

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

ОПТИКА И АТОМНАЯ ФИЗИКА

Задачник

по курсу «Физика»

для студентов, обучающихся по направлениям:

10.03.01 «Информационная безопасность»,

11.03.01 «Радиотехника»,

11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника»,

12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»,

13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»,

11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы»

Москва
Издательство МЭИ
2022

УДК 535
ББК 22.3
О 627

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Подготовлено на кафедре физики им. В.А. Фабриканта

Рецензенты: А.А. Машиньян, проф. каф. физики
им. В.А. Фабриканта НИУ «МЭИ», докт. пед. наук;
П.Г. Зверев, вед. науч. сотр. Института общей физики
им. А.М. Прохорова РАН, докт. физ.-мат. наук

Авторы: С.В. Григорьев, Е.В. Зелепукина, Л.Г. Лапина,
К.М. Лапицкий, А.Е. Тарасов, Г.М. Янина

О 627 Оптика и атомная физика: задачник / С.В. Григорьев, Е.В. Зелепукина, Л.Г. Лапина и др. – М.: Издательство МЭИ, 2022. – 104 с.

ISBN 978-5-7046-2692-3

Содержит набор задач по разделам оптики и атомной физики учебного плана курса общей физики МЭИ. В каждом разделе подобраны задачи различной степени трудности. В начале каждого раздела приведены кратко элементы теории и методические указания к решению задач. Все задачи снабжены ответами. В задачнике используется система единиц СИ.

Предназначено для студентов всех специальностей ИРЭ, ИЭЭ, ИГВИЭ, ИЭТЭ, ИнЭИ.

**УДК 535
ББК 22.3**

ISBN 978-5-7046-2692-3

© Национальный исследовательский
университет «МЭИ», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|------------------------------------------------------------|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | 4 |
| 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ | 5 |
| 2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА | 10 |
| 3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА | 20 |
| 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА | 30 |
| 5. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА | 39 |
| 6. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ | 44 |
| 7. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА | 54 |
| 8. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ | 63 |
| 9. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА | 70 |
| 10. АТОМ ВОДОРОДА | 80 |
| ОТВЕТЫ | 86 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник содержит задачи для самостоятельного решения по основным разделам волновой и квантовой оптики, атомной физики и элементам квантовой механики, которые необходимы для развития у студентов умения практически использовать теоретические знания. Каждый раздел снабжен кратким теоретическим введением и примерами решения типовых задач, которые соответствуют учебному плану курса общей физики МЭИ. Также может быть использован для проведения практических занятий и подготовки к проведению контрольных мероприятий по оптике и атомной физике в институтах: ИРЭ, ИЭЭ, ИГВИЭ, ИЭТЭ, ИнЭИ.

Задачник является переработанным изданием кафедрального задачника по курсу общей физики под редакцией И.В. Гвоздовского 2002 г. издания (авторы: И.В. Авилова, И.В. Гвоздовский, С.В. Григорьев, Е.В. Зелепукина, Е.Ф. Ищенко, Г.М. Янина). Во всех разделах переработан теоретический материал, который включает в себя формулировки физических законов данного раздела, запись основных формул и теорем, методические указания по решению задач данного раздела. В задачнике сохранен порядок следования материала. По сравнению с предыдущим изданием также исправлены опечатки в ответах.

Для успешного решения приведенных задач авторы рекомендуют воспользоваться книгой Е.М. Новодворской и Э.М. Дмитриева «Сборник задач по физике с решениями для втузов», а также сборником задач с решениями «Волновая и квантовая оптика» (авторы И.В. Гвоздовский, Е.В. Зелепукина, И.А. Лапицкая, К.М. Лапицкий, И.Н. Павлов, А.Ю. Поройков, Г.М. Янина, Издательство МЭИ, 2016 г.).

Задачи и примеры подготовлены коллективом авторов: Григорьевым С.В. (разделы 1, 5, 8), Зелепукиной Е.В. (раздел 3), Лапиной Л.Г. (разделы 6, 7), Лапицким К.М. (раздел 4), Тарасовым А.Е. (разделы 9, 10), Яниной Г.М. (раздел 2).

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Электромагнитное излучение распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн. Электромагнитная волна характеризуется четырьмя векторами: напряжённостью электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей, вектором электрического смещения \vec{D} и индукцией магнитного поля \vec{B} . В изотропных средах векторы \vec{E} , \vec{D} и \vec{H} , \vec{B} попарно коллинеарны:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где ϵ_0 , μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, а ϵ и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. В немагнитных средах $\mu = 1$.

Векторы \vec{E} и \vec{H} поля электромагнитной волны взаимно перпендикулярны, так что вектор скорости распространения волны \vec{v} , векторы \vec{E} и \vec{H} образуют правую тройку векторов:

$$\vec{E} = [\mu_0 \mu \vec{H}; \vec{v}], \quad \vec{H} = [\vec{v}; \epsilon_0 \epsilon \vec{E}].$$

Векторы электромагнитной волны связаны уравнениями Максвелла и материальными уравнениями. Это позволяет рассматривать при анализе излучения лишь один из них, обычно это вектор \vec{E} . Другие векторы определяются через него. Так, например, в поле плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси z , существуют только две компоненты векторов \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} , ориентированные по осям x и y :

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 \epsilon E_x, & H_x &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_y, & B_x &= -\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E_y; \\ D_y &= \epsilon_0 \epsilon E_y, & H_y &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_x, & B_y &= -\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E_x. \end{aligned}$$

Электромагнитная волна поперечна. Это означает, что векторы \vec{E} и \vec{H} поля волны в любой момент времени ориентированы перпендикулярно вектору скорости волны \vec{v} .

Монохроматической называется волна, в каждой точке поля которой векторы \vec{E} и \vec{H} совершают гармонические колебания с одинаковой частотой.

Уравнение монохроматической волны имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r})),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r})$ – амплитуда колебаний вектора напряжённости электрического поля, $(\omega t + \varphi(\vec{r}))$ – фаза волны в точке с радиус-вектором \vec{r} . Точки, в

которых колебания происходят в одной фазе, образуют *волновую поверхность* или *волновой фронт*. Форма волновой поверхности задается уравнением для пространственной составляющей фазы:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

В зависимости от формы волновой поверхности выделяют различные типы волн: плоские, сферические, цилиндрические и т.д. Например, в плоской волне волновые поверхности имеют форму плоскостей, перпендикулярных направлению распространения волны. Уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси z , может быть представлено в виде:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0),$$

где E – проекция вектора \vec{E} на любое фиксированное направление, перпендикулярное оси z ; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая (круговая) частота волны; $\nu = \frac{2\pi}{T}$ – частота гармонических колебаний; T – период гармонических колебаний; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ – волновое число; λ – длина волны; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Фазовая скорость распространения электромагнитной волны v может быть выражена через электрическую и магнитную постоянные и характеристики среды:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды. В вакууме $n = 1$, $v = c$.

Электромагнитная волна переносит энергию со скоростью v , равной фазовой скорости волны, объёмная плотность которой равна

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} E H = \frac{E H}{v}.$$

Вектор плотности потока электромагнитной энергии (*вектор Пойнтинга*)

$$\vec{S} = w \vec{v} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Для плоской линейно поляризованной монохроматической волны вектор \vec{S} направлен в сторону распространения волны, а его модуль равен

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz).$$

Интенсивностью волны называется величина, равная средней энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны. Интенсивность электромагнитной волны равна модулю среднего хроматической волны:

$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2.$$

Электромагнитная волна переносит *импульс* (на единицу объема), равный

$$\vec{K} = \frac{\vec{S}}{v^2} = \frac{[\vec{E}; \vec{H}]}{v^2},$$

и поэтому оказывает давление на плоскую поверхность тела при наклонном падении и частичном отражении, равное

$$P = \langle w \rangle (1 + \rho) \cos^2 i,$$

где i – *угол падения* волны на поверхность, ρ – *коэффициент отражения*.

Примеры решения задач

Пример III.1

Плоская электромагнитная волна распространяется в немагнитной среде ($\mu = 1$) вдоль оси x . Напряжённость электрического поля изменяется по закону

$$E_y = 1,5 \sin \left[2\pi \cdot 10^{14} \left(t - \frac{x}{1,5 \cdot 10^8} \right) \right]$$

(все численные значения даны в единицах СИ, значения физических постоянных приведены в разделе «Физические постоянные»). Найти период, длину волны и амплитуду вектора Пойнтинга.

РЕШЕНИЕ

Уравнение плоской монохроматической волны независимо от её природы имеет вид $A = A_0 \sin(\omega t - kx)$, где A_0 – амплитуда колеблющейся величины, $k = 2\pi/\lambda$. Сравнивая это уравнение с заданным в условии выражением, получаем: круговая частота $\omega = 6,3 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 10^{14}}{1,5 \cdot 10^8} \text{ м}^{-1}, \text{ длина волны } \lambda = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м, период колебаний}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,0 \cdot 10^{-14}$ с, фазовая скорость $v = \lambda/T = 1,5 \cdot 10^8$ м/с, амплитуда напряжённости электрического поля $E_0 = 1,5$ В/м, амплитуда напряжённости магнитного поля $H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_0 = \frac{E_0}{\mu_0 \mu v} = 8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{м}}$, амплитуда вектора Пойнтинга $S_0 = E_0 H_0 = 1,2 \cdot 10^{-2}$ Вт/м².

Задачи

1.1. Уравнение бегущей электромагнитной волны имеет вид $E = E_0 \cos(At + Bx)$. Чему равна длина волны? Какова скорость волны? В каком направлении волна распространяется?

1.2. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 3,0$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4,0$. Найти изменение её длины волны.

1.3. Используя метод фазовых диаграмм, показать, что

$$E_0 \sin \omega t + E_0 \sin(\omega t + \varphi) + E_0 \sin(\omega t + 2\varphi) = E_0 (1 + 2 \cos \varphi) \sin(\omega t + \varphi).$$

1.4. В однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$, магнитной проницаемостью $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряжённости электрического поля $E_0 = 200$ В/м. Найти для этой волны скорость распространения, амплитуду магнитной индукции и амплитуду вектора Пойнтинга.

1.5. В среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$, магнитной проницаемостью $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряжённости электрического поля $E_0 = 200$ В/м и частотой $\nu = 500$ кГц. В её поле находится свободный электрон. Какова амплитуда колебаний электрона и его максимальная скорость?

1.6. Электрон движется в вакууме со скоростью $v_e = 0,1 \cdot c$ (c – скорость света в вакууме) вдоль направления распространения волны. 1) рассчитать амплитуду силы, действующей на электрон в поле электромагнитной волны с амплитудой вектора Пойнтинга $S_0 = 1,0$ Вт/см²; 2) найти отношение амплитуд сил, действующих на электрон со стороны магнитного и электрического полей электромагнитной волны.

1.7. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя немагнитного вещества ($\mu = 1$) толщиной ℓ , диэлектрическая проницаемость которого экспоненциально падает от значения ϵ_1 на передней поверхности слоя до ϵ_2 на задней. Найти время распространения волны через этот слой.

1.8. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, уравнение которой $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Найти вектор \vec{H} в точке $\vec{r} = x\vec{i}_x$ в момент времени $t_0 = 33$ нс, если $x = 7,7$ м, $\vec{k} = k\vec{i}_x$, $k = 0,51$ м⁻¹, $\vec{E}_0 = E_0\vec{i}_y$, $E_0 = 150$ В/м. Найти среднее значение вектора Пойнтинга.

1.9. Найти скорость распространения электромагнитной волны в коаксиальном кабеле, в котором пространство между внешним и внутренним проводом заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4,5$.

1.10. Воздух начинает ионизироваться при напряженности электрического поля $E = 30$ кВ/см. При какой средней плотности потока энергии плоской электромагнитной волны достаточно малой частоты в воздухе может произойти ионизация?

1.11. Лампа-вспышка мощностью 3 Вт образует пучок света квадратного сечения 10×10 см². Найти среднее значение плотности потока излучения, а также амплитудные значения напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля.

1.12. Падающему на Землю потоку солнечного излучения соответствует среднее значение вектора Пойнтинга $\langle S \rangle = 1,35$ кВт/м². Чему равны соответствующие значения амплитуды напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля электромагнитной волны?

1.13. Плотность потока энергии в импульсе излучения лазера равна 10^{11} Вт/см². Найти среднюю амплитуду напряжённости поля E_0 электромагнитной волны.

1.14. Плоская гармоническая электромагнитная волна в немагнитной среде имеет следующие параметры: амплитуда напряжённости электрического поля $E_0 = 5,0 \cdot 10^{-2}$ В/м; длина волны $\lambda = 100$ м; частота волны $\nu = 1,5$ МГц. Какая энергия переносится волной за время $\tau = 10$ мин через площадку $s = 1,0$ м², расположенную перпендикулярно скорости распространения волны?

1.15. Импульс, переносимый плоской электромагнитной волной в вакууме через площадку $s = 70$ см² за время $\tau = 5,0$ с, равен $K = 1,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с. Найти интенсивность волны.

1.16. Какое давление оказывает плоская электромагнитная волна на преграду, коэффициент отражения которой $\rho = 0,9$, расположенную под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению распространения волны, если амплитуда напряжённости магнитного поля волны равна $H_0 = 3,0 \cdot 10^{-4}$ А/м?

1.17. Шар радиусом $r = 0,5$ м находится в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля $E_0 = 200$ В/м. Какая энергия падает на шар за время $t = 1$ мин? Какое давление оказывает электромагнитная волна на шар при полном её поглощении?

1.18. Все излучение от дуговой лампы мощностью 1 кВт собирается в пучок кругового сечения радиусом 10 см. Если направить пучок на зеркало, то с какой силой он будет давить на зеркало? Какова плотность энергии в пучке?

1.19. Частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на неё свет. Найти радиус частицы, при котором гравитационное притяжение её к Солнцу будет компенсироваться силой светового давления. Мощность светового излучения Солнца $N = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, плотность частицы $\rho = 1$ г/см³.

1.20. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряжённости магнитного поля $H_0 = 0,05$ А/м. Волна падает нормально на поверхность тела, полностью поглощающего волну. Определить: а) амплитуду напряжённости электрического поля E_0 ; б) среднюю по времени плотность энергии волны $\langle w \rangle$; в) интенсивность волны I ; г) среднюю по времени плотность импульса волны $\langle \vec{k} \rangle$; д) давление P , оказываемое волной на тело.

2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференция световых волн – явление, возникающее при одновременном распространении в пространстве двух или нескольких когерентных волн. При наложении когерентных волн друг на друга происходит их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление – в других.

В случае интерференции двух волн распределение интенсивности в пространстве описывается выражением:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi,$$

где I_1, I_2 – интенсивности интерферирующих волн, $\Delta\varphi$ – разность фаз между интерферирующими волнами в данной точке.

Необходимым условием когерентности двух волн является их монохроматичность (равенство частот) и постоянство во времени разности фаз.

На практике когерентность волн достигается делением волнового фронта или делением амплитуды одной первичной волны.

Результат интерференции двух когерентных волн зависит от разности фаз $\Delta\varphi$ в точке их сложения. *Интерференционная картина*, наблюдаемая на экране, помещенном на пути распространения волн, представляет собой устойчивое во времени чередование максимумов и минимумов интенсивности.

Максимумы интенсивности наблюдаются при $\Delta\varphi = 2\pi t$, *минимумы* интенсивности – при $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ – порядок интерференционного максимума или минимума.

Разность фаз $\Delta\varphi$ определяется *оптической разностью хода* Δ :

$$\Delta = n_2\ell_2 - n_1\ell_1, \Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda_0,$$

где λ_0 – длина волны света в вакууме; n_1, n_2 – показатели преломления сред, в которых распространяются интерферирующие волны; ℓ_1, ℓ_2 – геометрические длины пути от каждого источника света до точки наблюдения.

При отражении световой волны от оптически более плотной среды происходит изменение оптической длины на $\lambda_0/2$ (изменение фазы волны на π).

Для характеристики контрастности интерференционной картины вводят величину глубины модуляции (видности):

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Видность интерференционной картины может находиться в интервале $0 \leq V \leq 1$. В частности, если амплитуды волн одинаковы, то в максимуме интенсивность увеличивается в 4 раза в сравнении с интенсивностью одной волны, а в минимуме волны полностью гасят друг друга; при этом видность интерференционной картины равна 1.

Опыт Юнга – наблюдение интерференции от двух когерентных источников света, полученных путем деления волнового фронта на непрозрачном экране с двумя отверстиями (щелями). Ширина интерференционной полосы – расстояние между соседними максимумами или минимумами интенсивности в интерференционной картине, полученной на экране в плоскости наблюдения. Она вычисляется по формуле:

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \lambda L/\ell,$$

где x_m – координата m -го интерференционного максимума (минимума), m – порядок интерференционной полосы, λ – длина волны источника

света, ℓ – расстояние между источниками, L – расстояние от плоскости, в которой находятся источники света, до экрана.

К схеме Юнга сводятся все интерференционные схемы с делением волнового фронта.

Кольца Ньютона – кольцевые интерференционные полосы равной толщины, наблюдающиеся в оптической системе, состоящей из плоско-выпуклой линзы и соприкасающейся с ней толстой стеклянной пластины.

Радиус m -го темного кольца в отраженном свете (или светлого кольца в проходящем свете) вычисляется по формуле:

$$r_m = \sqrt{2d_m R} = \sqrt{m\lambda R/n},$$

где d_m – толщина промежутка между поверхностью плоско-выпуклой линзы и плоскостью пластины на расстоянии r_m от центра, R – радиус кривизны рабочей поверхности плоско-выпуклой линзы, n – показатель преломления среды промежутка ($n < n_{\text{стекла}}$), m – порядок темного кольца, $m = 1, 2, 3, \dots$.

Радиус светлого кольца в отраженном свете (или темного в проходящем свете) вычисляется по формуле

$$r_m^{\text{CB}} = \sqrt{(2m-1)\lambda R/(2n)}.$$

Оптическая сила D тонкой линзы с фокусным расстоянием F ($F = 1/D$) и радиусами кривизны преломляющих поверхностей R_1 и R_2 определяется соотношением:

$$D = (n_{\text{ст}} - 1)(1/R_1 - 1/R_2),$$

где $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления материала линзы.

Тонкие пленки и оптический клин – оптические элементы, в которых наблюдается интерференция света (полосы равного наклона и равной толщины). Оптическая разность хода лучей в пленке (отраженный свет) определяется соотношением:

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина клина или пленки, n_1 – показатель преломления среды, в которой распространяется падающий на пленку луч света, n_2 – показатель преломления пленки, i – угол падения луча, $\lambda/2$ – дополнительная разность хода при отражении от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$).

Просветляющие покрытия – тонкие пленки, которые наносятся на рабочие поверхности линз для уменьшения потерь на отражение.

Толщина пленки $d_{пл}$ и ее показатель преломления $n_{пл}$ подбираются так, чтобы волны, отраженные от обеих ее поверхностей, гасили друг друга:

$$n_{пл} = \sqrt{n_{см}}, \quad d_{пл} = \lambda / (4n_{пл}).$$

При нормальном падении света на тонкий оптический клин ширина интерференционных полос (в отраженном свете) равна $\Delta x = \lambda / (2n\varphi)$, где λ – длина волны света, φ – угол при вершине клина, n – показатель преломления материала клина.

Примеры решения задач

Пример П2.1

Найти расстояние от центра интерференционной картины до четвертой светлой полосы в опыте с бипризмой Френеля. Показатель преломления призмы $n = 1,5$; преломляющий угол $\alpha = 20'$, расстояние от источника света с длиной волны $\lambda = 600$ нм до бипризмы $a = 10$ см, расстояние от бипризмы до экрана $b = 1,00$ м (рис. 2.1, 2.2).

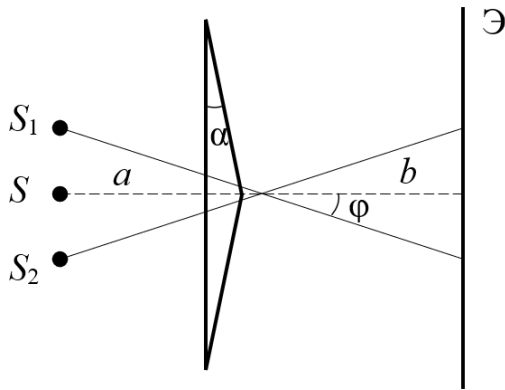


Рис. 2.1

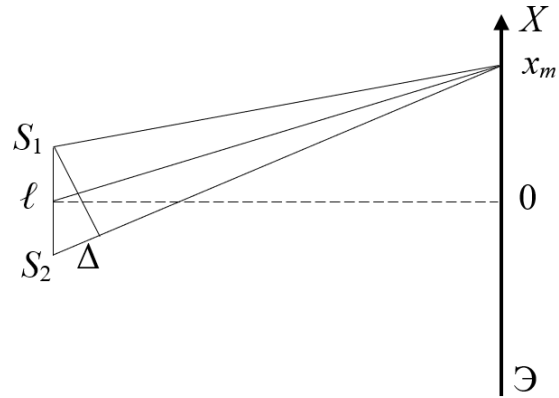


Рис. 2.2

РЕШЕНИЕ

Свет падает на бипризму почти перпендикулярно, поэтому угол отклонения φ лучей можно выразить через преломляющий угол α (полагая $\sin \alpha \approx \alpha$), $\varphi = (n - 1)\alpha$. Тогда расстояние между мнимыми источниками света S_1 и S_2 (учитывая малость угла φ) найдём из рис. 2.1:

$$l = 2a(n - 1)\alpha.$$

Оптическая разность хода волн, определяющая m -й максимум интенсивности в интерференционной картине, равна (рис. 2.2)

$$\Delta = \ell \frac{x_m}{a+b},$$

где x_m – расстояние от центрального максимума (в центре экрана) до максимума m -го порядка (показатель преломления воздуха равен 1).

Условие интерференционного максимума $\Delta = m\lambda$, поэтому для x_m находим:

$$x_m = \frac{m\lambda(a+b)}{2a(n-1)\alpha} = 4,54 \text{ мм.}$$

Максимальное число наблюдаемых полос

$$N_{\max} = \frac{2b\varphi}{\Delta x} + 1 = 7.$$

Пример П2.2

На мыльную плёнку ($n = 1,33$) падает белый свет под углом $\alpha = 45^\circ$ (рис. 2.3). При какой наименьшей толщине пленки отраженный свет будет окрашен в желтый цвет ($\lambda = 550 \text{ нм}$)?

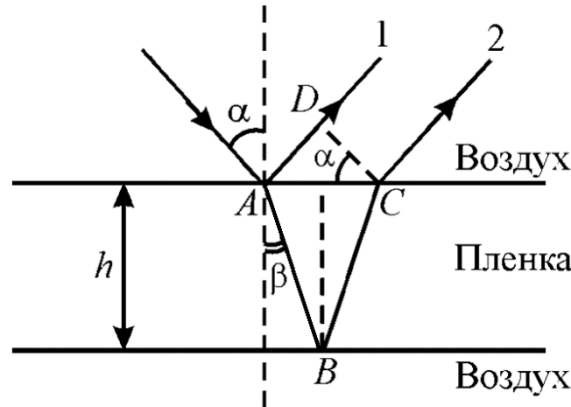


Рис. 2.3

РЕШЕНИЕ

При освещении тонких прозрачных плёнок возникновение двух когерентных пучков происходит в результате отражения света от передней и задней поверхностей плёнки. Если плёнка плоскопараллельна, толщина плёнки везде одинакова и лучи 1 и 2 будут параллельны друг другу. Для наблюдения интерференционной картины необходимо направить интерферирующие лучи на экран с помощью линзы.

Оптическая разность хода между двумя лучами зависит от угла падения α и равна:

$$\Delta_{12} = (AB + BC) \cdot n - \left(AD - \frac{\lambda}{2} \right).$$

Луч 1 отражается от поверхности плёнки с показателем преломления, большим показателя преломления воздуха ($n_{\text{в}} = 1$), поэтому происходит скачок фазы волны на π , соответственно изменение разности хода на $\frac{\lambda}{2}$.

$$\begin{aligned} (AB + BC) \cdot n &= 2hn / \cos \beta, \\ AD &= AC \cdot \sin \alpha = 2h \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Согласно закону преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$; $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$. Оптическая разность хода Δ_{12} равна:

$$\Delta_{12} = 2hn \cos \beta + \frac{\lambda}{2}.$$

Для того чтобы отраженное излучение максимально усиливалось, оптическая разность хода должна быть кратна λ :

$$\Delta_{12} = m\lambda.$$

Отсюда

$$h = \frac{m\lambda - \lambda/2}{2n\sqrt{1 - (\sin \alpha / n)^2}}.$$

Наименьшая толщина плёнки при $m = 1$:

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{550}{4\sqrt{1,33^2 - 0,5}} = 122 \text{ нм}.$$

Задачи

2.1. Диафрагма с двумя отверстиями освещается монохроматическим светом с длиной волны 0,4 мкм. Расстояние между отверстиями $1 \cdot 10^{-3}$ м, расстояние от отверстий до экрана 3,00 м. Найти положение трёх первых (относительно центральной полосы) светлых полос на экране.

2.2. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зелёный светофильтр, пропускающий излучение с длиной волны $\lambda_1 = 0,5$ мкм, заменить красным $\lambda_2 = 0,65$ мкм?

2.3. В опыте Юнга на пути одной из интерферирующих волн помещена тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса (нулевая) сместилась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой. Волна падает на пластинку нормально. Показатель преломления пластинки $n = 1,5$; длина волны $\lambda = 0,6$ мкм. Найти толщину пластинки.

