

МЕЖДУНАРОДНАЯ МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТОЭ

2024

Группа II

Задача 1 (5 баллов)

Пять одинаковых ламп, питающихся от источника постоянной ЭДС, соединены так, как показано на рис. 1.

Во сколько раз изменится мощность, выдаваемая источником, если перегорит лампа 1? При перегорании лампа представляется в виде разрыва. Считать лампы линейными элементами.

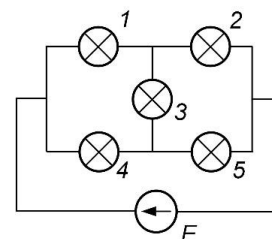


Рисунок 1

РЕШЕНИЕ

До перегорания лампы 1 в цепи имел место равновесный мост. Мощность, потребляемая всеми лампами, определяется выражением

$$P' = \frac{E^2}{R}. \quad (2 \text{ б})$$

После перегорания лампы 1 потребляемая мощность составит:

$$P'' = \frac{E^2}{R + 2/3 \cdot R} = \frac{3}{5} \frac{E^2}{R}. \quad (2 \text{ б})$$

Таким образом, потребляемая лампами мощность снизилась в 5/3 раз. (1 б)

Ответ: 5/3.

Задача 2 (20 баллов)

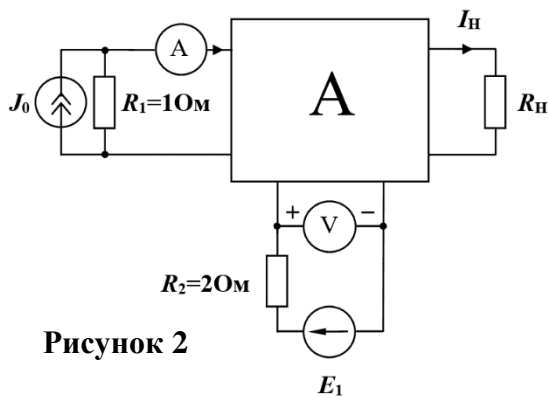


Рисунок 2

На рис.2 представлена цепь постоянного тока. Шестиполюсник **A** содержит активные элементы. В таблице приведены результаты измерений, выполненные с помощью идеальных приборов, при различных значениях параметров E_1 и J_0 .

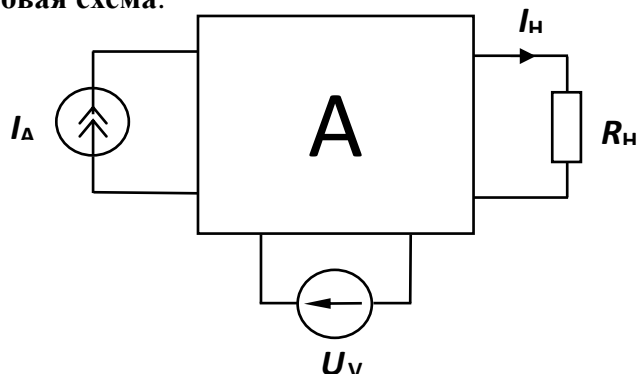
При каком показании вольтметра U_V и нулевом токе амперметра ($I_A = 0$) мощность в нагрузке будет равна нулю ($P_H = 0$)?

№ опыта	ток амперметра I_A , А	напряжение вольтметра U_V , В	ток нагрузки I_H , А
1	5	2	-7,1
2	50	10	-1
3	100	20	6

РЕШЕНИЕ

1) По теореме замещения: любой ДП с током I_k и напряжением U_k может быть заменен источником тока I_k или источником напряжения U_k .

Новая схема:



(4 б)

2) В соответствии с принципом суперпозиции:

$$I_H = H_I \cdot I_A + G \cdot U_V + I_{RЦ}, \quad (*)$$

где последняя составляющая – это «вклад» R – цепи с источниками.

