

МЕЖДУНАРОДНАЯ МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТОЭ

2025

Группа I

Задача 1 (10 баллов)

Для электрической цепи, представленной на рисунке, известны сопротивления резисторов:

$$R_1 = 1 \text{ кОм}, R_2 = 2 \text{ кОм}, R_3 = 3 \text{ кОм}.$$

При подключении к узлам A и B источника постоянного напряжения $E = 10 \text{ В}$ показание вольтметра составляет 4 В , а при подключении того же источника к узлам A и C показание равно 5 В (схема включения вольтметра неизменна).

Определите, какие значения могут принимать сопротивления R_x , R_y , R_z .

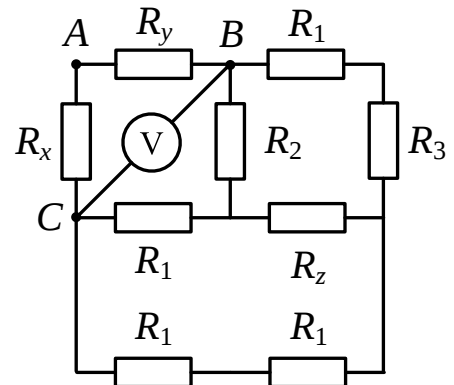


Рисунок к задаче 1

Решение.

- Правая часть схемы относительно узлов B и C представляет собой уравновешенный мост (**8 б**):

$$R_1(R_1 + R_3) = R_2(R_1 + R_1).$$

Таким образом, R_z может быть любым.

- Показание вольтметра при подключении источника к узлам A и B (**1 б**):

$$U_1 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_{BC} + R_x} \Rightarrow R_x = 3 \text{ кОм}.$$

- Показание вольтметра при подключении источника к точкам A и C (**1 б**):

$$U_2 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_{BC} + R_y} \Rightarrow R_y = 2 \text{ кОм}.$$

Ответ: $R_x = 3 \text{ кОм}$, $R_y = 2 \text{ кОм}$, R_z может быть любым.

Задача 2 (10 баллов)

Электропоезд с неизменным током 250 А находится между двумя подстанциями (источниками питания). Напряжения на подстанциях 1450 В и 1550 В. Известно, что на расстоянии 2 км от первой подстанции электропоезд потребляет мощность 350 кВт.

Найти расстояние между подстанциями. На каком расстоянии от первой подстанции электропоезд потребляет минимальную мощность? Определить минимальную мощность электропоезда. При расчете используйте схему замещения для цепи постоянного тока.

Суммарное удельное сопротивление контактного провода и рельсов (суммарное удельное сопротивление прямого и обратного провода) составляет 0,2 Ом/км.

Решение. Так как электропоезд находится на расстоянии x от первой подстанции, то сопротивление контактного провода и рельсов для этого участка равно R_0x , сопротивление участка от электропоезда до второй подстанции равно $R_0(l-x)$, где R_0 – суммарное удельное сопротивление контактного провода и рельсов, l – расстояние между подстанциями. На рисунке 1 изображена расчетная схема задачи, по условию заданы напряжения на подстанциях E_1 , E_2 и ток электропоезда I . Напряжение электропоезда:

$$U(x) = \frac{\frac{E_1}{R_0x} - I + \frac{E_2}{R_0(l-x)}}{\frac{1}{R_0x} + \frac{1}{R_0(l-x)}}. \quad (3 \text{ б})$$

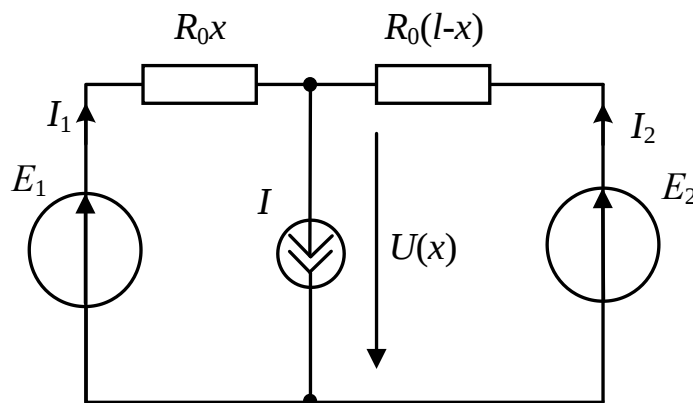


Схема к задаче 2

После подстановки
$$U(2) = \frac{\frac{1450}{0,4} - 250 + \frac{1550}{0,2(l-2)}}{\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,2(l-2)}}.$$
 Это напряжение

равно $U(x) = \frac{P(x)}{I}$, на расстоянии 2 км от первой подстанции

$$U(2) = \frac{P(2)}{I} = \frac{350000}{250} = 1400 \quad \text{В.} \quad \text{Тогда} \quad \frac{\frac{1450}{0,4} - 250 + \frac{1550}{0,2(l-2)}}{\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,2(l-2)}} = 1400,$$

расстояние между подстанциями $l = 8$ км. **(3 б)**

Для определения минимальной мощности электропоезда находим на каком расстоянии напряжение электропоезда будет минимальным. В таком случае $\frac{dU(x)}{dx} = 0$.

После подстановки получим:

$$U(x) = \frac{\frac{1450}{0,2x} - 250 + \frac{1550}{0,2(8-x)}}{\frac{1}{0,2x} + \frac{1}{0,2(8-x)}} = 6,25x^2 - 37,5x + 1450,$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 12,5x - 37,5 = 0. \quad \textbf{(2 б)}$$

Таким образом, минимальная мощность потребляется при $x = 3$ км. **(1 б)**
 Минимальное напряжение $U(3) = 1393,75$ В, минимальная мощность $P(3) = 348,44$ кВт. **(1 б)**

Ответ: расстояние между подстанциями 8 км, минимальная мощность электропоезда на расстоянии 3 км от первой подстанции равна 348,44 кВт.