2.4. Найти число интерференционных полос, получающихся с помощью бипризмы Френеля, расположенной на расстоянии a от источника света с длиной волны λ и на расстоянии b от экрана. Показатель преломления призмы n , преломляющий угол θ . Расчет выполнить для значений: $a = 10$ см, $b = 100$ см, $\theta = 30'$, $\lambda = 600$ нм, $n = 1,5$.

2.5. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстоянии $\ell = 2,5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии $b = 100$ см, образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой с показателем преломления $n = 1,5$ и толщиной $d = 10$ мкм? Считать, что в пластине свет распространяется перпендикулярно граням.

2.6. Найти ширину интерференционных полос на экране в схеме с бипризмой Френеля, если расстояние между мнимыми источниками равно $\ell = 0,5$ мм и их расстояние до экрана $L = 3,00$ м. Источник испускает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 700$ нм.

2.7. Расстояние от монохроматического источника (узкой щели) до бипризмы Френеля $a = 0,25$ м, а от бипризмы до экрана $b = 1,00$ м. Показатель преломления стекла призмы $n = 1,5$; преломляющий угол призмы $\beta = 20'$; длина волны света $\lambda = 600$ нм. Найти расстояние между мнимыми изображениями источника и ширину интерференционных полос на экране.

2.8. В интерференционном опыте Ллойда интерферируют лучи, исходящие непосредственно от источника S (узкой щели), и лучи, отраженные от зеркала. Интерференционная картина наблюдается на экране, удаленном от источника (длина волны излучения $\lambda = 600$ нм) на расстояние $L = 2,00$ м. Расстояние от источника до плоскости зеркала $h = 3$ мм. Найти ширину интерференционных полос на экране.

2.9. В интерференционной схеме с бизеркалами Френеля угол между зеркалами $\alpha = 10'$, расстояние от линии пересечения зеркал O до узкой щели S , перпендикулярной плоскости рисунка, и экрана \mathcal{E} равны соответственно $r = 0,1$ м и $b = 1,30$ м (рис. 2.4). Длина волны света $\lambda = 550$ нм. Найти расстояние между мнимыми источниками, ширину интерференционной полосы на экране и максимальное число наблюдаемых полос.

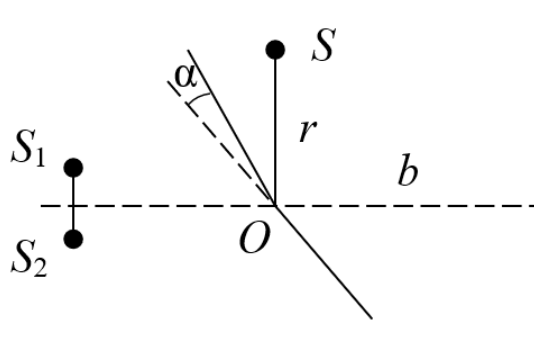


Рис. 2.4

2.10. В интерференционной схеме с бипризмой Френеля расстояние от светящейся щели S до бипризмы $a = 0,3$ м, расстояние от бипризмы до экрана $b = 0,7$ м. Показатель преломления стекла бипризмы $n = 1,51$. Длина волны света $\lambda = 0,65$ мкм. Найти: а) при каком значении преломляющего угла θ ширина интерференционных полос на экране будет равна $\Delta x = 0,4$ мм; б) максимальное число полос, которое можно наблюдать в этом случае.

2.11. Кольца Ньютона наблюдаются в отраженном свете с помощью стеклянной (показатель преломления $n = 1,51$) плоско-выпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 76$ см, лежащей на плоской стеклянной пластине. Радиус пятого тёмного кольца равен $r_5 = 0,9$ мм. Найти длину световой волны.

2.12. Установка для получения колец Ньютона освещается белым светом, падающим нормально. Радиус кривизны сферической поверхности линзы равен $R = 5,00$ м. Найти: а) радиус четвертого темного фиолетового кольца (длина волны $\lambda_1 = 400$ нм); б) радиус третьего красного кольца (длина волны $\lambda_2 = 630$ нм). Радиус какого кольца больше? Наблюдение ведется в отражённом свете.

2.13. Плоско-выпуклая линза сферической поверхностью лежит на стеклянной пластинке. Найти толщину слоя воздуха там, где в отражённом свете с длиной волны $0,6$ мкм видно первое светлое кольцо Ньютона.

2.14. Расстояние между первым и вторым тёмными кольцами Ньютона в отражённом свете равно 1 мм. Найти расстояние между девятым и десятым тёмными кольцами Ньютона.

2.15. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы тёмных колец в

отражённом свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления жидкости.

2.16. Расстояние между десятым и пятнадцатым тёмными кольцами Ньютона при наблюдении в отражённом свете равно 0,74 мм. Длина волны падающего света равна 546 нм. Вычислить радиус кривизны линзы, лежащей на плоской пластине.

2.17. На сколько изменится радиус первого тёмного кольца Ньютона, наблюдаемого в отражённом свете с длиной волны $\lambda = 0,64$ мкм, если пространство между плоской пластиной и линзой заполнить водой? Показатель преломления воды равен $n = 1,33$; показатель преломления стекла 1,5. Радиус сферической поверхности линзы равен $R = 1,00$ м.

2.18. Плоско-выпуклая линза из крона (показатель преломления $n_1 = 1,5$), имеющая оптическую силу $D = 0,55$ дптр, лежит выпуклой стороной на пластине, сделанной из двух частей: из крона ($n_1 = 1,5$) и флинта ($n_2 = 1,75$), а пространство между линзой и пластиной заполнено сероуглеродом ($n = 1,62$). Какой вид будут иметь кольца Ньютона в отражённом свете с длиной волны $\lambda = 550$ нм? Найти радиус пятого тёмного кольца над кроном и пятого светлого кольца над флинтом.

2.19. Кольца Ньютона наблюдаются в отражённом свете (при нормальном падении на линзу), содержащем две яркие линии: красную (длина волны $\lambda_1 = 610$ нм) и фиолетово-синюю (длина волны $\lambda_2 = 436$ нм). Радиус пятого красного кольца равен $r_5 = 5$ мм. Найти радиус кривизны линзы, её оптическую силу и радиусы третьего и пятого фиолетово-синих колец. Показатель преломления стекла $n = 1,455$.

2.20. Кольца Ньютона наблюдаются между двумя плоско-выпуклыми линзами, касающимися друг друга сферическими поверхностями. Радиусы кривизны поверхностей R_1 и R_2 . Найти радиус m -го тёмного кольца в отражённом свете. Длина волны излучения λ .

2.21. Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух плоско-выпуклых линз, касающихся друг друга своими сферическими поверхностями. Радиусы кривизны линз $R_1 = 1,0$ м, $R_2 = 1,2$ м. Пространство между линзами заполнено водой (показатель преломления $n = 1,33$). Найти расстояние между четвёртым и девятым тёмными кольцами в отражённом свете с длиной волны $\lambda = 625$ нм.

2.22. Кольца Ньютона получают с помощью плоско-выпуклой линзы с радиусом кривизны сферической выпуклой поверхности $R_1 = 5,00$ м, положенной на сферическую поверхность с радиусом кривизны $R_2 = 8,00$ м плоско-вогнутой линзы. Установка освещается белым

светом, падающим нормально. Найти радиусы четвертого тёмного фиолетового (длина волны $\lambda_1 = 400$ нм) и третьего тёмного красного (длина волны $\lambda_2 = 630$ нм) колец в отражённом свете.

2.23. Пучок параллельных лучей (длина волны $\lambda = 0,6$ мкм) падает на мыльную плёнку с показателем преломления $n = 1,3$. Угол падения $i = 30^\circ$. При какой наименьшей толщине пленки отражённая волна будет максимально ослаблена интерференцией? При какой максимально усилена?

2.24. Тёмной или светлой в отражённом свете будет находящаяся в воздухе мыльная пленка толщиной $d = \lambda/10$ (λ – длина волны падающего света) и показателем преломления $n = 1,3$?

2.25. При какой толщине d пленки (показатель преломления $n = 1,5$), освещаемой светом с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм, исчезают интерференционные полосы в отражённом свете?

2.26. На поверхности лужи расплылось масляное пятно, представляющее собой тончайшую плёнку. Толщина плёнки в том месте, где она кажется зеленой (длина волны 530 нм), равна 0,11 мкм. Наблюдение ведется под углом 60° . Показатель преломления воды равен 1,33. Найти показатель преломления масла.

2.27. На тонкий стеклянный клин падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол между поверхностями клина $\varphi = 2'$. Показатель преломления стекла $n = 1,55$. Расстояние между соседними интерференционными максимумами в отражённом свете $\Delta x = 0,3$ мм. Найти длину световой волны.

2.28. Свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете расстояние между соседними тёмными полосами $\Delta x = 0,21$ мм. Найти угол между гранями клина. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

2.29. Явление интерференции используют для измерения диаметра тонких проволочек, протягивая их между двумя плоскими стеклянными пластинками так, что образуется тонкий воздушный клин. При наблюдении интерференционных полос равной толщины в отражённом свете с длиной волны $\lambda = 546$ нм расстояние между полосами $\Delta x = 2$ мм. Расстояние от линии соприкосновения пластин до проволочки $\ell = 7,33$ см. Найти диаметр проволочки. Как различаются диаметры проволочек, если число интерференционных полос на один сантиметр длины клина отличается на единицу?

2.30. Между двумя стеклянными шлифованными пластинками протянут волос диаметром $D = 0,05$ мм так, что образовался воздушный клин. При нормальном падении на пластинку лучи с длиной вол-

ны $\lambda = 500$ нм дают в отраженном свете $N = 8$ интерференционных полос на $\Delta \ell = 1$ см длины пластинки. Найти расстояние от волоса до вершины клина.

2.31. Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхности стекла его покрывают тонким слоем вещества с показателем преломления $n' = \sqrt{n}$, где n – показатель преломления стекла. В этом случае амплитуды световых колебаний, отражённых от обеих поверхностей такого слоя, будут одинаковыми. При какой толщине слоя отражательная способность стекла в направлении нормали равна нулю для света с длиной волны λ ?

2.32. На поверхность стеклянного объектива (показатель преломления стекла $n = 1,5$) нанесена тонкая просветляющая пленка с показателем преломления \sqrt{n} . При какой наименьшей толщине пленки наблюдается максимальное ослабление отражённого света для длины волны наилучшего видения $\lambda = 555$ нм? Свет падает на поверхность объектива нормально.

2.33. Найти минимальную толщину пленки с показателем преломления 1,33, при которой свет с длиной волны 0,64 мкм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны 0,40 мкм не отражается совсем. Угол падения света равен 30° .

2.34. На плоской стеклянной поверхности образована тонкая прозрачная плёнка толщиной $d = 0,396$ мкм. Какую окраску примет плёнка при освещении её белым светом, падающим под углом $i = 30^\circ$? Показатели преломления: $n_{\text{ст}} = 1,753$; $n_{\text{пл}} = 1,324$. При какой толщине плёнки она будет просветляющей для зеленых лучей (длина волны $\lambda = 530$ нм) при нормальном падении?

2.35. Стеклянная пластинка покрыта с обеих сторон пленкой прозрачного вещества. Для света с длиной волны $\lambda = 490$ нм (в вакууме) показатель преломления пластинки равен $n_{\text{пл}} = 1,5$. Показатель преломления воздуха $n = 1,0$. При какой минимальной толщине плёнок и каком показателе преломления плёнки свет будет проходить через пластинку без потерь на отражение?

3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Дифракция света – это совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с оптическими неоднородностями и связанных с отклонением от законов геометрической оптики (в том числе с

видимым огибанием светом оптических неоднородностей – препятствий, границ непрозрачных тел или краев отверстий в экранах, и проникновением света в область геометрической тени).

В зависимости от расстояний от источника света и точки наблюдения (экрана) до препятствий различают *дифракцию Фраунгофера* (дифракцию в параллельных лучах, то есть в дальней зоне) и *дифракцию Френеля* (дифракцию в непараллельных лучах, то есть в ближней зоне). Приблизённо можно считать, что при дифракции Фраунгофера указанные расстояния много больше размеров препятствия или отверстия, а при дифракции Френеля они соизмеримы с размерами препятствия.

Зоны Френеля – участки, на которые разбивают поверхность фронта световой волны для упрощения вычислений при нахождении амплитуды волны в точке наблюдения.

Для сферического фронта волны зоны Френеля – это сферические пояса, построенные так, чтобы расстояния от краев каждой зоны до точки наблюдения отличались на $\lambda/2$, где λ – длина волны излучения. Радиус m -й зоны Френеля r_m в этом случае равен:

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}},$$

где a , b – расстояния от фронта волны до источника (радиус волнового фронта) и до точки наблюдения соответственно; m – номер зоны Френеля.

При дифракции Фраунгофера на щели шириной b условия дифракционных максимумов и минимумов имеют соответственно вид:

$$b \sin \theta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad b \sin \theta = \pm m\lambda,$$

где θ – угол дифракции; $m = 1, 2, 3, \dots$, λ – длина волны излучения.

При дифракции Фраунгофера на круглой апертуре радиусом ρ радиусы тёмных колец первого, второго, третьего порядка равны соответственно: $r_1 = 0,61\lambda L/\rho$; $r_2 = 1,12\lambda L/\rho$; $r_3 = 1,62\lambda L/\rho$, где L – расстояние до плоскости наблюдения.

При дифракции Фраунгофера на *дифракционной решётке* с периодом d , шириной прозрачного промежутка b и числом штрихов N при нормальном падении света с длиной волны λ :

1) условие главных максимумов:

$$d \sin \theta = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

2) условие главных минимумов:

$$b \sin \theta = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

3) условие побочных минимумов:

$$\sin \theta = \frac{p\lambda}{Nd}, p = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, \dots, \text{ кроме } 0, N, 2N, 3N, \dots$$

Спектральная разрешающая способность дифракционной решётки определяется выражением

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где $\delta\lambda$ – наименьшая разность двух соседних спектральных линий λ , $\lambda + \delta\lambda$, при которых эти линии могут быть видны отдельно в спектре дифракционной решётки; N – полное число штрихов решётки, m – порядковый номер главного дифракционного максимума.

Угловая разрешающая способность линзы (объектива) с круглой апертурой:

$$\beta = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

где β – наименьшее угловое расстояние между двумя светящимися точками, при котором их дифракционные изображения в фокальной плоскости объектива видны отдельно; D – диаметр объектива.

При дифракции рентгеновского излучения на *пространственной дифракционной решетке* условие дифракционных максимумов (*формула Вульфа-Брэгга*) имеет вид:

$$2d \sin \theta = m\lambda, m = 1, 2, 3, \dots,$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол между направлением падающего излучения и гранью кристалла (угол скольжения); λ – длина волны излучения.

Примеры решения задач

Пример ПЗ.1

На длиннофокусную собирающую линзу с круглой ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . На расстоянии b от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах r диафрагмы центр колец будет темным и при каких светлым, если фокусное расстояние линзы равно f ($b < f$)?

РЕШЕНИЕ

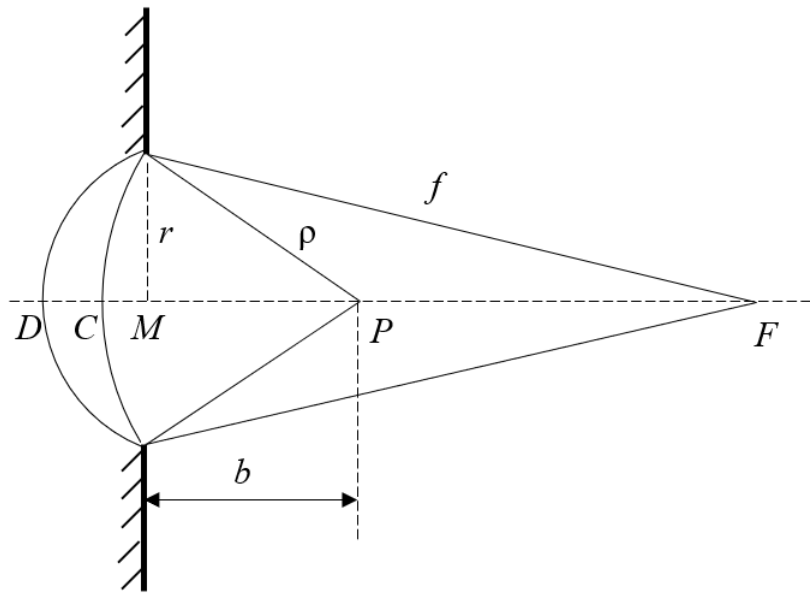


Рис. 3.1

Тёмным или светлым будет центр колец – зависит от числа зон Френеля, видимых из точки наблюдения. На линзу по условию падает параллельный пучок, поэтому за линзой этот пучок собирается в главном фокусе F . Тогда можно представить, что на диафрагму радиусом r (рис. 3.1) падает сходящаяся световая волна со сферическим волновым фронтом радиусом f с центром в точке F . Если из точки наблюдения P провести вспомогательные сферические поверхности, радиусы которых отличаются на $\lambda/2$, то при пересечении с волновой поверхностью получатся зоны Френеля, имеющие форму сферических колец. Число зон Френеля, укладывающихся в отверстии диафрагмы, будет равно длине отрезка CD , поделённой на $\lambda/2$.

Из рисунка 3.1 видно, что $CD = DM - MC$, $DM = \rho - b = \sqrt{b^2 + r^2} - b$, $MC = f - \sqrt{f^2 - r^2}$, откуда получаем $CD = \sqrt{b^2 + r^2} - b - f + \sqrt{f^2 - r^2}$. На практике величины $(r/b)^2$ и $(r/f)^2$ достаточно малы, поэтому можно применить приближённое равенство $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$, где α – малая величина.

Тогда

$$CD = b \left(1 + \frac{r^2}{2b^2} \right) - b - f + f \left(1 - \frac{r^2}{2f^2} \right) = \frac{r^2}{2b} - \frac{r^2}{2f} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right).$$

Число зон Френеля равно $m = \frac{CD}{\lambda/2} = \frac{r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) = \frac{r^2(f-b)}{\lambda bf}$, где r –

радиус диафрагмы. При чётных m центр колец будет тёмным, а при нечётных m – светлым.

Пример ПЗ.2

Ширина щели, освещаемой нормально падающим монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,45$ мкм, равна $b = 0,15$ мм. Дифракционная картина наблюдается на экране в фокальной плоскости линзы. Найти ширину центрального максимума, если оптическая сила линзы $D = 5$ дптр.

РЕШЕНИЕ

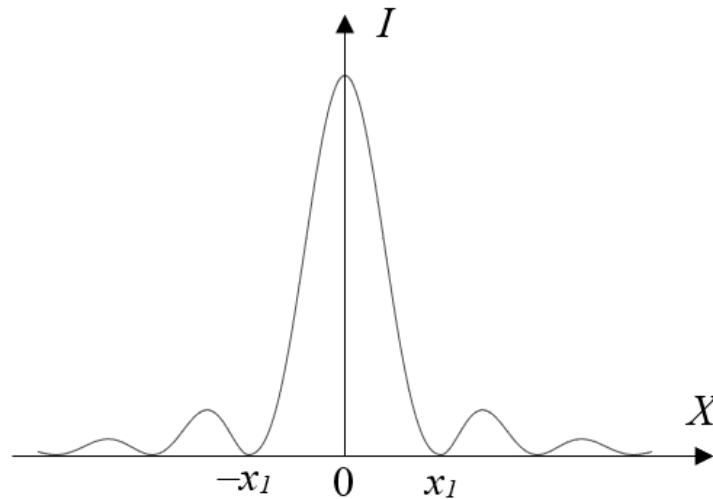


Рис. 3.2

Ширина центрального максимума определяется расстоянием между двумя минимумами первого порядка слева и справа от центра дифракционной картины (на рис. 3.2 представлено распределение интенсивности дифракционной картины вдоль радиального направления), поэтому

$$\Delta x = 2x_1 = 2 \frac{\lambda f}{b} = 1,2 \text{ мм},$$

где $f = 0,2$ м – фокусное расстояние линзы.

Пример ПЗ.3

Дифракционная решётка шириной $L = 5$ мм может разрешить в первом порядке две спектральные линии $\lambda_1 = 576$ нм и $\lambda_2 = 582$ нм. Найти общее число штрихов дифракционной решётки и угол, под которым будет наблюдаться максимум третьего порядка для длины волны $\lambda_3 = 600$ нм.

РЕШЕНИЕ

Разрешающая способность решетки $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m_1 N$, где $m_1 = 1$ (первый порядок спектра), N – общее число штрихов, $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 6$ нм. Отсюда получаем

$$N = \frac{\lambda}{\delta\lambda \cdot m_1} = \frac{576}{6} = 96 \text{ штрихов.}$$

Для ответа на второй вопрос задачи необходимо найти период решётки $d = L/N$, где L – ширина решётки. Тогда угол, под которым будет наблюдаться максимум третьего порядка ($m_2 = 3$), определяется по формуле

$$\sin \theta_3 = \frac{\lambda}{d} m_2 = \frac{3\lambda N}{L} = 0,0346, \theta_3 \approx 2^\circ.$$

Задачи

3.1. Излучение от точечного источника с длиной волны 500 нм падает на круглое отверстие радиусом 1 мм. Расстояние от точечного источника до волновой поверхности на этом отверстии и от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1 м. Определить число зон Френеля в плоскости круглого отверстия.

3.2. Посередине между точечным источником монохроматического света с длиной волны 600 нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определить радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее тёмным.

3.3. Монохроматический пучок света с длиной волны 500 нм падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром 3 мм. Найти расстояние от точки наблюдения до отверстия, если отверстие открывает 5 зон Френеля.

3.4. Определить радиус восьмой зоны Френеля для плоского волнового фронта, если радиус второй зоны для этого фронта равен 2 мм.

3.5. Точечный монохроматический источник света (длина волны $\lambda = 0,5$ мкм) расположен на расстоянии 0,5 м от плоского экрана с круглым отверстием диаметром 0,5 мм на оси, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через центр отверстия. На каком наибольшем расстоянии от отверстия на этой оси расположена точка, в которой интенсивность света максимальна?

3.6. Точечный источник монохроматического света с длиной волны $0,5 \text{ мкм}$ находится на расстоянии $6,75 \text{ м}$ от ширмы с круглым отверстием. На таком же расстоянии от ширмы расположен экран. Найти число зон Френеля, укладывающихся в отверстие ширмы, если диаметр отверстия равен: а) $4,5 \text{ мм}$; б) $5,2 \text{ мм}$. При каком из диаметров интенсивность света в точке наблюдения больше? Точка наблюдения расположена на оси светового пучка. Ось пучка перпендикулярна плоскости ширмы и проходит через середину отверстия.

3.7. На круглое отверстие радиусом $r = 1 \text{ мм}$ в непрозрачном экране падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Найти максимальное расстояние от отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться тёмное пятно (уменьшение интенсивности света).

3.8. На зонную пластинку падает плоская волна. Вычислить радиус m -й зоны Френеля. Найти радиус первой зоны Френеля при $b = 10 \text{ м}$, $\lambda = 0,45 \text{ мкм}$.

3.9. Какой будет интенсивность света в фокусе зонной пластинки, если закрыть все зоны, кроме первой? Интенсивность света без пластинки равна I_0 .

3.10. Какова будет интенсивность света в фокусе зонной пластинки, если закрыть всю пластинку, кроме верхней половины первой зоны? Интенсивность света без пластинки равна I_0 .

3.11. Параллельный пучок света от лазера с длиной волны $0,63 \text{ мкм}$ освещает щель шириной 100 мкм . Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели на расстоянии $1,5 \text{ м}$ от щели (дальняя зона). Найти расстояние между дифракционными минимумами второго порядка.

3.12. На щель шириной $b = 0,1 \text{ мм}$ нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0,6 \text{ мкм}$). Найти ширину центрального дифракционного максимума (расстояние между минимумами первого порядка), если дифракционная картина проектируется на экран линзой с фокусным расстоянием $f = 1 \text{ м}$.

3.13. Записать условия дифракционных максимумов и минимумов для щели, помещённой в воду (показатель преломления воды n). Как качественно изменится дифракционная картина в воде по сравнению с картиной в воздухе?

3.14. Монохроматический свет падает нормально на щель ширины $b = 10 \text{ мкм}$. За щелью расположена тонкая собирающая линза с фокус-

ным расстоянием $f = 150$ мм, в фокальной плоскости которой расположен экран. Расстояние между дифракционными минимумами третьего порядка на экране $x = 50$ мм. Найти длину волны падающего света.

3.15. Свет с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм падает на щель ширины $b = 10$ мкм под углом $\theta_0 = 30^\circ$ к её нормали. Найти угловое положение первых дифракционных минимумов, расположенных по обе стороны от центрального дифракционного максимума.

3.16. Плоская световая волна с длиной волны $0,60$ мкм падает нормально на грань стеклянного клина с преломляющим углом 15° . На противоположной непрозрачной грани имеется щель ширины 10 мкм, параллельная ребру клина. Найти угловую ширину дифракционного максимума нулевого порядка.

3.17. На дифракционную решётку нормально падает монохроматический свет с длиной волны 550 нм. Период решётки $4,4$ мкм. Найти максимальное число дифракционных максимумов, которые можно получить с помощью такой решётки.

3.18. Монохроматический свет падает на дифракционную решётку нормально к её поверхности. Дифракционный максимум второго порядка наблюдается под углом 14° . Максимум какого порядка будет наблюдаться под углом дифракции равным $21,5^\circ$?

