

7. Системы автоматической регулировки в РПУ

7.1. Система автоматической регулировки усиления

Система автоматической регулировки усиления (АРУ) предназначена для поддержания напряжения на выходе УПЧ радиоприёмника на приблизительно постоянном уровне при значительном изменении амплитуды входного сигнала.

Динамический диапазон входного сигнала

$$D_{\text{вх}} = 20 \lg \frac{U_{\text{вх. max}}}{U_{\text{вх. min}}}$$

в подвижных системах связи может достигать 60 дБ, а в приёмниках РЛС 100...120 дБ. В то же время, для нормальной работы выходных каскадов РПУ динамический диапазон выходного напряжения обычно не должен превышать 4...10 дБ, поскольку иначе произойдёт перегрузка усилительных каскадов УПЧ и возникнут нелинейные искажения. Поддержание постоянной амплитуды выходного напряжения необходимо также для обеспечения нормального режима работы демодулятора.

Необходимое уменьшение динамического диапазона сигнала обеспечивается системой АРУ. Действие системы АРУ основано на изменении коэффициента усиления части каскадов РПУ, которое производится автоматически в зависимости от уровня входного сигнала: при повышении уровня сигнала коэффициент усиления уменьшается, а при снижении – увеличивается. Регулируемым усилителем обычно является УПЧ.

Наиболее распространены системы АРУ с обратной связью (так называемая АРУ с регулировкой «назад», рис. 7.1). Иногда применяются системы АРУ без обратной связи (с регулировкой «вперёд»), когда коэффициент усиления определяется непосредственно уровнем входного сигнала, комбинированные системы (с регулировкой «вперёд» и «назад»), а также системы программного управления усилением (системы временной автоматической регулировки усиления – ВАРУ), когда заранее известен закон изменения уровня входного сигнала.

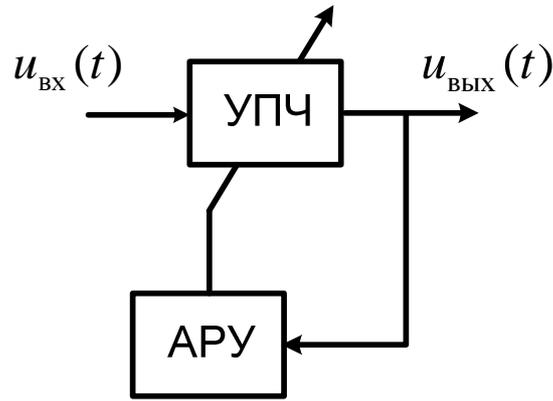


Рис. 7.1. Система АРУ с регулировкой «назад»

Далее рассматривается только система АРУ с регулировкой «назад». Такие системы АРУ делятся на две группы:

- **простые**, когда регулировка коэффициента усиления производится при любом уровне входного сигнала (в том числе и при малом, когда опасности перегрузки усилительных каскадов нет);
- системы АРУ с задержкой (или **задержанные**), когда регулировка коэффициента усиления производится только тогда, когда амплитуда выходного напряжения превышает некоторый пороговый уровень, называемый напряжением задержки.

Основной характеристикой системы АРУ в установившемся режиме является статическая амплитудная характеристика приёмника с системой АРУ – зависимость $U_{\text{вых}}(U_{\text{вх}})$. Качественный вид амплитудной характеристики приёмника без АРУ и с АРУ двух типов показан на рис. 7.2.

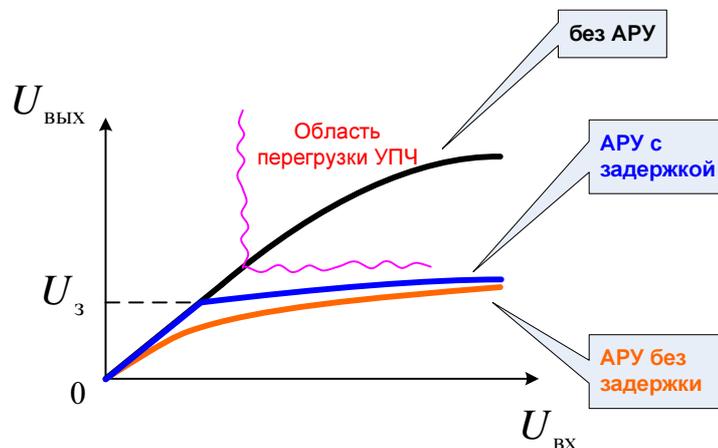


Рис. 7.2. Амплитудная характеристика

Замечание: несмотря на то, что амплитудная характеристика приёмника с системой АРУ нелинейна, при правильно спроектированной системе АРУ усилительные каскады приёмника всегда работают в линейном режиме.