(6 б)

3) По результатам измерений можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} -7,1 = H_I \cdot 5 + G \cdot 2 + I_{RЦ} \\ -1 = H_I \cdot 50 + G \cdot 10 + I_{RЦ} \\ 6 = H_I \cdot 100 + G \cdot 20 + I_{RЦ} \end{cases} \quad (2 б)$$

4) Необходимо найти показание вольтметра U_V при $I_A = 0$, когда мощность в нагрузке $P_H = 0$, т.е. ток $I_H = 0$.

=> из уравнения (*) для этого режима: $0 = H_I \cdot 0 + G \cdot U_V + I_{RЦ}$. (**) (2 б)

5) из (**) => $U_V = -I_{RЦ} / G$ т. е. нужно найти ДВА неизвестных коэффициента.

(2 б)

6) Решая систему уравнений **любым** способом находим: $I_{RЦ} = -8$ А, $G = 0,2$ См

$$U_V = -I_{RЦ} / G = 40 \text{ В.} \quad (4 \text{ б})$$

Ответ: $U_V = 40$ В.

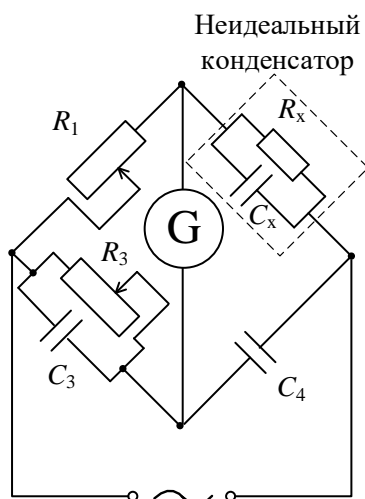


Рисунок 3

Задача 3 (10 баллов)

Для определения емкости и потерь в диэлектрике неидеального конденсатора применяется мостовая схема Шеринга (рис. 3). Были проведены измерения на частоте 50 Гц и получено, что $C_x = 50$ пФ, $\operatorname{tg} \delta = 0,01884$. Параметры элементов мостовой схемы $C_3 = 1,5$ мкФ, $C_4 = 100$ пФ. Определить, при каких значениях сопротивлений резисторов R_1 и R_3 проводились измерения. Здесь δ – угол, дополняющий угол сопротивления до 90° .

Примечание: принцип действия измерительной схемы основан на подборе таких величин сопротивлений регулируемых резисторов R_1 и R_3 , при которых показание гальванометра G равно нулю.

РЕШЕНИЕ

Решение задачи основано на условии равновесия моста (равенстве нулю тока гальванометра):

$$R_1(-jX_{C_4}) = \frac{R_3(-jX_{C_3})}{R_3 - jX_{C_3}} \cdot \frac{R_x(-jX)}{R_x - jX}. \quad (5 \text{ б})$$

Из данного выражения с учетом

$$X = 1/\omega C_x = 1/(314 \cdot 50 \cdot 10^{-12}) = 63,69 \text{ МОм},$$

$$R_x = X / \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_x} \operatorname{tg} \delta = 63,69 / 0,01884 = 3380,80 \text{ МОм}.$$

$$X_{C_3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}} = 2123,1 \text{ Ом},$$

$$X_{C_4} = \frac{1}{\omega C_4} = \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 31,85 \text{ МОм}$$

выделяются действительная и мнимая часть

$$R_1(-jX_{C_4})(R_3 - jX_{C_3})(R_x - jX) = R_3(-jX_{C_3}) \cdot R_x(-jX),$$

$$R_1(-j31,85 \cdot 10^6)(R_3 - j2123,1)(3380,80 - j63,69) \cdot 10^6 = R_3(-j2123,1) \cdot 3380,80 \cdot 10^6(-j63,69) \cdot 10^6,$$

$$R_1 \cdot 31,85 \cdot (R_3 - j2123,1)(3380,80 - j63,69) = R_3 \cdot 2123,1 \cdot 3380,80 \cdot (-j63,69),$$

$$R_1(R_3 - j2123,1) = R_3(79,95 - j4244,03) \rightarrow R_1 R_3 - j2123,1 R_1 = 79,95 R_3 - j4244,03 R_3 \rightarrow$$

$$R_1 \approx 80 \text{ Ом}, R_3 \approx 40 \text{ Ом}. \quad (5 \text{ б})$$

Ответ: $R_1 \approx 80$ Ом, $R_3 \approx 40$ Ом.