3.19. На дифракционную решётку нормально падает монохроматический свет. В дифракционном спектре, получаемом с помощью этой решётки, под углом 25° наблюдается спектральная линия третьего порядка. Определить наивысший порядок спектральной линии на экране.

3.20. Параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения падает под углом скольжения 60° на грань кристалла, для которого расстояние между атомными плоскостями $0,28$ нм. При зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум второго порядка. Найти длину волны рентгеновского излучения.

3.21. Параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения с длиной волны 300 пм падает на грань кристалла с расстоянием между его атомными плоскостями $0,3$ нм. Определить угол между направлением падающего излучения и гранью кристалла (угол скольжения), если в дифракционном спектре наблюдается максимум первого порядка.

3.22. На дифракционную решётку с периодом 3 мкм нормально падает монохроматический свет. Угол дифракции для третьего дифракционного максимума составляет 30° . Минимальная разрешаемая решёткой разность длин волн в третьем порядке составляет $0,1$ нм. Найти длину волны монохроматического света и длину дифракционной решётки.

3.23. Сколько штрихов на миллиметр содержит дифракционная решётка, если при наблюдении в монохроматическом свете (длина волны 0,6 мкм) главный максимум пятого порядка отклонён на угол 18° ?

3.24. На дифракционную решетку нормально к её поверхности падает параллельный пучок лучей с длиной волны 0,5 мкм. Дифракционная картина проецируется линзой на плоский экран, расположенный в фокальной плоскости линзы и удаленный от неё на 1 м. Расстояние между двумя главными максимумами первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см. Найти: а) период дифракционной решётки; в) число штрихов на 1 см.

3.25. На дифракционную решётку, содержащую 500 штрихов/мм, падает нормально белый свет. Спектр проецируется на экран линзой с фокусным расстоянием 3 м. Найти расстояние на экране между концом спектра первого порядка и началом спектра второго порядка. Границы видимого спектра принять равными: 400 нм – фиолетовый цвет, 780 нм – красный цвет.

3.26. Дифракционная решётка содержит 200 штрихов/мм. На решётку падает нормально монохроматический свет (длина волны 0,6 мкм). Максимум какого наибольшего порядка даёт эта решётка? Чему равен угол отклонения лучей, соответствующий последнему дифракционному максимуму?

3.27. При каком соотношении между периодом дифракционной решётки и шириной щели пропадают все чётные, кроме нулевого, максимумы в дифракционной картине? Период решётки равен d , ширина щели b .

3.28. При каком условии m -й главный максимум для дифракционной решётки с периодом d и шириной щели b обращается в нуль?

3.29. При нормальном падении света на дифракционную решётку угол дифракции для линии $\lambda_1 = 0,65$ мкм во втором порядке равен 45° . Найти угол дифракции для линии $\lambda_2 = 0,50$ мкм в третьем порядке.

3.30. Найти длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решётку с периодом $d = 5$ мкм, если угол между направлениями на дифракционные максимумы первого и второго порядков $\Delta\theta = 5^\circ$.

3.31. Свет с длиной волны $\lambda = 0,589$ мкм падает нормально на дифракционную решётку с периодом $d = 2,5$ мкм, содержащую $N = 10000$ штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

3.32. Найти условие для главных дифракционных максимумов при наклонном падении плоской световой волны на дифракционную решётку с периодом d , если угол падения θ_0 .

3.33. Пучок рентгеновских лучей падает на дифракционную решётку с периодом $d = 1$ мкм под углом $\theta_0 = 89^\circ 30'$. Угол дифракции для спектра второго порядка равен 89° . Найти длину волны падающего излучения.

3.34. Дифракционная решётка шириной 3 см имеет период 3 мкм. Какова разрешающая сила решётки во втором порядке? Какова разность различимых длин волн для зеленых лучей (длина волны 530 нм)?

3.35. Период дифракционной решётки равен 0,01 мм. Какое наименьшее число штрихов должна содержать решётка, чтобы две составляющие жёлтой линии натрия (длины волн 589,0 нм и 589,6 нм) можно было наблюдать отдельно в спектре первого порядка? Какова при этом наименьшая ширина решётки?

3.36. Свет падает нормально на дифракционную решётку шириной 6,5 см, содержащую 200 штрихов/мм. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с длиной волны 670,8 нм, которая состоит из двух компонент, отличающихся на 0,015 нм. В каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены?

3.37. При нормальном падении света на дифракционную решётку шириной $L = 1$ см обнаружено, что компоненты жёлтой линии натрия (длины волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм) оказываются разрешёнными, начиная с пятого порядка спектра. Найти период этой решётки. При какой ширине решётки с таким же периодом можно разрешить в третьем порядке дублет спектральной линии с длиной волны $\lambda = 460,0$ нм, компоненты которого отличаются на $\delta\lambda = 0,13$ нм?

3.38. На шпилье высотного здания укреплены две красные лампочки (длина волны излучения 640 нм), расстояние между которыми 20 см. Здание рассматривается ночью в телескоп с расстояния 15 км. Найти наименьший диаметр объектива, при котором в его фокальной плоскости получают отдельно дифракционные изображения лампочек.

3.39. Какова угловая разрешающая способность человеческого глаза (диаметр зрачка 4 мм) и зрительной трубы (диаметр объектива 10 см) для излучения с длиной волны 0,6 мкм?

3.40. Угловая разрешающая способность человеческого глаза для красного света порядка $1'$. Найти минимальное расстояние от наблюдателя, при котором два габаритных огня автомобиля видны как один источник. Расстояние между габаритными огнями принять равным 1 м.

3.41. Телескоп установлен на спутнике Земли, среднее расстояние от которого до поверхности Земли равно 150 км. Найти наименьший диаметр телескопа, с помощью которого можно сфотографировать номер грузового автомобиля. Размер номера принять равным 40 см. Расчет выполнить для длины волны 550 нм.

3.42. Поверхность Луны освещается пучком света, диаметр которого на выходе из лазера равен 0,5 см. Считая, что расходимость пучка обусловлена только дифракцией, найти диаметр пучка при достижении им поверхности Луны. Расстояние до Луны равно $384 \cdot 10^3$ км, длина волны лазерного излучения – 632,8 нм.

3.43. Вычислить наименьшее расстояние между двумя точками на поверхности Луны, которое можно разрешить телескопом-рефлектором с диаметром зеркала 5 м. Считать длину волны света равной 0,55 мкм.

3.44. Найти наименьшее разрешаемое глазом расстояние между штрихами, начерченными на листе бумаги, находящемся на расстоянии наилучшего зрения 25 см (длина волны света 0,55 мкм, диаметр зрачка равен 4,0 мм).

3.45. Найти минимальное увеличение зрительной трубы с диаметром объектива 5 см, при котором разрешающая способность её объектива будет полностью использована. Диаметр зрачка глаза 4 мм.

4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Поляризация – общее свойство поперечных векторных волн. Оно связано с характером пространственно-временного поведения векторных характеристик волны. К таким волнам относятся электромагнитные волны, в том числе световые волны.

При распространении света вектор напряжённости электрического поля \vec{E} в различные моменты времени (даже в пределах одного периода колебаний) может занимать различные положения в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Если в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (ось z) задать декартову систему координат (x, y) , то проекции вектора \vec{E} (E_x, E_y) однозначно определяют ориентацию этого вектора в пространстве. Можно характеризовать ориентацию вектора \vec{E} углом, который вектор образует с поперечной осью x , а именно $\alpha = \text{arctg}(E_y/E_x)$. Этот угол называют *азимут поляризации*.

Возможны следующие предельные ситуации.

1. Азимут поляризации с течением времени меняется по случайному закону, т.е. функция $\alpha(z)$ является случайной. Такое излучение называется *неполяризованным* (в дальнейшем индекс «н»).

2. Положение вектора \vec{E} может меняться по определенному закону, т.е. функция $\alpha(z)$ является детерминированной. Такое излучение называется *поляризованным* (в дальнейшем индекс «п»).

В общем случае существуют различные виды поляризованного излучения в зависимости от формы кривой, которую описывает конец вектора \vec{E} в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. В данной главе рассматривается только один вид поляризованного излучения, когда вектор \vec{E} ориентируется в одной плоскости, содержащей ось распространения излучения (ось z). Такое излучение называется линейно поляризованным, для него $\alpha = \text{const}$. Плоскость, которая содержит вектор \vec{E} и ось распространения излучения, называется *плоскостью поляризации*.

Возможна также суперпозиция полностью поляризованной и неполяризованной компонент, которая представляет собой частично поляризованное излучение. *Степенью поляризации P* называют отношение интенсивности поляризованной компоненты излучения к полной (суммарной) интенсивности:

$$P = \frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{п}} + I_{\text{н}}}.$$

Частично поляризованное излучение методически удобно рассматривать как частично когерентную суперпозицию ортогональных компонент. Для полностью поляризованного излучения эта суперпозиция полностью когерентна, а для неполяризованного излучения эта суперпозиция некогерентна.

Поляризатор – это оптическое устройство, выделяющее поляризованную составляющую проходящего через него излучения. Плоскость, образованную осью проходящего светового пучка (осью z) и вектором \vec{E} , называют плоскостью пропускания, если для такой ориентации поляризатор имеет максимальное пропускание (энергетический коэффициент пропускания равен τ_{max}). Для ортогональной ориентации вектора \vec{E} коэффициент пропускания поляризатора равен τ_{min} . Для естественного излучения энергетический коэффициент пропускания поляризатора составляет

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_{\text{max}} + \tau_{\text{min}}).$$

Если два поляризатора расположены последовательно, то второй поляризатор обычно называют анализатором. *Анализатор* – оптическое устройство, позволяющее определить степень поляризации проходящего через него излучения. Среди поляризаторов различают: 1) идеальные поляризаторы ($\tau_{\text{max}} = 1$, $\tau_{\text{min}} = 0$); 2) абсолютные поляризаторы ($\tau_{\text{max}} = \tau$,

$\tau_{\min} = 0$), например, николь. При прохождении полностью поляризованного излучения через идеальный анализатор (поляризатор) справедлив закон Малю:

$$I = I_0 \cos^2 \theta,$$

где I – интенсивность излучения, прошедшего через анализатор; I_0 – интенсивность излучения, падающего на анализатор; θ – угол между плоскостью поляризации падающего излучения и плоскостью пропускания анализатора. В более общем случае, когда частично линейно поляризованное излучение проходит через неидеальный анализатор (поляризатор), имеет место соотношение:

$$I = \frac{1}{2} I_0 [(\tau_{\max} + \tau_{\min}) + (\tau_{\max} - \tau_{\min}) P \cos 2\theta],$$

где I – интенсивность излучения, прошедшего через анализатор; I_0 и P – соответственно интенсивность и степень поляризации излучения, падающего на анализатор; τ_{\max} и τ_{\min} – характерные коэффициенты пропускания анализатора; θ – угол между плоскостью поляризации падающего излучения и плоскостью пропускания анализатора.

Коэффициенты отражения и пропускания излучения при прохождении им границы раздела двух диэлектриков с показателями преломления n_1 (первая среда, в которой распространяется падающее и отраженное излучение) и n_2 (вторая среда, в которой распространяется преломленное излучение) зависят от угла падения θ_i . Поляризованное излучение можно представить как суперпозицию двух компонент: в одной из них вектор \vec{E} ориентирован перпендикулярно плоскости падения (s -компонента), а в другой вектор \vec{E} лежит в плоскости падения (p -компонента). Естественный (неполяризованный) свет можно представить как суперпозицию равных по интенсивности p - и s -компонент. При этом после прохождения естественного света границы раздела двух диэлектриков отраженное и преломленное излучения становятся частично поляризованными.

Коэффициенты отражения p - и s -компонент при наклонном падении излучения под углом θ_i определяются формулами Френеля. Определив угол преломления согласно закону преломления (закону Снеллиуса)

$$\theta_t = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right),$$

получим коэффициенты отражения p - и s -компонент:

$$\rho_s = \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \right]^2, \quad \rho_p = \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} \right]^2.$$

При нормальном падении ($\theta_i = 0$) коэффициенты отражения одинаковы и определяются выражением

$$\rho_s = \rho_p = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2.$$

При увеличении угла падения θ_i коэффициент отражения s -компоненты монотонно возрастает, коэффициент отражения p -компоненты сначала уменьшается, а затем возрастает. Можно указать такой угол падения (угол Брюстера), при котором $\rho_p = 0$, т.е. в отраженном излучении присутствует только s -компонента:

$$\theta_i = \arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

При падении света под углом Брюстера коэффициент отражения для s -компоненты:

$$\rho_s = \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \right)^2.$$

Примеры решения задач

Пример П4.1

На пути частично поляризованного пучка света помещён идеальный поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\alpha = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $n = 3$ раза. Найти степень поляризации P падающего света.

РЕШЕНИЕ

Обозначим интенсивность падающего частично поляризованного излучения I_0 и представим, что оно состоит из поляризованной ($I_{\text{п}} = P I_0$) и неполяризованной ($I_{\text{н}} = (1 - P) I_0$) компонент (очевидно, должно быть выполнено равенство $I_0 = I_{\text{п}} + I_{\text{н}}$). В задаче рассматриваются две ситуации. Первая ситуация соответствует максимальному пропусканию излучения. Она реализуется в случае, когда плоскость поляризации поляризованной компоненты падающего излучения совпадает с плоскостью пропускания поляризатора. Тогда в соответствии с законом Малю поляризованная компонента проходит полностью (угол θ между плоскостью поляризации падающего излучения и плоскостью пропускания поляризатора равен 0, и $\cos^2 \theta = 1$), а интенсивность неполяризованной компонен-

ты уменьшается вдвое (для неполяризованной компоненты угол θ изменяется случайным образом в пределах от 0 до 2π рад, поэтому необходимо использовать среднее значение $\cos^2\theta$ в указанных пределах, которое равно $\frac{1}{2}$). Получим на выходе:

$$I_1 = I_{\text{п}} + \frac{1}{2}I_{\text{н}} = PI_0 + \frac{1}{2}(1-P)I_0 = \frac{1}{2}(1+P)I_0.$$

Вторая ситуация соответствует повороту поляризатора из положения максимального пропускания на угол $\alpha = 60^\circ$. В этом случае в соответствии с законом Малю интенсивность поляризованной компоненты определяется по формуле $I_{2\text{п}} = I_{\text{п}} \cos^2 \alpha$, а интенсивность неполяризованной компоненты излучения снова уменьшается вдвое. Получим на выходе:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{\text{п}} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}I_{\text{н}} = PI_0 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}(1-P)I_0 = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2\cos^2 \alpha)P \right] I_0 = \frac{1}{2}(1 + P \cos 2\alpha)I_0. \end{aligned}$$

По условию задачи интенсивность прошедшего света во втором случае в $n = 3$ раза меньше, то есть $I_1 = nI_2$. Подставляя значения интенсивностей и решая полученное уравнение относительно P , найдём

$$\frac{1}{2}(1+P)I_0 = n \cdot \frac{1}{2}(1 + P \cos 2\alpha)I_0, \quad P = \frac{n-1}{1-n \cos 2\alpha} = 0,8.$$

Пример П4.2

На границу раздела воздух-стекло (показатель преломления стекла $n_{\text{ст}} = 1,52$) падает неполяризованный пучок света под углом $\theta_i = 45^\circ$. Найти степень поляризации отражённого светового пучка.

РЕШЕНИЕ

Найдём угол преломления:

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{0,707}{1,52}\right) = 27,723^\circ.$$

Падающее излучение можно представить как некогерентную суперпозицию двух равных по интенсивности компонент: в одной вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения (s -компонента), в другой вектор \vec{E}

лежит в плоскости падения (p -компонента). Коэффициенты отражения для этих компонент (ρ_s и ρ_p) задаются формулами Френеля. Найдём коэффициенты отражения:

$$\rho_s = \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \right]^2 = 0,097; \quad \rho_p = \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} \right]^2 = 0,009.$$

В отражённом свете интенсивность каждой компоненты будет пропорциональна соответствующему коэффициенту отражения. Интенсивность s -компоненты окажется больше, чем интенсивность p -компоненты, поэтому отражённое излучение будет частично поляризовано. Интенсивность поляризованной компоненты определим как разность интенсивностей компонент излучения. Степень поляризации может быть найдена как отношение разности интенсивностей p - и s -компонент к полной интенсивности излучения:

$$P = \frac{I_{\Pi}}{I_{\text{полн}}} = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}.$$

Тогда с учетом соотношений $I_s = \rho_s I_0$, $I_p = \rho_p I_0$, где I_0 – интенсивность падающего излучения, получим:

$$P = \frac{\rho_s - \rho_p}{\rho_s + \rho_p} = 0,83.$$

Задачи

4.1. На стеклянную пластинку (показатель преломления $n = 1,54$) падает из воздуха естественный (неполяризованный) свет. Отражённый луч полностью поляризован. Найти угол α между падающим и отражённым лучами.

4.2. На грань воздух-стекло (показатель преломления $n = 1,52$) падает узкий пучок естественного света под углом $\theta_i = 30^\circ$. Найти угол преломления света в стекле, коэффициенты отражения для p - и s -компонент, степень поляризации отражённого светового пучка.

4.3. На грань воздух-стекло (показатель преломления $n = 1,52$) падает узкий пучок естественного света под углом $\theta_i = 60^\circ$. Найти угол преломления света в стекле, коэффициенты отражения для p - и s -компонент, степень поляризации отражённого светового пучка.

4.4. Для некоторого прозрачного диэлектрика измерен предельный угол полного внутреннего отражения $\theta_{\text{пр}} = 45^\circ$. Найти для этого диэлектрика угол Брюстера $\theta_{\text{Бр}}$ при падении света из воздуха.

4.5. Найти показатель преломления сапфира, если отражённый свет оказывается полностью поляризованным, когда угол преломления θ_t равен 30° .

4.6. Коэффициент отражения ρ естественного света от лицевой грани стеклянной пластины при падении под углом Брюстера равен 14,8%. Найти показатель преломления материала пластины.

4.7. Пучок света проходит через жидкость, налитую в стеклянный (показатель преломления стекла $n_2 = 1,5$) сосуд, и отражается от дна. Отражённый от дна пучок света оказывается полностью поляризованным; угол падения света на дно сосуда $\theta = 48^\circ 26'$. Найти показатель преломления жидкости n_1 .

4.8. Под каким углом к горизонту должно находиться солнце, чтобы его лучи, отражённые от спокойной поверхности озера, были полностью линейно поляризованы? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

4.9. Естественный свет проходит через стекло и падает на границу с некоторым раствором, показатель преломления которого зависит от концентрации растворённого вещества и может изменяться в широких пределах. При каком показателе преломления раствора n_2 отражённый от границы луч будет полностью линейно поляризован? Луч падает на грань стекло-вода под углом $\theta = 40^\circ$, показатель преломления стекла $n_1 = 1,585$.

4.10. Естественный (неполяризованный) свет падает под углом Брюстера на поверхность стеклянной пластины (показатель преломления $n = 1,5$), находящейся в воздухе. Найти степень поляризации света, прошедшего обе поверхности пластины.

4.11. Естественный (неполяризованный) свет падает под углом 30° на поверхность стеклянной пластины (показатель преломления $n = 1,5$), находящейся в воздухе. Найти степень поляризации света, прошедшего обе поверхности пластины.

4.12. Естественный (неполяризованный) свет падает под углом 45° на поверхность стеклянной пластины (показатель преломления $n = 1,5$), находящейся в воздухе. Найти степень поляризации света, прошедшего обе поверхности пластины.

4.13. Естественный (неполяризованный) свет падает под углом 60° на поверхность стеклянной пластины (показатель преломления $n = 1,5$), находящейся в воздухе. Найти степень поляризации света, прошедшего обе поверхности пластины.

4.14. Степень поляризации света $P = 0,25$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей к интенсивности естественной составляющей.

4.15. Излучение содержит поляризованную и естественную составляющие, причем интенсивность поляризованной составляющей в $N = 3$ раза больше интенсивности естественной составляющей. Какова степень поляризации такого излучения?

4.16. Какая доля первоначальной интенсивности естественного света сохранится после прохождения через два абсолютных поляризатора, если угол между плоскостями пропускания поляризаторов составляет $\theta = 75^\circ$ и каждый поляризатор в отдельности поглощает $A = 5\%$ падающего на него света?

4.17. Во сколько раз ослабляется естественный свет, проходя через два абсолютных поляризатора (николя), «прозрачные» оси которых составляют между собой угол 60° , если в каждом из поляризаторов теряется 10% падающего на него светового потока?

4.18. Чему равен угол между плоскостями пропускания идеальных поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшается в $N = 4$ раза?

4.19. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, расположенные так, что угол между их плоскостями пропускания равен α . Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают $A = 8\%$ падающего на них света. Интенсивность излучения, вышедшего из анализатора, составляет 9% от интенсивности естественного света, падающего на поляризатор ($I/I_0 = 0,09$). Найти угол α .

4.20. При падении естественного света на абсолютный поляризатор через него проходит $\eta_1 = 30\%$, а через два таких поляризатора $\eta_2 = 13,5\%$ интенсивности падающего света. Найти угол φ между плоскостями пропускания этих поляризаторов, а также коэффициент пропускания τ каждого поляризатора.

4.21. Два абсолютных поляризатора расположены так, что угол между плоскостями пропускания составляет $\varphi = 60^\circ$. Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении: а) через один поляризатор, б) через оба поляризатора? При прохождении света через каждый поляризатор потери составляют $A = 5\%$.

4.22. Естественный свет падает на систему из трёх последовательно расположенных одинаковых абсолютных поляризаторов, причём плоскость пропускания среднего поляризатора составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с плоскостями пропускания двух других поляризаторов. Каждый поляризатор обладает таким поглощением, что при падении на него линейно поляризованного света максимальный коэффициент пропускания составляет $\tau_{\max} = 0,81$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

4.23. Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через три идеальных поляризатора, если угол между плоскостями пропускания первого и второго поляризаторов составляет $\alpha_1 = 30^\circ$, а угол между плоскостями пропускания второго и третьего – $\alpha_2 = 60^\circ$?

4.24. На пути частично поляризованного пучка света помещён идеальный поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\alpha = 90^\circ$ из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $n = 2$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

4.25. Естественное излучение проходит через поляризатор, характерные коэффициенты пропускания которого: $\tau_{\max} = 0,9$; $\tau_{\min} = 0,1$. Найти степень поляризации прошедшего излучения.

4.26. Полностью линейно поляризованное излучение проходит через поляризатор, характерные коэффициенты пропускания которого таковы: $\tau_{\max} = 0,9$; $\tau_{\min} = 0,1$. Плоскость поляризации исходного излучения составляет с плоскостью пропускания поляризатора угол $\varphi = 45^\circ$. Найти угол, который плоскость поляризации прошедшего излучения образует с плоскостью пропускания поляризатора.

4.27. Полностью линейно поляризованное излучение интенсивностью I проходит через поляризатор, характерные коэффициенты пропускания которого таковы: $\tau_{\max} = 0,9$; $\tau_{\min} = 0,1$. Плоскость поляризации исходного излучения составляет с плоскостью пропускания поляризатора угол 45° . Найти интенсивность прошедшего излучения.

4.28. В типовой схеме двухлучевой интерференции (например, в схеме Юнга) два одинаковых узких полосовых мнимых монохроматических когерентных источника образуют на экране интерференционную картину. На пути до экрана излучение от одного из источников проходит через идеальный поляризатор. Найти видность V интерференционной картины.

4.29. Естественное (неполяризованное) излучение интенсивностью I_0 проходит через два одинаковых линейных поляризатора. Главные коэффициенты пропускания каждого поляризатора: $\tau_{\max} = 0,9$; $\tau_{\min} = 0,1$. Найти интенсивность прошедшего излучения, если: 1) плоскости пропускания обоих поляризаторов совпадают; 2) плоскости пропускания обоих поляризаторов ортогональны.

4.30. На пути линейно поляризованного излучения располагается идеальный поляризатор, так что его плоскость пропускания составляет угол α с плоскостью поляризации. В соответствии с законом Малю коэффициент пропускания составит $\tau_0 = \cos^2 \alpha$. Можно ли, поставив перед

этим поляризатором другой дополнительный поляризатор, увеличить коэффициент пропускания системы поляризаторов? Если да, то какой угол β должна составлять плоскость пропускания дополнительного поляризатора с плоскостью поляризации исходного излучения, чтобы получить максимальное просветление системы? Каков максимальный коэффициент пропускания системы τ ?

5. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Дисперсия света – это зависимость показателя преломления среды от частоты (или длины волны) распространяющейся в ней волны или зависимость фазовой скорости световых волн в среде от их частоты.

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n},$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота волны, n – показатель преломления среды; c – скорость света в вакууме; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$ – волновое число.

Групповая скорость света:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Абсолютный показатель преломления среды n – величина, равная отношению скорости света в вакууме $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, где ϵ_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная к его фазовой скорости v в среде; $n = \sqrt{\epsilon \mu}$; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды; μ – относительная магнитная проницаемость среды. Для среды, не обладающей ферромагнитными свойствами, $\mu \approx 1$ и $n = \sqrt{\epsilon}$.

Дисперсия света называется *нормальной*, если $\frac{dn}{d\omega} > 0$ (или $\frac{dn}{d\lambda} < 0$), т.е. n увеличивается с ростом ω (убывает с ростом λ).

Нормальная дисперсия наблюдается у прозрачных для света веществ.

Дисперсия света называется *аномальной*, если $\frac{dn}{d\omega} < 0$ (или $\frac{dn}{d\lambda} > 0$).

Аномальная дисперсия наблюдается в областях спектра, соответствующих полосам интенсивного поглощения света в среде.