Структурная схема системы АРУ приведена на рис. 7.3.

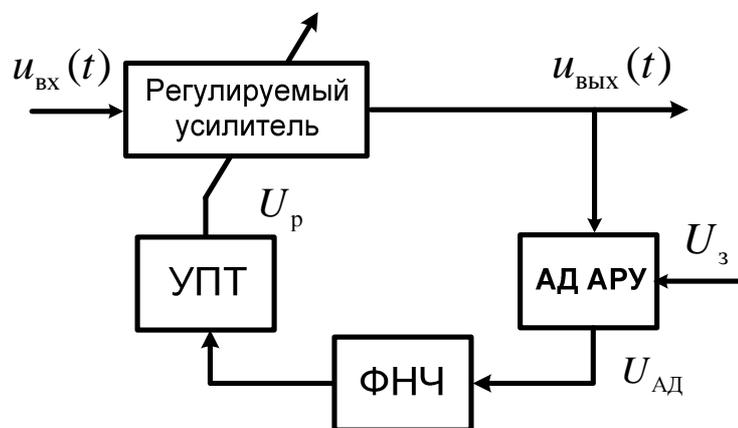


Рис. 7.3. Структурная схема системы АРУ

АД АРУ – амплитудный детектор системы АРУ, в который вводится напряжение задержки U_3 ; обычно это достигается подачей на диод АД дополнительного запирающего напряжения. В приёмниках АМ сигналов в системе АРУ обычно используют отдельный амплитудный детектор.

ФНЧ – фильтр низких частот в цепи обратной связи, обеспечивающий требуемые динамические свойства системы АРУ: система АРУ должна реагировать на медленные (паразитные) изменения уровня входного сигнала и не реагировать на быстрые, обусловленные полезной АМ.

УПТ – усилитель постоянного тока в цепи обратной связи, который усиливает выходное напряжение ФНЧ до уровня, необходимого для управления коэффициентом усиления регулируемого усилителя.

Регулируемый усилитель – усилитель, коэффициент усиления которого изменяется в широких пределах под действием регулирующего напряжения U_p . При $U_p = 0$ коэффициент усиления K_0 максимален, при $U_p > 0$ коэффициент усиления уменьшается. Зависимость $K_0(U_p)$ называется регулировочной характеристикой. Её качественный вид показан на рис. 7.4.

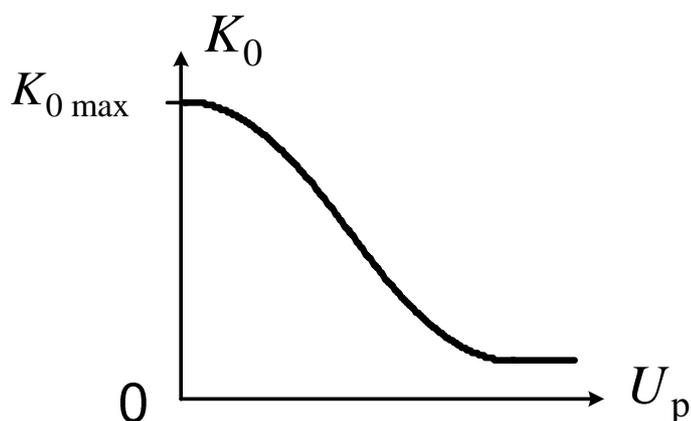


Рис. 7.4. Регулировочная характеристика

Изменять коэффициент усиления регулируемого усилителя можно либо путём изменения коэффициентов усиления отдельных каскадов, либо с помощью специальных управляемых делителей напряжения, включённых между каскадами.

