

МЕЖДУНАРОДНАЯ МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТОЭ

2025

Группа II

Задача 1 (10 баллов)

Для электрической цепи, представленной на рисунке, известны сопротивления резисторов:

$$R_1 = 1 \text{ кОм}, R_2 = 2 \text{ кОм}, R_3 = 3 \text{ кОм}.$$

При подключении к узлам A и B источника постоянного напряжения $E = 10 \text{ В}$ показание вольтметра составляет 4 В , а при подключении того же источника к узлам A и C показание равно 5 В (схема включения вольтметра неизменна).

Определите, какие значения могут принимать сопротивления R_x , R_y , R_z .

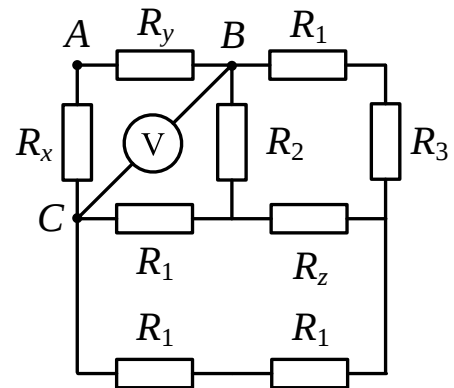


Рисунок к задаче 1

Решение.

1. Правая часть схемы относительно узлов B и C представляет собой уравновешенный мост (**8 б**):

$$R_1(R_1 + R_3) = R_2(R_1 + R_1).$$

Таким образом, R_z может быть любым.

2. Показание вольтметра при подключении источника к узлам A и B (**1 б**):

$$U_1 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_{BC} + R_x} \Rightarrow R_x = 3 \text{ кОм}.$$

3. Показание вольтметра при подключении источника к точкам A и C (**1 б**):

$$U_2 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_{BC} + R_y} \Rightarrow R_y = 2 \text{ кОм}.$$

Ответ: $R_x = 3 \text{ кОм}$, $R_y = 2 \text{ кОм}$, R_z может быть любым.

Задача 2 (10 баллов)

Электропоезд с неизменным током 250 А находится между двумя подстанциями (источниками питания). Напряжения на подстанциях 1450 В и 1550 В. Известно, что на расстоянии 2 км от первой подстанции электропоезд потребляет мощность 350 кВт.

Найти расстояние между подстанциями. На каком расстоянии от первой подстанции электропоезд потребляет минимальную мощность? Определить минимальную мощность электропоезда. При расчете используйте схему замещения для цепи постоянного тока.

Суммарное удельное сопротивление контактного провода и рельсов (суммарное удельное сопротивление прямого и обратного провода) составляет 0,2 Ом/км.

Решение. Так как электропоезд находится на расстоянии x от первой подстанции, то сопротивление контактного провода и рельсов для этого участка равно R_0x , сопротивление участка от электропоезда до второй подстанции равно $R_0(l-x)$, где R_0 – суммарное удельное сопротивление контактного провода и рельсов, l – расстояние между подстанциями. На рисунке 1 изображена расчетная схема задачи, по условию заданы напряжения на подстанциях E_1 , E_2 и ток электропоезда I . Напряжение электропоезда:

$$U(x) = \frac{\frac{E_1}{R_0x} - I + \frac{E_2}{R_0(l-x)}}{\frac{1}{R_0x} + \frac{1}{R_0(l-x)}}. \quad (3 \text{ б})$$

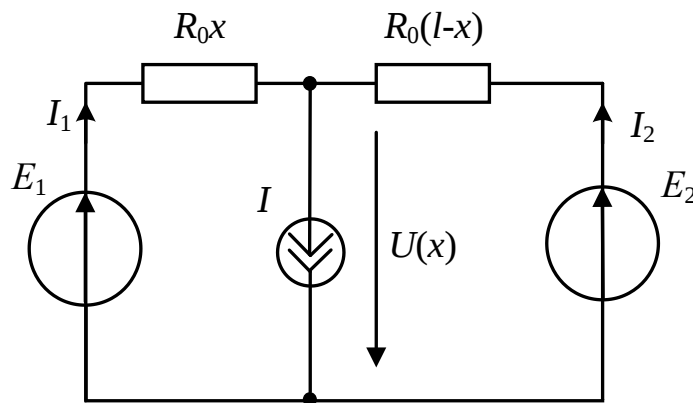


Схема к задаче 2

После подстановки
$$U(2) = \frac{\frac{1450}{0,4} - 250 + \frac{1550}{0,2(l-2)}}{\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,2(l-2)}}.$$
 Это напряжение

равно $U(x) = \frac{P(x)}{I}$, на расстоянии 2 км от первой подстанции

$$U(2) = \frac{P(2)}{I} = \frac{350000}{250} = 1400 \quad \text{В.} \quad \text{Тогда} \quad \frac{\frac{1450}{0,4} - 250 + \frac{1550}{0,2(l-2)}}{\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,2(l-2)}} = 1400,$$

расстояние между подстанциями $l = 8$ км. **(3 б)**

Для определения минимальной мощности электропоезда находим на каком расстоянии напряжение электропоезда будет минимальным. В таком случае $\frac{dU(x)}{dx} = 0$.

После подстановки получим:

$$U(x) = \frac{\frac{1450}{0,2x} - 250 + \frac{1550}{0,2(8-x)}}{\frac{1}{0,2x} + \frac{1}{0,2(8-x)}} = 6,25x^2 - 37,5x + 1450,$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 12,5x - 37,5 = 0. \quad \textbf{(2 б)}$$

Таким образом, минимальная мощность потребляется при $x = 3$ км. **(1 б)**
 Минимальное напряжение $U(3) = 1393,75$ В, минимальная мощность $P(3) = 348,44$ кВт. **(1 б)**

Ответ: расстояние между подстанциями 8 км, минимальная мощность электропоезда на расстоянии 3 км от первой подстанции равна 348,44 кВт.