В зависимости от характера дисперсии групповая скорость света может быть как больше, так и меньше фазовой скорости. При нормальной дисперсии $u < v$, при аномальной дисперсии $u > v$, в отсутствие дисперсии $u = v$.

При малом затухании (вдали от области поглощения или в непоглощающей среде)

$$n^2 - 1 = \varepsilon - 1 = \frac{N_0 e^2}{m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где N_0 – концентрация атомов среды; ω_0 – циклическая (круговая) частота свободных незатухающих колебаний электрона в атоме (собственная частота), ω – циклическая (круговая) частота света; e – абсолютная величина заряда электрона; m – масса электрона; ε_0 – электрическая постоянная. Для газов при малой концентрации N_0 величина n близка к единице:

$$n = 1 + \frac{N_0 e^2}{2m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)},$$

и показатель преломления плазмы (так как для свободных электронов $\omega_0 = 0$)

$$n^2 = 1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2},$$

где N_e – концентрация свободных электронов.

В среде с линейным поглощением интенсивность I пучка света меняется по закону Бугера–Ламберта:

$$I(x) = I_0 e^{-kx},$$

где x – путь, пройденный светом в поглощающей среде, I_0 – интенсивность пучка при падении на границу среды (начальная интенсивность), k – *линейный коэффициент поглощения*.

Примеры решения задач

Пример П5.1

Для стекла К8 получена эмпирическая дисперсионная зависимость $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$, где $a = 1,5041$, $b = 4,220 \cdot 10^3 \text{ нм}^2$, λ – длина волны света в вакууме. Найти зависимость фазовой v и групповой u скоростей от λ . Вычислить показатели преломления и отношение u/v для длин волн 400, 500 и 750 нм.

РЕШЕНИЕ

Зависимость $n(\lambda)$ представлена в условии задачи. Фазовая скорость:

$$v = \frac{c}{n} = c \frac{\lambda^2}{a\lambda^2 + b}.$$

Групповая скорость:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Учитывая зависимость $n(\lambda)$ из условия задачи, получим

$$u = c\lambda^2 \frac{a\lambda^2 - b}{(a\lambda^2 + b)^2} \quad \text{и} \quad \frac{u}{v} = \frac{a\lambda^2 - b}{a\lambda^2 + b}.$$

Подставив заданные в условии задачи численные значения, найдём:

$$\lambda_1 = 400 \text{ нм}, n = 1,5305, \frac{u}{v} = 0,9655;$$

$$\lambda_2 = 500 \text{ нм}, n = 1,5210, \frac{u}{v} = 0,9778;$$

$$\lambda_3 = 750 \text{ нм}, n = 1,5116, \frac{u}{v} = 0,9901.$$

Пример П5.2

Концентрация электронов в ионосфере $N_e = 2,56 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$. Найти показатель преломления для радиоволн с частотой $\omega = 2\pi \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$, а также фазовую v и групповую u скорости для этих радиоволн.

РЕШЕНИЕ

Показатель преломления плазмы ионосферы определяется выражением:

$$n^2 = 1 - \frac{N_e e^2}{m\epsilon_0 \omega^2}.$$

Подставив численные значения e , N_e , ω , m , получим $n = 0,891$. Фазовая скорость

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,891} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3,364 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для вычисления групповой скорости используем соотношение Рэлея $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$ и зависимость $n(\lambda)$. Так как

$\omega = vk = v \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi c}{n\lambda}$, для показателя преломления плазмы получим

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + a\lambda^2}},$$

где $a = \frac{N_e e^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m}$. Групповая скорость

$$u = v \left(1 - \frac{a\lambda^2}{1 + a\lambda^2} \right) = vn^2 = cn = 2,67 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задачи

5.1. Найти показатель преломления аргона для видимой области спектра (длина волны 600 нм) при нормальных условиях, если поглощение в аргоне происходит на длине волны 70 нм.

5.2. Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии (v – фазовая скорость, a – постоянная величина, c – скорость света):

1) $v = a$ (недиспергирующая среда);

2) $v = a\sqrt{\lambda}$ (волны на поверхности жидкости);

3) $v = \frac{a}{\lambda}$ (поперечные колебания стержня);

4) $v = \sqrt{c^2 + a^2\lambda^2}$ (электромагнитные волны в ионосфере).

5.3. Показатель преломления сероуглерода для света с длиной волны $\lambda_1 = 656$ нм равен $n_1 = 1,620$, а при $\lambda_2 = 580$ нм $n_2 = 1,629$. Найти параметры аппроксимационной дисперсионной формулы $n = A + B/\lambda^2$ и найти, во сколько раз отличаются фазовая и групповая скорости света в сероуглероде для жёлтой области спектра $\lambda = 620$ нм.

5.4. Найти концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 10$ МГц её показатель преломления $n = 0,90$. Найти фазовую и групповую скорости для этих волн.

5.5. Показать, что для электромагнитных волн в плазме справедливо соотношение $vu = c^2$, где v , u – соответственно фазовая и групповая скорости распространения волн, c – скорость электромагнитных волн в вакууме. Найти зависимость относительной диэлектрической проницаемости ϵ от циклической частоты ω .

5.6. Показать, что если показатель преломления плазмы близок к единице, то справедливо равенство $n^2 = 1 - \frac{N_e e^2}{m \epsilon_0 \omega^2}$. Найти групповую

скорость электромагнитных волн в плазме в этом случае и убедиться, что групповая скорость меньше скорости света в вакууме.

5.7. Пульсар (вращающаяся нейтронная звезда) излучает периодически импульсы радиоволн, которые регистрируются радиотелескопом. Если приёмник перестроить с частоты $\nu_1 = 150$ МГц на частоту $\nu_2 = 240$ МГц, то импульс будет появляться на $\Delta t = 1,3$ с раньше. Каково расстояние до пульсара, если плотность электронов в межзвездном пространстве $N_e = 0,03$ см⁻³?

5.8. Фазовая скорость света v зависит от длины волны по закону $v = a\lambda^m$, где a – размерная константа, а показатель степени $m < 1$. Найти групповую скорость света.

5.9. Фазовая скорость v света в некоторой среде изменяется: 1) с частотой света ω по закону $v = \alpha\omega^q$; 2) с длиной волны λ в данной среде по закону $v = \beta\lambda^p$ (α, β – константы, $p, q < 1$). Найти значения групповой скорости u . Вычислить u для случая $q = -1, p = -1$.

5.10. Показатель преломления криптона для жёлтой линии натрия $\lambda = 589,3$ нм при температуре $T = 273$ К и давлении $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па равен $n_1 = 1,000427$. Найти показатель преломления криптона при той же температуре и давлении $p_2 = 4 \cdot 10^6$ Па.

5.11. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшается в два раза. Во сколько раз уменьшится интенсивность при прохождении пути $3x$?

5.12. На сколько процентов уменьшится интенсивность света при прохождении плоской волной пути, равного: 1) 5,00 мм – оконное стекло; 2) 10,0 мм – зеркальное стекло; 3) 1,0 м? Линейный коэффициент поглощения стекла $1,0$ м⁻¹.

5.13. Монохроматический пучок света интенсивностью I_0 падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины толщиной d . Коэффициент поглощения вещества пластины линейно изменяется вдоль нормали к её поверхности от значения k_1 до k_2 . Пренебрегая отражением света от пластины, найти интенсивность прошедшего света.

5.14. Из некоторого вещества изготовили две пластинки: толщиной $d_1 = 3,8$ мм и $d_2 = 9,0$ мм. Экспериментально было найдено, что коэффициент пропускания первой пластины $D_1 = 0,84$, а второй – $D_2 = 0,70$. Рассчитать коэффициент поглощения вещества. Свет падает на пластины

нормально. Учесть однократное отражение света от поверхности пластин. Коэффициент пропускания – это отношение интенсивностей прошедшего и падающего света.

5.15. В технической оптике принято характеризовать дисперсию материала в видимой области спектра числом Аббе $v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, где показатели преломления n_C, n_D, n_F для длин волн соответственно $\lambda_C = 656,3$ нм, $\lambda_D = 589,3$ нм и $\lambda_F = 486,1$ нм. Для плавленого кварца найдена эмпирическая зависимость $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$, где $a = 1,4484$, $b = 3,53 \cdot 10^3$ нм², λ – длина волны в нанометрах. Найти число Аббе для плавленого кварца.

6. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Тепловое излучение – это электромагнитное излучение вещества, возникающее за счёт его внутренней энергии. Тепловое излучение имеет сплошной спектр, положение максимума которого зависит от температуры вещества. Тепловое излучение может быть *равновесным*, т.е. может находиться в термодинамическом равновесии с излучающим веществом.

Основными характеристиками теплового излучения являются:

1) *интегральная излучательная способность (энергетическая светимость)* тела R_T – это величина, равная энергии электромагнитных волн всевозможных частот (или длин волн), испускаемой в единицу времени единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям:

$$R_T = \frac{dW}{dS dt};$$

2) *спектральная излучательная способность (спектральная плотность энергетической светимости)* тела $r_{\nu,T}$ (или $r_{\lambda,T}$) – это величина, равная энергии, испускаемой единицей поверхности излучающего тела в единицу времени в диапазоне частот $(\nu, \nu + d\nu)$ или $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ по всем направлениям, приходящаяся на единичный интервал частот (или длин волн):

$$r_{\nu,T} = \frac{dW_\nu}{dS dt d\nu} \left(\text{или } r_{\lambda,T} = \frac{dW_\lambda}{dS dt d\lambda} \right).$$

Интегральная и спектральная излучательные способности тела связаны соотношениями:

$$R_T = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda;$$

так как $r_{\nu,T} d\nu = r_{\lambda,T} d\lambda$ и $\left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{c}{\nu^2} = \frac{\lambda^2}{c}$, то

$$r_{\nu,T} = \frac{\lambda^2}{c} r_{\lambda,T};$$

3) *спектральная объемная плотность энергии теплового излучения:*

$$u_{\nu,T} = \frac{dw_{\nu}}{d\nu},$$

где dw_{ν} – объёмная плотность энергии излучения в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$,

$$w_{\nu} = \int_0^{\infty} u_{\nu,T} d\nu.$$

Спектральная объемная плотность энергии и спектральная излучательная способность тела связаны соотношением

$$u_{\nu,T} = \frac{4}{c} r_{\nu,T};$$

4) *спектральный коэффициент поглощения (поглощательная способность) тела $a_{\nu,T}$ (или $a_{\lambda,T}$)* – это доля энергии, поглощённой телом в диапазоне частот от ν до $\nu + d\nu$ (или длин волн в диапазоне от λ до $\lambda + d\lambda$); тогда, например, для коэффициента $a_{\nu,T}$ имеем соотношение:

$$a_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\text{погл}}}{dW_{\nu,\text{пад}}} \leq 1;$$

5) аналогичную характеристику, определяющую долю энергии, поглощённой телом во всем диапазоне частот от 0 до ∞ (или длин волн в диапазоне от 0 до ∞), называют *интегральным коэффициентом поглощения (интегральной поглощательной способностью) тела A_T* .

Абсолютно черное тело – тело, полностью поглощающее всё падающее на него излучение, независимо от его спектрального состава, поляризации и угла падения излучения. Для абсолютно черного тела при любой частоте излучения спектральный коэффициент поглощения $a_{\nu,T}^0 = 1$.

Серое тело – тело, для которого спектральный коэффициент поглощения не зависит от частоты и меньше 1: $a_{\nu,T} < 1$. Этот коэффициент часто называют коэффициентом серости или степенью черноты, и для него можно ввести обозначение A_T (так как для серого тела $a_{\nu,T} = A_T$).

Закон Кирхгофа. Отношение излучательной и поглощательной способностей тела не зависит от природы тела и является для всех тел одной и той же универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры, называемой функцией Кирхгофа:

$$\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = f(\nu, T) \left(\text{или } \frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = f(\lambda, T) \right).$$

Так как для абсолютно черного тела по определению $a_{\nu,T}^0 = 1$ (или $a_{\lambda,T}^0 = 1$), то функция Кирхгофа $f(\nu, T)$ (или $f(\lambda, T)$) является излучательной способностью абсолютно черного тела $r_{\nu,T}^0$ (или $r_{\lambda,T}^0$). Эта функция описывает спектр излучения абсолютно черного тела. Из закона Кирхгофа, в частности, следует, что максимальной излучательной способностью при данной температуре обладает абсолютно чёрное тело, так как $r_{\nu,T} = a_{\nu,T} r_{\nu,T}^0$, а $a_{\nu,T} \leq 1$. Следовательно, $r_{\nu,T} \leq r_{\nu,T}^0$.

Закон Стефана–Больцмана. Интегральная излучательная способность абсолютно чёрного тела пропорциональна его абсолютной температуре в четвёртой степени:

$$R_T^0 = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Закон Стефана–Больцмана для серого тела:

$$R_T = A_T \sigma T^4.$$

Закон Стефана–Больцмана для нечерного тела:

$$R_T = \int_0^{\infty} a_{\nu,T} r_{\nu,T}^0 d\nu = \int_0^{\infty} a_{\lambda,T} r_{\lambda,T}^0 d\lambda = A_T \sigma T^4.$$

Для нечерного тела интегральную излучательную способность можно также представить в виде:

$$R_T = BT^n,$$

где n может оказаться больше 4.

Закон смещения Вина. Длина волны (частота), соответствующая максимуму излучательной способности абсолютно чёрного тела, с ростом температуры смещается в область более коротких длин волн (более высоких частот):

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина.

Зависимость спектральной излучательной способности абсолютно черного тела $r_{\lambda,T}^0$ от длины волны λ (спектр излучения абсолютно черного тела) показана на рис.6.1.

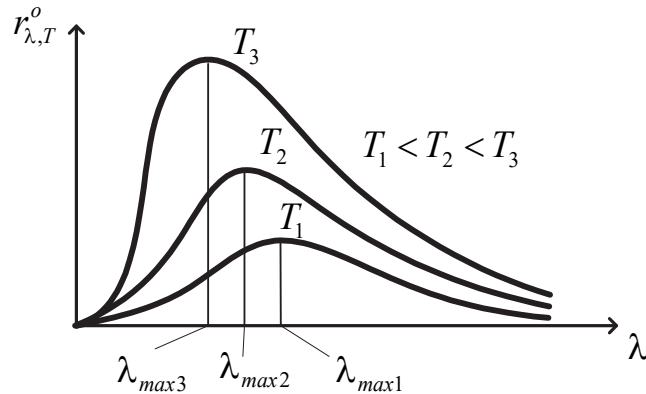


Рис. 6.1. Спектр излучения абсолютно черного тела при разных температурах

Формула Планка. На основе гипотезы о том, что электромагнитное излучение испускается порциями (квантами), Планк предложил формулу для описания спектральной излучательной способности абсолютно черного тела:

$$r_{\nu,T}^0 = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}; \quad r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Минимальная порция энергии (кванта) равна $\varepsilon = h\nu$, где ν – частота излучения, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – *постоянная Планка*.

Формула Планка хорошо согласуется с экспериментом.

В области малых частот спектральная излучательная способность абсолютно чёрного тела может быть рассчитана по *формуле Рэля–Джинса*:

$$r_{\nu,T}^0 = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – *постоянная Больцмана*.

Примеры решения задач

Пример П6.1

В спектре Солнца максимум спектральной излучательной способности $r_{\lambda,T}$ приходится на длину волны $\lambda_m = 0,5$ мкм. Считая, что Солнце излучает как абсолютно чёрное тело, найти: температуру поверхности

Солнца; мощность излучения Солнца; интенсивность солнечной радиации вблизи Земли за пределами ее атмосферы; уменьшение массы Солнца в единицу времени. Радиус Солнца R_C принять равным $6,96 \cdot 10^8$ м.

РЕШЕНИЕ

Из закона смещения Вина находим, что температура T поверхности Солнца равна

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ К.}$$

Энергетическая светимость Солнца по закону Стефана-Больцмана

$$R_T = \sigma T^4 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 6,42 \cdot 10^7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

а вся мощность излучения со всей поверхности

$$P = \frac{dW}{dt} = 4\pi R_C^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 3,91 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

Используя соотношение Эйнштейна для связи между массой и энергией $W = mc^2$, найдём уменьшение массы Солнца в единицу времени

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dW}{dt} = 4,34 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Весь поток излучения Солнца проходит сквозь поверхность сферы радиусом r , равным расстоянию от Земли до Солнца (обычно считают r , равным радиусу земной орбиты $R_{\text{орб}} = 1,5 \cdot 10^{11}$ м):

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \sigma T^4 \left(\frac{R_C}{R_{\text{орб}}} \right)^2 = 1,38 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Пример П6.2

Найти с помощью формулы Планка максимальное значение спектральной излучательной способности абсолютно чёрного тела и его энергетическую светимость, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм вблизи максимума спектральной излучательной способности при температуре тела $T = 3000$ К.

РЕШЕНИЕ

Максимум $r_{\lambda,T}^0$ найдём из условия

$$\frac{dr_{\lambda,T}^0}{d\lambda} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \right] = 0.$$

Вычисление искомого максимума сводится к решению уравнения:

$$x = 5(1 - e^{-x}),$$

где $x = \frac{hc}{\lambda kT}$. Корень уравнения находим приближённо, $x_m = 4,965$. Отсю-

да получаем закон смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{hc}{x_m kT}, \quad b = \frac{hc}{x_m k} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

Теперь $(r_{\lambda,T}^0)_{\max}$ можно найти подстановкой в $r_{\lambda,T}^0$ значения

$$\lambda = \lambda_m = \frac{b}{T}:$$

$$r_{\lambda_m,T}^0 = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \cdot \frac{T^5}{\exp\left(\frac{hc}{kb}\right) - 1}.$$

По теореме о среднем энергетическая светимость в интервале $\Delta\lambda$:

$$\Delta R_T^0 = \int_{\lambda_m - \Delta\lambda/2}^{\lambda_m + \Delta\lambda/2} r_{\lambda,T}^0 d\lambda = r_{\lambda_m,T}^0 \Delta\lambda.$$

Подставив числовые значения величин (в СИ) $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$, $T = 3000 \text{ К}$, $\Delta\lambda = 10^{-9} \text{ м}$ и выполнив необходимые вычисления, получим:

$$r_{\lambda_m,T}^0 = 1,29 \cdot 10^{-5} T^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} = 3,13 \cdot 10^{12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3};$$
$$\Delta R_T^0 = 3,13 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-9} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 3,13 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}.$$

Задачи

6.1. Максимум спектральной излучательной способности яркой красноватой звезды Арктур приходится на длину волны 5800 \AA . Принимая, что звезда излучает как абсолютно чёрное тело, найти температуру поверхности звезды.

6.2. Охлаждение абсолютно чёрного тела происходит только за счет излучения. Найти, на сколько градусов тело остыло, если максимум спектральной излучательной способности сместился с фиолетовой границы спектра (400 нм) до её красной границы (780 нм).

6.3. Муфельная печь потребляет мощность 0,5 кВт. Температура её внутренней поверхности при открытом отверстии диаметром 5 см равна 700°C. Какая часть потребляемой мощности рассеивается стенками? Принять, что отверстие излучает как абсолютно чёрное тело.

6.4. Пренебрегая потерями тепла на теплопроводность, подсчитать мощность электрического тока, необходимую для накаливания нити диаметром 1 мм и длиной 20 см до температуры 1750 К. Считать, что нить излучает как абсолютно чёрное тело.

6.5. Максимум спектральной излучательной способности Солнца соответствует длине волны 500 нм. Принимая Солнце за абсолютно чёрное тело, найти: 1) температуру поверхности Солнца; 2) интегральную излучательную способность Солнца; 3) поток энергии, излучаемый Солнцем в единицу времени. Радиус Солнца $6,95 \cdot 10^8$ м.

6.6. Найти, на сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения. Температуру поверхности Солнца принять равной 5800 К. Радиус Солнца равен $6,95 \cdot 10^8$ м.

6.7. Найти установившуюся температуру зачернённой тонкостенной пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы, на среднем расстоянии от Земли до Солнца, равном радиусу земной орбиты $R_{орб} = 149 \cdot 10^6$ км. Радиус Солнца $R_C = 6,95 \cdot 10^8$ м, температуру поверхности Солнца принять равной $T_C = 5800$ К. Сравнить температуру пластинки со средней температурой поверхности Земли (290 К).

6.8. Используя формулу Планка, показать, что максимум спектральной излучательной способности абсолютно черного тела $r_{\lambda,T}^0$ изменяется пропорционально пятой степени абсолютной температуры.

6.9. Во сколько раз изменилось бы общее количество энергии, излучаемой Солнцем, если бы температура половины поверхности Солнца увеличилась на $\Delta T = 100$ К, а температура второй половины на столько же уменьшилась? Температуру поверхности Солнца принять равной $T_C = 6 \cdot 10^3$ К.

6.10. Какой температуре абсолютно черного тела соответствует излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda = 694$ нм при объемной спектральной плотности излучения на этой частоте $u_{\omega,T} = 10$ Дж·с·м⁻³?

Указание: $u_{\omega,T} = \frac{u_{\nu,T}}{2\pi}$.

6.11. а) вывести из формулы Планка закон Стефана–Больцмана и выразить постоянную σ через мировые константы h , c , k . При интегрировании использовать равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15};$$

б) вывести из формулы Планка закон смещения Вина $\lambda_m T = b$ и выразить постоянную b через мировые константы h , c , k . Задача сводится к решению трансцендентного уравнения $\frac{\xi e^{\xi}}{e^{\xi} - 1} = 5$, которое имеет корень $\xi_0 = 4,965$.

6.12. Показать, что спектральная излучательная способность абсолютно чёрного тела $r_{\nu, T}^0$ и спектральная плотность энергии равновесного излучения $u_{\nu, T}^0$ связаны между собой соотношением $u_{\nu, T}^0 = \frac{4}{c} r_{\nu, T}^0$.

6.13. Вследствие охлаждения абсолютно чёрного тела максимум его спектральной излучательной способности сместился с $\lambda_1 = 0,8$ мкм на $\lambda_2 = 1,2$ мкм. Как изменилась при этом интегральная излучательная способность и максимальная спектральная излучательная способность?

6.14. Используя формулу Планка для $r_{\nu, T}^0 = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, получите

аналогичные формулы Планка для $r_{\lambda, T}^0$ и $r_{\omega, T}^0$, зависящие от длины волны λ и циклической частоты электромагнитной волны ω .

6.15. В спектре излучения огненного шара радиусом 100 м, возникающего при взрыве, максимум энергии излучения приходится на длину волны 0,289 мкм. Найти: температуру поверхности шара; энергию, излучаемую поверхностью шара за время 10^{-3} с; максимальное расстояние, на котором будут воспламеняться деревянные предметы, если их поглощательная способность равна 0,7, а теплота воспламенения $5 \cdot 10^4$ Дж/м². Считать, что шар излучает как абсолютно чёрное тело.

6.16. Найти максимальную энергию, получаемую ежеминутно каждым квадратным метром освещенной Солнцем земной поверхности при нормальном падении. Оценить равновесную температуру Земли (без учёта внутренних источников), считая её серым телом с коэффициентом поглощения $A_T = 0,8$. Считать температуру Солнца равной $T_C = 5800$ К.

6.17. При увеличении температуры абсолютно чёрного тела его энергетическая светимость увеличилась в N раз. Как изменится длина волны, соответствующая максимуму спектральной излучательной спо-

способности тела? Как изменится величина этого максимума? Оба состояния считать равновесными.

6.18. Используя формулу Планка для спектральной излучательной способности, найти приближённые выражения $r_{\nu, T}$ для случаев $h\nu \gg kT$ (формула Вина) и для $h\nu \ll kT$ (формула Рэлея–Джинса).

6.19. По некоторым оценкам температура во внешней части одной из внутренних зон Солнца – зоны лучистого переноса – примерно равна $2 \cdot 10^6$ К. Какой могла бы быть равновесная температура поверхности Земли, если бы температура поверхности Солнца была бы такой же? Считать Землю абсолютно черным телом.

6.20. На графике зависимости $r_{\nu, T}^0(\nu)$, показанном для абсолютно черного тела, имеющего некоторую температуру T (рис. 6.2), площади двух малых участков под графиком, соответствующих двум некоторым частотам ν_1 и ν_2 , одинаковы. 1) одинаковы ли излучательные способности абсолютно черного тела, соответствующие этим частотам? 2) как соотносятся интегральные излучательные способности $(\Delta R_T^0)_1$ и $(\Delta R_T^0)_2$ для этих участков?

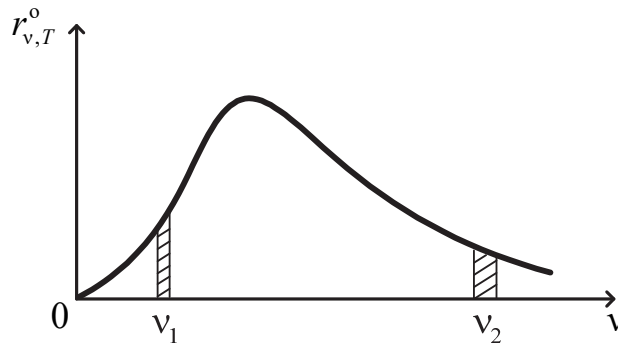


Рис.6.2. Спектр излучения абсолютно черного тела при некоторой температуре

6.21. Начальная температура теплового излучения $T = 2000$ К. На сколько изменится эта температура, если наиболее вероятная длина волны увеличится на $\Delta\lambda = 260$ нм?

