

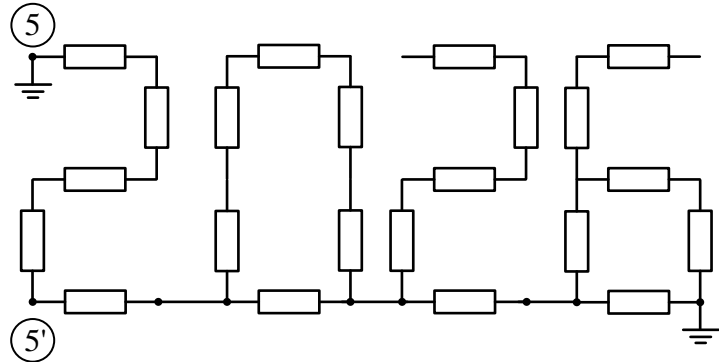
МЕЖДУНАРОДНАЯ МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТОЭ

2026

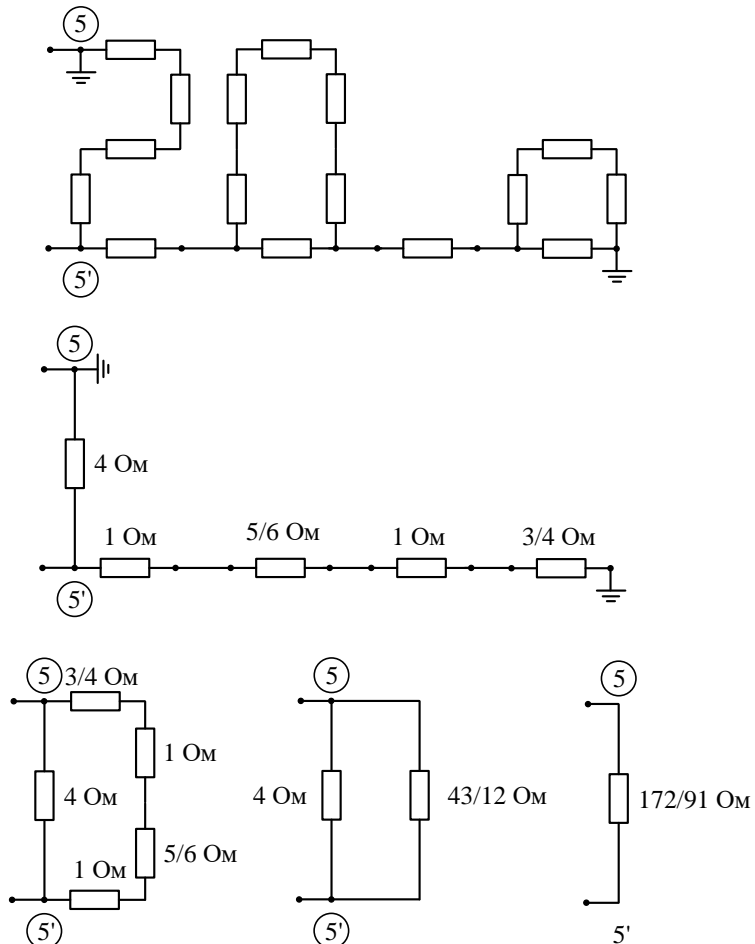
Группа I

Задача 1 (10 баллов)

Сопротивления всех резисторов в схеме на рисунке равны 1 Ом. Определить входное сопротивление цепи относительно выводов 55'.



Решение. Входное сопротивление определяется путем эквивалентных преобразований, например, как на рисунке ниже.



Ответ: $R_{\text{вх}} = R_{55'} = 172 / 91 \text{ Ом} \approx 1,890 \text{ Ом}$.