Задача 3 (20 баллов)

Частота источника $J(t) = \sqrt{2} \sin \omega t$ (А) может меняться в широком диапазоне $(0 \dots \infty)$, при этом показание первого вольтметра (см. рисунок 2) не меняется и равно 10 В, а показание второго вольтметра меняется. На частоте $\omega = 1000$ рад/с показание второго вольтметра 6 В. Представленный на рис. 2 четырехполюсник содержит не более двух резистивных элементов и не более двух реактивных элементов. Параметры данных элементов отличны от нуля. Какие значения может принимать показание второго вольтметра, если частота увеличится в 2 раза?

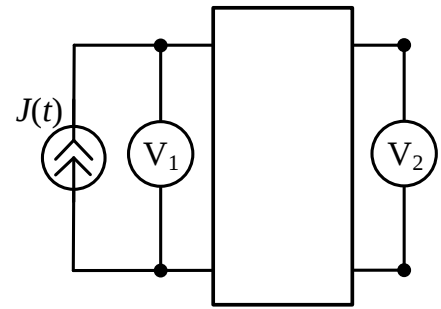


Рисунок
к задаче 3

Решение. Так как при изменении частоты показания первого вольтметра не меняется, четырехполюсник представляет собой схемную реализацию безразличного резонанса – равновесного моста из RL - и RC -ветвей, при условии $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (см. рисунок 2.1). (5 б)

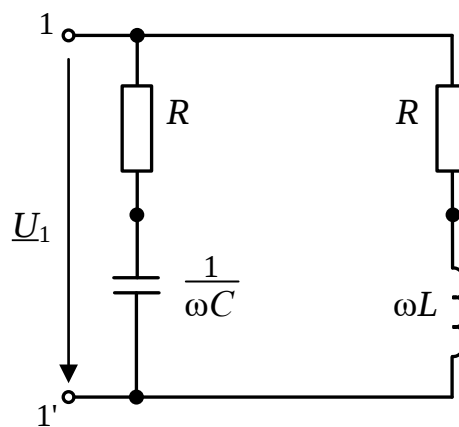


Рис. 2.1 к задаче 2

Для такой цепи входное сопротивление не зависит от частоты и равно R . Входное сопротивление равно отношению действующих значений входного напряжения и входного тока, и равно $R_{\text{вх}} = R = \frac{U_1}{J} = \frac{10}{1} = 10$ Ом. (1 б)

Так как показание второго вольтметра меняется, то вольтметр подключен к одному из элементов ветви или к узлам между элементами ветвей. Рассмотрим возможные варианты, при котором показание второго вольтметра на частоте $\omega = 1000$ рад/с равно 6 В. Например, второй вольтметр подключен к

емкостному элементу (рис. 2.2а). (далее по 3 б за каждый рассмотренный вариант, см. таблицу ниже)

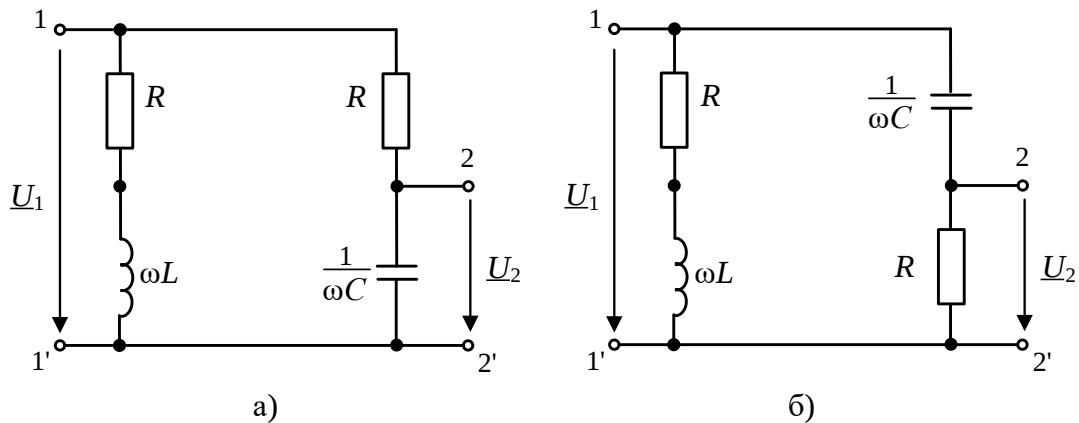


Рис. 2.2 к задаче 2

Действующее значение напряжения $U_2 = \frac{U_1 X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{10 X_C}{\sqrt{100 + X_C^2}} = 6 \text{ В},$

$$X_C = 7,5 \text{ Ом}, \quad C = \frac{1}{1000 \cdot 7,5} = 133,33 \text{ мкФ}.$$

По условию безразличного резонанса $L = R^2 C = 13,33 \text{ мГн}, \quad X_L = 13,33 \text{ Ом}.$

Сделаем проверку решения $Z_{\text{вх}} = \frac{(10 - j7,5)(10 + j13,33)}{10 - j7,5 + 10 + j13,33} = R_{\text{вх}} = 10 \text{ Ом}.$

Напряжение на втором вольтметре $\underline{U}_2 = \frac{U_1(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{10(-j7,5)}{10 - j7,5} = 6 \angle -53,13^\circ \text{ В}.$

Найденное решение удовлетворяет условию задачи. При увеличении частоты в два раза емкостное сопротивление $X'_C = 3,75 \text{ Ом},$ показание второго

вольтметра $U'_2 = \frac{10 \cdot 3,75}{\sqrt{100 + 3,75^2}} = 3,51 \text{ В}.$

Если второй вольтметр подключен к резистивному элементу RC ветви (рис. 2.2б), то на частоте $\omega = 1000 \text{ рад/с}$ показание вольтметра

$$U_2 = \frac{100}{\sqrt{100 + X_C^2}} = 6 \text{ В}. \quad \text{Тогда} \quad X_C = 13,33 \text{ Ом}, \quad C = \frac{1}{1000 \cdot 13,33} = 75 \text{ мкФ},$$

$$L = R^2 C = 7,5 \text{ мГн}, \quad X_L = 7,5 \text{ Ом}.$$

При увеличении частоты в два раза емкостное сопротивление $X'_C = 6,665 \text{ Ом},$

показание второго вольтметра $U'_2 = \frac{100}{\sqrt{100 + 6,665^2}} = 8,32 \text{ В}.$

Рассмотрим подключение второго вольтметра к индуктивному (рис. 2.3а) и резистивному элементу (рис. 2.3б) RL ветви. Проведенный расчет показал, что при $X_C = 7,5$ Ом и $X_L = 13,33$ Ом условию задачи удовлетворяет схема 2.3б, а при $X_C = 13,33$ Ом и $X_L = 7,5$ Ом – схема 2.3а. При увеличении частоты в два раза показания второго вольтметра будут 3,51 В и 8,32 В, соответственно.