6.22. В замкнутом изолированном объеме находится идеальный газ при температуре $T = 300$ К. При какой концентрации молекул газа объёмная плотность кинетической энергии поступательного движения молекул равна объёмной плотности энергии излучения абсолютно чёрного тела? Чему равно при этом давление газа?

6.23. Найти температуру полностью ионизированной водородной плазмы плотностью $\rho = 0,10 \text{ г/см}^3$, при которой давление теплового излучения равно газокинетическому давлению частиц плазмы, если давление теплового излучения $P = w / 3$, где w – объёмная плотность энергии излучения (при высоких температурах вещество подчиняется уравнению состояния идеального газа).

6.24. Температура абсолютно черного тела равна $T = 6000 \text{ К}$. Найти длину волны, соответствующую максимуму спектральной излучательной способности $r_{\lambda,T}^0$. Определите соответствующую этой длине волны частоту ν . Соответствует ли эта частота максимуму функции $r_{\nu,T}^0(\nu)$?

6.25. Мощность излучения единицы поверхности некоторого тела в середине видимого диапазона (длина волны $\lambda = 500 \text{ нм}$) в полосе длин волн с относительной шириной $\eta = \Delta\lambda/\lambda = 0,002$ равна $\Delta R_T = 10 \text{ Вт/м}^2$. Найти спектральные излучательные способности $r_{\lambda,T}$ и $r_{\nu,T}$ для этого тела.

6.26. Температуры абсолютно черного и серого тел одинаковы, степень черноты серого тела $A_T = 0,5$. 1) во сколько раз отличаются площади под графиками зависимости $r_{\nu,T}^0(\nu)$ и $r_{\nu,T}(\nu)$ для этих тел? 2) во сколько раз отличаются их спектральные излучательные способности? 3) как соотносятся аргументы ν_{m_1} и ν_{m_2} , соответствующие максимумам функций $r_{\nu,T}^0(\nu)$ и $r_{\nu,T}(\nu)$?

6.27. Найти поглощательную способность серого тела, если оно при температуре $T = 1000 \text{ К}$ испускает с поверхности $S = 10 \text{ см}^2$ поток $\Phi = 25 \text{ Вт}$. При какой температуре чёрного тела его интегральная энергетическая светимость будет равна энергетической светимости серого тела?

6.28. Температура абсолютно чёрного тела $T = 500 \text{ К}$. Найти энергетическую светимость этого тела, приходящуюся на спектральный интервал длин волн $\Delta\lambda = 10 \text{ нм}$ около длины волны $\lambda = 580 \text{ нм}$. Сравнить с энергетической светимостью в таком же интервале длин волн около длины волны, соответствующей максимуму функции $r_{\lambda,T}^0$.

6.29. Вычислить во сколько раз увеличится энергетическая светимость абсолютно чёрного тела в небольшом интервале длин волн около $\lambda = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ и в таком же интервале около длины волны λ_m , соответствующей максимуму излучательной способности, при повышении температуры тела от 1000 К до 2000 К .

6.30. Медный шарик радиусом $r = 10 \text{ мм}$ с абсолютно черной поверхностью поместили в эвакуированный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная темпе-

ратура шарика $T = 300$ К. Через какое время его температура уменьшится в $\eta = 1,5$ раза? Удельная теплоёмкость и плотность меди соответственно равны $C = 380$ Дж/(кг·К), $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ г/м³.

6.31. При работе электрической лампы вольфрамовый волосок накаляется до температуры $T_1 = 2700$ К. Через $t = 260$ с после выключения тока температура волоска падает до $T_2 = 300$ К. Найти диаметр волоска, считая, что он излучает как серое тело с коэффициентом излучения $A_T = 0,3$. Падающее на волосок извне излучение и другие потери энергии (кроме излучения) не учитывать. Удельная теплоёмкость и плотность вольфрама $C = 1500$ Дж/(кг·К), $\rho = 1,91 \cdot 10^4$ кг/м³.

6.32. Тело массой $m = 0,010$ кг и площадью поверхности $S = 0,020$ м², имеющее температуру $T_1 = 600$ К, помещено в вакуум. До какой температуры T_2 охладится тело за время $t = 30$ с, если средняя поглощательная способность поверхности тела $A_T = 0,4$, а удельная теплоёмкость $C = 334,4$ Дж/(кг·К). Излучением, падающим на тело от окружающих предметов, пренебречь.

6.33. Для длины волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м спектральная излучательная способность некоторого тела равна спектральной излучательной способности абсолютно чёрного тела, имеющего температуру $T = 3000$ К. Найти температуру тела, если его спектральная поглощательная способность на данной длине волны равна $a_{\lambda,T} = 0,5$.

6.34. Какую мощность N надо подводить к зачерненному металлическому шарик радиусом $r = 5$ см, чтобы поддерживать его температуру на $\Delta T = 50$ К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды $T = 293$ К. Считать, что тепло выделяется только вследствие излучения.

7. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Квантовые (корпускулярные) свойства света проявляются в том, что свет излучается (М. Планк), поглощается и распространяется (А. Эйнштейн) в виде световых квантов – фотонов. Фотоны являются носителями энергии и импульса световой волны. Энергия фотона:

$$W_{\phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где ν – частота света; λ – длина световой волны в вакууме; h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Масса m_ϕ и импульс p_ϕ фотона:

$$m_\phi = \frac{W_\phi}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}, \quad p_\phi = m_\phi c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Связь между энергией и импульсом фотона:

$$W_\phi = cp_\phi.$$

Масса покоя фотона равна нулю, фотон всегда движется со скоростью c в направлении распространения электромагнитной волны, поэтому

$$p_\phi = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad \vec{p}_\phi = \frac{h\vec{c}}{\lambda c} = \hbar\vec{k},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; \vec{k} – волновой вектор ($k = 2\pi/\lambda$).

Внешний фотоэффект – явление вырывания электронов из твердых и жидких веществ под действием света. Это результат неупругого взаимодействия фотона и электрона.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_{\text{к max}},$$

где $A_{\text{вых}}$ – работа выхода электрона из вещества, $W_{\text{к max}}$ – максимальная кинетическая энергия электрона, $h\nu$ – энергия поглощенного фотона. Для нерелятивистского электрона

$$W_{\text{к max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2},$$

где m – масса электрона.

В релятивистском случае ($v_{\text{max}} \approx c$)

$$W_{\text{к max}} = W - W_0 = (m - m_0)c^2 \quad \text{или} \quad W_{\text{к max}} = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

где $\beta = v_{\text{max}}/c$, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$; m и m_0 – релятивистская масса и масса покоя электрона; W и W_0 – соответственно полная и энергия покоя электрона.

Связь релятивистских импульса и энергии электрона: $p_e^2 c^2 = W^2 - W_0^2$ или $p_e^2 c^2 = W_{\text{к}}(2W_0 + W_{\text{к}})$. Для случая внешнего фотоэффекта $W_{\text{к}} = W_{\text{к max}}$.

Так как кинетическая энергия релятивистского электрона $W_{\text{к макс}} \gg A_{\text{вых}}$, уравнение Эйнштейна можно записать в виде:

$$h\nu = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Красная граница фотоэффекта – это минимальная частота света ν_0 (максимальная длина волны λ_0), при которой еще возможен фотоэффект:

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}.$$

Задерживающее напряжение U_3 , при котором фототок равен нулю (ни одному из электронов не удастся достичь анода), определяется из соотношения

$$eU_3 = h\nu - A_{\text{вых}}.$$

Давление света P на плоскую поверхность тела при наклонном падении и частичном отражении равно численному значению импульса, передаваемого фотонами телу на единице площади поверхности в единицу времени:

$$P = \frac{I_c}{c} (1 + R) \cos^2 i$$

или

$$P = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 i,$$

где I_c – интенсивность излучения – энергия фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени (облученность поверхности);

c – скорость света в вакууме; $I_c = \langle w \rangle c = \frac{N h \nu}{V} c = \frac{N h \nu}{S t}$, $\langle w \rangle$ – среднее значение

объёмной плотности энергии света; N – количество фотонов, падающих на единицу площади в единицу времени; R – коэффициент отражения; i – угол падения света на поверхность.

Эффект Комптона – это упругое рассеяние световых квантов малой длины волны на свободных либо слабо связанных электронах, сопровождающееся увеличением длины волны:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \lambda_c (1 - \cos\theta),$$

где θ – угол рассеяния; $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,425 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ – комптоновская длина

волны электрона; m_0 – масса покоя электрона.

Приобретённая кинетическая энергия электрона отдачи при рассеянии фотона на угол θ равна:

$$W_{\text{кe}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{(\lambda + \Delta\lambda)},$$

где $\frac{hc}{\lambda} = W_{\phi}$ – энергия падающего фотона; $\frac{hc}{\lambda'} = W'_{\phi}$ – энергия рассеянного фотона; $\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$ – комптоновское изменение длины волны.

Примеры решения задач

Пример П7.1

При облучении фотоэмиссионного катода светом с длиной волны $\lambda_1 = 589$ нм с поверхности катода вылетают фотоэлектроны с максимальной кинетической энергией $W_{\text{к max}_1} = 0,35$ эВ. Найти работу выхода для материала катода и красную границу фотоэффекта. Найти максимальную скорость фотоэлектронов при облучении этого катода светом с длиной волны $\lambda_2 = 0,003$ нм (γ -излучение).

РЕШЕНИЕ

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в виде

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_{\text{к max}_1}.$$

Отсюда

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda_1} - W_{\text{к max}_1} = 2,81 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,76 \text{ эВ}.$$

Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}} = \lambda_1 \frac{hc}{hc - \lambda_1 W_{\text{к max}_1}} = 706 \text{ нм}.$$

Вычисляя скорость фотоэлектрона, считаем его классической частицей, если кинетическая энергия электрона $W_{\text{к max}} \ll m_0 c^2$, где $m_0 c^2 = 0,512$ МэВ – энергия покоя электрона.

Так как при фотоэффекте в кинетическую энергию электрона превращается только часть энергии фотона hc/λ , то неравенство $W_{\text{к max}} \ll m_0 c^2$ будет заведомо выполняться при $hc/\lambda \ll m_0 c^2$, которое можно записать так (в видимой области спектра): $\lambda \gg \lambda_c = m_0 c^2 = 2,425 \cdot 10^{-12}$ м.

Если неравенство $\lambda \gg \lambda_C$ не выполняется, то электрон следует считать релятивистской частицей и применять к нему соотношение:

$$\frac{hc}{\lambda_2} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad \beta = v_{\max}/c.$$

При $\lambda = \lambda_2 = 0,003$ нм длина волны γ -излучения близка к λ_C . При этом величиной $A_{\text{вых}}$ в уравнении Эйнштейна можно пренебречь:

$$W_{\text{к max}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Отсюда найдем β , учитывая, что

$$\delta = \frac{hc}{\lambda_2 m_0 c^2} = \frac{\lambda_C}{\lambda_2} = \frac{0,00243}{0,003} = 0,81, \quad \beta = \frac{\sqrt{\delta(\delta+2)}}{1+\delta} = 0,833.$$

Для скорости фотоэлектронов получим $v_{\max} = 0,833 \cdot 3 \cdot 10^8$ м/с = $2,5 \cdot 10^8$ м/с.

Пример П7.2

Фотон с энергией $W_\phi = 0,8$ МэВ испытывает комптоновское рассеяние на почти свободном электроне на угол $\theta = 120^\circ$. Найти изменение длины волны при рассеянии, энергию фотона после рассеяния и изменение энергии электрона отдачи.

РЕШЕНИЕ

Комптоновское изменение длины волны излучения:

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos\theta) = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2} = 3,65 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

где $\lambda_C = \frac{h}{m_0 c}$ – комптоновская длина волны; θ – угол рассеяния. Длину

волны излучения до рассеяния выразим через энергию фотона:

$$\lambda = \frac{hc}{W_\phi} = 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Длина волны рассеянного света

$$\lambda' = \frac{hc}{W_\phi} + 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2} = 5,20 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Энергия фотона после рассеяния

$$W'_\phi = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{W_\phi}{1 + 2\delta \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0,24 \text{ МэВ},$$

где $\delta = \frac{W_\phi}{m_0 c^2} = 1,56$; $m_0 c^2 = 0,512 \text{ МэВ}$ – энергия покоя электрона.

Изменение энергии электрона отдачи найдём из закона сохранения энергии:

$$\Delta W_e = W_\phi - W'_\phi = 0,56 \text{ МэВ}.$$

Задачи

7.1. Найти массу, энергию и импульс фотона, длина волны которого $\lambda_1 = 600 \text{ нм}$ (видимая часть спектра) и $\lambda_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ нм}$ (γ -излучение).

7.2. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda_1 = 520 \text{ нм}$? При какой скорости электрона его импульс совпадает с импульсом фотона, соответствующего излучению с длиной волны $\lambda_2 = 0,003 \text{ нм}$ (γ -излучение)?

7.3. Какова длина волны и частота фотона с энергией 10 кэВ ? К какому диапазону излучения принадлежит этот фотон?

7.4. Найти энергию и импульс фотона с длиной волны λ , равной:

а) 555 нм (видимый свет); б) $0,1 \text{ нм}$ (рентгеновское излучение); в) $0,002 \text{ нм}$ (γ -излучение).

7.5. Пороговая чувствительность сетчатки человеческого глаза к жёлтому свету ($\lambda = 550 \text{ нм}$) составляет $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}$. Какому числу ежесекундно падающих на сетчатку фотонов это соответствует?

7.6. Лампочка карманного фонаря потребляет мощность около 1 Вт . Приняв, что эта мощность рассеивается одинаково во всех направлениях в виде излучения со средней длиной волны 1 мкм , найти число фотонов, падающих на 1 см^2 площадки, расположенной перпендикулярно лучам на расстоянии 10 км , в течение 1 с .

7.7. Если удвоить амплитуду и частоту плоской электромагнитной волны, то во сколько раз изменится плотность потока фотонов (число фотонов, пересекающих единичную площадку в единицу времени)?

7.8. Плотность потока энергии в импульсе излучения лазера равна $I = 1 \cdot 10^{15} \text{ Вт/м}^2$. Найти амплитуду напряжённости электрического поля в световой волне в вакууме. Какова плотность потока фотонов, соответствующая этой величине? Длина волны лазерного излучения $\lambda = 694 \text{ нм}$?

7.9. Поверхность облучается γ -лучами с длиной волны $\lambda = 10^{-6}$ нм. Интенсивность облучения $I = 1$ Вт/м². Найти число фотонов, падающих на квадратный метр площади поверхности за 1 с, массу и импульс фотона. Какое давление оказывает излучение на полностью поглощающую поверхность при нормальном падении?

7.10. Поток энергии, излучаемый электрической лампой $\Phi = 600$ Вт. На расстоянии $L = 1$ м от лампы перпендикулярно к падающим лучам расположено плоское круглое зеркальце диаметром $d = 2$ см. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий на него свет, найти силу светового давления на зеркальце.

7.11. Черная поверхность освещается лучами монохроматического источника ($\lambda = 0,589$ мкм). При этом на каждый 1 см² поверхности падает за 1 с 10^{16} фотонов. Найти величину светового давления на поверхность.

7.12. Найти давление света на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 6% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идёт на излучение.

7.13. Форму хвостов комет можно приближенно объяснить давлением солнечного излучения на частицы, из которых состоят хвосты комет. Для простоты будем считать частицу плоской с площадью S и абсолютно черной. Какую массу должна иметь частица в кометном хвосте, чтобы сила светового давления на неё уравновешивалась силой притяжения частицы Солнцем?

7.14. Монохроматический пучок света ($\lambda = 662$ нм) падает нормально на поверхность с коэффициентом отражения $R = 0,80$. Давление света на поверхность равно $P = 10^{-6}$ Па. Найти количество фотонов, поглощаемых ежесекундно площадью $S = 2$ см² поверхности.

7.15. Параллельный пучок света (длина волны $\lambda = 400$ нм) падает под углом $i = 60^\circ$ на плоское зеркало с коэффициентом отражения $R = 0,9$. Диаметр d зеркала равен 30 см. Плотность потока фотонов $N_0 = 4 \cdot 10^{21}$ м⁻²·с⁻¹. Найти силу давления, оказываемого светом на зеркало.

7.16. Интенсивность солнечной радиации на поверхности Земли равна 1,35 кВт/м². Найти давление солнечной радиации при нормальном падении 1) на поверхность чёрного тела; 2) на поверхность, полностью и зеркально отражающую излучение; 3) на стеклянную пластинку, отражающую 4% и поглощающую 6% падающей энергии.

7.17. Какой диаметр должен иметь алюминиевый шарик, находящийся в космическом пространстве, чтобы его притяжение к Солн-

цу уравновешивалось силой светового давления солнечных лучей? Коэффициент отражения шарика $R = 0,9$, плотность алюминия $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

7.18. Красная граница фотоэффекта для цезия равна 653 нм. Найти максимальную скорость фотоэлектронов при облучении цезия фиолетовыми лучами с длиной волны 400 нм.

7.19. На поверхность лития падает монохроматический свет длиной волны 310 нм. Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов 1,7 В. Найти работу выхода электронов из лития.

7.20. Найти красную границу фотоэффекта для цинка (работа выхода 3,74 эВ) и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка электромагнитным излучением с длиной волны 250 нм.

7.21. Найти величину задерживающего потенциала для фотоэлектронов, испускаемых при освещении калия (работа выхода 2 эВ) светом, длина волны которого 330 нм.

7.22. Какова должна быть длина волны ультрафиолетовых лучей, падающих на поверхность некоторого металла, чтобы скорость электронов была равна 10^4 км/с . Работа выхода пренебрежимо мала по сравнению с энергией электрона.

7.23. Найти работу выхода с поверхности некоторого металла, если при поочередном освещении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0,35 \text{ мкм}$ и $\lambda_2 = 0,54 \text{ мкм}$ задерживающие потенциалы, при которых фототок прекращается, отличаются в $\eta = 4$ раза.

7.24. При облучении фотокатода, изготовленного из металлического натрия, светом с частотами $\nu_1 = 6,65 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ и $\nu_2 = 1,1 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, значения задерживающих напряжений оказались равными соответственно $U_{з,1} = 1,20 \text{ В}$ и $U_{з,2} = 3,00 \text{ В}$. Найти из этих данных значения постоянной Планка h , работу $A_{\text{вых}}$ выхода электрона для натрия и красную границу λ_0 фотоэффекта.

7.25. Катод вакуумного фотодиода освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 450 \text{ нм}$. Площадь катода $S = 1,00 \text{ см}^2$, интенсивность облучения $I = 40 \text{ Вт/м}^2$. Квантовый выход фотоэффекта (среднее число электронов, выбиваемых одним падающим фотоном) $\eta_{\text{кв}} = 0,05$. Найти ток насыщения, проходящий через диод.

7.26. Рентгеновская трубка работает под напряжением $U = 30 \text{ кВ}$. Рентгеновское излучение получается в результате торможения электронов, разогнанных в трубке электрическим полем, при ударах об антика-

тод. Найти максимальную скорость фотоэлектронов, вылетающих из цинкового катода (работа выхода $A_{\text{вых}} = 3,74$ эВ) под действием рентгеновского излучения.

7.27. Металлический шарик радиуса $R = 1$ см облучается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 200$ нм. В результате фотоэффекта шарик заряжается положительным зарядом до потенциала $\phi = 1,5$ В. Найти работу выхода для металла, из которого изготовлен шарик, и его максимальный заряд.

7.28. Электроды вакуумного фотоэлемента (один цезиевый, другой медный) замкнуты снаружи накоротко. Цезиевый электрод (работа выхода $A_{\text{вых}} = 1,89$ эВ) освещается монохроматическим светом. Найти: а) длину волны света, при котором появляется фототок в цепи фотоэлемента; б) максимальную скорость электронов, подлетающих к медному электроду, если длина волны света $\lambda = 220$ нм; в) скорость фотоэлектронов при условии, что к электродам приложено ускоряющее напряжение $U = 2$ В.

7.29. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 0,0707$ нм испытывают комптоновское рассеяние. Найти изменение длины волны рентгеновских лучей и энергию электрона отдачи при рассеянии на 90° и на 180° .

7.30. Фотон рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0,02$ нм в результате комптоновского рассеяния на покоящемся электроном отклоняется на угол $\theta = \frac{\pi}{2}$. Найти кинетическую энергию и импульс электрона

отдачи. Показать на основе геометрических соображений, что при $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ импульс электрона отдачи по абсолютной величине больше импульса падающего фотона.

7.31. Фотон в опыте Комптона рассеялся на угол θ . Найти угол между направлением первичного фотона и импульсом электрона отдачи.

Расчёт выполнить для $\theta = \frac{\pi}{2}$ и длины волны падающего излучения $\lambda = 0,02$ нм.

7.32. γ -квант частоты $\nu = 3 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}$, столкнувшись с неподвижной частицей, начал двигаться под углом $\theta \geq \frac{\pi}{3}$ к первоначальному направлению. При этом частота кванта уменьшилась на $\Delta\nu = 0,198 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}$ ($\Delta\nu \ll \nu$). Найти массу этой частицы. Каким было бы изменение частоты при рассеянии γ -кванта на электроне?

7.33. Энергия рентгеновских лучей равна $W_\phi = 0,6$ МэВ. Найти энергию электрона отдачи, если известно, что длина волны рентгеновского кванта после комптоновского рассеяния изменилась на 20%. На какой угол произошло рассеяние?

7.34. Угол между направлением налетающего фотона (рис. 7.1) и направлением вылета электрона в опыте Комптона равен $\varphi = 30^\circ$. Энергия падающего фотона $W_\phi = 300$ эВ. Найти изменение длины волны и энергию электрона отдачи.

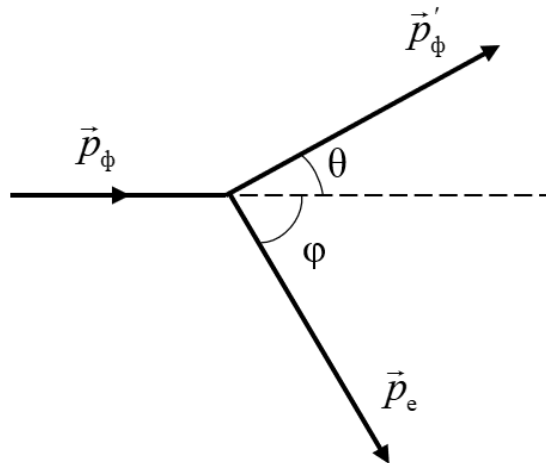


Рис. 7.1. Импульсы частиц в опыте Комптона

7.35. Фотон с длиной волны $\lambda = 3,64$ пм рассеялся на покоившемся свободном электроне так, что кинетическая энергия электрона отдачи составила $\eta = 0,25$ от энергии налетевшего фотона. Найти комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона и угол, под которым рассеялся фотон.

8. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

Волны де Бройля – это волны, которые ставятся в соответствие любой движущейся микрочастице, отражающие квантовую природу микрочастиц.

Количественные соотношения между волновыми и корпускулярными свойствами частиц те же, что и у фотонов: если частица имеет энергию W и импульс p , то с ней связана волна частоты $\nu = W/h$ и длины $\lambda = h/p$, где h – постоянная Планка.

Для частиц не очень высокой энергии (скорость частицы $v \ll c$, (c – скорость света в вакууме) длина волны де Бройля $\lambda = h/(mv)$, т.е. λ тем меньше, чем больше масса частицы или (и) её скорость. Для электронов с энергией от 1 эВ до 10 кэВ длины волн лежат в интервале рентгеновского излучения от 1,0 нм до 0,01 нм. Для макроскопических тел λ лежит за пределами, доступными для наблюдений, поэтому волновые свойства для таких тел несущественны.

Волновым законам подчиняется величина, описывающая состояние частицы и называемая *волновой функцией* Ψ . Квадрат модуля $|\Psi|^2$ определяет вероятность состояния системы. Поэтому волны де Бройля называют *волнами вероятности*.

Волновая функция свободно движущейся частицы с определённым импульсом (волна де Бройля) имеет вид плоской волны:

$$\Psi(x, t) \sim \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right].$$

Соотношения неопределённостей – это фундаментальные соотношения квантовой механики, устанавливающие предел точности одновременного измерения канонически сопряжённых динамических переменных, характеризующих квантовую систему. Соотношения неопределённостей есть следствие внутренних свойств квантовых объектов – корпускулярно-волнового дуализма, т.е. неразделимого сочетания волновых и корпускулярных свойств, равно учитываемых при полном описании объектов.

Математически соотношения неопределённостей записываются в виде неравенств (соотношения неопределённостей Гейзенберга):

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2},$$

где под неопределённостями координаты и импульса понимаются среднеквадратичные отклонения этих физических величин от их средних значений, т.е.

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}.$$

Неопределённость в измерениях не является следствием несовершенства измерительной техники, а есть объективное свойство материи.

Ввиду малости \hbar соотношения неопределённостей не проявляются в опытах с макроскопическими телами, они существенны для явлений атомных масштабов.

Соотношение неопределённостей для энергии и времени

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

можно трактовать как невозможность точного определения энергии за ограниченный интервал времени Δt вследствие взаимодействия системы с измерительным прибором.

Для возбуждённых квантовых систем неопределённость энергии состояния ΔW (естественная ширина уровня) непосредственно связана со временем τ жизни возбуждённого состояния соотношением неопределённостей

$$\Delta W \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Соотношения неопределённостей позволяют получать простые оценки количественных характеристик квантовых систем.

Примеры решения задач

Пример П8.1

Исходя из соотношений неопределённостей, оценить радиус орбиты электрона в основном состоянии атома водорода.