Задача 4 (15 баллов)

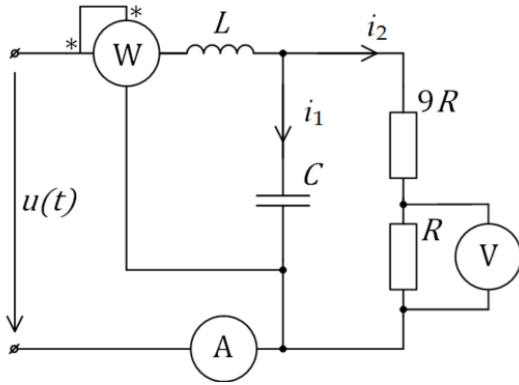


Рисунок 4

Для схемы на рис. 4 задано: $P_W = 800$ Вт, $U_V = 20$ В, $I_A = 5$ А, $L = 12,7$ мГн. Определите емкость конденсатора и напряжение синусоидального источника U , если известно, что $f = 50$ Гц.

РЕШЕНИЕ

Решение основано на анализе соотношений между параметрами режима электрической цепи.

Напряжение на RC -ветви определяется через показание вольтметра:

$$U_C = 10U_V = 200 \text{ В.}$$

В данном случае ваттметр измеряет активную мощность цепи. Тогда величина сопротивления резистивного элемента составляет

$$R = \frac{(10U_V)^2}{10P_W} = 10 \frac{U_V^2}{P_W} = 10 \cdot \frac{20^2}{800} = 50 \text{ Ом. (4 б)}$$

Сопротивление емкостного элемента определяется по закону Ома для действующих значений:

$$I_A = 10U_V \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \rightarrow X_C = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{I_A}{10U_V}\right)^2 - \frac{1}{(10R)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{200}\right)^2 - \frac{1}{50^2}}} = \frac{200}{3} = 66,7 \text{ Ом.}$$

$$\text{Отсюда } C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \cdot 66,7} = 47,7 \text{ мкФ. (3 б)}$$

Тогда напряжение источника составит:

$$U = I_A \left| jX_L + \frac{10R(-jX_C)}{10R - jX_C} \right| = 5 \cdot \left| j12,7 \cdot 10^{-3} \cdot 314 + \frac{50(-j66,7)}{50 - j66,7} \right| = 188,8 \text{ В. (8 б)}$$

Ответ: $C = 47,7$ мкФ, $U = 188,8$ В.

Задача 5 (10 баллов)

К симметричному трехфазному источнику подключены два приемника так, как показано на рис. 5 ($R = X_L / 10 = 10X_C$).

Определить отношение значений показаний ваттметров.

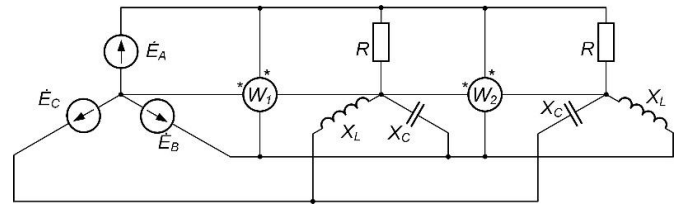


Рисунок 5

РЕШЕНИЕ

Показания ваттметров (обозначения на рис. 5, а):

$$P_2 = U_{AB} I_{N2} \cos \varphi_2,$$

$$P_1 = U_{AB} I_N \cos \varphi.$$

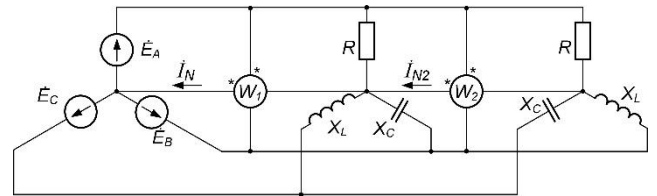


Рисунок 5.а

Для второго приемника ток нейтрального проводника:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{N2} &= \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{C2} = \frac{\underline{E}_A}{R} + \frac{\underline{E}_B}{jX_L} + \frac{\underline{E}_C}{-jX_C} = \frac{E}{R} + \frac{Ee^{-j120}}{10R e^{j90}} + \frac{10Ee^{j120}}{R e^{-j90}} = \frac{E}{R} \left(1 + \frac{e^{-j210}}{10} + 10e^{j210} \right) = \\ &= 9,2 \frac{E}{R} e^{-j147,4^\circ} \end{aligned}$$