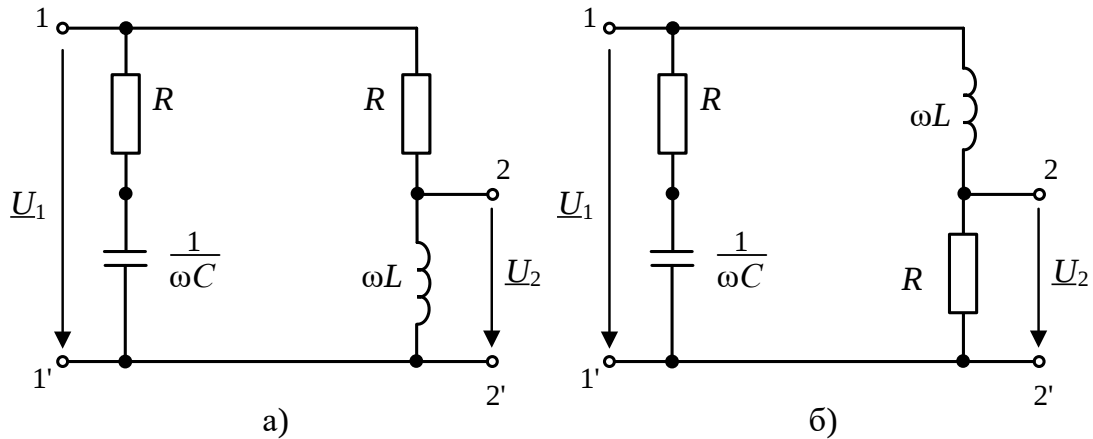


Рис. 2.3 к задаче 2

Рассмотрим вариант, когда второй вольтметр подключен к узлам между элементами ветвей (рис. 2.4) (2 б)

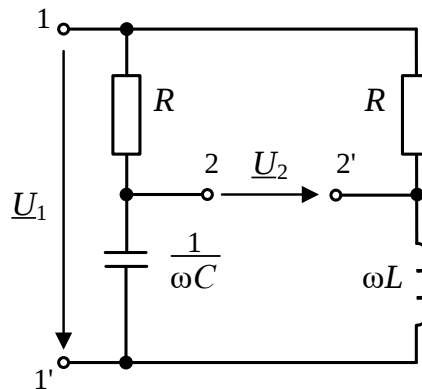


Рис. 2.4 к задаче 2

Показание второго вольтметра на частоте $\omega = 1000$ рад/с

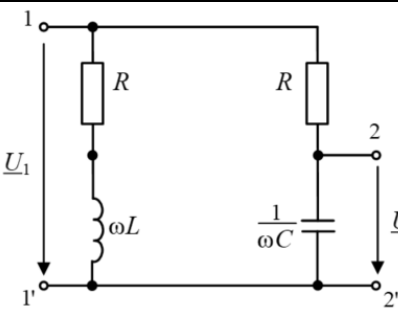
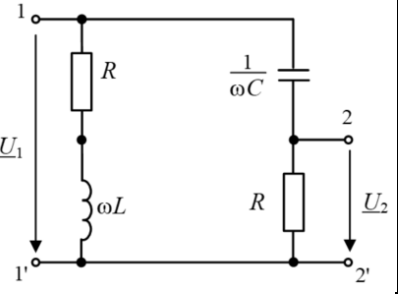
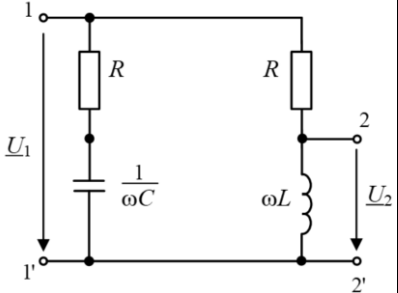
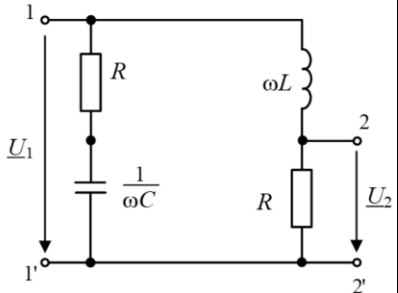
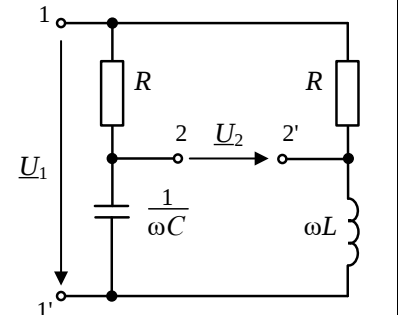
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1(-jX_C)}{R - jX_C} - \frac{\underline{U}_1(jX_L)}{R + jX_L} = \underline{U}_1 \left(\frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right), \quad \text{для действующих значений}$$

$$U_2 = U_1 \left(\frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right) = U_1. \quad \text{При } U_1 = 10 \text{ В и } U_2 = 6 \text{ В определить значения } C,$$

удовлетворяющие условию невозможно.

Ответ. 3,51 В или 8,32 В.