РЕШЕНИЕ

Полная энергия электрона в атоме водорода складывается из его кинетической энергии и потенциальной энергии притяжения к ядру:

$$W = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Движение электрона в радиальном направлении ограничено радиусом орбиты r , поэтому максимальная неопределённость координаты электрона по порядку величины равна r ($\Delta x \approx r$). В силу соотношения неопределённостей минимальное значение неопределённости импульса электрона $\Delta p \approx \frac{\hbar}{r}$.

Полагая, что величина импульса по крайней мере не меньше, чем его неопределённость ($p \approx \Delta p$), можно оценить значение полной энергии электрона на орбите радиуса r :

$$W \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

При уменьшении радиуса орбиты возрастает кинетическая энергия (первое слагаемое), при увеличении радиуса возрастает потенциальная энергия. Следовательно, существует такое значение $r = r_0$, при котором полная энергия электрона минимальна. Так как основное состояние атома отличается наименьшей энергией, минимальное значение $W_0 = W(r_0)$ даёт оценку энергии основного состояния. Радиус r_0 электронной орбиты в основном состоянии можно оценить из условия экстремума W :

$$\left. \frac{dW}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{\hbar^2}{mr_0^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0.$$

Отсюда

$$r_0 \approx \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0,05 \text{ нм}.$$

Пример П8.2

Найти длину волны де Бройля для электрона и для протона, если кинетическая энергия частиц составляет 8 МэВ (энергия, которая в среднем приходится на один нуклон в ядре атома).

РЕШЕНИЕ

Дебройлевская длина волны частицы выражается через её импульс: $\lambda = h/p$.

Так как энергия покоя электрона (0,511 МэВ) меньше его кинетической энергии, для нахождения импульса электрона необходимо использовать релятивистское соотношение

$$W_k = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - m_e c^2.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{W_k^2 + 2m_e c^2 W_k}} = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ м}.$$

Энергия покоя протона (около 900 МэВ) намного превышает его кинетическую энергию. Поэтому для протона можно воспользоваться нерелятивистской связью между импульсом и энергией частицы:

$$W_k = \frac{p^2}{2m_p}.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_p W_k}} = 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ м}.$$

Задачи

8.1. Оценить наименьшие ошибки, с которыми можно определить скорость электрона, протона (масса протона $m_p = 1860 m_e$, где m_e – масса электрона) и шарика массой 1 мг, если координаты частиц и центра шарика установлены с неопределённостью 1 мкм.

8.2. Оценить с помощью соотношения неопределённостей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося в области, размер которой около 0,1 нм.

8.3. Исходя из того, что радиус атома r имеет величину порядка 0,1 нм, оценить с помощью соотношения неопределённостей скорость движущегося электрона в атоме водорода.

8.4. Возбуждённый атом испускает фотон в течение $\tau = 0,01$ мкс. Длина волны излучения $\lambda = 600$ нм. Найти, с какой точностью могут быть измерены энергия, длина волны и координата фотона.

8.5. С помощью соотношения неопределённостей оценить минимальную энергию электрона в одномерной потенциальной яме шириной $2a$.

8.6. Исходя из соотношения неопределённостей, оценить, какого размера должен быть потенциальный ящик для того, чтобы локализованный в нём электрон имел на самом глубоком уровне энергию 1 эВ, 1 кэВ?

8.7. Используя соотношения неопределённостей, оценить минимальную амплитуду колебаний одномерного гармонического осциллятора массы m и частоты ω .

8.8. С помощью соотношения неопределённостей оценить минимальную энергию одномерного гармонического осциллятора частоты ω .

8.9. Исходя из соотношения неопределённостей, оценить энергию основного состояния атома водорода.

8.10. Найти длину волны де Бройля электрона, протона ($m_p = 1860 m_e$) и шарика массы 1 мг, если известно, что они движутся с одинаковой скоростью 10^5 м/с.

8.11. Выразить кинетическую энергию электрона через его массу m , длину волны де Бройля λ_B и постоянную Планка.

8.12. Найти длину волны де Бройля электрона, ускоренного в электрическом поле при разности потенциалов $U = 100$ В.

8.13. Найти длину волны де Бройля пылинки массой $m = 0,001$ г, имеющей ту же скорость, что и электрон, ускоренный в электрическом поле при разности потенциалов $U = 100$ В.

8.14. Найти среднюю длину волны де Бройля теплового нейтрона, т.е. нейтрона, находящегося в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре $T = 300$ К.

8.15. Найти длину волны де Бройля для α -частицы, нейтрона и молекулы азота, движущихся с тепловой скоростью при температуре $t = 25^\circ\text{C}$.

8.16. На две очень тонкие щели, расположенные друг от друга на расстоянии $d = 10$ мкм, падает пучок электронов с энергией $W = 1$ эВ. На расстоянии $L = 10$ м от щели находится экран. Каково расстояние между соседними максимумами интерференции на экране?

8.17. Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой равна $b = 0,10$ мм. Найти скорость этих электронов, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии $\ell = 50$ см, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 8,0$ мкм.

8.18. Пучок моноэнергетических электронов падает нормально на плоскую преграду с узкой прямоугольной щелью ширины b . Исходя из соотношения неопределенностей, оценить минимальный угол θ_{\min} отклонения электронов от первоначального направления распространения. Полученную оценку сравнить с углом θ_1 , соответствующим первому минимуму дифракции плоской волны де Бройля на щели. Какой вывод можно сделать из этого сравнения? Дебройлевская длина волны падающих электронов равна λ_B . Считать, что дифракция происходит на малые углы ($\sin \theta = \theta$).

8.19. Доказать, что для атома водорода на боровских стационарных орбитах укладывается целое число длин волн де Бройля. Найти длины волн на первой и третьей орбитах.

8.20. Правило отбора стационарных боровских орбит в атоме водорода можно сформулировать следующим образом: на длине классической замкнутой орбиты электрона должно укладываться целое число длин волн де Бройля (см. задачу 8.19). Воспользовавшись принципом отбора в такой формулировке, найти правило квантования энергии электрона, находящегося в прямоугольной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Движение электрона в яме считать одномерным.

8.21. Оптический фотон, длина волны λ которого намного превышает комптоновскую, испытывает рассеяние на покоящемся электроне. Найти зависимость длины волны де Бройля λ_B электрона отдачи от угла рассеяния. На какой угол должен рассеяться фотон, чтобы выполнялось равенство $\lambda = \lambda_B$?

8.22. Атом водорода ионизируется под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны $\lambda = 75$ нм. Найти длину волны де Бройля высвободившегося электрона, если для ионизации атома водорода необходима энергия $E = 13,6$ эВ.

8.23. Работа выхода фотокатода $A_{\text{вых}} = 2$ эВ. Фотоэффект происходит под действием света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Найти минимальную дебройлевскую длину волны электронов вблизи анода, если анодное напряжение $U = 5$ В.

8.24. Фотоэффект наблюдается при облучении фотокатода светом с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Известно, что длина волны де Бройля вылетающих электронов вблизи катода $\lambda_B = 2,0$ нм. Найти красную границу фотоэффекта.

8.25. Найти релятивистское выражение для длины волны де Бройля электрона, ускоренного в электрическом поле, если ускоряющее напряжение равно U .

Указание. Для релятивистской частицы импульс p находится из соотношения $(mc^2 + eU)^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$.

8.26. Длина волны де Бройля релятивистского электрона $\lambda_B = 1,2 \cdot 10^{-12}$ м. Чему равна дебройлевская длина волны того же электрона в системе отсчёта, движущейся со скоростью $v = c/2$ в том же направлении, что и электрон?

Указание. Воспользоваться преобразованием Лоренца для импульса

$$p' = \frac{p - \frac{vW}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где p, W – импульс и энергия электрона в лабораторной системе отсчёта.

8.27. Выразить лоренцевский фактор релятивистского электрона $\gamma = W/(m_0c^2)$ (отношение полной энергии к энергии покоя) через дебройлевскую λ_B и комптоновскую λ_C длины волн.

8.28. Дебройлевская длина волны электрона в два раза превышает комптоновскую. Во сколько раз полная энергия электрона превышает энергию покоя?

8.29. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его дебройлевская длина волны была равна комптоновской?

9. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Основное динамическое уравнение нерелятивистской квантовой механики для микрочастицы массы m , движущейся в силовом поле с потенциальной энергией $U(\vec{r}, t)$ – *временное уравнение Шредингера*:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r}, t) \Psi,$$

где $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$ – волновая функция частицы; Δ – оператор Лапласа.

Если U не зависит от времени ($\frac{\partial U}{\partial t} = 0$), то решение уравнения Шредингера можно представить в виде:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} W t} \psi(\vec{r}),$$

где W – полная энергия частицы, а функция $\psi = \psi(\vec{r})$ удовлетворяет *стационарному уравнению Шредингера*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = W \psi(\vec{r}).$$

Это уравнение дополняется соответствующими граничными условиями, которые накладываются на волновую функцию $\psi(\vec{r})$ и стандартными требованиями к ней. При заданном $U(\vec{r})$ уравнение определяет *собственные волновые функции $\psi(\vec{r})$ и собственные значения энергии W* .

Вероятность обнаружения частицы в элементарном объёме пространства dV равна:

$$dP(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \psi^*(\vec{r}) dV,$$

где $\rho(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$ – *плотность вероятности* местонахождения частицы.

Условие нормировки вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}) dV = 1.$$

Из уравнения Шредингера вытекает *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0,$$

где \vec{j} – *вектор плотности потока вероятности*;

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi(\vec{r}) \nabla \psi^*(\vec{r}) - \psi^*(\vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}) \right],$$

где ∇ – оператор набла, $\nabla \psi \equiv \text{grad } \psi$.

Для состояния с заданным импульсом $\Psi = A e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}}$, $\vec{j} = |A|^2 \frac{\vec{p}}{m} = |A|^2 \vec{v}_{\text{кл}}$,

где $\vec{v}_{\text{кл}}$ – классическая скорость частицы.

Среднее значение физической величины A , характеризующей частицу в состоянии с волновой функцией $\psi(\vec{r})$, определяется формулой:

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) \hat{A} \psi(\vec{r}) dV,$$

где \hat{A} – самосопряжённый оператор, соответствующий величине A .

Одна из важных моделей квантовой механики – *линейный гармонический осциллятор*. Потенциальная энергия осциллятора, имеющего частоту ω_0 :

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(W - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi(x) = 0.$$

Нормированные собственные функции и собственные значения энергии осциллятора:

$$W_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \psi_n(x) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{x_0}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \cdot e^{\xi^2} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2},$$

где $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$, $\xi = \frac{x}{x_0}$, $x_0 = \hbar / m\omega_0$, $\xi = x/x_0$.

Для основного и первого возбуждённого состояния:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad n = 0, \quad W_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0,$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{2x}{x_0} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad n = 1, \quad W_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega_0.$$

Явление прохождения частиц сквозь потенциальный барьер называется *туннельным эффектом*. Коэффициент отражения R для потока частиц, падающих на потенциальный барьер, определяет относительную долю отраженных частиц.

$$R = \frac{|\vec{j}_{\text{отр}}|}{|\vec{j}_{\text{пад}}|}.$$

Коэффициент прозрачности (прохождения) D потенциального барьера характеризует относительную долю частиц, преодолевших потенциальный барьер:

$$D = \frac{|\vec{j}_{\text{прош}}|}{|\vec{j}_{\text{пад}}|},$$

где $\vec{j}_{\text{отр}}$, $\vec{j}_{\text{пад}}$ и $\vec{j}_{\text{прош}}$ – векторы плотности потока вероятности для отраженной, падающей и отраженной волн.

Примеры решения задач

Пример П9.1

Частицы массой m и энергией W движутся слева на потенциальный барьер высотой U_0 (рис. 9.1). Найти:

- коэффициент отражения этого барьера R при $W > U_0$;
- эффективную глубину проникновения частиц в область $x > 0$ при $W > U_0$, т.е. расстояние от границы барьера до точки, где плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз.

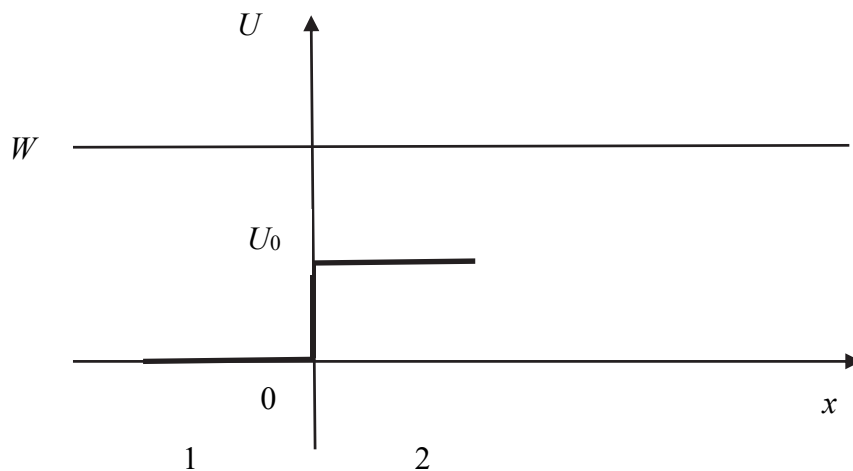


Рис. 9.1

РЕШЕНИЕ

- запишем стационарное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U_0) \Psi = 0.$$

Для области 1:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W \Psi = 0;$$

для области 2:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U_0) \Psi = 0.$$

Введем коэффициенты $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}$; $\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (W - U_0)$.

Найдем решение уравнений Шредингера в виде:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \\ \psi_2 = A_2 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \psi_1 = e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \\ \psi_2 = A_2 e^{i\beta x}. \end{cases}$$

Применим граничные условия $\psi_1(0) = \psi_2(0)$; $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$.

Получим

$$\begin{cases} 1 + B_1 = A_2 \\ i - i\alpha B_1 = i\beta A_2. \end{cases}$$

Обозначим $n = \frac{\beta}{\alpha}$, тогда

$$\begin{cases} 1 + B_1 = A_2 \\ i - B_1 = n A_2. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений:

$$i - B_1 = n + n B_1;$$

$$i - n = (n + 1) B_1;$$

$$B_1 = \frac{i - n}{n + 1}.$$

Коэффициент отражения:

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |B_1|^2 = \left(\frac{i - n}{n + 1} \right)^2 = \left(\frac{i - \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2;$$

б) вероятность прохождения частиц через потенциальный барьер характеризуется коэффициентом прозрачности $D = D_0 e^{-2\beta x}$.

Плотность вероятности $\rho = \frac{dD}{dx} = D_0 e^{-2\beta x} \cdot (-2\beta)$.

По условию $\rho(0) = \exp(x)$, тогда $e^0 = e \cdot e^{-2\beta x}$; $e^{-1} = e^{-2\beta x}$; $1 = 2\beta x$.

Получаем: $x = \frac{1}{2\beta}$.

Пример П9.2

Стационарный поток частиц, имеющих массу m и энергию W , создан в одномерном потенциальном поле $U(x)$: $U(x) = U_0$ при $x \in [0, \ell]$ и $U(x) = 0$ при $x < 0, x > \ell$ (потенциальный барьер).

Показать, что в области $x < 0$ плотность потока вероятности складывается из плотности потоков вероятности падающих и отражённых частиц, и найти её отношение к плотности потока вероятности падающего.

РЕШЕНИЕ

Плотность потока вероятности j частицы, описываемой волновой функцией ψ ,

$$j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right).$$

Волновая функция частицы в заданном потоке частиц есть решение стационарного уравнения Шредингера, которое в области $x < 0$ имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = W\psi.$$

Решение должно быть непрерывной функцией с непрерывной производной, что определяется граничными условиями.

Вводя обозначение $\frac{2mW}{\hbar^2} = k^2$, представим уравнение Шредингера в виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$\psi = ae^{ikx} + be^{-ikx},$$

где первое слагаемое соответствует падающим частицам, второе – отражённым от барьера (даже при $W > U_0$ в отличие от классической механики).

Плотность потока вероятности:

$$j = \frac{\hbar k}{2m} (aa^* - bb^*).$$

Найдем теперь плотность потока вероятности частиц в падающем потоке

$$j_{\text{пад}} = \frac{\hbar k}{2m} aa^*$$

и в отраженном потоке

$$j_{\text{отр}} = -\frac{\hbar k}{2m} b b^*,$$

откуда $j(x < 0) = j_{\text{пад}} + j_{\text{отр}}$.

Для того чтобы вычислить отношение $\frac{j}{j_{\text{пад}}} = 1 - \frac{b b^*}{a a^*}$, необходимо

найти коэффициенты a и b в явном виде. Для этого используем условия непрерывности и гладкости волновой функции. Обозначим величины, относящиеся к области $x < 0$, индексом 1, к области $x \in [0, \ell]$ – индексом 2, и к области $x > \ell$ – индексом 3. Тогда

$$\frac{j}{j_{\text{отр}}} = 1 - \frac{b_1 \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^*}{a_1 \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^*}.$$

Уравнение Шредингера в области $x \in [0, \ell]$:

$$\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + k_2^2 \psi_2 = 0, \quad k_2^2 = \frac{2m(W - U_0)}{\hbar^2}.$$

Величина k_2^2 может иметь любой знак (в зависимости от соотношения W и U_0), а $k^2 = k_1^2 = k_3^2 > 0$. Решение для ψ_2 найдем в виде $\psi_2 = a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}$. В области $x > \ell$ $\psi_3 = a_3 e^{ikx}$ (отражения нет). Условия непрерывности и гладкости имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ a_2 e^{ik_2 \ell} + b_2 e^{-ik_2 \ell} &= a_3 e^{ik_1 \ell}, \\ ik(a_1 - b_1) &= ik_2(a_2 - b_2), \\ ik_2(a_2 e^{ik_2 \ell} - b_2 e^{-ik_2 \ell}) &= ik_1 a_3 e^{ik_1 \ell}. \end{aligned}$$

Исключая неизвестные $\left(\frac{a_3}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{b_2}{a_1} \right)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{a_1} &= \frac{(k_1^2 - k_2^2)(1 - e^{2ik_2 \ell})}{(k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2 e^{2ik_2 \ell}}, \\ \frac{j}{j_{\text{пад}}} &= 1 - \frac{4 \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \sin^2 k_2 \ell}{\left(\frac{k_1}{k_2} + 1 \right)^4 + \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right)^4 - 2 \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right)^2 \cos 2k_2 \ell}. \end{aligned}$$

Например, $\frac{j}{j_{\text{пад}}} = 0,84$ для $U_0 = 10$ эВ, $\ell = 10$ нм и $W = \frac{3}{2}U_0$. Отме-

тим, что

$$\frac{j}{j_{\text{пад}}} = 1 - \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}} = 1 - R,$$

где $R = \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}}$ – коэффициент отражения для микрочастиц, падающих на

от потенциальный барьер.

Для $W < U_0$ справедливо

$$k_2^2 = -\frac{2m(U_0 - W)}{\hbar^2} = \kappa^2,$$

где $\kappa^2 > 0$, $k_2 = i\kappa$, и коэффициенты в волновой функции следует выражать через κ^2 и κ .

Задачи

9.1. Частица массой m находится в потенциальном поле вида

$$U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{a}, \quad |x| < \frac{a}{2}.$$

Найти собственные значения энергии частицы.

9.2. Электрон с энергией $W = 5$ эВ встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $\ell = 0,1$ нм. Найти коэффициент прозрачности потенциального барьера.

9.3. Микрочастица массой m движется в пространстве, где имеется одномерная прямоугольная потенциальная яма шириной ℓ с бесконечно высокими стенками: $U(x) = 0$, $x = [0, \ell]$; $U(x) = \infty$, $x < 0$, $x > \ell$. Найти нормированные собственные волновые функции и собственные значения энергии частицы. Построить диаграмму уровней энергии электрона в потенциальной яме шириной $\ell = 100$ пм. Найти следующие величины: 1) плотность вероятности $\rho(x)$ нахождения частицы в произвольном состоянии; построить в масштабе график $\rho_n(x)$ для заданного n ; 2) вероятность нахождения частиц с наименьшей энергией в каждой трети ямы; 3) вероятность нахождения частиц в произвольном состоянии в каждой половине ямы; 4) среднее значение координаты x и проекции импульса p_x

в произвольном состоянии; 5) среднеквадратичное отклонение координаты $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ в произвольном состоянии; 6) среднеквадратичное отклонение проекции импульса $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$.

9.4. Микрочастица массой m находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками: $U(x, y) = 0$, $x \in [0, \ell_1]$, $y \in [0, \ell_2]$; $U(x, y) = \infty$, $x < 0$, $x > \ell_1$, $y < 0$, $y > \ell_2$. Найти нормированные собственные волновые функции и собственные значения энергии частицы. Построить диаграмму уровней энергии электрона в яме с размерами: а) $\ell_1 = 100$ пм, $\ell_2 = 400$ пм; б) $\ell_1 = \ell_2 = \ell = 100$ пм. Найти следующие величины: максимальную плотность вероятности нахождения частицы в основном состоянии; вероятность нахождения микрочастицы в основном состоянии в области $x \in \left[0, \frac{\ell_1}{3}\right]$, $y \in \left[0, \frac{\ell_2}{3}\right]$.

Указание. При решении стационарного уравнения Шредингера для функции двух переменных воспользоваться методом разделения переменных, представив волновую функцию $\psi(x, y)$ в виде $\psi(x, y) = f(x)\phi(y)$.

9.5. Микрочастица массой m находится в трехмерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Длины рёбер ямы равны ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 . Найти нормированные собственные волновые функции и собственные значения энергии частицы. Построить диаграмму уровней энергии электрона в яме с размерами: а) $\ell_1 = 100$ нм, $\ell_2 = 200$ нм, $\ell_3 = 400$ нм; б) $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100$ нм.

9.6. Микрочастица с массой m и энергией E находится в одномерной потенциальной яме $U(x)$:

- а) $U(0) = \infty$, б) $U(\pm\ell) = \infty$, в) $U(\pm\ell) = \infty$, г) $U(0) = U(\ell) = U_0$,
 $U_0 = 15$ эВ, $U_0 = 10$ эВ, $U_0 = 100$ эВ, $U_0 = 10$ эВ,
 $W < U_0$; $W > U_0$; $W < U_0$; $W > U_0$;

Найти уравнение, определяющее возможные значения энергии частицы. Решая графически это уравнение, найти первый дискретный уровень энергии электрона при $\ell = 100$ пм и заданных значениях U_0 .

9.7. Микрочастица массой m находится в одномерном потенциальном поле $U(x) = 0$, $x \in [0, \ell]$; $U(x) = U_0$, $x > \ell$; $U(x) = \infty$, $x < 0$. Энергия частицы $W = \frac{1}{2}U_0$. Найти нормированную собственную волновую функцию микрочастицы в этом состоянии. Построить график плотности вероятности местопребывания частицы в масштабе для $\ell = 100$ нм. Найти вероятность пребывания частицы внутри и вне ямы.

9.8. Микрочастица массой m находится в однородном потенциальном поле $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ (гармонический линейный осциллятор с классической собственной частотой ω). Найти собственные значения энергии микрочастицы.

Указание. В уравнении Шредингера сделать замену переменной $\xi = \sqrt{\alpha x}$ и подстановку $\psi(x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} f(x)$. Учесть, что в уравнении $U''_{zz} + (\lambda^2 - z^2)U = 0$ собственные значения параметра λ равны $2n + 1$, $n = 0, 1$.

9.9. Найти собственные значения энергии двумерного осциллятора (микрочастицы массой m в потенциальном поле $U(x, y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ с классической собственной частотой ω).

Указание. При решении уравнения Шредингера для $\psi(x, y)$ воспользоваться методом разделения переменных и учесть, что в уравнении $u + (\lambda^2 + z^2)u = 0$ собственные значения параметра λ равны $2n + 1$, $n = 0, 1, \dots$.

9.10. Частица массой m находится в сферически симметричном потенциальном поле $U(r)$, где $U(r) = 0$, $r < r_0$; $U(r) = \infty$, $r > r_0$, r_0 – радиус ямы. а) найти нормированные собственные волновые функции, зависящие только от r (то есть волновые функции s -состояний), и собственные значения энергии частицы; б) построить диаграмму уровней распределения плотности вероятности $\rho(x)$ нахождения электрона в основном состоянии; в) найти вероятности пребывания электрона в основном состоянии в правой и левой половине ямы; г) найти средние значения $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ и средний квадрат отклонения $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$.

Указание. При решении уравнения Шредингера провести разделение переменных и воспользоваться подстановкой $\psi(r) = \frac{1}{r} \phi(r)$.

9.11. Микрочастица массой m находится в сферически симметричной потенциальной яме $U(r)$, где $U(r) = 0$, $r < r_0$; $U(r) = \infty$, $r > r_0$, r_0 – радиус ямы. Найти уравнение, определяющее возможные значения энергии частицы в состояниях с волновой функцией, зависящей только от r (в s -состояниях). Найти собственные значения энергии для электрона в яме с параметрами $r_0 = 100$ нм, $U_0 = 20$ эВ.

Указание. В уравнении Шредингера разделить переменные, в уравнении для радиальной функции сделать подстановку $\psi(r) = \frac{1}{r}\varphi(r)$, уравнение для нахождения собственных значений энергии решить графически.

9.12. Полагая, что электрон атома находится в сферически симметричном поле ядра с зарядом Z , получить уравнение Шредингера для радиальной $R(r)$ и угловой $Y(\theta, \varphi)$ части волновой функции. Уравнение $R(r)$ для связанных состояний электрона в этом поле на больших и малых расстояниях от ядра.