Задача 3 (10 баллов)

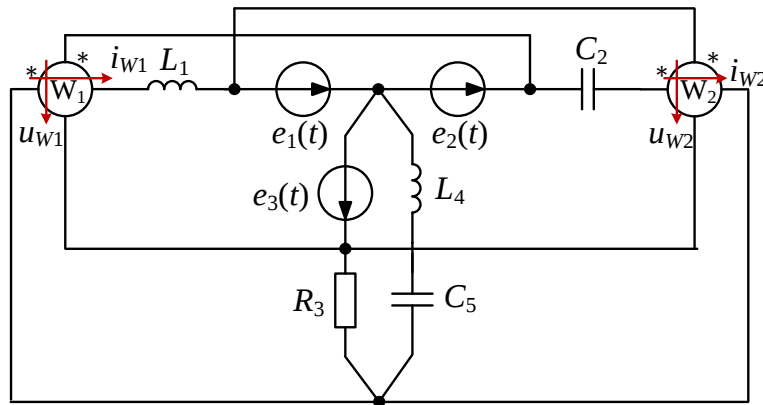


Рисунок к задаче 3

Определить разность показаний идеальных ваттметров, если известны параметры элементов:

$$e_1(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t - 30^\circ) \text{ В},$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ) \text{ В},$$

$$e_3(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t + 270^\circ) \text{ В},$$

$$L_1 = 1 \text{ Гн},$$

$$C_2 = 10^{-4} \text{ Ф},$$

$$R_3 = 100 \text{ Ом},$$

$$L_4 = 0,01 \text{ Гн},$$

$$C_5 = 0,01 \text{ Ф}.$$

Решение. В ветви с элементами L_4 и C_5 наблюдается резонанс напряжений (3 б).

Комплекс тока ветви с источником $\underline{E}_1 = 10 \angle -30^\circ \text{ В}$ равен:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{jX_{L1}} = \frac{100 \angle -30^\circ}{j100} = 1 \angle -120^\circ \text{ А}. \quad (1 \text{ б})$$

Комплекс тока ветви с источником $\underline{E}_2 = 10 \angle 30^\circ \text{ В}$:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{-jX_{C2}} = \frac{100 \angle 30^\circ}{-j100} = 1 \angle 120^\circ \text{ А}. \quad (1 \text{ б})$$

Комплексное напряжение первого ваттметра:

$$\underline{U}_{W1} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 = 100 \angle 30^\circ - 100 \angle 270^\circ = 173,2 \angle 60^\circ \text{ В}. \quad (1 \text{ б})$$

Комплексное напряжение второго ваттметра:

$$\underline{U}_{W2} = -(\underline{E}_3 + \underline{E}_1) = -(100 \angle 270^\circ + 100 \angle -30^\circ) = 173,2 \angle 120^\circ \text{ В}. \quad (1 \text{ б})$$

Показание первого ваттметра:

$$P_{W1} = \text{Re}[173,2 \angle 60^\circ \cdot 1 \angle 120^\circ] = -173,2 \text{ Вт} \quad (1 \text{ б})$$

Показание второго ваттметра:

$$P_{W2} = \text{Re}[173,2 \angle 120^\circ \cdot 1 \angle -120^\circ] = 173,2 \text{ Вт} \quad (1 \text{ б})$$

Разность показаний ваттметров равна $\pm 346,4 \text{ Вт}$. (1 б)

Ответ: сумма показаний ваттметров равна $\pm 346,4 \text{ Вт}$.

Решение (авторский вариант). Если развернуть направление ЭДС E_1 , то схема представляет собой трехфазную симметричную систему с нейтральным проводом (рис. 3.1).

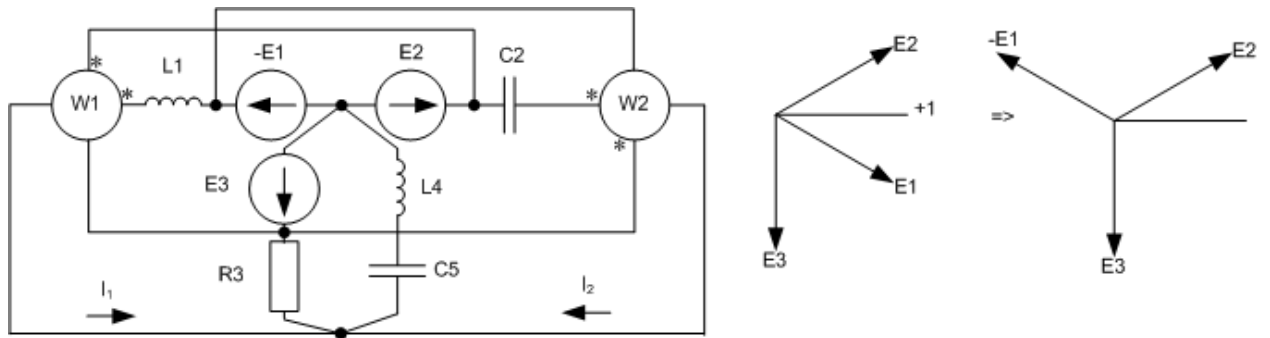


Рис. 3.1

В ветви нейтрального провода наблюдается резонанс напряжений на частоте источников ЭДС ($jX_{L4} + (-jX_{C5}) = 0$), поэтому токи в ветвях, содержащих ЭДС E_1 , E_2 и E_3 , обусловлены только действием данных ЭДС и сопротивлением ветви, которые на частоте источников равны по модулю $R3 = X_{L1} = X_{C2} = 100 \text{ Ом}$. Так модули ЭДС равны и сопротивления равны по модулю, то и вектора токов равны по модулю. Вектор тока I_1 отстает от вектора $-E_1$ на 90° , а вектор тока I_2 опережает вектора E_2 на 90° .