Примечание. В таблице сведены результаты рассмотрения различных способов подключения вольтметра и соответствующие им значения сопротивлений элементов.

Вариант подключения вольтметра V2	Результаты расчета сопротивлений для $\omega = 1000$ рад/с	Показание вольтметра V2
	$X_C = 7,5 \text{ Ом},$ $R = 10 \text{ Ом}, X_L = 13,33 \text{ Ом}$	$U'_2 = 3,51 \text{ В}$
	$X_C = 13,33 \text{ Ом},$ $R = 10 \text{ Ом}, X_L = 7,5 \text{ Ом}$	$U'_2 = 8,32 \text{ В}$
	$X_C = 13,33 \text{ Ом},$ $R = 10 \text{ Ом}, X_L = 7,5 \text{ Ом}$	$U'_2 = 8,32 \text{ В}$
	$X_C = 7,5 \text{ Ом},$ $R = 10 \text{ Ом}, X_L = 13,33 \text{ Ом}$	$U'_2 = 3,51 \text{ В}$
	$U_2 = U_1,$ подобрать параметры элементов, удовлетворяющие условию, невозможно	

Задача 4 (на выбор*)

Вариант 1 (10 баллов)

В цепи действует несинусоидальный источник $e(t) = 50 + 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 50\sqrt{2} \sin(3\omega t - 60^\circ)$ В.

Известно, что $R_1 = R_2 / 4$, $\frac{1}{\omega C} = 4\omega L = 400$ Ом.

Определите показание ваттметра, если реактивные мощности первой и третьей гармоники цепи равны нулю: $Q^{(1)} = 0$, $Q^{(3)} = 0$.

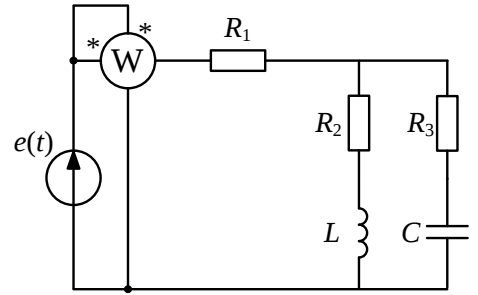


Рисунок
к варианту 1 задачи 4

1. Равенство нулю реактивных мощностей на 1-й и 3-й гармонике определяет наличие резонанса на их частотах. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left[\underline{Z}_{\text{BX}}^{(1)}\right] &= \operatorname{Im}\left[R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)\left(R_3 - j\frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 + R_3 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\right] = 0, \\ \operatorname{Im}\left[\underline{Z}_{\text{BX}}^{(3)}\right] &= \operatorname{Im}\left[R_1 + \frac{(R_2 + j3\omega L)\left(R_3 - j\frac{1}{3\omega C}\right)}{R_2 + R_3 + j\left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)}\right] = 0. \end{aligned} \quad (3 \text{ б})$$

После преобразований получим:

$$-\frac{1}{\omega C} R_2^2 + \omega L R_3^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \frac{L}{C} = 0 \rightarrow -400 R_2^2 + 100 R_3^2 + 300 \cdot 4 \cdot 10^4 = 0, \quad (1,5 \text{ б})$$

$$-\frac{1}{3\omega C} R_2^2 + 3\omega L R_3^2 + \left(\frac{1}{3\omega C} - 3\omega L\right) \frac{L}{C} = 0 \rightarrow -\frac{400}{3} R_2^2 + 300 R_3^2 - \frac{500}{3} \cdot 4 \cdot 10^4 = 0. \quad (1,5 \text{ б})$$

Из системы уравнений получим $R_2 = R_3 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 200$ Ом. В цепи наблюдается

безразличный резонанс. Активное сопротивление $R_1 = R_2 / 4 = 50$ Ом. (1 б)

2. Для нулевой гармоники:

$$P_{(0)} = \frac{E_0^2}{R_1 + R_2} = \frac{50^2}{50 + 200} = 10 \text{ Вт}. \quad (1 \text{ б})$$

3. Для 1-й и 3-й гармоник:

$$\underline{Z}_{(1)} = \underline{Z}_3 = R_1 + \frac{(R_2 + jX_{L(1)})(R_3 - jX_{C(1)})}{R_2 + jX_{L(1)} + R_3 - jX_{C(1)}} = 50 + \frac{(200 + j100)(200 - j400)}{200 + j100 + 200 - j400} = 250 \text{ Ом}. \quad (1 \text{ б})$$

$$P_{(1)} = \frac{E_{(1)}^2}{R_{(1)}} = \frac{100^2}{250} = 40 \text{ Вт}, \quad P_{(3)} = \frac{E_{(3)}^2}{R_{(3)}} = \frac{50^2}{250} = 10 \text{ Вт}, \quad P = P_0 + P_{(1)} + P_{(3)} = 10 + 40 + 10 = 60 \text{ Вт}.$$

(1 б)

Ответ: 60 Вт.

Задача 4 (на выбор*)

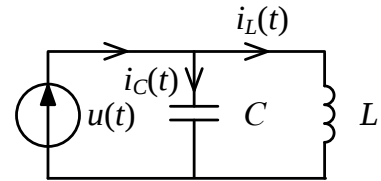
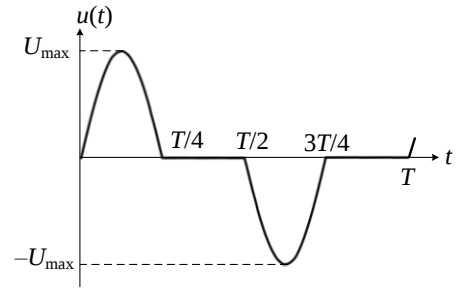
Вариант 2 (20 баллов)

Для электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, известны параметры элементов L , C . Мгновенное значение напряжения источника:

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 0 & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ -U_{\max} \sin \omega t & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}$$

причем $U_{\max}$ и $\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ известны, $T = 2T'$.