Для первого приемника сумма фазных токов составит:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{N1} &= \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = \frac{\underline{E}_A}{R} + \frac{\underline{E}_B}{-jX_C} + \frac{\underline{E}_C}{jX_L} = \frac{E}{R} + \frac{10Ee^{-j120}}{R e^{-j90}} + \frac{Ee^{j120}}{10R e^{j90}} = \frac{E}{R} \left(1 + 10e^{-j30} + \frac{e^{j30}}{10} \right) = \\ &= 10,932 \frac{E}{R} e^{-j26,9^\circ}. \end{aligned}$$

Ток в нейтральном проводе источника:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{N1} + \underline{I}_{N2} = 10,932 \frac{E}{R} e^{-j26,9^\circ} + 9,2 \frac{E}{R} e^{-j147,4^\circ} = 10,1 \frac{E}{R} e^{-j78,6^\circ}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_{AB} I_N \cos \varphi_1}{U_{AB} I_{N2} \cos \varphi_2} = \frac{U_{AB} 10,1 \frac{E}{R} \cos(30^\circ + 78,6)}{U_{AB} 9,2 \frac{E}{R} \cos(30^\circ + 147,4^\circ)} = 0,35$$

Ответ: $P_1 / P_2 = 0,35$ или $P_2 / P_1 = 2,86$.

Задача 6 (20 баллов)

На рис. 6 после размыкания ключа напряжение на вторичных выводах пассивного четырехполюсника изменяется по закону $u_{\text{вых}}(t) = 0,8e^{-200t}$ (В). Известно, что $R_0 = 0,1$ Ом, $R_H = 4R_0$, J_0 – источник постоянного тока. На некоторой угловой частоте ω ЧП имеет матрицу A -параметров $A = \begin{bmatrix} 1 & jx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Приведите схему четырехполюсника, если он содержит один реактивный элемент, и определите $u_{\text{вх}}(t)$.

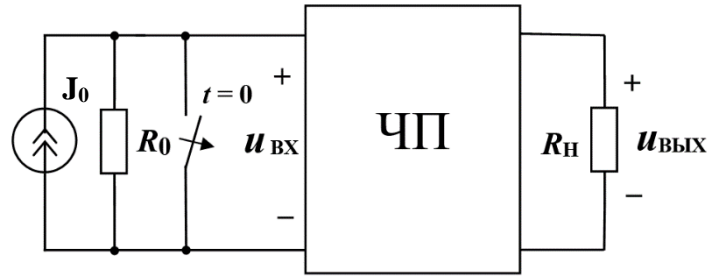


Рисунок 6

РЕШЕНИЕ

(ЗТК – закон токов Кирхгофа; ЗНК – закон напряжений Кирхгофа; КЗ – короткое замыкание; ХХ – холостой ход; ФДТ – формула делителя токов).

Для представленной матрицы A -параметров может быть составлена схема ЧП, описываемая следующими уравнениями:

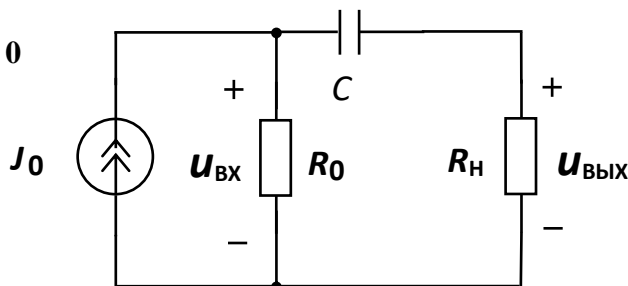
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = 1 \cdot \dot{U}_2 + jx \cdot (-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = 0 \cdot \dot{U}_2 + 1 \cdot (-\dot{I}_2) \end{cases}, (8 \text{ б})$$