Построим векторную диаграмму измеряемых ваттметрами величин (рис. 4.2). $W1$ измеряет ток I_1 и разность потенциалов $U_{w1} = E_2 - E_3$, а $W2$ измеряет ток I_2 разность потенциалов равную $U_{w2} = E_3 - (-E_1) = E_3 + E_1$. Можно заметить, что измеряемые токи лежат попарно на одной прямой с разностями потенциалов, а следовательно измеряемые значения ваттметров будут равны $W1 = U_{w1} \cdot I_1 \cdot \cos 0^\circ$, а $W2 = U_{w2} \cdot I_2 \cdot \cos 180^\circ$. Учитывая равенство модулей токов и напряжений, получаем, что $W1 = -W2$. Тогда сумма показаний ваттметров $W1 - W1 = 0$.

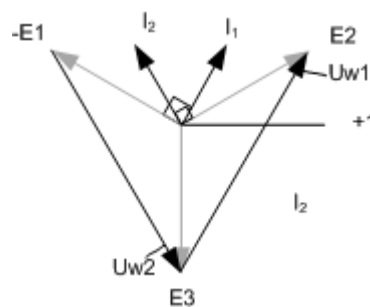


Рис. 3.2

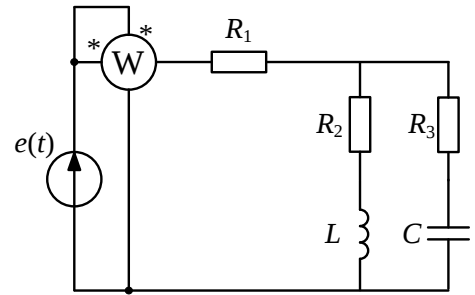
Задача 4 (на выбор*)

Вариант 1 (10 баллов)

В цепи действует несинусоидальный источник
 $e(t) = 50 + 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 50\sqrt{2} \sin(3\omega t - 60^\circ)$ В.

Известно, что $R_1 = R_2 / 4$, $\frac{1}{\omega C} = 4\omega L = 400$ Ом.

Определите показание ваттметра, если реактивные мощности первой и третьей гармоники цепи равны нулю: $Q^{(1)} = 0$, $Q^{(3)} = 0$.



**Рисунок
к варианту 1 задачи 4**

1. Равенство нулю реактивных мощностей на 1-й и 3-й гармонике определяет наличие резонанса на их частотах. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left[\underline{Z}_{\text{BX}}^{(1)}\right] &= \operatorname{Im}\left[R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)\left(R_3 - j\frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 + R_3 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\right] = 0, \\ \operatorname{Im}\left[\underline{Z}_{\text{BX}}^{(3)}\right] &= \operatorname{Im}\left[R_1 + \frac{(R_2 + j3\omega L)\left(R_3 - j\frac{1}{3\omega C}\right)}{R_2 + R_3 + j\left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)}\right] = 0. \end{aligned} \quad (3 \text{ б})$$

После преобразований получим:

$$-\frac{1}{\omega C} R_2^2 + \omega L R_3^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \frac{L}{C} = 0 \rightarrow -400 R_2^2 + 100 R_3^2 + 300 \cdot 4 \cdot 10^4 = 0, \quad (1,5 \text{ б})$$

$$-\frac{1}{3\omega C} R_2^2 + 3\omega L R_3^2 + \left(\frac{1}{3\omega C} - 3\omega L\right) \frac{L}{C} = 0 \rightarrow -\frac{400}{3} R_2^2 + 300 R_3^2 - \frac{500}{3} \cdot 4 \cdot 10^4 = 0. \quad (1,5 \text{ б})$$

Из системы уравнений получим $R_2 = R_3 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 200$ Ом. В цепи наблюдается безразличный резонанс. Активное сопротивление $R_1 = R_2 / 4 = 50$ Ом. (1 б)

2. Для нулевой гармоники:

$$P_{(0)} = \frac{E_0^2}{R_1 + R_3} = \frac{50^2}{50 + 200} = 10 \text{ Вт}. \quad (1 \text{ б})$$

3. Для 1-й и 3-й гармоник:

$$\underline{Z}_{(1)} = \underline{Z}_3 = R_1 + \frac{(R_2 + jX_{L(1)})(R_3 - jX_{C(1)})}{R_2 + jX_{L(1)} + R_3 - jX_{C(1)}} = 50 + \frac{(200 + j100)(200 - j400)}{200 + j100 + 200 - j400} = 250 \text{ Ом}. \quad (1 \text{ б})$$

$$P_{(1)} = \frac{E_{(1)}^2}{R_{(1)}} = \frac{100^2}{250} = 40 \text{ Вт}, \quad P_{(3)} = \frac{E_{(3)}^2}{R_{(3)}} = \frac{50^2}{250} = 10 \text{ Вт}, \quad P = P_0 + P_{(1)} + P_{(3)} = 10 + 40 + 10 = 60 \text{ Вт}.$$

(1 б)

Ответ: 60 Вт.