Определите мгновенные значения токов $i(t)$, $i_C(t)$ и $i_L(t)$ (для $0 < t < T$), если $i_L(0) = 0$. Постройте графики данных токов.



**Рисунки
к варианту 2 задачи 4**

Решение основано на применении компонентных уравнений.

Ток конденсатора определяется соотношением:

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = \begin{cases} \omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 0 & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ -\omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases} \quad (5 \text{ б})$$

Ток индуктивного элемента определяется аналогичным образом с учетом начального условия.

При $t < T/4$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \int U_{\max} \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega L} U_{\max} \cos \omega t + A. \quad (1 \text{ б})$$

С учетом $i_L(0) = 0$ получим:

$$i_L(t) = -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L}. \quad (2 \text{ б})$$

При $T/4 < t < T/2$ напряжение индуктивного элемента равно нулю, а его ток неизменен:

$$i_L(t) = \text{const} = i_L(T/4) = -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \left(\frac{2\pi}{T'} \cdot \frac{2T'}{4} \right) + \frac{U_{\max}}{\omega L} = \frac{2U_{\max}}{\omega L}. \quad (1,5 \text{ б})$$

При $T/2 < t < 3T/4$ ток индуктивного элемента определяется выражением:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \int -U_{\max} \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega L} U_{\max} \cos \omega t + B. \quad (1 \text{ б})$$

При $i_L(T/2) = \frac{2U_{\max}}{\omega L}$ получим:

$$i_L(t) = \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} \text{ при } T/2 < t < 3T/4. \quad (2 \text{ б})$$

Наконец, при $3T/4 < t < T$ напряжение на катушке равно нулю, а ее ток

$$i_L(t) = \text{const} = i_L(3T/4) = \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \left(\frac{2\pi}{T'} \cdot \frac{3 \cdot 2T'}{4} \right) + \frac{U_{\max}}{\omega L} = 0. \quad (1,5 \text{ б})$$

Таким образом, токи индуктивного элемента определяется выражением:

$$i_L(t) = \begin{cases} -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 0 < t < T/4 \\ \frac{2U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

Ток источника определяется по первому закону Кирхгофа с учетом того, что $\omega C U_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L}$:

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = \begin{cases} \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}. \quad (1 \text{ б})$$

Графики мгновенных значений искомых токов представлены на рис. 4. (5 б)

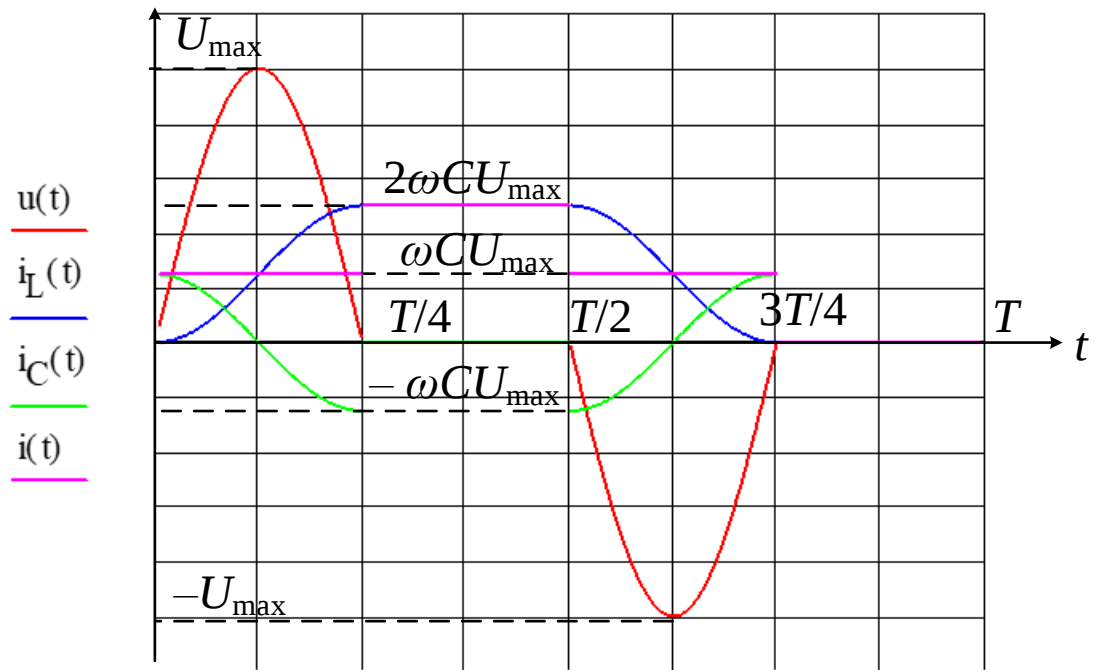


Рисунок 4. Графики мгновенных значений токов и напряжения

Ответ: графики мгновенных значений – см. рис. 4,

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = \begin{cases} \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = \begin{cases} \omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 0 & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ -\omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

$$i_L(t) = \begin{cases} -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 0 < t < T/4 \\ \frac{2U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

Задача 5 (20 баллов)

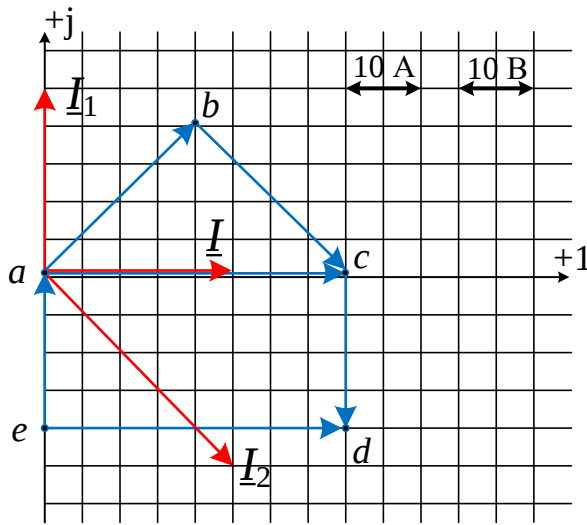


Рисунок к задаче 6

На рисунке приведена векторно-топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов для некоторой электрической цепи в установившемся режиме до коммутации. В цепи действует источник тока с частотой $\omega = 1000$ рад/с.