Статическая амплитудная характеристика приёмника с системой АРУ

Рассмотрим методику построения амплитудной характеристики приёмника с системой АРУ. Для этого построим математическую модель системы АРУ, где входной и выходной переменными будут значения амплитуды сигнала. Для элементов системы АРУ примем следующие модели:

АД описывается детекторной характеристикой $U_{\text{АД}} = F_{\text{АД}}(U)$; для системы АРУ с задержкой детекторная характеристика задаётся с учётом напряжения задержки (рис. 7.5);

ФНЧ: в установившемся режиме коэффициент передачи фильтра $K_{\text{ФНЧ}} = 1$;

регулируемый усилитель описывается регулировочной характеристикой $K_0(U_p)$ (рис. 7.4);

УПТ: усилитель постоянного тока характеризуется своим коэффициентом усиления $K_{\text{УПТ}}$.

Входной переменной математической модели является амплитуда сигнала на входе, выходной переменной – амплитуда сигнала на выходе. Они связаны между собой соотношением

$$U_{\text{ВЫХ}} = K_0 U_{\text{ВХ}}.$$

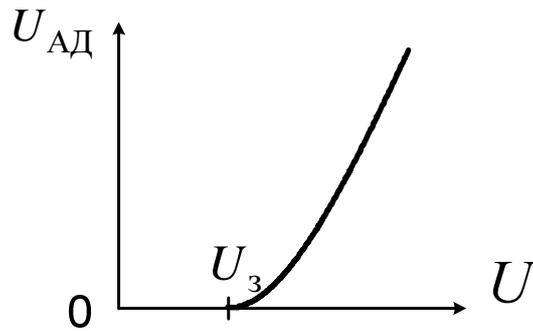


Рис. 7.5. Характеристика АД

В отличие от систем автоматического управления, изучаемых в курсе «Радиоавтоматика», система АРУ – мультипликативная, а не аддитивная, поскольку её выходная переменная $U_{\text{ВЫХ}}$ равна произведению входной переменной $U_{\text{ВХ}}$ на управляемый коэффициент усиления. В связи с этим её анализ оказывается сложнее, чем анализ аддитивных систем. Структурная схема математической модели показана на рис. 7.6.

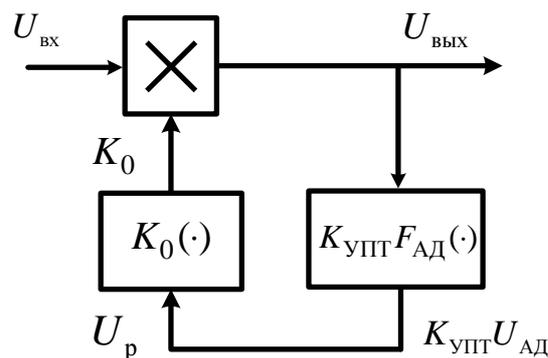


Рис. 7.6. Структурная схема математической модели системы АРУ

Регулирующее напряжение равно $U_p = K_{\text{УПЧ}} U_{\text{АД}}$. Амплитуда сигнала на выходе УПЧ определяется как

$$U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{ВХ}} \cdot K_0(U_p) = U_{\text{ВХ}} \cdot K_0(K_{\text{УПЧ}} \cdot F_{\text{АД}}(U_{\text{ВЫХ}})).$$

Поскольку система АРУ содержит два нелинейных элемента, то её статическая амплитудная характеристика строится графически. При этом удобно строить график обратной зависимости $U_{\text{ВХ}}(U_{\text{ВЫХ}})$, т.е., задавая некоторые значения амплитуды выходного напряжения, находить соответствующие значения амплитуды сигнала на входе. Аналитически эта зависимость описывается как

$$U_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{K_0(K_{\text{УПЧ}} \cdot F_{\text{АД}}(U_{\text{ВЫХ}}))}.$$

Графическое построение амплитудной характеристики выполняется в следующей последовательности:

1. задаётся некоторое значение $U'_{\text{ВЫХ}}$ амплитуды сигнала на выходе УПЧ и по детекторной характеристике находится соответствующее ему напряжение $U'_{\text{АД}}$ на выходе АД (рис. 7.7,а);
2. умножением $U'_{\text{АД}}$ на коэффициент усиления УПТ определяется регулирующее напряжение:

$$U'_p = K_{\text{УПТ}} \cdot U'_{\text{АД}};$$

3. по регулировочной характеристике УПЧ находится коэффициент усиления K'_0 , соответствующий полученному значению U'_p (рис. 7.7,б);
4. делением заданной амплитуды выходного сигнала на найденный коэффициент усиления определяется амплитуда сигнала на входе:

$$U'_{\text{ВХ}} = \frac{U'_{\text{ВЫХ}}}{K'_0};$$

5. на график амплитудной характеристики наносится точка с координатами $(U'_{\text{ВХ}}, U'_{\text{ВЫХ}})$ (рис. 7.7,в).

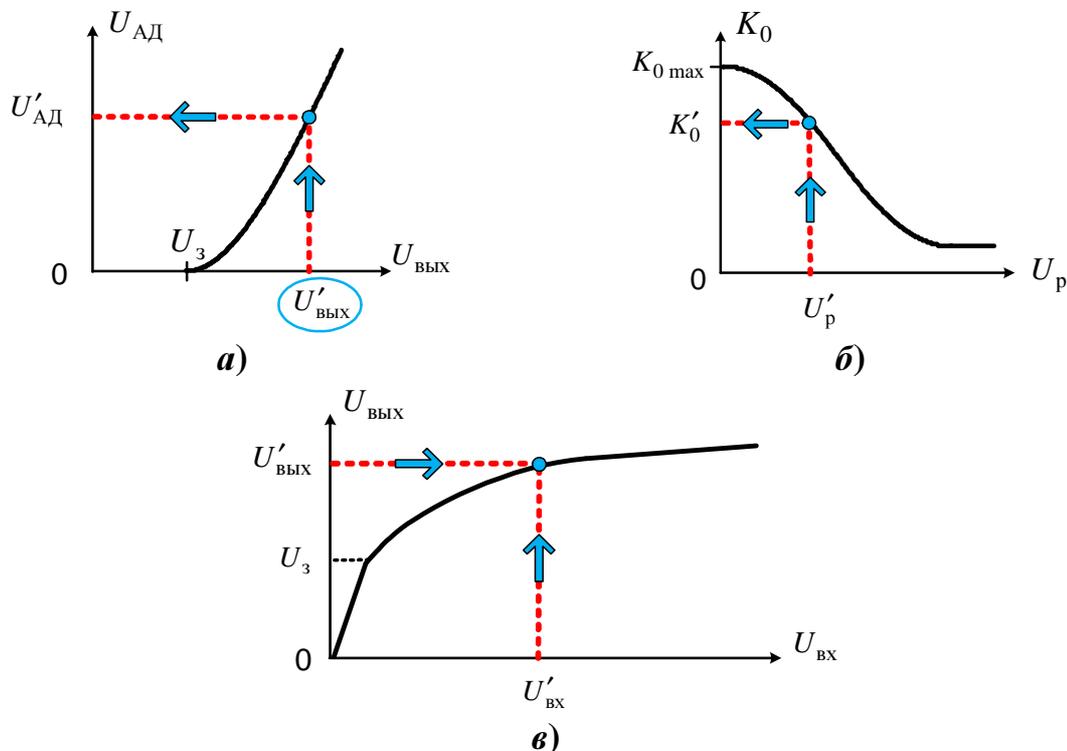


Рис. 7.7. К методике построения амплитудной характеристики

Построенная таким образом характеристика показана на рис. 7.8. Здесь выделена область эффективной работы системы АРУ, где рост амплитуды выходного напряжения замедляется за счёт снижения коэффициента усиления и тем самым обеспечивается работа УПЧ в линейном режиме.



Рис. 7.8. Построенная амплитудная характеристика

Динамические свойства системы АРУ

Основная особенность системы АРУ, обусловленная тем, что это мультипликативная система автоматического регулирования, заключается в том, что её быстродействие зависит от амплитуды сигнала на входе: чем больше амплитуда сигнала, тем меньше инерционность системы. Следовательно, большие по величине изменения амплитуды сигнала обрабатываются системой АРУ быстрее, чем малые.