Задача 4 (на выбор*)

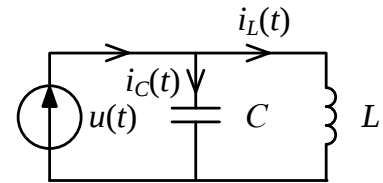
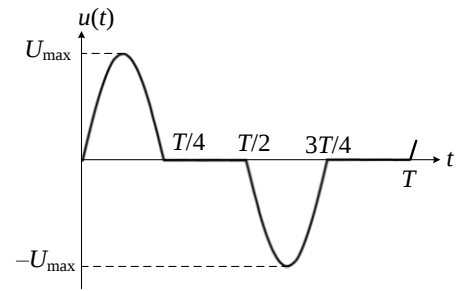
Вариант 2 (20 баллов)

Для электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, известны параметры элементов L , C . Мгновенное значение напряжения источника:

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 0 & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ -U_{\max} \sin \omega t & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}$$

причем $U_{\max}$ и $\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ известны, $T = 2T'$.

Определите мгновенные значения токов $i(t)$, $i_C(t)$ и $i_L(t)$ (для $0 < t < T$), если $i_L(0) = 0$. Постройте графики данных токов.



**Рисунки
к варианту 2 задачи 4**

Решение основано на применении компонентных уравнений.

Ток конденсатора определяется соотношением:

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = \begin{cases} \omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 0 & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ -\omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases} \quad (5 \text{ б})$$

Ток индуктивного элемента определяется аналогичным образом с учетом начального условия.

При $t < T/4$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \int U_{\max} \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega L} U_{\max} \cos \omega t + A. \quad (1 \text{ б})$$

С учетом $i_L(0) = 0$ получим:

$$i_L(t) = -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L}. \quad (2 \text{ б})$$

При $T/4 < t < T/2$ напряжение индуктивного элемента равно нулю, а его ток неизменен:

$$i_L(t) = \text{const} = i_L(T/4) = -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \left(\frac{2\pi}{T'} \cdot \frac{2T'}{4} \right) + \frac{U_{\max}}{\omega L} = \frac{2U_{\max}}{\omega L}. \quad (1,5 \text{ б})$$

При $T/2 < t < 3T/4$ ток индуктивного элемента определяется выражением:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \int -U_{\max} \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega L} U_{\max} \cos \omega t + B. \quad (1 \text{ б})$$

При $i_L(T/2) = \frac{2U_{\max}}{\omega L}$ получим:

$$i_L(t) = \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} \text{ при } T/2 < t < 3T/4. \quad (2 \text{ б})$$

Наконец, при $3T/4 < t < T$ напряжение на катушке равно нулю, а ее ток

$$i_L(t) = \text{const} = i_L(3T/4) = \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \left(\frac{2\pi}{T'} \cdot \frac{3 \cdot 2T'}{4} \right) + \frac{U_{\max}}{\omega L} = 0. \quad (1,5 \text{ б})$$

Таким образом, токи индуктивного элемента определяется выражением:

$$i_L(t) = \begin{cases} -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 0 < t < T/4 \\ \frac{2U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

Ток источника определяется по первому закону Кирхгофа с учетом того, что $\omega C U_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L}$:

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = \begin{cases} \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}. \quad (1 \text{ б})$$

Графики мгновенных значений искомых токов представлены на рис. 4. (5 б)

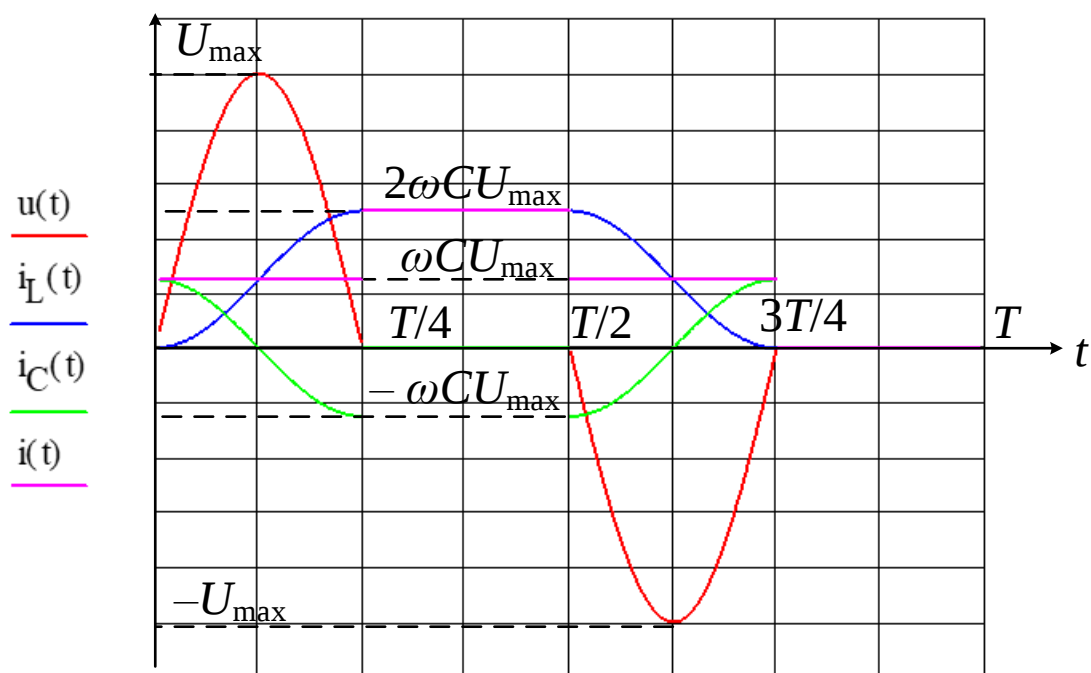


Рисунок 4. Графики мгновенных значений токов и напряжения

Ответ: графики мгновенных значений – см. рис. 4,

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = \begin{cases} \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 2 \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = \begin{cases} \omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < T/4 \\ 0 & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ -\omega C U_{\max} \cos \omega t & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

$$i_L(t) = \begin{cases} -\frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } 0 < t < T/4 \\ \frac{2U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/4 < t < T/2 \\ \frac{U_{\max}}{\omega L} \cos \omega t + \frac{U_{\max}}{\omega L} & \text{при } T/2 < t < 3T/4 \\ 0 & \text{при } 3T/4 < t < T \end{cases}.$$