1. Изобразите схему этой электрической цепи и определите параметры ее элементов. **(12 баллов)**

2. Определите переходный ток $i_0(t)$ в ветви с ключом, который замыкает накоротко узлы a и b . **(8 баллов)**

Примечание. На векторной диаграмме изображены комплексные действующие значения напряжений на одном активном элементе (источнике тока) и пассивных элементах, имеющих сопротивление резистивного, индуктивного и емкостного характера.

Решение. На основании анализа векторной диаграммы определяется схема электрической цепи, которая ей соответствует. **(10 б)**

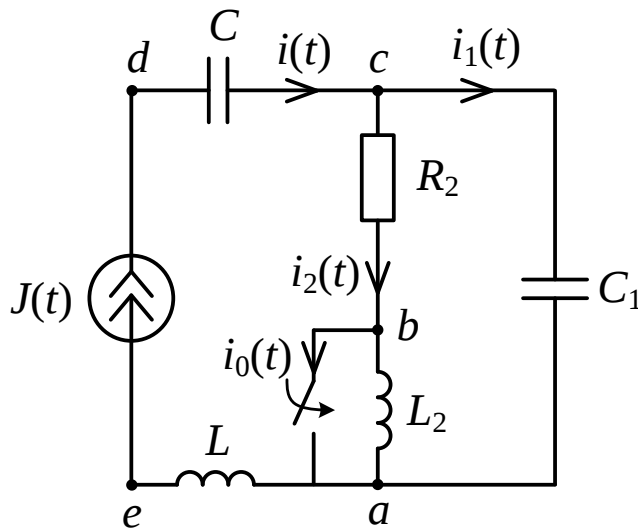


Рис. 5. Искомая схема электрической цепи

Сопротивления элементов и их характер на частоте $\omega = 1000$ рад/с определяются с помощью векторной диаграммы:

$$X_{L2} = \frac{U_{ba}}{I_2} = \frac{20\sqrt{2}}{25\sqrt{2}} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$R_2 = \frac{U_{cb}}{I_2} = \frac{20\sqrt{2}}{25\sqrt{2}} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$X_{C1} = \frac{U_{ca}}{I_1} = \frac{40}{25} = 1,6 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{U_{dc}}{I} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$X_L = \frac{U_{ae}}{I} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ Ом}.$$

Параметры реактивных элементов:

$$L_2 = L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{0,8}{1000} = 0,8 \text{ мГн},$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{1000 \cdot 0,8} = 1,25 \text{ мФ},$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega X_{C1}} = \frac{1}{1000 \cdot 1,8} = 0,625 \text{ мФ. (2 б)}$$

Независимые начальные условия для расчета переходного процесса:

$$i_{L2}(0_+) = i_{L2}(0_-) = i_2(0_-) = 25\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(-45^\circ) = -35,4 \text{ А},$$

$$u_{C1}(0_+) = u_{ca}(0_-) = i_2(0_-) = 40\sqrt{2} \cdot \sin(0) = 0 \text{ В}.$$

Переходный процесс в цепи описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Это обусловлено тем, что конденсатор C_1 и индуктивный элемент L_1 соединены последовательно с источником тока, а катушка L_2 закорачивается.

Переходный ток в ветви с ключом будет определяться выражением:

$$i_0(t) = i_{уст}(t) + i_{перх}(t) = -i_{L2}(0_+) + i_{Rуст}(t) + Ae^{pt}, \text{ (5 б)}$$

причем $i_{L2}(0_+)$ определяет незатухающую свободную составляющую тока индуктивного элемента.

Установившаяся составляющая тока резистивного элемента после замыкания ключа:

$$\underline{I}_{Rмуст} = \underline{I}_m \cdot \frac{-jX_{C1}}{R - jX_{C1}} = 25\sqrt{2} \angle 0^\circ \cdot \frac{-j1,6}{0,8 - j1,6} = 31,6 \angle -26,6^\circ \text{ А} \rightarrow$$

$$\rightarrow i_{R_{\text{уст}}}(t) = 31,6 \sin(1000t - 26,6^\circ) \text{ А} \quad (0,5 \text{ б})$$

Зависимое начальное условие для искомого тока определяется в соответствии с выражением:

$$\begin{aligned} i_0(0_+) = i_R(0_+) - i_{L2}(0_+) &= \frac{u_R(0_+)}{R} - i_{L2}(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R} - i_{L2}(0_+) = \\ &= 0 - (-35,4) = 35,4 \text{ А.} \end{aligned} \quad (1 \text{ б})$$

Корень характеристического уравнения:

$$p = -\frac{1}{RC_1} = -\frac{1}{0,8 \cdot 0,625 \cdot 10^{-3}} = -2000 \text{ с}^{-1}. \quad (0,5 \text{ б})$$

Постоянная интегрирования A :

$$i_0(0_+) = -i_{L2}(0_+) + i_{R_{\text{уст}}}(0_+) + A,$$

$$A = i_0(0_+) + i_{L2}(0_+) - i_{R_{\text{уст}}}(0_+) = 35,4 + (-35,4) - 31,6 \cdot \sin(-26,6^\circ) = 14,1 \text{ А.} \quad (1 \text{ б})$$

Таким образом, искомый переходный ток будет определяться выражением:

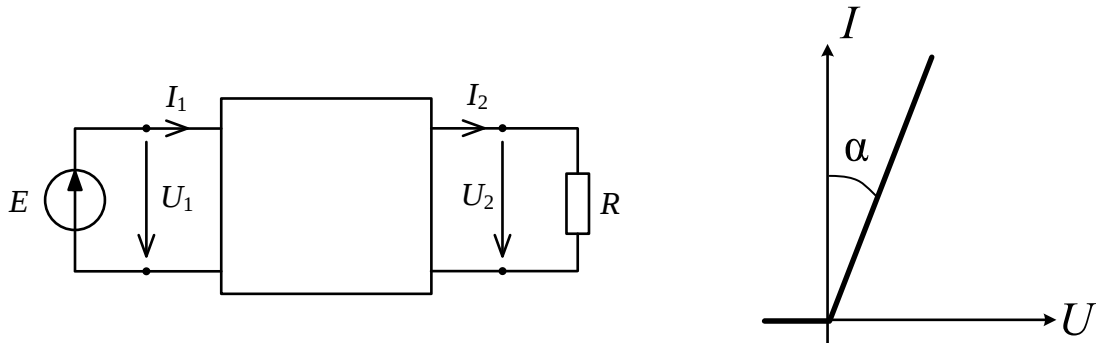
$$i_0(t) = 35,4 + 31,6 \sin(1000t - 26,6^\circ) + 14,1 e^{-2000t} \text{ А.}$$

Ответ: см. рис. 5, $L_2 = L = 0,8 \text{ мГн}$, $C = 1,25 \text{ мФ}$, $C_1 = 0,625 \text{ мФ}$, $R_2 = 0,8 \text{ Ом}$, $i_0(t) = 35,4 + 31,6 \sin(1000t - 26,6^\circ) + 14,1 e^{-2000t} \text{ А.}$

Задача 6 (на выбор)

Вариант 1 (10 баллов)

К пассивному резистивному четырехполюснику подключаются источник постоянного напряжения и пассивный элемент, ампер-вольтовая характеристика которого задана.



Рисунки к варианту 1 задачи 6

Для представленной цепи известно следующее.

1. При $U_1 = 10$ В и подключении резистора ко вторичным выводам четырехполюсника напряжение на них составляет $U_2 = 5$ В.
2. При обратном питании $U_2 = 10$ В и $U_1 = 5$ В, $I_1' = -I_1 = 1$ А.
3. Задан параметр четырехполюсника $A_{12} = 3$ Ом.

Определите $\operatorname{tg} \alpha$ (в В/А), для которого при прямом питании и $U_1 = 10$ В в резисторе выделяется максимальная мощность, и рассчитайте ее.

Решение.

Из условия 2 определяется сопротивление резистора:

$$R_{\text{н}} = \operatorname{tg} \alpha = U_1 / I_1' = 5 / 1 = 5 \text{ Ом.}$$

Тогда с учетом условия 3 могут быть определены параметры четырехполюсника. При прямом питании:

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \rightarrow U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}U_2 / R_{\text{н}},$$

$$A_{11} = \frac{U_1 - A_{12}U_2 / R_{\text{н}}}{U_2} = \frac{10 - 3 \cdot 5 / 5}{5} = 1,4.$$

Из условий 1 и 2 следует, что четырехполюсник является симметричным. Следовательно, $A_{22} = A_{11} = 1,4$.

Параметры четырехполюсника связаны соотношением:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

$$\text{Отсюда } A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} = \frac{1,4^2 - 1}{3} = 0,32 \text{ См.}$$

Рассчитанным параметрам четырехполюсника соответствует его Т-образная схема (рис. 6.1).

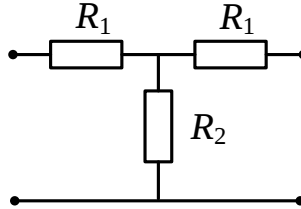


Рис. 6.1

Уравнения четырехполюсника могут быть записаны через сопротивления элементов его Т-образной схемы:

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \\ I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}U_2 + \left(\frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2} - R_2 \right) I_2 \\ I_1 = \frac{1}{R_2}U_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_2}I_2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$R_2 = \frac{1}{A_{21}} = \frac{1}{0,32} = 3,125 \text{ Ом,}$$

$$R_1 = R_2(A_{11} - 1) = 3,125(1,4 - 1) = 1,25 \text{ Ом.}$$

Максимальная мощность резистора, подключенного ко вторичным выводам четырехполюсника, достигается при равенстве его сопротивления внутреннему сопротивлению эквивалентного генератора (рис. 6.2).

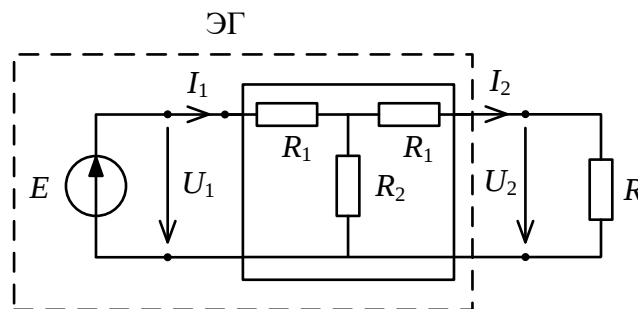


Рис. 6.2

$$R = R_{\max} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_1 = \frac{3,125 \cdot 1,25}{3,125 + 1,25} + 3,125 \approx 4,02 \text{ Ом} \approx 4 \text{ Ом.}$$

Значение данного сопротивления определяет тангенс угла наклона вольт-амперной характеристики элемента:

$$R_{\max} = \operatorname{tg} \alpha = 4 \text{ В/А}.$$

При $R = R_{\max}$ напряжение на вторичных выводах:

$$U_2 = \frac{U_1}{A_{11} + A_{12} / R_{\max}} = \frac{10}{1,4 + 3 / 4} \approx 4,65 \text{ В}.$$