Указания к оцениванию задания:

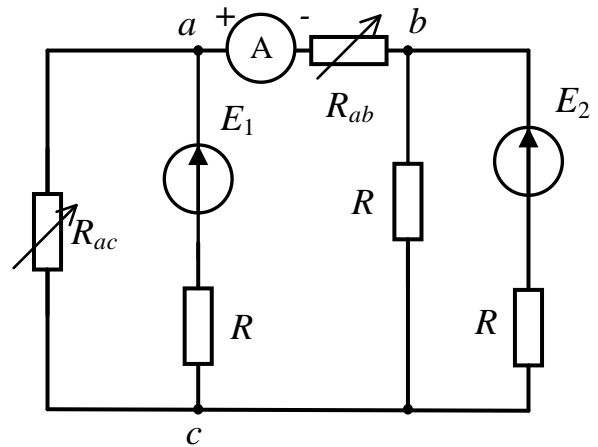
- 10 баллов выставляется за корректный ответ, полученный верным путем;
- 5 баллов выставляется в том случае, если записанные формулы верны, но в решении содержится вычислительная ошибка;
- 2 балла выставляется если заземления на схеме не были учтены, а $R_{\text{вх}} = 4 \text{ Ом}$.
- 0 баллов выставляется в том случае, если решение не доведено до конца или ход решения неверный.

Задача 2 (10 баллов)

В цепи постоянного тока сопротивления ветвей R_{ab} и R_{ac} могут меняться. Были проведены измерения в следующих режимах:

- 1) если $R_{ac} = R$, то при изменении R_{ab} показание амперметра не меняется;
- 2) если $R_{ab} = R$ и $R_{ac} \rightarrow \infty$ показание амперметра равно 1,2 А.

Найти показание амперметра, если $R_{ac} = 0$ и $R_{ab} = R$.



Решение. Для первого режима при $R_{ac} = R$ ток амперметра может быть определен методом эквивалентного генератора:

$$I = \frac{U_{xxab}}{R_{ab} + R_{вх}},$$

где $U_{xxab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{E_1}{2R}R - \frac{E_2}{2R}R$.

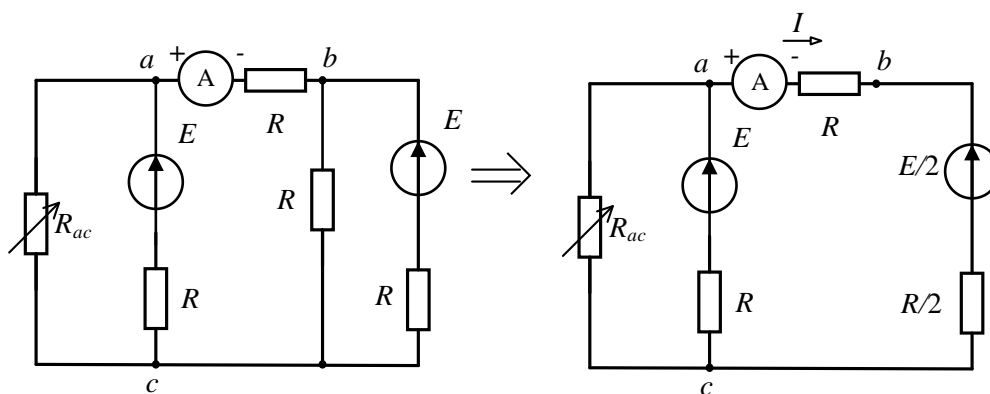
Ток не меняется при изменении R_{ab} , только если $U_{xxab} = 0$. Следовательно, $E_1 = E_2 = E$. (4 б)

Для второго режима при $R_{ab} = R$ расчетная схема (см. рисунок ниже) может быть упрощена. При $R_{ac} \rightarrow \infty$ ток амперметра:

$$I = \frac{E - \frac{E}{2}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{E}{5R} = 1,2 \text{ А}, \quad \frac{E}{R} = 6. \quad (4 б)$$

При $R_{ac} = 0$:

$$I = \frac{-\frac{E}{2}}{R + \frac{R}{2}} = -\frac{E}{3R} = -2 \text{ А}. \quad (2 б)$$



Расчетные схемы к задаче 1

Ответ: -2 А

Задача 3 (20 баллов)

На рис. 1 и рис. 2 приведены векторные диаграммы (ВД) для некоторой цепи при замкнутом и разомкнутом ключе соответственно. Синим цветом обозначены векторы напряжений (комплексные действующие значения напряжения), красным – векторы тока (комплексные действующие значения тока) источника. Токи других элементов не изображены.

Электрическая цепь состоит из одного индуктивного, одного емкостного, двух резистивных элементов и источника напряжения.