Задача 5 (15 баллов)

Синусоидальный источник с напряжением $u_1(t) = U_{m1} \sin(1000t + \psi)$ в момент $t = 0$ подключается к RL -цепи (см. рис.). За 6 мс преходящая (свободная) составляющая напряжения $u_2(t)$ уменьшилась в 20 раз и переходный процесс можно считать закончившимся. Известно, что для $t \geq 6$ мс после замыкания ключа K1 мгновенное значение напряжения $u_2(t)$ составляет $u_2(t) = 5 \sin(1000t - 36,9^\circ)$ (В).

Через 10 мс после замыкания ключа K1 замыкается ключ K2. Определить мгновенное значение напряжения $u_2(t)$ для $t \geq 20$ мс, когда переходный процесс можно считать закончившимся.

Примечание. t – время, отсчитываемое от момента замыкания K1.

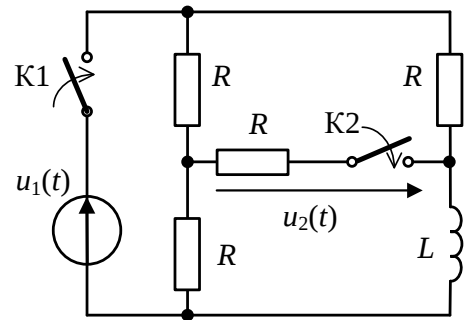


Рисунок
к задаче 5

Решение. После замыкания ключа K1 в цепи начался переходной процесс, $u_2(t) = u_{\text{уст}}(t) + u_{\text{прех}}(t) = u_{\text{уст}}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Так как за $t=6$ мс преходящая (свободная) составляющая уменьшилась в 20 раз, то $e^{-\frac{6 \cdot 10^{-3}}{\tau}} = \frac{1}{20} \approx e^{-3}$. Следовательно $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$ с. (2 б)

При разомкнутом ключе K2 переходный процесс есть только RL -ветви. В таком случае $\tau = \frac{L}{R} = 2 \cdot 10^{-3}$ с. При этом $\frac{\omega L}{R} = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2$. (1 б)

По условию за время, равное 3τ , переходный процесс можно считать закончившимся, $u_2(t)|_{t \geq 6 \text{ мс}} = u_{\text{уст}}(t) = 5 \sin(1000t - 36,9^\circ)$ (В). Комплексная расчетная схема установившегося режима после коммутации (замыкания K1) представлена на рис. 5.1.

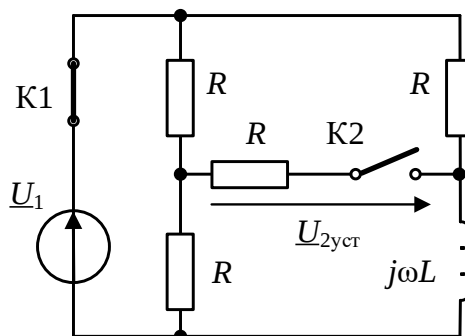


Рис. 5.1 к задаче 5

Комплексное действующее значение напряжения составляет на разомкнутом ключе составляет:

$$\underline{U}_{2уст} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -36,9^\circ \text{ (В)} \quad (*)$$

$$\text{При этом } \underline{U}_{2уст} = \frac{\underline{U}_1}{2} - \frac{\underline{U}_1 j \omega L}{R + j \omega L}. \quad (1 \text{ б})$$

Из $\frac{\omega L}{R} = 2$ следует, что:

$$\underline{U}_{2уст} = \frac{\underline{U}_1}{2} - \frac{\underline{U}_1 j 2}{1 + j 2} = \frac{\underline{U}_1}{2} \left(\frac{1 - j 2}{1 + j 2} \right). \quad (1 \text{ б})$$

Комплекс входного напряжения равен:

$$\underline{U}_1 = 2 \underline{U}_{2уст} \left(\frac{1 + j 2}{1 - j 2} \right) = \frac{10 \angle -36,9^\circ}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + j 2}{1 - j 2} \right) = j \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ (В)}. \quad (1 \text{ б})$$

Мгновенное значение входного напряжения $u_1(t) = 10 \sin(1000t + 90^\circ) \text{ (В)}.$

После замыкания К2 в момент $t = 0,01 \text{ с}$ начнется новый переходный процесс. При этом $u_2(t) = u_{2уст}(t) + u_{2прех}(t) = u_{2уст}(t) + A'e^{\frac{t-0,01}{\tau'}}$.

Постоянная времени цепи после коммутации К2:

$$\tau' = \frac{L}{R_{\text{экв}}},$$

$$\text{где } R_{\text{экв}} = \frac{3}{5} R. \quad (2 \text{ б})$$

Постоянная времени $\tau' = \frac{5L}{3R} = \frac{5}{3} \tau = \frac{10}{3} \text{ мс}$. За время $10 \text{ мс} = 3\tau'$ преходящая составляющая напряжения $u_{2прех}(t)$ уменьшится в 20 раз и переходный процесс действительно можно считать закончившимся, $u_2(t)|_{t' \geq 20 \text{ мс}} = u_{2уст}(t).$

На рис. 5.2 представлена комплексная расчетная схема установившегося режима цепи после второй коммутации.