(4 балла)

4) В цепи **нулевые** начальные условия, поэтому если реактивный элемент – это L -элемент, то при для $t = 0^+ L \equiv \text{ХХ} \Rightarrow u_{\text{вых}}(0^+) = 0$, что противоречит условию задачи – начальному условию $u_{\text{вых}}(0^+) = 0,8$. Таким образом, реактивный элемент это C – элемент (для $t = 0^+ C \equiv \text{КЗ}$)

(4 б)

5) Схема цепи $t > 0$

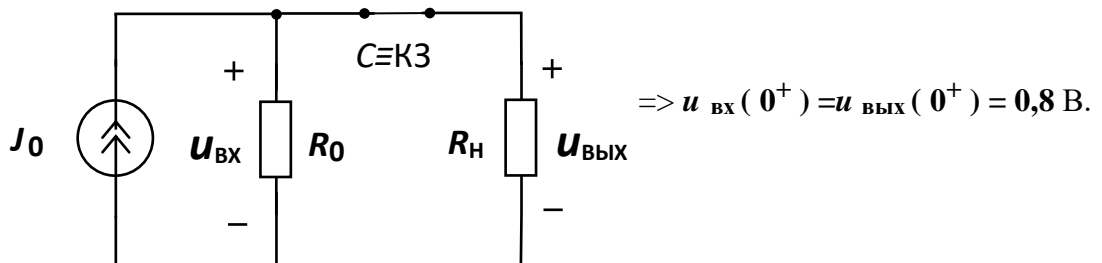


Общий вид решения : $u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{вхПР}} + A \exp(-200t)$. (*)

(1 б)

б) $t = 0^+ u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \Rightarrow C \equiv \text{КЗ}$

Схема для этого режима:

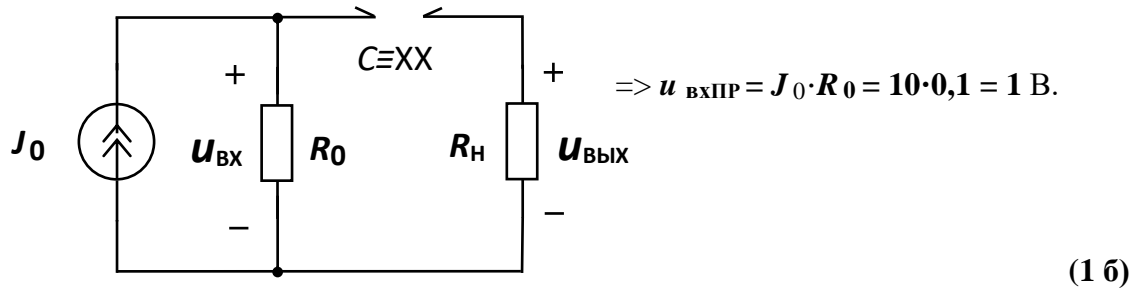


$$I_H(0^+) = \frac{u_{\text{ВЫХ}}(0^+)}{R_H} = \frac{0,8}{0,4} = 2 \text{ А.}$$

По ФДТ $I_H(0^+) = J_0 \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_H} = J_0 \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow J_0 = 10 \text{ А}$ (3 б)

7) $t \rightarrow \infty, J_0 = \text{const} \Rightarrow C \equiv \text{XX}$

Схема для этого режима:



8) Запись решения: $u_{\text{ВХПР}} = 1 \text{ В}; u_{\text{ВХ}}(0^+) = 0,8 \text{ В} \Rightarrow$ уравнение (*):

$$u_{\text{ВХ}}(t) = 1 - 0,2 \exp(-200t), \text{ В} \quad (1 \text{ б})$$

9) Величина емкости определяется в соответствии со значением корня ХУ:

$$R_0 + R_H + \frac{1}{pC} = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{(R_0 + R_H)p} = -\frac{1}{(0,1 + 4 \cdot 0,1) \cdot (-200)} = 0,01 \text{ Ф.} \quad (2 \text{ б})$$