1) Предложите один вариант схемы такой цепи, определите сопротивления ее элементов и комплексную ЭДС источника. **(15 баллов)**

2) Постройте векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений для цепи, которая получается из предложенной, если ключ замкнуть, а индуктивный и емкостной элемент поменять местами. **(5 баллов)**

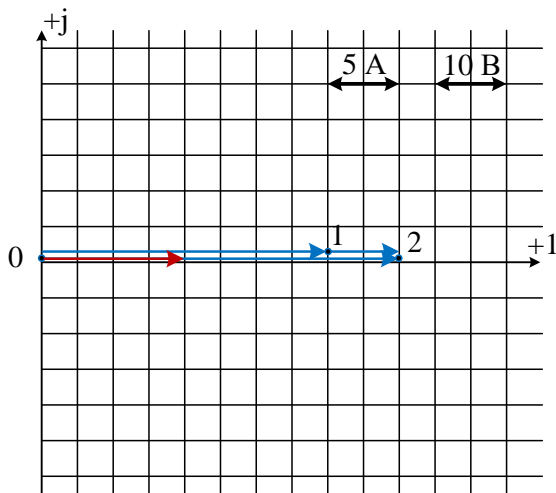


Рисунок 1

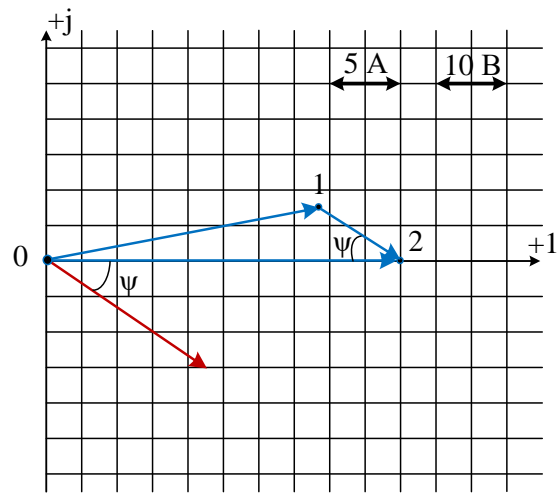


Рисунок 2

Решение

1) Возможный вариант топологии цепи представлен на рисунке **(10 б, не требует обоснования)**

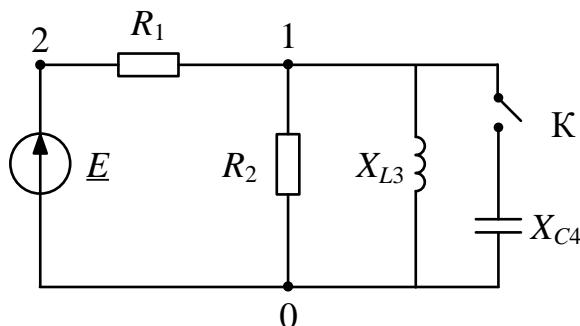


Рисунок 3

Из рис. 1 и рис. 3 следует, что при замкнутом ключе в цепи имеет место резонанс. Тогда $X_{L3} = X_{C4}$, а токи резистивных элементов равны друг другу. Сопротивления резисторов определяются в соответствии с векторной диаграммой на рис. 1:

$$R_1 = \frac{10}{10} = 1 \text{ Ом}, \quad R_2 = \frac{40}{10} = 4 \text{ Ом}. \quad (2 \text{ б})$$

В соответствии с векторными диаграммами ЭДС источника составляет $\underline{E} = \underline{U}_{20} = 50 \angle 0^\circ \text{ В}$. (1 б)

При разомкнутом ключе ток емкостного элемента равен нулю. По векторной диаграмме на рис. 2 определяются комплексы тока источника и напряжения на катушке:

$$\underline{I} = 13,9 \angle -33,7^\circ \text{ А}, \quad \underline{U}_{10} = 39,2 \angle 11,3^\circ \text{ В}.$$

Сопротивление катушки определяется из выражения:

$$\frac{R_2 jX_{L3}}{R_2 + jX_{L3}} = \frac{4 \cdot jX_{L3}}{4 + jX_{L3}} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}} = 2,82 \angle 45^\circ \approx \frac{4}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \rightarrow X_{L3} = 4 \text{ Ом}. \quad (1 \text{ б})$$

Из условия резонанса токов сопротивления конденсатора и катушки были равны $X_{C4} = X_{L3} = 4 \text{ Ом}$. (1 б)

2) Схема электрической цепи при изменении положений реактивных элементов и разомкнутом ключе представлена на рис. 4. Ветвь с индуктивным элементом и разомкнутым ключом не приводится.