9.13. В водородоподобном атоме электрон находится в потенциальном поле

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где Z – зарядовое число ядра, e – элементарный заряд, r – расстояние электрона от ядра. Найти собственные значения энергии в s -состояниях (т.е. в состояниях, где волновая функция зависит только от r). Построить диаграмму уровней энергии.

Указание. Уравнение Шредингера для радиальной части волновой функции подстановкой $R(r) = \frac{e^{-\beta r}}{r}\varphi(r)$ свести к уравнению вида

$y'' - 2\beta y' + \frac{\gamma}{r}y = 0$ (гипергеометрическое уравнение), которое имеет решение, удовлетворяющее требованиям к волновой функции, при $2\beta n = \gamma$, $n = 1, 2, \dots$.

9.14. Найти собственные значения энергии микрочастицы массой m в потенциальном поле с энергией $U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2 ax}$. Построить диаграмму уровней энергии электрона для $a = 10^{10}$ 1/м и $U_0 = 1$ эВ, 5 эВ, 10 эВ.

Указание. Для решения уравнения Шредингера сделать замену переменной $z = \text{th } ax$ и подстановку $f = (1 - z)^{k/2}\psi(z)$, которые сведут его к уравнению вида $x(1-x)y'' + (k+1)(1-2x)y' + (k-s)(k+s+1)y = 0$ (гипергеометрическое уравнение), решение которого $y(x)$ обладает свойствами, требуемыми от волновой функции, при условии, $k - s = -n$, $n = 0, 1, \dots$.

9.15. Ядра двухатомной молекулы взаимодействуют с энергией $U(x) = A(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$. Построить график $U(x)$ и диаграмму уровней энергии ядер молекулы H_2 при $a = 10^{10}$ 1/м и $A = 5$ эВ.

Указание. При решении уравнения Шредингера сделать замену переменной $z = 2\beta e^{-ax}$ и учесть, что уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y \left(-\frac{1}{4} + \frac{n+k+\frac{1}{2}}{x} - \frac{k^2}{x^2} \right) = 0$$

имеет собственные значения при $n = 1, 2, \dots$.

9.16. Частица массой m находится в потенциальном поле $U(x) = \frac{U_1}{\left(1 + e^{\frac{x}{a}}\right)^2} - \frac{U_2}{1 + e^{\frac{x}{a}}}$. Найти уровни энергии дискретного спектра.

Построить график $U(x)$ и диаграмму уровней энергии для протона при $a = 10^{-10}$ м; $U_1 = 7,5$ эВ; $U_2 = 10$ эВ. Определить, при каком условии частица имеет дискретный спектр.

Указание. Для решения уравнения Шредингера сделать замену переменной $z = e^{-x/a}$ и подстановку $\psi = (1-z)^{-\varepsilon} z^\mu \varphi(z)$ и выбором параметров ε и μ свести уравнение Шредингера к уравнению вида $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$, которое имеет дискретные собственные значения при $\alpha = -n, n = 0, 1, \dots$.

10. АТОМ ВОДОРОДА

Атом водорода состоит из одного протона в ядре и одного электрона, движущегося в кулоновском поле ядра. Теория Бора применима не только к атому водорода, но и к *водородоподобной системе*, состоящей из ядра с зарядом Ze и одного электрона, вращающегося вокруг ядра. Примерами таких систем являются ионы $\text{He}^+, \text{Li}^{++}$ и др.

Основу квантовой теории атома Бора составляют два постулата.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний): электроны движутся только по определенным (стационарным) орбитам. При этом, даже двигаясь с ускорением, они не излучают энергию.

Стационарные состояния обладают определёнными значениями энергии, в общем случае дискретными. Из одного состояния в другое атом может переходить путём квантового (скачкообразного) перехода.

Правило квантования орбит: в стационарных состояниях атома, электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса:

$$L_n = m_e v_n r_n = n\hbar,$$

где m_e – масса электрона; v_n – скорость электрона на орбите радиуса r_n ;

$n = 1, 2, 3, \dots$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – приведенная постоянная Планка или постоянная

Дирака; h – постоянная Планка.

Целое число n равно числу волн де Бройля для электрона, укладываемых на длине круговой орбиты:

$$2\pi r_n / \lambda = 2\pi r_n m_e v_n / h = n.$$

Второй постулат Бора (правило частот): при переходе атома из одного стационарного состояния с энергией W_n в другое состояние с энергией W_m испускается или поглощается один фотон с энергией $h\nu_{nm}$:

$$W_n - W_m = h\nu_{nm}.$$

При $W_m < W_n$ происходит излучение фотона (переход электрона с орбиты более удаленной на ближайшую к ядру). Поглощение фотона сопровождается переходом атома в состояние с большей энергией $W_m > W_n$. Этому способствует переход электрона на более удаленную орбиту.

Энергия электрона в водородоподобной системе равна сумме его кинетической W_k и потенциальной W_{π} в электростатическом поле ядра:

$$W_n = W_k + W_{\pi} = \frac{m_e v_n^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2},$$

где $r_n = n^2 h^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 / (m_e Z e^2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Первый боровский радиус или радиус первой орбиты электрона в атоме водорода ($Z = 1$) при $n = 1$:

$$r_1 = \alpha_0 = h^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 / (m_e e^2) = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

В линейчатых спектрах не только водорода, но и других элементов наблюдаются спектральные серии. Частоты ν всех линий данной серии удовлетворяют соотношению

$$\nu = T(n_2) - T(n_1),$$

где n_1 и n_2 – некоторые целые числа. Функции $T(n_2)$ и $T(n_1)$ называются спектральными термами.

Комбинационный принцип Ритца: частоты спектральных линий излучения любого атома могут быть представлены в виде разности двух термов; составляя различные комбинации термов, можно найти все возможные частоты спектральных линий этого атома.

Линии в спектре атома водорода группируются в спектральные серии. В каждой спектральной серии $n = \text{const}$, а $m = n + 1, n + 2, \dots$. В частности:

- $n = 1, m = 2, 3, \dots$ соответствуют ультрафиолетовой *серии Лаймана*;
- $n = 2, m = 3, 4, \dots$ – *серия Бальмера*, линии которой лежат в видимой области;
- линии *серии Пашена* ($n = 3, m = 4, 5, \dots$), *серии Брэкета* ($n = 4, m = 5, 6, \dots$) и др. лежат в инфракрасной области.

Совокупность частот (или длин волн) образует спектр излучения (или поглощения). Для атома с неподвижным ядром:

$$\frac{1}{\lambda} = R'Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\nu = RZ^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где R', R – постоянные Ридберга, $R' = 10973731,77 \text{ м}^{-1}$, $R = R'c = 3,2931193 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ (обычно в литературе оба значения постоянной Ридберга обозначаются одной буквой R , но указывается, в каких единицах она выражена: с^{-1} или м^{-1}). Постоянная Ридберга для атома водорода:

$$R_{\text{H}} = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2}.$$

При учёте движения ядра массой M , масса электрона заменяется приведенной массой электрона и ядра:

$$m_{\text{прив}} = m_e M / (m_e + M).$$

Постоянная Ридберга для водородоподобной системы:

$$R_Z = Z^2 R = Z^2 \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2}.$$

Энергетические уровни водородоподобной системы можно записать в виде:

$$W_n = -Z^2 R h / n^2.$$

Примеры решения задач

Пример П10.1

Найти максимальную длину волны фотона в видимой части спектра, излучённого при переходе электрона на второй энергетический уровень в атоме водорода.

РЕШЕНИЕ

Согласно второму постулату Бора:

$$h\nu = W_m - W_n,$$

где W_n и W_m – энергии стационарных состояний атома соответственно до и после излучения фотона; ν – частота излучения фотона; $n = 2$ – второй энергетический уровень; $m = \{3, 4, 5, \dots\}$ – энергетические уровни, с которых может осуществляться переход электрона; $W_1 = -13,6 \text{ эВ} = -21,76 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ – энергия на первом уровне, $\lambda \in [0,4 \div 0,7] \cdot 10^{-6} \text{ м}$ – видимая область спектра.

$$W_m = \frac{W_1}{m^2}; W_n = \frac{W_1}{n^2}.$$

Тогда, частота излучения фотона:

$$\nu = \frac{W_m - W_n}{h} = \frac{\frac{W_1}{m^2} - \frac{W_1}{n^2}}{h} = \frac{|W_1|}{h} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Частота и длина волны связаны следующим соотношением:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}.$$

Минимальное значение частоты при излучении будет при $m = 3$:

$$\begin{aligned} \nu_{m.\min} &= \frac{|W_1|}{h} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m_{\min}^2} \right), \\ \nu_{m.\min} &= \frac{21,76 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 0,457 \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Подставим данное значение в формулу связи между длиной волны и частотой. Если частота минимальная, то значение длины волны будет максимальное:

$$\lambda_{m.\max} = \frac{c}{\nu_{m.\min}} = 657 \text{ нм}.$$

Данное значение входит в видимый световой диапазон – это красная линия в излучении атома водорода.

Пример П10.2

Найти среднее квантовомеханическое обратное расстояние $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ в основном состоянии водородоподобного атома.

РЕШЕНИЕ

Среднее квантовомеханическое значение физической величины f в состоянии со сферически симметричной волновой функцией $\psi(r)$ равно

$$\langle f \rangle = \int_0^\infty \psi^* \hat{f} \psi 4\pi r^2 dr.$$

В основном состоянии водородоподобного атома волновая функция имеет вид

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}} \cdot e^{-\frac{r}{a_1}},$$

оператор $\hat{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}$ и $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{4\pi}{\pi a_1^3} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_1}} r dr$. Вычисляя интеграл (например, по частям или с помощью таблиц), получаем, что он равен 1, и

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a_1}.$$

Задачи

10.1. Найти максимальный импульс фотона в видимой части спектра, излучённого при переходе электрона на второй энергетический уровень в атоме водорода.

10.2. Вычислить радиусы второй и третьей орбит в атоме водорода.

10.3. Определить длину волны λ , соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.

10.4. Определить номер электронной орбиты, на которую переходит электрон в атоме водорода, находившийся на втором энергетическом уровне при поглощении фотона с энергией 1,87 эВ.

10.5. Водородоподобная система (атом) состоит из частицы массой m_1 с отрицательным зарядом $-e$ и частицы массой m_2 с положительным зарядом Ze ($Z = 1, 2, \dots$), вращающихся относительно общего центра масс.

А. Применяя теорию Бора, найти для этого атома следующие величины:

- 1) уровни энергии;
- 2) радиусы боровских орбит;

3) кинетическую и потенциальную энергии атома в стационарном состоянии;

4) напряжённость электростатического поля на орбите;

5) магнитную индукцию в центре, обусловленную движением заряженной частицы на орбите;

6) первый потенциал возбуждения;

7) длины волн, соответствующие границам серий Лаймана, Бальмера, Пашена;

8) какую скорость приобретёт первоначально покоившийся возбужденный атом при испускании фотона, соответствующего переходу из возбужденного состояния в основное и как изменится длина волны фотона вследствие отдачи атома.

Б. Для водородоподобных атомов вычислить:

1) энергию ионизации;

2) радиус первой боровской орбиты;

3) длину волны резонансной линии серий Лаймана, Бальмера, Пашена;

4) границы спектральных интервалов, в которых заключены серии Лаймана, Бальмера, Пашена. Изобразить спектральные интервалы на шкале длин волн.

В. Найти средние значения следующих величин в состоянии $1s$ (волновая функция $\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}} \cdot e^{-r/a_1}$):

1) расстояние от центра $\langle r \rangle$;

2) квадрат расстояния от центра $\langle r^2 \rangle$;

3) квадрат отклонения от среднего $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$;

4) обратное расстояние;

5) модуль кулоновской силы взаимодействия частиц массами m_1 и m_2 ;

6) напряжённость электростатического поля;

7) потенциал, создаваемый частицей массы m_1 в центре масс системы;

8) потенциал на расстоянии r от центра масс;

9) потенциальную энергию взаимодействия частиц массами m_1 и m_2 ;

10) кинетическую энергию обеих частиц;

11) среднеквадратичную скорость обеих частиц.

ОТВЕТЫ

1

1.1. $\lambda = \frac{2\pi}{B}$; $v = \frac{A}{B}$; направление распространения зависит от знака A/B .

1.2. $\Delta\lambda = \frac{c}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) = -50 \text{ м}$.

1.4. $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = 1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}$; $B_0 = \mu_0 \mu H_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} E_0 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$;

$$S_0 = E_0 H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2 = 210 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

1.5. $x_0 = \frac{eE_0}{m_e (2\pi\nu)^2} = 3,6 \text{ м}$; $v_m = 2\pi\nu x_0 = 1,1 \cdot 10^7 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

1.6. $F_0 = e\sqrt{\mu_0 c S_0} = 3,1 \cdot 10^{-16} \text{ Н}$; $\frac{F_m}{F_e} = \frac{v_e}{c} = 0,1$.

1.7. $t = \frac{2l}{c} \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}$.

1.8. $\vec{H} = \vec{i}_z E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos(ckt_0 - kx) = \vec{i}_z \cdot 0,18 \frac{\text{А}}{\text{м}}$, \vec{i}_z — орт оси z ; $\langle \vec{S} \rangle = \frac{k\varepsilon_0 c^2}{2\omega} E_0^2$.

1.9. $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = 1,4 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

1.10. $\langle S \rangle = \frac{1}{2} E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 c = 1,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

1.11. $\langle S \rangle = 300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$; $E_0 = 475 \text{ В/м}$; $B_0 = 1,58 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$.

1.12. $B_0 = \mu_0 H_0 = \frac{E_0}{c} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$; $E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S \rangle}{\varepsilon_0 c}} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 10^3 \text{ В/м}$.

1.13. $E_0 = 6 \cdot 10^8 \text{ В/м}$.

1.14. $W = \frac{E_0^2 s \tau}{2\mu_0 \mu \lambda \nu} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$.

1.15. $I = \frac{KC}{s\tau} = 6 \cdot 10^8 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

$$1.16. P = \mu_0 H_0^2 (1 + \rho) \sin^2 \alpha = 5,37 \cdot 10^{-14} \text{ Па}.$$

$$1.17. t \gg T; P = 3,54 \cdot 10^{-7} \text{ Па}; W = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \pi r^2 t = 5 \text{ кДж}.$$

$$1.18. F = \frac{2N}{c} = 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ Н}; \langle w \rangle = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

$$1.19. R = \frac{3N}{16\pi c G \rho M_c} = 0,6 \text{ мкм}.$$

$$1.20. E_0 = 18,8 \text{ В/м}; I = 0,47 \text{ Вт/м}^2; \langle w \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 = 1,57 \frac{\text{НДж}}{\text{м}^3};$$

$$\langle \vec{K} \rangle = \frac{\langle \vec{S} \rangle}{c^2} = \frac{E_0 H_0}{c^2} \vec{i}_x = 5,22 \cdot 10^{-18} \vec{i}_x \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}; P = \mu_0 H_0^2 = 3,15 \cdot 10^{-9} \text{ Па}.$$

2

$$2.1. x_1 = 1,2 \text{ мм}; x_2 = 2,4 \text{ мм}; x_3 = 3,6 \text{ мм}.$$

$$2.2. \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,3 \text{ раза}.$$

$$2.3. d = \frac{5\lambda}{n-1} = 6 \text{ мкм}.$$

$$2.4. N = \frac{4ab(n-1)^2 \theta^2}{\lambda(a+b)} = 11.$$

$$2.5. \text{Полосы сместятся на расстояние } \Delta x = \frac{db(n-1)}{\ell} = 2,0 \text{ мм в сторону}$$

перекрытой щели.

$$2.6. \Delta x = \frac{\lambda L}{\ell} = 4,2 \text{ мм}.$$

$$2.7. \ell = 2\alpha\beta(n-1) = 1,45 \text{ мм}; \Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{\ell} = 0,52 \text{ мм}.$$

$$2.8. \Delta x = \frac{\lambda L}{2h} = 0,2 \text{ мм}.$$

$$2.9. \ell = 2\alpha r = 0,585 \text{ мм}; \Delta x = \frac{\lambda(b+r)}{2\alpha r} = \frac{\lambda(b+r)}{\ell} = 1,32 \text{ мм};$$

$$N = \frac{2b\alpha}{\Delta x} + 1 = 7.$$

$$2.10. \theta = \frac{\lambda(a+b)}{2\alpha\Delta x(n-1)} = 18'; N = \frac{2b\theta(n-1)}{\Delta x} + 1 = 10.$$

$$2.11. \lambda = \frac{r_m^2}{mF(n-1)} = 0,418 \text{ мкм.}$$

$$2.12. r_4 = 2,8 \text{ мм}; r_3 = 3,1 \text{ мм.}$$

$$2.13. d = 0,15 \text{ мкм.}$$

$$2.14. \Delta r = 0,39 \text{ мм.}$$

$$2.15. n = 1,56.$$

$$2.16. R = \frac{(r_{m_2} - r_{m_1})^2}{\lambda(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})^2} = 1,99 \text{ м.}$$

$$2.17. \Delta r = \sqrt{\lambda R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0,11 \text{ мм.}$$

$$2.18. r = \sqrt{\frac{m\lambda(n_1 - 1)}{nD}}; r_{5 \text{ тем}} - r_{5 \text{ св}} = 1,24 \text{ мм.}$$

$$2.19. R = 9,1 \text{ м}; r_3 = 3,15 \text{ мм}; r_5 = 4,23 \text{ мм}; D = 0,05 \text{ дптр.}$$

$$2.20. r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}.$$

$$2.21. \Delta r = (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) \sqrt{\frac{\lambda}{n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}}; r_9 - r_4 = 0,506 \text{ мм.}$$

$$2.22. r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}}; r_4 = 4,6 \text{ мм}; r_3 = 5,0 \text{ мм.}$$

$$2.23. d_1 = 0,25 \text{ мкм}; d_2 = 0,125 \text{ мкм.}$$

2.24. Тёмной.

$$2.25. d < \frac{\lambda}{4n} = 0,1 \text{ мкм.}$$

$$2.26. n = 1,5.$$

$$2.27. \lambda = 2n\varphi\Delta x = 540 \text{ нм.}$$

$$2.28. \alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = 3'.$$

$$2.29. D = \frac{\lambda l}{2\Delta x} = 10 \text{ мкм}; \Delta D = \frac{\lambda l}{2\Delta l} (N_1 - N_2) = 2 \text{ мкм.}$$

$$2.30. \ell = \frac{2D\Delta x}{\lambda} = 25 \text{ см.}$$

$$2.31. d = \lambda \frac{2k+1}{4\sqrt{n}}, k = 0, 1, \dots$$

$$2.32. d = 0,113 \text{ мкм.}$$

$$2.33. d_{\min} = 0,65 \text{ мкм.}$$

$$2.34. \lambda = 0,485 \text{ мкм}; d = 0,10 \text{ мкм.}$$

$$2.35. n_{\text{пл}} = \sqrt{n}; d = \frac{\lambda}{4n_{\text{пл}}}.$$

3

$$3.1. m = 2.$$

$$3.2. r = 1,23 \text{ мм.}$$

$$3.3. b = 0,9 \text{ м.}$$

$$3.4. r_8 = 4 \text{ мм.}$$

$$3.5. 0,168 \text{ м.}$$

3.6. а) 3 зоны, интенсивность больше; б) 4 зоны, интенсивность меньше.

3.7. Расстояние R соответствует положению, когда в отверстии укладываются две зоны Френеля, $R = \frac{r_m^2}{2\lambda} = 1 \text{ м.}$

$$3.8. r_m \approx \sqrt{bm\lambda}, r_1 = 0,212 \text{ см.}$$

$$3.9. I \approx 4I_0.$$

$$3.10. 3,78 \text{ см.}$$

$$3.11. I \approx I_0.$$

$$3.12. \frac{2f\lambda}{b} = 1,2 \text{ см.}$$

$$3.13. 1) \text{ условие дифракционных максимумов: } b \sin \theta = \pm(2m+1) \frac{\lambda}{2n},$$

$$\text{условие дифракционных минимумов: } b \sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{n},$$

λ – длина волны излучения, θ – угол дифракции, $m = 1, 2, 3, \dots$;

2) дифракционная картина сжимается к центру.

$$3.14. \lambda = \frac{b}{m \sqrt{1 + 4 \left(\frac{f}{x} \right)^2}}, m = 3 \text{ – порядок минимума; } \lambda = 0,61 \text{ мкм.}$$

$$3.15. b(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda, m = \pm 1, \theta_1 = 33^\circ, \theta_2 = 27^\circ.$$

$$3.16. \Delta\theta_0 = 7,3^\circ.$$

$$3.17. m = 8.$$

$$3.18. m = 3.$$

- 3.19. $m = 7$.
- 3.20. $\lambda = 243$ нм.
- 3.21. $\theta = 30^\circ$.
- 3.22. $\lambda = 500$ нм, $L = 5$ мм.
- 3.23. 103 мм⁻¹.
- 3.24. $d = 4,95$ мкм; $N_0 = 2020$ см⁻¹.
- 3.25. $\Delta x = 3$ см.
- 3.26. 8; $73^\circ 44'$.
- 3.27. $d = 2b$.
- 3.28. Если $n = \frac{mb}{d}$ – целое число.
- 3.29. $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 \frac{m_2 \lambda_2}{m_1 \lambda_1}$, $\theta_2 = 54,7^\circ$.
- 3.30. $\lambda = \frac{d \sin \Delta \phi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta \phi}} = 0,433$ нм.
- 3.31. $\Delta \theta = 10''$.
- 3.32. $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$.
- 3.33. $\lambda = 0,057$ нм.
- 3.34. 20 000; 0,025 м.
- 3.35. $N = 982$; $L = 9,82$ мм.
- 3.36. В четвертом.
- 3.37. $d = \frac{mL}{\lambda_1}(\lambda_2 - \lambda_1) = 5,1 \cdot 10^{-5}$ м; $L_1 = \frac{\lambda d}{m \delta \lambda} = 0,06$ м.
- 3.38. $D = 5,8$ см.
- 3.39. $\delta \psi_1 = 1,83 \cdot 10^{-4}$ рад = $38''$; $\delta \psi_2 = 7,32 \cdot 10^{-6}$ рад = $1,5''$.
- 3.40. $L = 3,4$ км.
- 3.41. $D = 25$ см.
- 3.42. $d = 119$ км.
- 3.43. $\ell \approx 50$ м.
- 3.44. $x = 0,042$ мм.
- 3.45. $\Gamma = 13$.