Ответ: 1) Схема ЧП приведена выше, $C = 0,01 \text{ Ф.}$

2) при $t > 0$ $u_{\text{ВХ}}(t) = 1 - 0,2 \exp(-200t), \text{ В}$

Задача 7 (на выбор*)

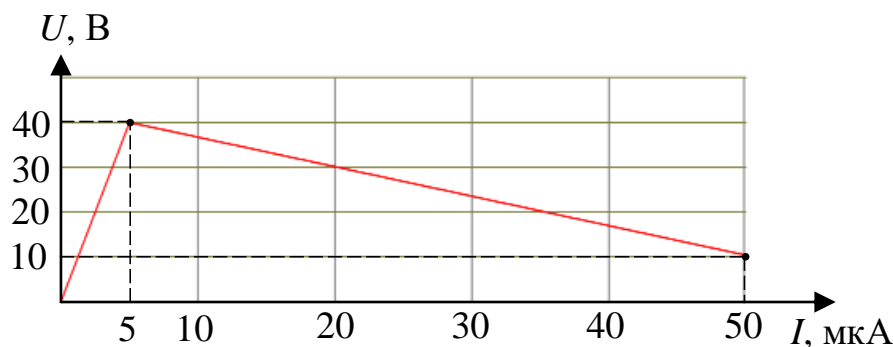


Рисунок 7.а

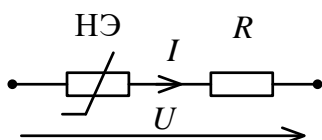


Рисунок 7.б

Вариант 1 (20 баллов)

Имеется нелинейный резистивный элемент, вольт-амперная характеристика которого кусочно-линейно аппроксимирована (рис.7.а).

Последовательно с ним включается линейный резистивный элемент (рис. 7.б). Определить диапазон изменения параметра R линейного резистора при условии, что изменение тока I в цепи от 5 до 50 мкА не вызовет изменения напряжения U более чем на 5 В.

РЕШЕНИЕ

В соответствии с рис. 7.а при изменении тока от 5 до 50 мкА диапазон изменения напряжения на нелинейном элементе (НЭ) составляет $10 \div 40$ В. Последовательное включение с НЭ линейного резистора будет приводить к изменению ВАХ $U(I)$. Поскольку на участке (5 мкА: 50 мкА) НЭ описывается линейной функцией, то в результате суммирования $U_{\text{НЭ}}(I) = a + bI$ и $U_R(I) = RI$ будет также получена линейная функция.

Определим аналитическое выражение для ВАХ НЭ на участке (5 мкА: 50 мкА) по двум точкам:

$$\begin{cases} 40 = a + b \cdot 5 \\ 10 = a + b \cdot 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 130/3 \text{ В} \\ b = -2/3 \text{ В/мкА} \end{cases}$$

ВАХ эквивалентного НЭ определяется выражением:

$$U(I) = U_{\text{НЭ}}(I) + U_R(I) = a + bI + RI = a + I(b + R) = \frac{130}{3} + \left(-\frac{2}{3} + R\right)I, \quad (1)$$

$$[b] = \text{В/мкА} = 10^6 \text{ В/А} = \text{МОм}, [R] = \text{МОм}.$$

В соответствии с выражением (1) может быть определен диапазон изменения напряжения при изменении тока от 5 до 50 мкА. Для этого рассмотрим значения напряжения на эквивалентном НЭ при указанных граничных значениях тока:

$$U(I) = U_{\text{НЭ}}(I) + U_R(I) = a + bI + RI = a + I(b + R) = \frac{130}{3} + \left(-\frac{2}{3} + R\right)I,$$

$$U(I = 5 \text{ мкА}) = \frac{130}{3} + \left(-\frac{2}{3} + R\right) \cdot 5 = 40 + 5R = U_5,$$