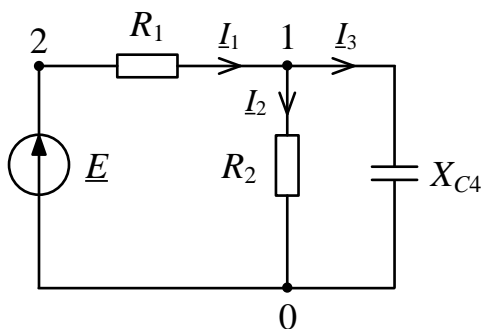


Рисунок 4

Комплексные токи и напряжения для данной цепи составят:

$$\underline{I}_1 = 13,9 \angle +33,7^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = 9,81 \angle -11,3^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_4 = 9,81 \angle +78,7^\circ \text{ А},$$

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{R2} = \underline{U}_{C4} = 39,2 \angle -11,3^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{21} = \underline{U}_{R1} = \underline{U}_{C4} = 39,2 \angle -11,3^\circ \text{ В}.$$

Векторная диаграмма для цепи на рис. 4 представлена на рис. 5. **(5 б)**

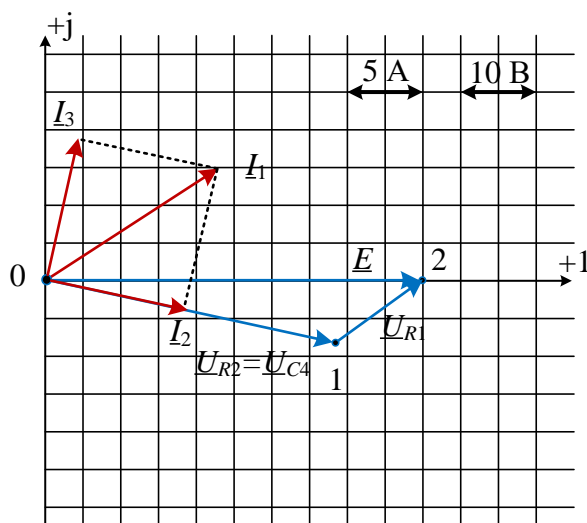


Рисунок 5

Примечание. Векторная диаграмма на рис. 5 представляет «зеркальное изображение» ВД, приведенной на рис. 2, дополненное токами ветвей. Она может быть построена без дополнительных расчетов.

Ответ:

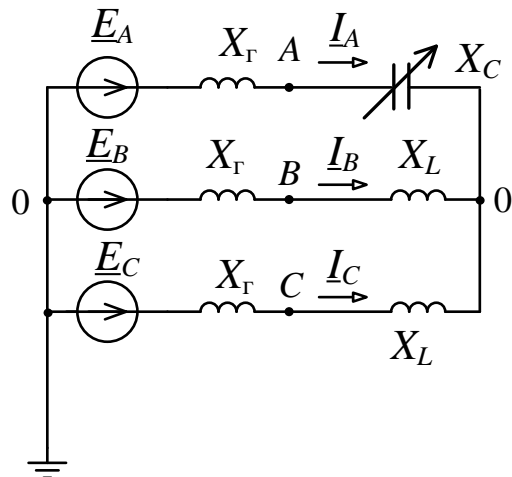
1) См. рис. 3, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$,

$X_{L3} = X_{C4} = 4 \text{ Ом}$.

2) См. рис. 5.

Задача 4 (15 баллов)

На рис. 9 представлена трехфазная цепь с несимметричным приемником. Источник – симметричный прямой последовательности. $E_{\phi} = 220$ В, $X_{\Gamma} = 10$ Ом. В фазах B и C несимметричного приемника индуктивная нагрузка $X_L = 40$ Ом, в фазе A – емкостная нагрузка, $X_C = \text{var}$. При каком значении X_C линейные токи нельзя определить (задача не имеет решения)?