4

- 4.1. $\alpha = 2 \operatorname{arctg} n = 114^\circ$.
- 4.2. $\theta_t = 19,2^\circ$; $\rho_s = 0,061$; $\rho_p = 0,027$; $P = 0,386$.
- 4.3. $\theta_t = 34,7^\circ$; $\rho_s = 0,1834$; $\rho_p = 0,0015$; $P = 0,983$.
- 4.4. $\theta_{\text{бр}} = 90^\circ - \operatorname{arctg}(\sin \theta_{\text{пр}}) = 54,74^\circ$.

$$4.5. n = \operatorname{ctg}(\theta_t) = 1,732 .$$

$$4.6. n = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}}} = 1,5 .$$

$$4.7. n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg} \theta} = 1,33 .$$

$$4.8. \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = 36,9^\circ .$$

$$4.9. n_2 = n_1 \operatorname{tg} \theta = 1,33 .$$

$$4.10. P = \frac{(n^2 + 1)^4 - 16n^4}{(n^2 + 1)^4 + 16n^4} = 0,159 .$$

$$4.11. \theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_i\right) = 19,47^\circ; \tau_s = 1 - \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = 0,942;$$

$$\tau_p = 1 - \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = 0,975; P = \frac{\tau_p^2 - \tau_s^2}{\tau_p^2 + \tau_s^2} = 0,034 .$$

$$4.12. \theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_i\right) = 28,126; \tau_s = 1 - \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = 0,908;$$

$$\tau_p = 1 - \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = 0,992; P = \frac{\tau_p^2 - \tau_s^2}{\tau_p^2 + \tau_s^2} = 0,088 .$$

$$4.13. \theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_i\right) = 35,264; \tau_s = 1 - \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = 0,823;$$

$$\tau_p = 1 - \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = 0,998; P = \frac{\tau_p^2 - \tau_s^2}{\tau_p^2 + \tau_s^2} = 0,19 .$$

$$4.14. \frac{I_p}{I_n} = \frac{P}{1-P} = \frac{1}{3} .$$

$$4.15. P = \frac{N}{N+1} = \frac{3}{4} .$$

$$4.16. \frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}(1-A)^2 \cos^2 \theta = 0,03 .$$

$$4.17. \frac{I_0}{I} = \frac{2}{(1-A)^2 \cos^2 \theta} = 9,88 .$$

$$4.18. \alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{N}} = 45^\circ.$$

$$4.19. \alpha = \arccos \left[\frac{\sqrt{2(I/I_0)}}{(1-A)} \right] = 62^\circ 32'.$$

$$4.20. \varphi = \arccos \sqrt{\frac{\eta_2}{2\eta_1^2}} = 30^\circ; \tau = 2\eta_1 = 0,6.$$

$$4.21. \frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1-A} = 2,1; \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-A)^2 \cos^2 \phi} = 8,86.$$

$$4.22. \frac{I_0}{I} = \frac{2}{\tau_{\max}^3 \cos^4 \alpha} = 60,2.$$

$$4.23. \frac{I_0}{I} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2} = 10,67.$$

$$4.24. P = \frac{n-1}{1-n \cos 2\alpha} = \frac{1}{3}.$$

$$4.25. P = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{\tau_{\max} + \tau_{\min}} = 0,8.$$

$$4.26. \alpha = \arctg \left(\sqrt{\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}} \right) = 18^\circ 26'.$$

$$4.27. I' = \frac{1}{2}(\tau_{\max} + \tau_{\min})I = 0,5I.$$

$$4.28. \nu = \frac{2}{3}.$$

$$4.29. I_1 = \frac{1}{2}(\tau_{\max}^2 + \tau_{\min}^2)I_0 = 0,41I_0; I_2 = \tau_{\max}\tau_{\min}I_0 = 0,09I_0.$$

$$4.30. \text{Да, } \beta = \frac{\alpha}{2}; \tau = \cos^4(\alpha/2).$$

5

$$5.1. n-1 = 5,98 \cdot 10^{-5}.$$

$$5.2. 1) u = v; 2) u = \frac{v}{2}; 3) u = 2v; 4) u = \frac{c^2}{v}.$$

$$5.3. A = 1,58; B = 1,387 \text{ нм}^2; \frac{u}{v} = 1 - \frac{2B}{n\lambda^2} = 0,956.$$

$$5.4. v = \frac{c}{n} = 3,33 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}; u = \frac{c^2}{v} = cn = 2,7 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}; N_e = 2,36 \cdot 10^{11} \text{М}^{-3}.$$

$$5.7. L = \frac{8\pi^2 \varepsilon_0 m c \Delta t}{N_e e^2 \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right)} = 1,19 \cdot 10^{19} \text{М} = 1260 \text{СВЕТОВЫХ ЛЕТ}.$$

$$5.8. u = (1 - m)v.$$

$$5.9. 1) u = \frac{v}{1 - q}, q = -1, u = \frac{v}{2}; 2) u = (1 - p)v, p = -1, u = 2v.$$

$$5.10. n_2 = 1 + \frac{p_2}{p_1}(n_1 - 1) = 1,01691.$$

$$5.11. \frac{I_0}{I} = 8.$$

$$5.12. 1) 0,5\%; 2) 1\%; 3) 63,2\%.$$

$$5.13. I = I_0 e^{-\frac{k_1 + k_2}{2} d}.$$

$$5.14. k = \frac{1}{d_2 - d_1} \ln \frac{D_1}{D_2} = 35 \text{М}^{-1}.$$

$$5.15. v = 68.$$

6

$$6.1. 5000 \text{К}.$$

$$6.2. 3530 \text{К}.$$

$$6.3. 80\%.$$

$$6.4. 334 \text{Вт}.$$

$$6.5. 1) 5800 \text{К}; 2) 6,42 \cdot 10^7 \text{Вт/М}^2; 3) 3,9 \cdot 10^{26} \text{Вт}.$$

$$6.6. \Delta m = 1,4 \cdot 10^{17} \text{кг}.$$

$$6.7. T = \frac{T_c}{\sqrt[4]{2}} \frac{R_c}{R_{\text{орб}}} = 350 \text{К}.$$

$$6.9. \text{Увеличится в } 1 + 6 \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 = 1,0017 \text{ раз}.$$

$$6.10. 9,3 \cdot 10^{16} \text{К}.$$

$$6.11. \text{а) } \sigma = \frac{2\pi^5}{15c^2} \frac{k^4}{h^3}; \text{б) } b = \frac{ch}{\xi_0 k}.$$

$$6.13. \frac{R_{T_1}^0}{R_{T_2}^0} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^4 = 5,1; \frac{(r_{\lambda, T}^0)_{1\text{max}}}{(r_{\lambda, T}^0)_{2\text{max}}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^5 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^5 = 7,6.$$

$$6.14. r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}; r_{\omega,T}^0 = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{kT} - 1}.$$

$$6.15. T = 1 \cdot 10^4 \text{ К}; W = 7,1 \cdot 10^7 \text{ кДж}; r \approx 280 \text{ м}.$$

$$6.16. W = A_T \frac{\sigma T_c^4 R_c^2}{R_{\text{орб}}^2} S t = 76,8 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}, \text{ где } S = 1 \text{ м}^2; T_3 = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2R_{\text{орб}}}} \approx 290 \text{ К}.$$

$$6.17. \lambda_{m_2} = \frac{\lambda_{m_1}}{\sqrt[4]{N}}; \text{ при } N > 1 \text{ происходит сдвиг в фиолетовую область};$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = N^{5/4}.$$

$$6.18. r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}; r_{\nu,T} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT.$$

$$6.19. 10^5 \text{ К}.$$

$$6.20. r_{\nu_1,T}^0 \neq r_{\nu_2,T}^0; (\Delta R_T^0)_1 = (\Delta R_T^0)_2.$$

$$6.21. \text{ Уменьшилась на } \Delta T = \frac{T^2 \Delta \lambda}{b + T \Delta \lambda} = 300 \text{ К}.$$

$$6.22. n = \frac{8\sigma T^3}{3kc} = 1 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}; p = nkT = 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ Па}.$$

$$6.23. T = \left(\frac{3\rho c k}{2\sigma m_H} \right)^{1/3} = 1,9 \cdot 10^7 \text{ К}.$$

$$6.24. \lambda_m = 0,48 \text{ мкм}; \nu = 6,3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \text{ не соответствует}.$$

$$6.25. r_{\lambda,T} = \frac{\Delta R_T}{\Delta \lambda} = \frac{\Delta R_T}{\eta \lambda} = 10^{10} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}; r_{\nu,T} = \frac{\lambda \Delta R_T}{\eta c} = 6,33 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

$$6.26. 1) \text{ в } 2 \text{ раза}; 2) \text{ в } 2 \text{ раза}; 3) \text{ одинаковы}.$$

$$6.27. A_T = \frac{\Phi}{S\sigma T^4} = 0,44; T^0 = T \sqrt[4]{A_T} = 815 \text{ К}.$$

$$6.28. \Delta R_T^0 = r_{\lambda,T}^0 \cdot \Delta \lambda = 1,65 \cdot 10^{-14} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}; (\Delta R_T^0)_{\text{max}} = 4,03 \cdot 10^{-1} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

$$6.29. \text{ В } 5,1 \text{ раза}; \text{ в } 32 \text{ раза}.$$

$$6.30. t = \frac{C\rho r(\eta^3 - 1)}{9\sigma T^3} = 1,6 \text{ ч}.$$

$$6.31. d = \frac{12\sigma A_T t}{c\rho\sigma\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right)} = 0,05 \text{ мм.}$$

$$6.32. T_2 = \frac{T_1}{\sqrt[3]{1 + \frac{3\sigma A_T t T_1^3}{cm}}} = 390 \text{ К.}$$

$$6.33. 3300 \text{ К.}$$

$$6.34. N = 4\pi r^2 \sigma \left[(T + \Delta T)^4 - T^4 \right] = 11,5 \text{ Вт.}$$

7

$$7.1. 1) m_\phi = 3,68 \cdot 10^{-36} \text{ кг}; W_\phi = 2,07 \text{ эВ}; p_\phi = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\text{м/с};$$

$$2) m_\phi = 2,21 \cdot 10^{-36} \text{ кг}; W_\phi = 1,24 \text{ МэВ}; p_\phi = 6,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с.}$$

$$7.2. v_1 = \sqrt{\frac{2hc}{m_0\lambda_1}} = 9,2 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v_2 = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c \lambda_2}{h}\right)^2}} = 0,63 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$7.3. \lambda = 0,124 \text{ нм}; \nu = 2,41 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

$$7.4. \text{а) } W_\phi = 2,24 \text{ эВ}; p_\phi = 1,2 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\text{м/с};$$

$$\text{б) } W_\phi = 12,3 \text{ кэВ}; p_\phi = 6,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с};$$

$$\text{в) } W_\phi = 0,62 \text{ МэВ}; p_\phi = 3,3 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с.}$$

$$7.5. N = 4,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

$$7.6. N = 4 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$7.7. n = 2.$$

$$7.8. E_0 = 1 \cdot 10^9 \text{ В/м}; N = \frac{I\lambda}{hc} = 3,5 \cdot 10^{33} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$7.9. P = \frac{I}{c} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ Па}; N_0 = \frac{I\lambda}{hc} = 5,0 \cdot 10^9 \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}; m_\phi = 2,2 \cdot 10^{-27} \text{ кг};$$

$$p_\phi = 6,6 \cdot 10^{-19} \text{ кг}\cdot\text{м/с.}$$

$$7.10. F = \frac{\Phi d^2}{8cL^2} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Н.}$$

$$7.11. P = 1,125 \cdot 10^{-7} \text{ Па.}$$

$$7.12. P = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Па.}$$

$$7.13. m = \frac{\sigma T_c^4 R_c^2 s}{GcM_c}.$$

$$7.14. N_{\text{погл}} = \frac{P\lambda St}{h} \cdot \frac{1-R}{1+R} = 2,2 \cdot 10^{16}.$$

$$7.15. F = \frac{NhS}{\lambda} (1+R) \cos^2 \varphi = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

$$7.16. \text{а) } 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2;$$

$$\text{б) } 9,0 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2;$$

$$\text{в) } 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2.$$

$$7.17. d = \frac{3\sigma T_c^4 R_c^2 (1+R)}{2G\rho_{\text{Al}} c M_c} \approx 0,82 \text{ мкм}.$$

$$7.18. v_{\text{max}} = 6,5 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

$$7.19. A_{\text{вых}} = 2,33 \text{ эВ}.$$

$$7.20. \lambda_0 = 332 \text{ нм}; v_{\text{max}} = 6,56 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

$$7.21. U_3 = 1,76 \text{ В}.$$

$$7.22. \lambda = 4,3 \text{ нм}.$$

$$7.23. A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda_1(\eta-1)} \cdot \left(\eta \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) = 1,88 \text{ эВ}.$$

$$7.24. h = \frac{e(U_{3,2} - U_{3,1})}{v_2 - v_1} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; \lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}} = 800 \text{ нм};$$

$$A_{\text{вых}} = e \frac{v_1 U_{3,2} - v_2 U_{3,1}}{v_2 - v_1} = 2,48 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,55 \text{ эВ}.$$

$$7.25. i_{\text{насыщ}} = e\eta \frac{\lambda}{hc} IS = 7,25 \cdot 10^{-5} \text{ А}.$$

$$7.26. eU_3 = A_{\text{вых}} + W_{\text{кmax}}, eU_3 \gg A_{\text{вых}}, v_{\text{max}} \cong \sqrt{\frac{2eU_3}{m_0}} = 1,03 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$7.27. A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda} - e\varphi = 4,7 \text{ эВ}, Q = 4\pi\epsilon_0 R\varphi = 1,67 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}.$$

$$7.28. \lambda_0 = 657 \text{ нм}; v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} \right)} = 1,15 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v \cong \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} + eU \right)} = 1,42 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$7.29. \Delta\lambda_1 = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}; \Delta\lambda_2 = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}; W_1 = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda_1} \right) = 0,58 \text{ кэВ};$$

$$W_2 = 1,13 \text{ кэВ}.$$

$$7.30. \quad W_e = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda + \lambda_c} = 6,7 \text{ кэВ}; \quad p_e = \frac{\sqrt{W_e^2 + 2m_0c^2W_e}}{c} = 4,43 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

т.е. фотон передал электрону 10,8% своей энергии, а импульс электрона отдачи по абсолютной величине оказался больше импульса первичного фотона: $cp_e = 8,3 \cdot 10^4 \text{ эВ}$; $cp_\phi = \frac{hc}{\lambda} = 6,2 \cdot 10^4 \text{ эВ}$.

$$7.31. \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sin \theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos \theta} = \frac{\text{ctg } \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}} = 0,8916; \quad \varphi \approx 41^\circ 43'.$$

$$7.32. \quad m = (1 - \cos \theta) \frac{h\nu^2}{c^2 \Delta\nu} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; \quad \delta = \frac{h\nu^2}{m_0c^2} > 1;$$

$$\Delta\nu_e = \nu \frac{\delta(1 - \cos \theta)}{1 + \delta(1 - \cos \theta)} = 2,986 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}.$$

$$7.33. \quad W_e = W_\phi - W'_\phi = 0,1 \text{ МэВ}; \quad 1 - \cos \theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c} \cdot \frac{m_0c^2}{W_\phi} = 0,17; \quad \theta = 34^\circ.$$

$$7.34. \quad \Delta\lambda = \frac{2\lambda_c}{1 + \left(1 + \frac{W_\phi}{m_0c^2}\right)^2 \text{tg}^2 \varphi} = 3,64 \cdot 10^{-12} \text{ м}; \quad \frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{W_\phi}{m_0c^2} = 5,86 \cdot 10^{-4};$$

$$W_e = W_\phi \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \approx W_\phi \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,264 \text{ эВ}.$$

$$7.35. \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda\eta}{\eta - 1} = 1,21 \text{ нм}; \quad 1 - \cos \theta = \frac{\lambda\eta}{\lambda_c(\eta - 1)} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c} = 0,5; \quad \theta = 60^\circ.$$

8

$$8.1. \quad \Delta v_e \approx 100 \text{ м/с}; \quad \Delta v_p \approx 0,05 \text{ м/с}; \quad \Delta v_{\text{ш}} \approx 10^{-22} \text{ м/с}.$$

$$8.2. \quad W \approx 3 \text{ эВ}.$$

$$8.3. \quad v \approx 10^6 \text{ м/с}.$$

$$8.4. \quad \frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi c\tau} \approx 3 \cdot 10^{-8}; \quad \Delta W \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}; \quad \Delta\lambda \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ м}; \quad \Delta x \approx c\tau = 3 \text{ м}.$$

$$8.5. \quad W \approx \frac{h^2}{8m_e a^2}.$$

$$8.6. L_1 \approx 1 \text{ нм}; L_2 \approx 0,03 \text{ нм}.$$

$$8.7. A_{\min} \approx \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

$$8.8. W_{\min} \approx \hbar\omega.$$

$$8.9. W_{\min} \approx -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,5 \text{ эВ}.$$

$$8.10. \lambda_e = 7,3 \text{ нм}; \lambda_p = 3,9 \text{ пм}; \lambda_{\text{ш}} = 6,6 \cdot 10^{-33} \text{ м}.$$

$$8.11. W = \frac{h^2}{2m\lambda^2}.$$

$$8.12. \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = 0,12 \text{ нм}.$$

$$8.13. \lambda = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{m_e}{2eU}} = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ м}.$$

$$8.14. \lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_n kT}} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

$$8.15. \lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}; \lambda_\alpha = 0,073 \text{ нм}; \lambda_n = 0,15 \text{ нм}; \lambda_{N_2} = 0,028 \text{ нм}.$$

$$8.16. \Delta x = \frac{hL}{d\sqrt{2mW}} = 1,2 \text{ мм}.$$

$$8.17. v = \frac{2h\ell}{mb\Delta x} = 9 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$8.18. \theta_{\min} \approx \frac{\Delta p_x}{x} \approx \frac{\lambda}{2\pi b}; \theta_1 \approx \frac{\lambda}{b}.$$

Полученные значения отличаются на малосущественный для оценки множитель 2π . Вывод: соотношение неопределённостей подтверждается явлением дифракции электронов.

$$8.19. \lambda_1 = 0,332 \text{ нм}; \lambda_3 = 0,996 \text{ нм}.$$

$$8.20. \lambda_n = \frac{2a}{n}; W_n = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}.$$

$$8.21. \lambda_B = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}; \theta = \pi/3.$$

$$8.22. \lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_e \left(\frac{hc}{\lambda} - E \right)}} = 0,71 \text{ нм}.$$

$$8.23. \lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{БВХ}} + eU \right)}} = 0,52 \text{ нм}.$$

$$8.24. \lambda_0 = \frac{\lambda}{1 - \frac{h\lambda}{2m_e \lambda_{\text{Б}}^2 c}} = 660 \text{ нм}.$$

$$8.25. \lambda = \frac{hc}{\sqrt{e^2 U^2 + 2m_e e c^2 U}}.$$

$$8.26. \lambda' = \lambda \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{m_e c \lambda}{h} \right)^2}} = 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

$$8.27. \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2}.$$

$$8.28. \frac{W}{m_e c^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$8.29. v = \frac{c}{\sqrt{2}} = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

9

$$9.1. W_n = U_0 \left[1 - \frac{(2\lambda + n)^2}{k_0^2} \right].$$

$$9.2. D = 0,1.$$

$$9.3. \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m\ell^2};$$

$$1) \rho_n(x) = \frac{2}{\ell} \sin^2 \frac{\pi n x}{\ell};$$

$$2) P_{(x_1, x_2)} = \frac{x_2 - x_1}{\ell} - \frac{1}{\pi} \cos \pi \frac{x_1 + x_2}{\ell} \sin \pi \frac{x_2 - x_1}{\ell}; \quad P_1 = 0,196; P_2 = 0,608;$$

$$3) P_{1,2} = \frac{x_2 - x_1}{\ell} - \frac{1}{\pi n} \cdot \cos \frac{\pi n}{\ell} (x_1 + x_2) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} (x_2 - x_1); \quad P_1 = P_2 = 0,5;$$

$$4) x = \frac{1}{2}, p_x = 0; \quad 5) \Delta x = \ell \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{16\pi^2 n^2}}; \quad 6) \Delta p_x = \frac{\pi n \hbar}{\ell}.$$

$$9.4. \Psi_n(x, y) = \sqrt{\frac{4}{\ell_1 \ell_2}} \sin \frac{\pi n_1 x}{\ell_1} \sin \frac{\pi n_2 y}{\ell_2}, W_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{\ell_1^2} + \frac{n_2^2}{\ell_2^2} \right);$$

$$a) 1) \rho_{\max} = \frac{4}{\ell_1 \ell_2} = 1 \cdot 10^{20} m^{-2}; 2) P_{0, \frac{\ell_1}{3}; 0, \frac{\ell_2}{3}} = 0,038;$$

$$P_{x_1 x_2, y_1, y_2} = \left[\frac{x_2 - x_1}{\ell_1} - \frac{1}{\pi} \cos \pi \frac{x_1 + x_2}{\ell_1} \sin \pi \frac{x_2 - x_1}{\ell_1} \right] \left[\frac{y_2 - y_1}{\ell_2} - \frac{1}{\pi} \cos \pi \frac{y_1 + y_2}{\ell_2} \sin \pi \frac{y_2 - y_1}{\ell_2} \right];$$

$$b) 1) P_{\max} = \frac{4}{\ell^2} = 4 \cdot 10^{20} m^{-2}; 2) P = 0,038.$$

$$9.5. \Psi_n(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{\ell_1 \ell_2 \ell_3}} \sin \frac{\pi n_1 x}{\ell_1} \sin \frac{\pi n_2 y}{\ell_2} \sin \frac{\pi n_3 z}{\ell_3},$$

$$W_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{n_1^2}{\ell_1^2} + \frac{n_2^2}{\ell_2^2} + \frac{n_3^2}{\ell_3^2} \right).$$

$$9.6. \xi = \frac{W}{U_0}, \lambda^2 = \frac{2mU_0 \ell^2}{\hbar^2};$$

$$a) \sin \lambda \sqrt{\xi} = \pm \sqrt{\xi}; W_1 = 1,2 \text{ эВ};$$

$$b) \frac{\text{tg} \lambda \sqrt{\xi}}{\text{tg} \lambda \sqrt{\xi - 1}} = -\sqrt{\frac{\xi}{\xi - 1}}, W_1 = 30 \text{ эВ};$$

$$b) \frac{\text{tg} \lambda \sqrt{\xi}}{\text{tg} \lambda \sqrt{\xi - 1}} = -\sqrt{\frac{\xi}{\xi - 1}}, W_1 = 60 \text{ эВ}; \text{ г) } \lambda \sqrt{\xi} = n\pi - 2 \arcsin \sqrt{\xi}, n = 1, 2, \dots;$$

$$W_1 = 0,83 \text{ эВ}.$$

$$9.7. \Psi_1 = \sqrt{\frac{3\pi}{4+3\pi}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{4\ell}, x = [0, \ell]; \Psi_2 = \sqrt{\frac{3\pi}{4+3\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{\ell}} e^{-\frac{3\pi x}{4\ell}}, x > \ell;$$

$$1) \rho_1(x) = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{3\pi}{4+3\pi} \sin^2 \frac{3\pi x}{\ell}, \rho_2(x) = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\pi}{4+3\pi} e^{-\frac{3\pi x}{2\ell}};$$

$$2) P_1 = \frac{6}{7}, P_2 = \frac{1}{7}.$$

$$9.8. W_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

$$9.9. W_{n_1 n_2} = \hbar \omega (n_1 + n_2 + 1).$$

$$9.10. a) \Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi r}{r_0}}{r}, W_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m r_0^2};$$

$$b) r_{\max} = \frac{r_0}{2}, \rho(r) = \frac{2 \sin^2 \frac{n\pi r}{r_0}}{r_0}, \rho_{\max} = \frac{2}{r_0};$$

$$г) P_{\text{прав}} = P_{\text{лев}} = 0,5; 3) \langle r \rangle = \frac{r_0}{2}, \langle r^2 \rangle = \frac{r_0^2}{3} \left(1 - \frac{3}{2\pi^2 n^2} \right),$$

$$\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle = \frac{r_0^2}{12} \left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} \right).$$

9.11. $\sin kr_0 = \pm kr_0 \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0 r_0^2}}, \hbar k^2 = 2mW, W = 14 \text{ эВ},$ один уровень.

$$9.12. \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[W + \frac{kZe^2}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0,$$

$$R''(\rho) + \frac{2}{\rho} R'(\rho) + \left[\varepsilon + \frac{2Z}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0; \text{ здесь } \rho, \varepsilon \text{ в атомных еди-}$$

ницах, $r \rightarrow \infty;$

$$R(r) \approx \frac{1}{r} e^{-Kr}, K^2 = \frac{2m|W|}{\hbar^2}, r \rightarrow 0, R \approx r^\ell.$$

$$9.13. W_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2}.$$

$$9.14. W_n = -\frac{\hbar^2 a^2}{8m} \left[-(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{a^2 \hbar^2}} \right]^2, n = 0, 1, \dots$$

$$9.15. W_n = -A \left[1 - \frac{a\hbar}{\sqrt{2mA}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2.$$

9.16. W определяется из уравнения

$$\sqrt{-W} + \sqrt{-W + U_1 - U_2} = \sqrt{U_1 + \frac{\hbar^2}{8ma^2}} - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)}, n = 0, 1, \dots;$$

$$W_0 = -3,30 \text{ эВ}; W_1 = -3,21 \text{ эВ}; W_2 = -3,18 \text{ эВ}.$$

$$10.1. p_{\phi, \max} = 1,61 \cdot 10^{-27} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

$$10.2. r_n = r_1 \cdot n^2;$$

$$r_2 = 2^2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2,116 \cdot 10^{-10} \text{ м};$$

$$r_3 = 3^2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 4,761 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

$$10.3. \lambda = \frac{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(3+2)^2} \right)}{R'} = 433,9 \text{ нм}.$$

10.4. Электрон останется на втором энергетическом уровне.

10.5.

$$A. 1) W_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{\mu Z^2 e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}; \quad 2) r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2}; \quad 3) W_k = -W_n, \quad W_n = 2W_n;$$

$$4) W(r_n) = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\mu^2 Z^3 e^5}{h^4 \epsilon_0^3}; \quad 5) B_n(0) = \frac{1}{n^5} \cdot \frac{\pi \mu_0}{8} \cdot \frac{\mu^2 Z^3 e^7}{8h^5 \epsilon_0^3}; \quad 6) U_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu Z^2 e^3}{8h^2 \epsilon_0^2};$$

$$7) \lambda_1 = \frac{hcn^2}{|W_1|} - \text{коротковолновая граница}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2} - \text{длинноволно-}$$

вая граница, n – квантовое число нижнего состояния;

$$8) v = \frac{3}{4} \cdot \frac{|W_1|}{Mc}, \quad \text{где } M - \text{масса атома}, \quad \Delta\lambda = \frac{Mv}{h} - \frac{4}{3} \cdot \frac{hc}{|W_1|}.$$

$$B. 1) I = |W_1|; \quad 2) r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2}; \quad 3) \lambda_{\text{рез}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{hc}{|W_1|}; \quad 4) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{hc}{I} n^2 \left[1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2} \right].$$

$$B. 1) r = \frac{3}{2} a_1; \quad 2) r^2 = 3a_1^2; \quad 3) (r-r)^2 = \frac{3}{4} a_1^2; \quad 4) \frac{3}{2}; \quad 5) |F_{12}| = \frac{Ze^2}{2\pi \epsilon_0 a_1^2};$$

$$6) E = \frac{Ze}{2\pi \epsilon_0 a_1^2}; \quad 7) \varphi_1 = \frac{Ze}{4\pi \epsilon_0 a_1}; \quad 8) \varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - e^{-\frac{2r}{a_1}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_1} \right) \right];$$

$$9) W_n = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 a_1}; \quad 10) W_\kappa = \frac{Z^2 e^2}{8\pi \epsilon_0 a_1}; \quad 11) v_{\kappa\beta} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 m a_1}.$$

Учебное издание

Григорьев Сергей Владимирович
Зелепукина Елена Владимировна
Лапина Людмила Григорьевна
Лапицкий Константин Михайлович
Тарасов Александр Евгеньевич
Янина Галина Михайловна

ОПТИКА И АТОМНАЯ ФИЗИКА

Задачник

Редактор С.В. Казакова
Компьютерная верстка Ю.В. Макаровой

| | | | |
|--------------------|----------------|------------------|-------------------|
| Подписано в печать | 22.10.22. | Печать офсетная. | Формат 60x84 1/16 |
| Печ. л. 6,5. | Тираж 150 экз. | Изд. № 22у-094 | Заказ |

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.