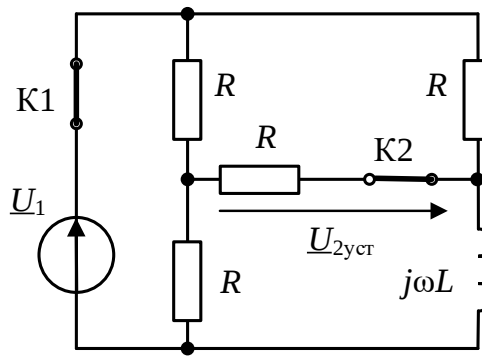


Рис. 5.2 к задаче 5

Расчет удобнее всего проводить методом эквивалентного генератора, так как известно $\underline{U}_{xx} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -36,9^\circ$ (В) (при разомкнутой ветви совпадает с $\underline{U}_{2уст}$ после первой коммутации (*)).

Комплексное входное сопротивление:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{R}{2} + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R}{2} + \frac{R \cdot j2R}{R + j2R} = R \left(\frac{1 + j6}{2 + j4} \right).$$

В установившемся режиме после второй коммутации:

$$\underline{U}_{2уст} = \frac{\underline{U}_{xx} R}{\underline{Z}_{\text{вх}} + R} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \angle -36,9^\circ \cdot (2 + j4)}{3 + j10} = \frac{2,142}{\sqrt{2}} \angle -46,8^\circ \text{ (В)}.$$

Мгновенное значение напряжения для $t \geq 20$ мс после замыкания ключа K1:

$$u_2(t) \Big|_{t \geq 0,02} = 2,142 \sin(1000t - 46,8^\circ) \text{ (В)}. \quad (7 \text{ б})$$

Ответ. $u_2(t) \Big|_{t \geq 0,02} = 2,142 \sin(1000t - 46,8^\circ) \text{ (В)}$

Задача 6 (20 баллов)

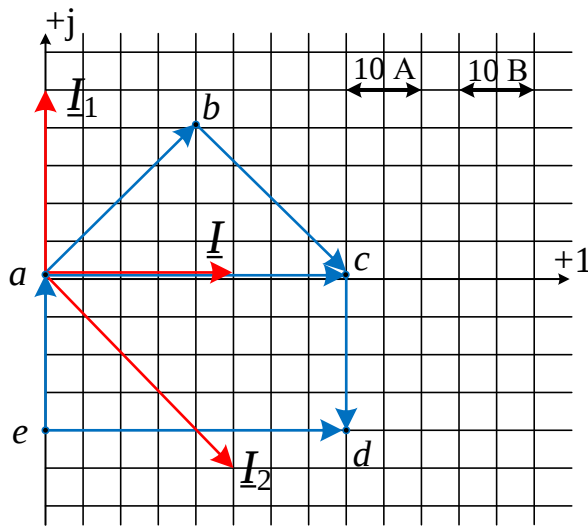


Рисунок к задаче 6

На рисунке приведена векторно-топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов для некоторой электрической цепи в установившемся режиме до коммутации. В цепи действует источник тока с частотой $\omega = 1000$ рад/с.

1. Изобразите схему этой электрической цепи и определите параметры ее элементов. **(12 баллов)**

2. Определите переходный ток $i_0(t)$ в ветви с ключом, который замыкает накоротко узлы a и b . **(8 баллов)**

Примечание. На векторной диаграмме изображены комплексные действующие значения напряжений на одном активном элементе (источнике тока) и пассивных элементах, имеющих сопротивление резистивного, индуктивного и емкостного характера.

Решение. На основании анализа векторной диаграммы определяется схема электрической цепи, которая ей соответствует. **(10 б)**

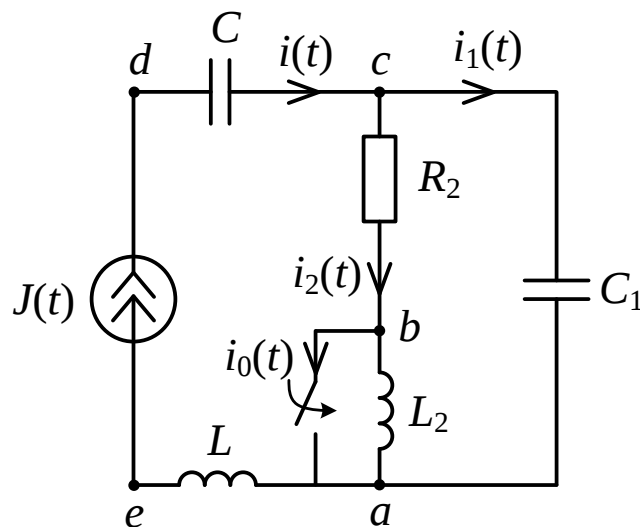


Рис. 6. Искомая схема электрической цепи

Сопротивления элементов и их характер на частоте $\omega = 1000$ рад/с определяются с помощью векторной диаграммы:

$$X_{L2} = \frac{U_{ba}}{I_2} = \frac{20\sqrt{2}}{25\sqrt{2}} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$R_2 = \frac{U_{cb}}{I_2} = \frac{20\sqrt{2}}{25\sqrt{2}} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$X_{C1} = \frac{U_{ca}}{I_1} = \frac{40}{25} = 1,6 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{U_{dc}}{I} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ Ом},$$

$$X_L = \frac{U_{ae}}{I} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ Ом}.$$

Параметры реактивных элементов:

$$L_2 = L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{0,8}{1000} = 0,8 \text{ мГн},$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{1000 \cdot 0,8} = 1,25 \text{ мФ},$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega X_{C1}} = \frac{1}{1000 \cdot 1,8} = 0,625 \text{ мФ. (2 б)}$$

Независимые начальные условия для расчета переходного процесса:

$$i_{L2}(0_+) = i_{L2}(0_-) = i_2(0_-) = 25\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(-45^\circ) = -35,4 \text{ А},$$

$$u_{C1}(0_+) = u_{ca}(0_-) = i_2(0_-) = 40\sqrt{2} \cdot \sin(0) = 0 \text{ В}.$$

Переходный процесс в цепи описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Это обусловлено тем, что конденсатор C_1 и индуктивный элемент L_1 соединены последовательно с источником тока, а катушка L_2 закорачивается.