Решение. Определим ток в фазе A с изменяющейся нагрузкой методом эквивалентного генератора. При $X_C \rightarrow \infty$ напряжение смещения нейтрали $\underline{U}_{0'0} = -110$ В, напряжение $\underline{U}_{xx} = \underline{U}_{A0'}|_{X_C \rightarrow \infty} = 330$ В. Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{вх}A0'} = j35$ Ом (10 б). Линейный (фазный ток) в фазе A $\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_{\text{вх}} - jX_C} = \frac{330}{j35 - jX_C}$. (5 б) При $X_C = 35$ Ом задача не имеет решения.

Ответ. $X_C = 35$ Ом

Указания к оцениванию задания:

- 15 баллов выставляется за корректный ответ;
- (5-8) + 5 = 10-13 баллов выставляется в том случае, если ход решения задачи верный, но в расчете параметров ЭГ имеются ошибки;
- 0 баллов выставляется, если ответ $X_C = X_{\Gamma}$ или $X_C \rightarrow \infty$ получен из условия равенства нулю напряжения смещения нейтрали.

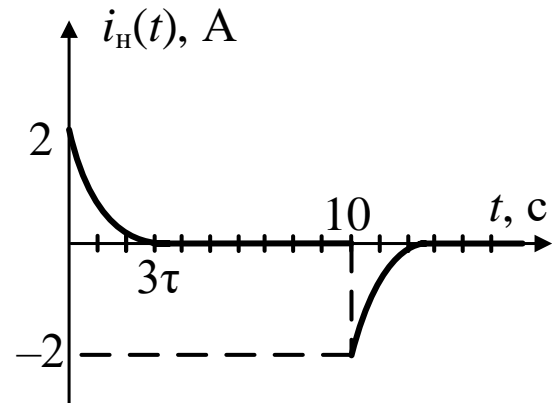
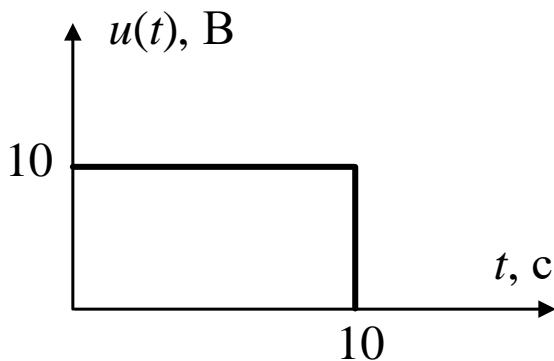
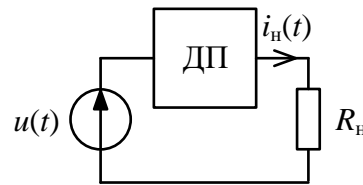
Задача 5 (15 баллов)

Вариант 1

На вход цепи без начального запаса энергии подается прямоугольный импульс. Пассивный двухполюсник (ДП) состоит из одного резистивного и одного реактивного элемента.

График мгновенного значения тока резистора с сопротивлением $R_H = 1 \text{ Ом}$ представлен ниже.

Определить схему соединения элементов ДП и найти их параметры. Считать, что практическое время переходного процесса равно 3τ .



Решение (операторный метод, авторское решение)

1) В цепи отсутствует начальный запас энергии, т.е. начальные условия **НУЛЕВЫЕ**. (1 б)

2) Входная проводимость:

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I_{\text{вх}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{I_H(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{Z_{\text{ДП}} + R_H} = \frac{1}{Z_{\text{ДП}} + 1}; (*) \quad (2 \text{ б})$$

3) Изображение входного сигнала: $U_{\text{вх}}(p) = \frac{10}{p}(1 - e^{-10p})$; (2 б)

2) Из графика тока (рис. б) следует, что постоянная времени $\tau = 1 \text{ с}$, т.е. собственная частота цепи $p_1 = -1 \text{ с}^{-1}$, тогда:

$$\text{Изображение реакции: } I_H(p) = \frac{2}{p+1}(1 - e^{-10p}) \quad (3 \text{ б})$$

$$\text{С учетом (*): } Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I_H(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{0,2p}{p+1} = \frac{1}{Z_{\text{ДП}} + 1} (**) \quad (1 \text{ б})$$

3) из (**) \Rightarrow

При $p = 0: Y_{ex}(0) = \frac{1}{Z_{ДП} + 1} = 0 \Rightarrow Z_{ДП} = \infty \Rightarrow$ в ДП накопитель – это C -элемент, так как при $p = 0: Z_L = 0 (L \equiv КЗ)$, а $Z_C = \infty (C \equiv ХХ)$. (2 б)

4) из (2) \Rightarrow

При $p = \infty: Y_{ex}(\infty) = \frac{1}{Z_{ДП} + 1} = 0,2$, но при $p = \infty Z_C = 0 (C \equiv КЗ)$. $\Rightarrow Z_{ДП} = 4 \Rightarrow$ в

ДП потребитель – это сопротивление $R = 4$ Ом, которое включено последовательно с накопителем, который эквивалентен $КЗ$.