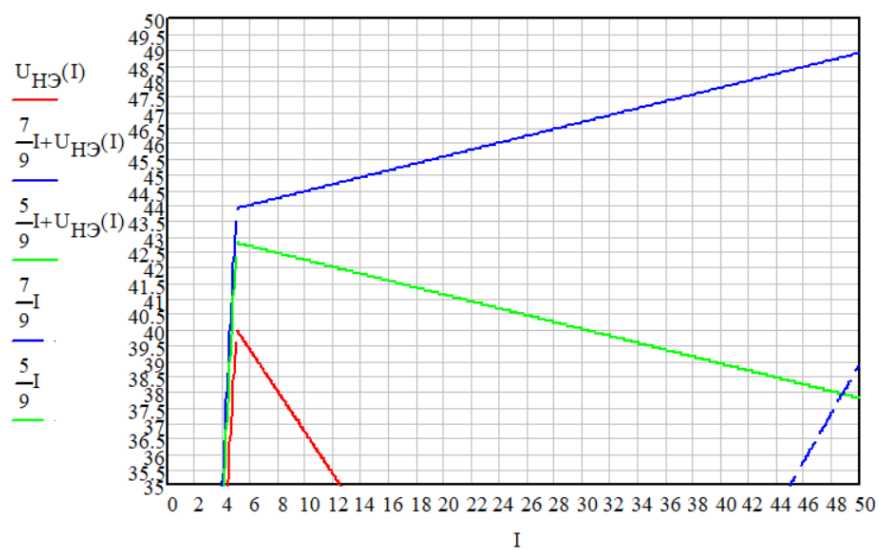
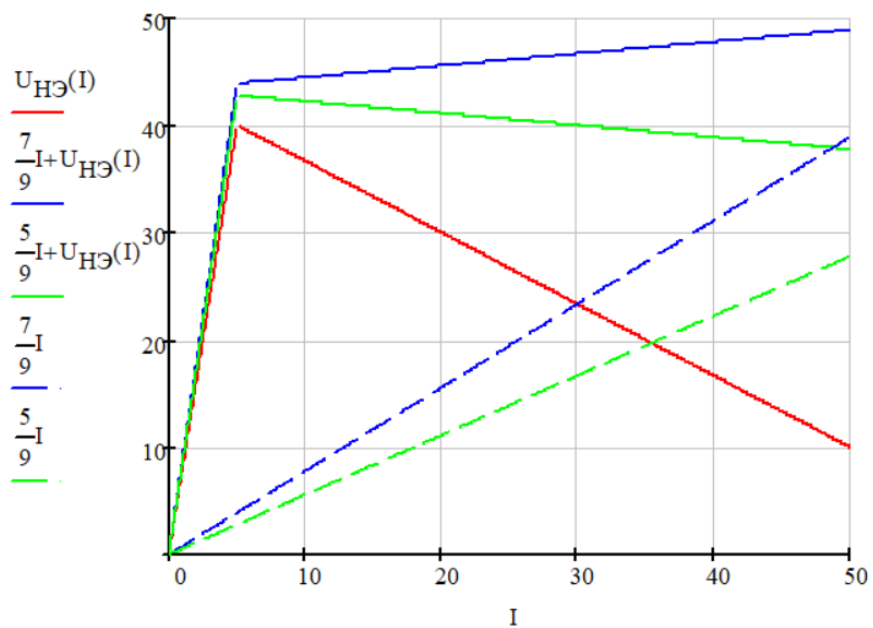
$$U(I = 50 \text{ мкА}) = \frac{130}{3} + \left(-\frac{2}{3} + R\right) \cdot 50 = 10 + 50R = U_{50}.$$

Изменение напряжения в диапазоне 5 В на указанном участке ВАХ определяется выражением:

$$|U_{50} - U_5| \leq 5 \rightarrow |10 + 50R - (40 + 5R)| \leq 5 \rightarrow |45R - 30| \leq 5 \rightarrow \begin{cases} R \geq 0 \\ 45R - 30 \leq 5 \\ -(45R - 30) \leq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R \geq 0 \\ R \leq \frac{7}{9} \text{ МОм.} \\ R \geq \frac{5}{9} \text{ МОм} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{5}{9} \text{ МОм} \leq R \leq \frac{7}{9} \text{ МОм.}$

Графический вид полученных решений представлен ниже (по заданию не требуется).



