос по существу.

Критерии выставления оценки на экзамене:

Оценка «ОТЛИЧНО» выставляется аспиранту, который показал при ответе на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, что владеет материалом изученной дисциплины, свободно применяет свои знания для объяснения теоретических положений и решения задач.

Оценка «ХОРОШО» выставляется аспиранту, в основном правильно ответившему на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, но допустившему при этом непринципиальные ошибки.

Оценка «УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО» выставляется аспиранту, который в ответах на вопросы экзаменационного билета допустил существенные и даже грубые ошибки, но затем исправил их сам

Оценка «НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО» выставляется аспиранту, который:

а) не ответил на вопросы экзаменационного билета

б) при ответе на дополнительные вопросы обнаружил незнание большого раздела экзаменационной программы.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СпБ.: Лань, 2011.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.
4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: Физматлит, 2009.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
6. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
7. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. Казань: Изд-во КГУ, 2014.
8. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

9. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

10. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Эдиториал УРСС, 2007.

11. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2014.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

13. Треногин В.А. Функциональный анализ. В 2-х т. М.: Академия, 2012.

14. Адамс Р.А., Фурнье Дж. Ф. Пространства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2009.

Дополнительная литература:

1. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, 2000.

3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд. М.: Наука. 1983.

5. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: ОС Windows, Microsoft Office.

Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Университетская информационная система «РОССИЯ» https://uisrussia.msu.ru

Справочно-правовая система «Консультант+» http://www.consultant-urist.ru

Справочно-правовая система «Гарант» http://www.garant.ru

База данных Web of Science https://apps.webofknowledge.com/

База данных Scopus https://www.scopus.com

Портал открытых данных Российской Федерации https://data.gov.ru

База открытых данных Министерства труда и социальной защиты РФ https://rosmintrud.ru/opendata

База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU https://elibrary.ru/

База данных профессиональных стандартов Министерства труда и социальной защиты РФ http://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/

Базы данных Министерства экономического развития РФ http://www.economy.gov.ru

База открытых данных Росфинмониторинга http://www.fedsfm.ru/opendata

Электронная база данных «Издательство Лань» https://e.lanbook.com

Федеральная государственная информационная система «Национальная электронная библиотека» https://нэб.рф

Национальный портал онлайн обучения «Открытое образование» https://openedu.ru

Электронная база данных "Polpred.com Обзор СМИ" https://www.polpred.com

Официальный сайт Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии http://protect.gost.ru/

Электронная библиотека МЭИ https://ntb.mpei.ru/e-library/index.php.

ПРОГРАММУ СОСТАВИЛИ:

Профессор кафедры МКМ,
докт. физ.–мат. наук, профессор А.А. Амосов

Профессор кафедры МКМ,
докт. физ.–мат. наук, профессор Ю.А. Дубинский

Профессор кафедры МКМ,
докт. физ.–мат. наук, доцент М.Ф. Черепова

Зав. кафедрой МКМ,
канд. физ.–мат. наук, доцент П.В. Зубков

ДИРЕКТОР ИВТИ

канд. техн. наук, доцент С.В. Вишняков

«СОГЛАСОВАНО»

Заведующий кафедрой ВМ
докт. физ.–мат. наук, доцент В.И. Качалов