Таким образом, делаем вывод, что ДП - последовательное соединение R - элемента (потребителя) и C – элемента (накопителя). (2 б)

5) Характеристическое уравнение: $Z(p) = R + R_H + 1/pC = 5 + 1/pC = 0 \Rightarrow$

собственная частота цепи $p_1 = -\frac{1}{5C} = -1 \text{ с}^{-1}$, откуда находим $C = 1/5 \text{ Ф}$. (2 б)

Ответ: 1) ДП: последовательное соединение R - элемента и C -элемента;
2) $R = 4$ Ом; $C = 1/5 \text{ Ф}$.

Решение (классический метод)

1) Отсутствию начального запаса энергии соответствуют нулевые независимые начальные условия (напряжение конденсатора или ток катушки ДП равны нулю; обоснование необязательно). (1 б)

2) Так как установившаяся составляющая тока для $t < 10$ с равна нулю, двухполюсник содержит последовательно соединенные емкостной и резистивный элементы. Другие варианты соединения не удовлетворяют условию задачи. (6 б)

3) Сопротивление резистивного элемента двухполюсника определяется по начальному условию для тока $i_H(0_+) = 2 \text{ А}$:

$$i_H(0_+) = \frac{U_{\max}}{R_H + R} = \frac{10}{1 + R} = 2 \rightarrow R = 4 \text{ А}. \quad (3 \text{ б})$$

4) Постоянная времени определяется графически, $\tau = 1 \text{ с}$. Корень ХУ равен

$$p = -1 \text{ с}^{-1} \quad (3 \text{ б})$$

5) Емкость конденсатора определяется по характеристическому уравнению:

$$R + R_H + \frac{1}{pC} = 0 \rightarrow C = \frac{1}{p(R + R_H)} = \frac{1}{5} \text{ Ф}. \quad (2 \text{ б})$$

Ответ: схема ДП – RC -ветвь, $R = 4$ Ом, $C = 1/5 \text{ Ф}$.

Задача 5 (25 баллов)

Вариант 2

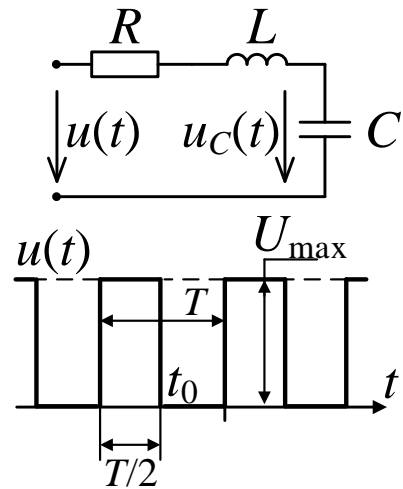
Ко входу цепи приложено периодическое несинусоидальное напряжение, форма которого приведена на рисунке 5.2.

Определить отношение $u_C(t_0)/U_{\max}$, если известны отношения:

$$T/\tau_1 = 2\ln 2 \text{ и } T/\tau_2 = 4\ln 2,$$

где τ_1, τ_2 – постоянные времени апериодического процесса,

T – период входного напряжения.