Вариант 2 (20 баллов)

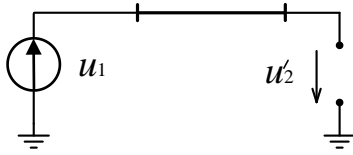


Рисунок 7.б

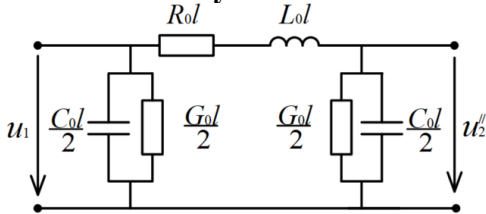


Рисунок 7.г

Длинная линия работает в режиме холостого хода (рис. 7.в). Линия получает питание от синусоидального источника с действующим значением $U_1 = 750$ кВ и частотой $f = 50$ Гц. Ее первичные параметры $L_0 = 0,980$ мГн/км, $C_0 = 9,052 \cdot 10^{-9}$ нФ/км, $R_0 = 0,024$ Ом/км, $G_0 = 6,9 \cdot 10^{-9}$ См/км, l – длина линии.

На рис. 7.г изображен четырехполюсник, параметры которого определяются через параметры длинной линии.

Докажите, что при небольших длинах линии, когда справедливо соотношение

$$e^{\underline{\gamma}l} \approx 1 + \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2},$$

будет выполняться равенство $U_2' = U_2''$, где $\underline{\gamma}$ – коэффициент распространения волны.

РЕШЕНИЕ

Решение задачи основано на анализе соотношений для установившихся режимов длинной линии и четырехполюсника в режиме холостого хода.

Для расчета режима цепи с распределенными параметрами определяются волновое сопротивление и коэффициент распространения:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}, \quad \underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (2 \text{ б})$$

Напряжение на конце разомкнутой линии определяется выражением:

$$U_2' = \left| \frac{\underline{U}_1}{\text{ch } \underline{\gamma}l} \right| \approx \left| \frac{\underline{U}_1}{1 + \frac{\underline{\gamma}^2 l^2}{2}} \right| = U_1 \frac{1}{\left| 1 + \frac{\underline{\gamma}^2 l^2}{2} \right|}. \quad (4 \text{ б})$$

Здесь учтено, что

$$\text{ch } \underline{\gamma}l = \frac{e^{+\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}}{2} = \frac{1 + \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2} + 1 - \underline{\gamma}l + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2}}{2} = 1 + \frac{(\underline{\gamma}l)^2}{2}.$$

Напряжение на выводах ненагруженного четырехполюсника будет иметь вид:

$$U_2'' = \left| U_1 \frac{\frac{2}{(G_0 + j\omega C_0)l}}{(R_0 + j\omega L_0)l + \frac{2}{(G_0 + j\omega C_0)l}} \right| = U_1 \left| \frac{1}{\frac{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)l^2}{2} + 1} \right| = U_1 \left| \frac{1}{\frac{\underline{\gamma}^2 l^2}{2} + 1} \right| = U_2',$$

что требовалось доказать (2 б + 12 б).

Примечание. Утверждение было доказано для общего случая. Следует иметь в виду, что доказательство для частного случая (при заданных исходных данных) является недостаточным. Это связано с тем, что в условии задачи не вводится критерий достаточной

точности решения. В таком случае решение предлагается оценивать не более чем на 12 б. Результаты некоторых промежуточных вычислений приведены ниже.

$$\underline{\gamma} = 3,758 \cdot 10^{-5} + j9,364 \cdot 10^{-4} \text{ 1/км,}$$

$$\underline{Z}_C = 329,5 \angle -2,2^\circ \text{ Ом,}$$

$$X_0 = \omega L_0 = 0,308 \text{ Ом/км,}$$

$$B_0 = \omega C_0 = 2,844 \cdot 10^{-6} \text{ См/км.}$$