Переходный ток в ветви с ключом будет определяться выражением:

$$i_0(t) = i_{\text{уст}}(t) + i_{\text{прех}}(t) = -i_{L2}(0_+) + i_{R_{\text{уст}}}(t) + Ae^{pt}, \text{ (5 б)}$$

причем $i_{L2}(0_+)$ определяет незатухающую свободную составляющую тока индуктивного элемента.

Установившаяся составляющая тока резистивного элемента после замыкания ключа:

$$\underline{I}_{R_{\text{муст}}} = \underline{J}_m \cdot \frac{-jX_{C1}}{R - jX_{C1}} = 25\sqrt{2} \angle 0^\circ \cdot \frac{-j1,6}{0,8 - j1,6} = 31,6 \angle -26,6^\circ \text{ А} \rightarrow$$

$$\rightarrow i_{R_{\text{уст}}}(t) = 31,6 \sin(1000t - 26,6^\circ) \text{ А} \quad (0,5 \text{ б})$$

Зависимое начальное условие для искомого тока определяется в соответствии с выражением:

$$\begin{aligned} i_0(0_+) &= i_R(0_+) - i_{L2}(0_+) = \frac{u_R(0_+)}{R} - i_{L2}(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R} - i_{L2}(0_+) = \\ &= 0 - (-35,4) = 35,4 \text{ А.} \end{aligned} \quad (1 \text{ б})$$

Корень характеристического уравнения:

$$p = -\frac{1}{RC_1} = -\frac{1}{0,8 \cdot 0,625 \cdot 10^{-3}} = -2000 \text{ с}^{-1}. \quad (0,5 \text{ б})$$

Постоянная интегрирования A :

$$i_0(0_+) = -i_{L2}(0_+) + i_{R_{\text{уст}}}(0_+) + A,$$

$$A = i_0(0_+) + i_{L2}(0_+) - i_{R_{\text{уст}}}(0_+) = 35,4 + (-35,4) - 31,6 \cdot \sin(-26,6^\circ) = 14,1 \text{ А.} \quad (1 \text{ б})$$

Таким образом, искомый переходный ток будет определяться выражением:

$$i_0(t) = 35,4 + 31,6 \sin(1000t - 26,6^\circ) + 14,1 e^{-2000t} \text{ А.}$$

Ответ: см. рис. 6, $L_2 = L = 0,8 \text{ мГн}$, $C = 1,25 \text{ мФ}$, $C_1 = 0,625 \text{ мФ}$, $R_2 = 0,8 \text{ Ом}$, $i_0(t) = 35,4 + 31,6 \sin(1000t - 26,6^\circ) + 14,1 e^{-2000t} \text{ А.}$

Задача 7 (15 баллов)

В трехфазной цепи (см. рис.) действуют два симметричных трехфазных источника прямой последовательности $E_{\phi 1} = E_{\phi 2} = 100 \text{ В}$,

$R = 10 \text{ Ом}$, емкостное сопротивление может меняться в широком диапазоне: $X_C = (0 \dots \infty)$.

Найти минимальное и максимальное действующие значения токов амперметров, зависимость показаний амперметров от X_C .

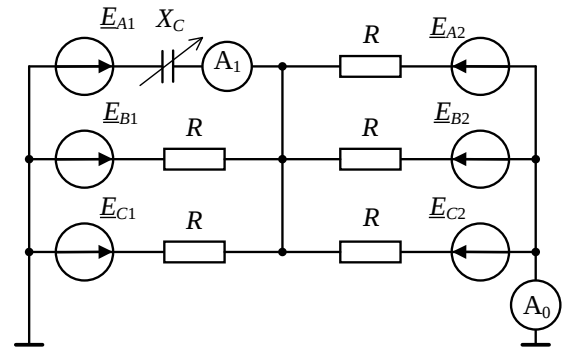


Рисунок к задаче 7

Решение. Обозначим комплексные токи трехфазного источника с несимметричной нагрузкой и тока в нейтральном проводе (рис. 7.1). Так как по условию общие точки трехфазных источников соединяет идеальный нейтральный провод, потенциалы этих точек одинаковые и равны нулю: $\varphi_0 = 0$.

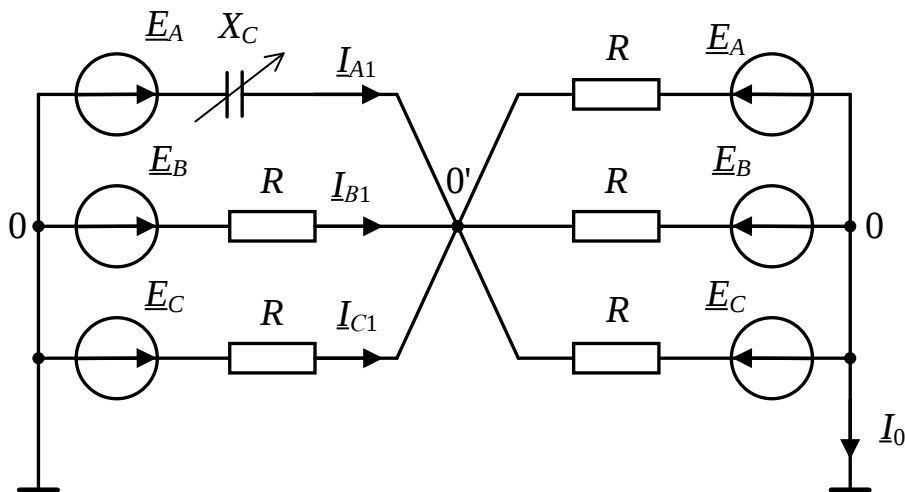
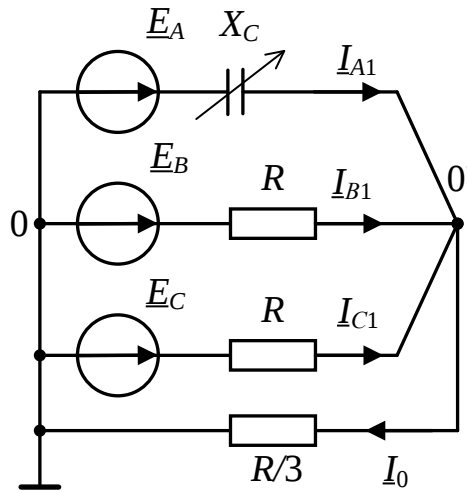