Решение задачи основано на применении законов коммутации и рассмотрении переходных процессов на первом и втором полупериоде. Напряжение конденсатора описывается выражением (если принять $t_0 - T/2 = 0$):

$$u_C(t) = \begin{cases} u_{C1}(t) = U_{\max} + A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ u_{C2}(t) = A_1' e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau_1} + A_2' e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau_2}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3 \text{ б})$$

Для определения постоянных интегрирования следует рассмотреть выражения для законов коммутации:

$$\begin{cases} u_{C1}(T/2) = u_{C2}(T/2) \\ u_{C1}(0) = u_{C2}(T) \\ i_{L1}(T/2) = i_{L2}(T/2) \\ i_{L1}(0) = i_{L2}(T) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{C1}(T/2) = u_{C2}(T/2) \\ u_{C1}(0) = u_{C2}(T) \\ \left. \frac{du_{C1}}{dt} \right|_{t=T/2} = \left. \frac{du_{C2}}{dt} \right|_{t=T/2} \\ \left. \frac{du_{C1}}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{C2}}{dt} \right|_{t=T} \end{cases}, \quad (6 \text{ б})$$

$$\begin{cases} U_{\max} + A_1 e^{-T/2\tau_1} + A_2 e^{-T/2\tau_2} = A_1' + A_2' \\ -\frac{A_1}{\tau_1} e^{-T/2\tau_1} - \frac{A_2}{\tau_2} e^{-T/2\tau_2} = -\frac{A_1'}{\tau_1} - \frac{A_2'}{\tau_2} \\ U_{\max} + A_1 + A_2 = A_1' e^{-T/2\tau_1} + A_2' e^{-T/2\tau_2} \\ -\frac{A_1}{\tau_1} - \frac{A_2}{\tau_2} = -\frac{A_1'}{\tau_1} e^{-T/2\tau_1} - \frac{A_2'}{\tau_2} e^{-T/2\tau_2} \end{cases}. \quad (6 \text{ б})$$

Решение данной системы уравнений в общем виде:

$$A_1 = -\frac{\tau_1 U_{\max}}{(1 + e^{-T/2\tau_1})(\tau_1 - \tau_2)} = -A_1', \quad A_2 = \frac{\tau_2 U_{\max}}{(1 + e^{-T/2\tau_2})(\tau_1 - \tau_2)} = -A_2'. \quad (*) (5 б)$$

Примечание. Соотношения между A_1 и A_1' , A_2 и A_2' следуют из симметрии системы уравнений. Данные соотношения могут быть получены из анализа формы напряжения конденсатора и ее симметрии относительно оси абсцисс при исключении постоянной составляющей.

С учетом (*) получают мгновенное значение напряжения конденсатора:

$$u_C(t) = \begin{cases} u_{C1}(t) = \frac{U_{\max}}{\tau_1 - \tau_2} \left[1 - \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} + \frac{\tau_2 e^{-t/\tau_2}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} \right], & 0 \leq t \leq T/2 \\ u_{C2}(t) = \frac{U_{\max}}{\tau_1 - \tau_2} \left[\frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} - \frac{\tau_2 e^{-t/\tau_2}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} \right], & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\frac{u_C(T/2)}{U_{\max}} = \frac{U_{\max}}{U_{\max}} \frac{1 - \frac{\tau_1 e^{-T/2\tau_1}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} + \frac{\tau_2 e^{-T/2\tau_2}}{1 + e^{-T/2\tau_2}}}{U_{\max}} = \quad (*) (3 б)$$

$$\frac{1}{T} \frac{\tau_1 - \tau_2}{T} \left[1 - \frac{\tau_1 / T \cdot e^{-T/2\tau_1}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} + \frac{\tau_2 / T \cdot e^{-T/2\tau_2}}{1 + e^{-T/2\tau_1}} \right] = 0,5333 \quad (*) (2 б)$$

Ответ: 0,533

Приложения к решению задачи 5.2

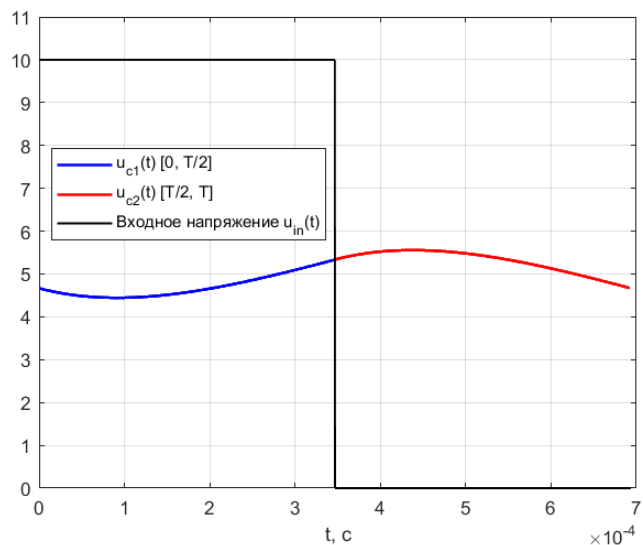
$$A_1 = -A_1' = -13,33 \text{ В}, \quad A_2 = -A_2' = -8 \text{ В}.$$