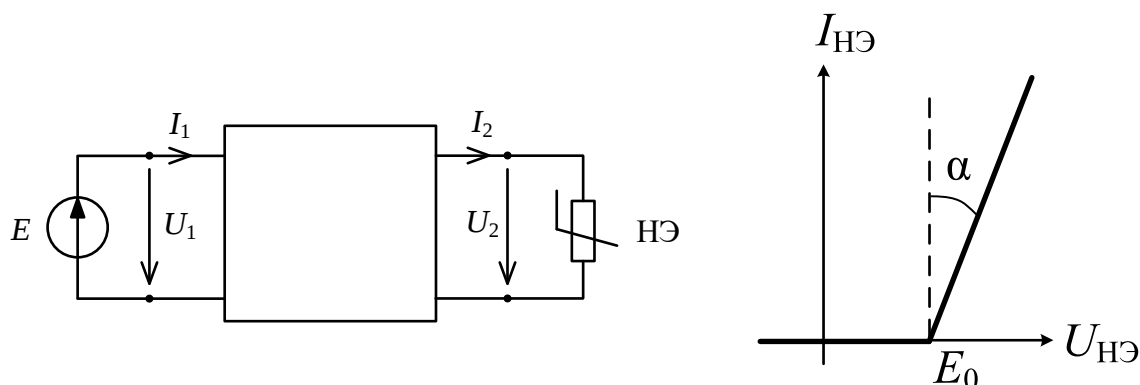
Максимальная мощность резистора составляет:

$$P_{\max} = \frac{U_2^2}{R_{\max}} = \frac{4,65^2}{4} = 21,6 \text{ Вт}.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = 4 \text{ В/А}$, $P_{\max} = 0,14 \text{ Вт}$.

Вариант 2 (20 баллов)

К пассивному резистивному четырехполюснику подключаются источник постоянного напряжения и нелинейный элемент (НЭ). Ампер-вольтовая характеристика НЭ представлена графически.



Рисунки к варианту 2 задачи 6

Для представленной цепи известно следующее.

1. При $U_1 = 10 \text{ В}$ и подключении НЭ ко вторичным выводам четырехполюсника напряжение на них составляет $U_2 = 5 \text{ В}$. При этом ток НЭ равен нулю.
2. При обратном питании $U_2 = 10 \text{ В}$ и $U_1 = 5 \text{ В}$. Ток НЭ при этом остается равным нулю.
3. Задан параметр четырехполюсника $A_{12} = 3 \text{ Ом}$.
4. При подключении источника к первичным выводам и $U_1 > 20 \text{ В}$ напряжение и ток на вторичных выводах связаны соотношением $U_2 = aI_2 + b$, где a и b – некоторые постоянные коэффициенты, причем $a = 1 \text{ Ом}$. При $U_1 < 20 \text{ В}$ данное соотношение не выполняется.

Определите ток НЭ при его подключении ко вторичным выводам, если $U_1 = 50 \text{ В}$, а $\text{tg} \alpha$ увеличился в 3,5 раза.

Решение.

Из условий 1 и 2 следует, что четырехполюсник является симметричным. **(3 б)**

При прямом питании ток НЭ равен нулю, четырехполюсник работает в режиме холостого хода. Тогда $A_{11} = A_{22} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{10}{5} = 2$. **(1 б)**

Параметры четырехполюсника связаны соотношением:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

$$\text{Отсюда } A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} = \frac{2^2 - 1}{3} = 1 \text{ См. (1 б)}$$

Рассчитанным параметрам четырехполюсника соответствует его Т-образная схема (рис. 6. 2).

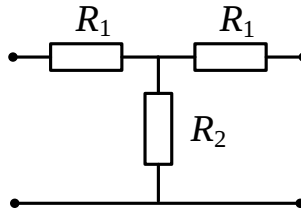


Рис. 6.2

Уравнения четырехполюсника могут быть записаны через сопротивления элементов его Т-образной схемы:

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \\ I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}U_2 + \left(\frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2} - R_2 \right) I_2 \\ I_1 = \frac{1}{R_2}U_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} I_2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$R_2 = \frac{1}{A_{21}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ Ом},$$

$$R_1 = R_2 (A_{11} - 1) = 1 \cdot (2 - 1) = 1 \text{ Ом},$$

$$R_1 = R_2 = R = 1 \text{ Ом}.$$

Условие 4 определяет вид ампер-вольтной характеристики НЭ. В таком случае $a \equiv \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ Ом}$. **(2,5 б)**

При $U_1 = 20 \text{ В}$ ток НЭ равен нулю, напряжение на нем будет составлять $U_2 = E_0 = U_1 / A_{11} = 20 / 2 = 10 \text{ В}$. **(2,5 б)**

Таким образом, ампер-вольтная характеристика НЭ имеет вид:

$$I_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } U_2 < E_0 \\ \frac{U_2}{a} - \frac{E_0}{a} & \text{при } U_2 > E_0 \end{cases} \rightarrow I_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } U_2 < E_0 \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} (U_2 - E_0) & \text{при } U_2 > E_0 \end{cases}. \quad \textbf{(5 б)}$$

На рис. 6.2 представлена схема для расчета I_2 при подключении НЭ ко вторичным выводам и $U_1 = 50 \text{ В} > 20 \text{ В}$. В данной схеме $R' = 3,5 \text{ Ом}$.

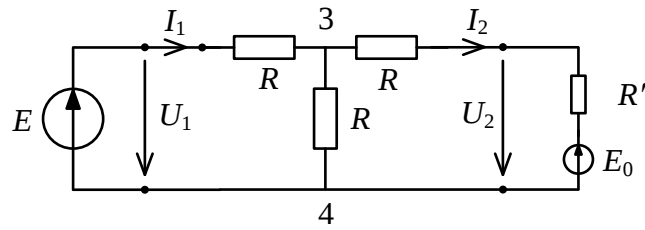


Рис. 6.3

Ток I_2 удобно рассчитать методом узловых потенциалов:

$$U_{34} = \frac{\frac{U_1}{\frac{R}{2}} + \frac{E_0}{R+R'}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R'}} = \frac{\frac{50}{2} + \frac{10}{1+3,5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+3,5}} = 23,5\text{В},$$

$$I_2 = \frac{U_{34} - E_0}{R + R'} = \frac{23,5 - 10}{1 + 3,5} = 3\text{А}. \quad (5 \text{ б})$$

Ответ: $I_2 = 3\text{А}$.