Рис. 7.1. Расчетная схема трехфазной цепи

Определим комплексный потенциал $\varphi_{0'}$:

$$\varphi_{0'} = \frac{\frac{E_{A1}}{-jX_C} + \frac{E_{B1}}{R} + \frac{E_{C1}}{R} + \frac{E_{A2}}{R} + \frac{E_{B2}}{R} + \frac{E_{C2}}{R}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{E_{A1}}{-jX_C} + \frac{E_{B1}}{R} + \frac{E_{C1}}{R}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{R}}.$$

Получается, что расчет токов трехфазного источника с несимметричной нагрузкой и тока в нейтральном проводе может быть проведен по упрощенной схеме трехфазной цепи с неидеальным нейтральным проводом (рис. 7.2).



(3 6)

Рис. 7.2. Упрощенная расчетная схема трехфазной цепи

К схеме 7.2 можно прийти и путем эквивалентных преобразований «правой» части цепи.

Для расчета тока фазы А можно использовать метод эквивалентного генератора:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_{bx} + (-jX_C)} = \frac{\underline{E}_{A1} - \underline{\Phi}_{0'xx}}{\underline{Z}_{bx} + (-jX_C)}.$$

При разомкнутой ветви:

$$\underline{\Phi}_{0'} = \frac{\frac{\underline{E}_{B1}}{R} + \frac{\underline{E}_{C1}}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{R}} = \frac{-\underline{E}_{A1}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{R}} = -\frac{\underline{E}_{A1}}{5}, \quad \frac{1}{\underline{Z}_{bx}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{R} = \frac{5}{R}. \quad (2 \ 6)$$

Ток фазы А:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_{A1} - \underline{\Phi}_{0'xx}}{\underline{Z}_{bx} + (-jX_C)} = \frac{\underline{E}_{A1} + \frac{\underline{E}_{A1}}{5}}{\frac{R}{5} + (-jX_C)} = \frac{6\underline{E}_{A1}}{R + 5(-jX_C)}. \quad (2 \ 6)$$

Показание прибора определяется действующим значением тока и зависит от X_C :

$$I_{A1}(X_C) = \frac{6E_{\phi 1}}{\sqrt{R^2 + 25X_C^2}} = \frac{600}{\sqrt{100 + 25X_C^2}}. \quad (2 \ 6)$$

При $X_C = 0$ максимальное действующее значение $I_{A1}(0) = 60$ А, при $X_C \rightarrow \infty$ минимальное значение равно нулю.

Найдем выражение для расчета тока в нулевом проводе.

Потенциал точки 0' меняется при изменении X_C :

$$\underline{\varphi}_{0'}(X_C) = \frac{\frac{\underline{E}_{A1}}{-jX_C} + \frac{\underline{E}_{B1}}{R} + \frac{\underline{E}_{C1}}{R}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{R}} = \frac{\frac{\underline{E}_{A1}}{-jX_C} - \frac{\underline{E}_{A1}}{R}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{R}} = \frac{\frac{\underline{E}_{A1}(R + jX_C)}{(-jX_C) \cdot R}}{\frac{R + 5(-jX_C)}{(-jX_C) \cdot R}} = \frac{\underline{E}_{\phi 1}(R + jX_C)}{R + 5(-jX_C)}$$

Комплекс тока в нейтральном проводе:

$$\underline{I}_0(X_C) = \frac{\varphi_{0'}}{\frac{R}{3}} = \frac{3\underline{E}_{\phi 1}}{R} \cdot \frac{(R + jX_C)}{R + 5(-jX_C)} = 30 \frac{(10 + jX_C)}{10 + 5(-jX_C)}, \quad (3 \text{ б})$$

а его действующее значение:

$$I_0(X_C) = 30 \frac{\sqrt{100 + X_C^2}}{\sqrt{100 + 25X_C^2}}. \quad (2 \text{ б})$$

При $X_C = 0$ максимальное действующее значение $I_0(0) = 30 \text{ А}$, при $X_C \rightarrow \infty$ минимальное значение равно $I_0|_{X_C \rightarrow \infty} = 6 \text{ А}$. (1 б)

Ответ: Показание прибора A_1 : $I_{A1}(X_C) = \frac{600}{\sqrt{100 + 25X_C^2}}$, максимальное

значение $I_{A1} = 60 \text{ А}$, минимальное значение равно нулю. Показание прибора

A_0 : $I_{A0}(X_C) = I_0(X_C) = 30 \frac{\sqrt{100 + X_C^2}}{\sqrt{100 + 25X_C^2}}$, максимальное значение $I_{A0} = 30 \text{ А}$,

минимальное значение $I_{A0} = 6 \text{ А}$.