Приведенные в задаче соотношения для постоянных времени могут быть достигнуты при:

$$R = 6000 \text{ Ом}, \quad L = 1 \text{ Гн}, \quad C = 0,125 \text{ мкФ},$$

$$T = 10^{-3} \ln 2 \text{ с}.$$

График мгновенного значения напряжения конденсатора и входного напряжения приведен справа.



Задача 6 (20 баллов)

На входе цепи, представленной на рисунке, действует источник синусоидальной ЭДС. Сопротивления резисторов $R=100$ Ом, $R_1=10$ Ом и $R_2=1000$ Ом. При $u(t) > 0$ замкнут ключ K_2 (K_1 разомкнут). При $u(t) < 0$ замкнут ключ K_1 (K_2 разомкнут). Амперметр A_1 и вольтметр V_1 – магнитоэлектрической системы. Произведение показаний этих приборов равно 400 ВА. Определить показания амперметра A_2 и вольтметра V_2 электромагнитной системы.

Примечание. Приборы электромагнитной системы измеряют действующее значение, а магнитоэлектрической – среднее.

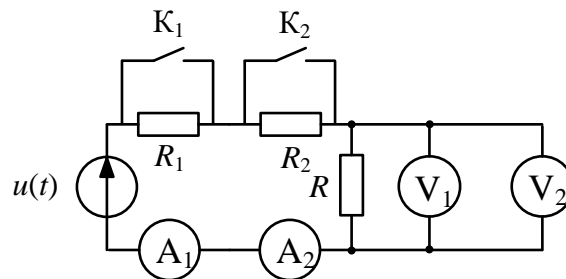


Схема к задаче 6

Решение. Постоянная составляющая несинусоидального напряжения на резисторе U_0 и постоянная составляющая тока I_0 связаны соотношением:

$$U_0 = I_0 R. \quad (1 \text{ б})$$

По условию задачи $U_0 I_0 = I_0^2 R = 400$, следовательно $I_0^2 = \frac{400}{100} = 4$, постоянная составляющая тока $I_0 = 2$ А.

$$(4 \text{ б})$$

Ток резистора R является кусочно-синусоидальным:

$$i(t) = \begin{cases} I_{m1} \sin \omega t, & 0 \leq t \leq T/2 \\ I_{m2} \sin \omega t, & T/2 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1 \text{ б})$$

Амплитуда тока на положительной и отрицательной полуволнах соответственно:

$$I_{m1} = \frac{U_m}{R_1 + R}, \quad I_{m2} = \frac{U_m}{R_2 + R}, \quad (*) \quad (1 \text{ б})$$

где U_m – амплитуда входного синусоидального напряжения.

Постоянная составляющая тока:

$$I_0 = \frac{I_{m1}}{\pi} - \frac{I_{m2}}{\pi} = \frac{U_m}{\pi} \left(\frac{1}{R_1 + R} - \frac{1}{R_2 + R} \right). \quad (5 \text{ б})$$

После подстановки численных значений получим:

$$\frac{U_m}{\pi} \left(\frac{1}{10 + 100} - \frac{1}{1000 + 100} \right) = 2,$$

следовательно, амплитуда входного напряжения $U_m = 767,9 \text{ В}$. (1 б)

В соответствии с (*) и рассчитанным U_m амплитуда тока на положительной полуволне $I_{m1} = 6,98 \text{ А}$, на отрицательной полуволне $I_{m2} = 0,698 \text{ А}$. (2 б)

Действующее значение тока (показание амперметра электромагнитной системы A_2):

$$I = \sqrt{\left(\frac{I_{m1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{I_{m2}}{2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6,9791}{2} \right)^2 + \left(\frac{0,6978}{2} \right)^2} = 3,51 \text{ А}. \quad (4 \text{ б})$$

Действующее значение напряжения на резисторе (показание вольтметра электромагнитной системы V_2) $U = IR = 351 \text{ В}$. (1 б)

Ответ: 3,51 А; 351 В