Поясним этот результат качественно. Для этого рассмотрим процессы в системе АРУ при разном по величине скачкообразном увеличении амплитуды сигнала – сначала до уровня $U'_{ВХ}$, затем – до большего уровня $U''_{ВХ} > U'_{ВХ}$ (рис. 7.9,а).

В момент скачка t_0 из-за инерционности ФНЧ в цепи обратной связи управляющее напряжение не успевает измениться мгновенно (рис. 7.9,б) и коэффициент усиления остаётся прежним. В результате амплитуда выходного напряжения увеличивается во столько же раз, во сколько увеличилась амплитуда входного (рис. 7.9,в). Следовательно, на выходе АД в момент времени t_0 образуется выброс напряжения, который воздействует на ФНЧ. При этом чем больше по величине выброс напряжения, тем быстрее протекает переходный процесс в фильтре и его выходное напряжение быстрее достигает установившегося значения. В результате регулирующее напряжение также бы-

стрее достигает того уровня, который соответствует необходимому снижению коэффициента усиления УПЧ. Таким образом, чем больше изменение амплитуды входного сигнала, тем быстрее протекают переходные процессы в системе АРУ, т.е. тем выше её быстродействие.

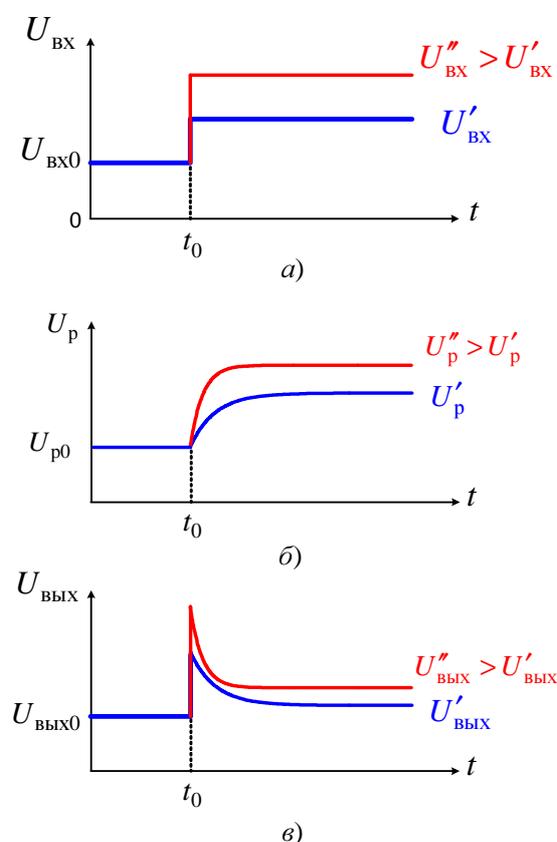


Рис. 7.9. Переходные процессы в системе АРУ:
 а) амплитуда сигнала на входе; б) регулирующее напряжение; в) амплитуда сигнала на выходе

7.2. Система автоматической подстройки частоты гетеродина

Система автоматической подстройки частоты (АПЧ) гетеродина супергетеродинного радиоприёмника предназначена для управления частотой гетеродинного колебания таким образом, чтобы промежуточная частота $f_{\text{п}}$ была равной или близкой к номинальному значению $f_{\text{п}0}$, на которое настроен усилитель промежуточной частоты.

Отклонение промежуточной частоты от номинального значения может происходить как из-за ухода частоты сигнала f_c , вызванного нестабильностью передатчика или эффектом Доплера (в случае взаимного перемещения передатчика и приёмника), так и из-за неста-

бильности частоты гетеродина f_{Γ} . В простых перестраиваемых РПУ вторая причина является основной.

Система АПЧ – это система автоматического регулирования, в которой регулируемым параметром является частота. Поэтому для её анализа используются методы теории систем автоматического регулирования, изучаемые в курсе «Радиоавтоматика». Структура системы АПЧ как системы автоматического регулирования, где регулируемым параметром является частота, показана на рис. 7.10.

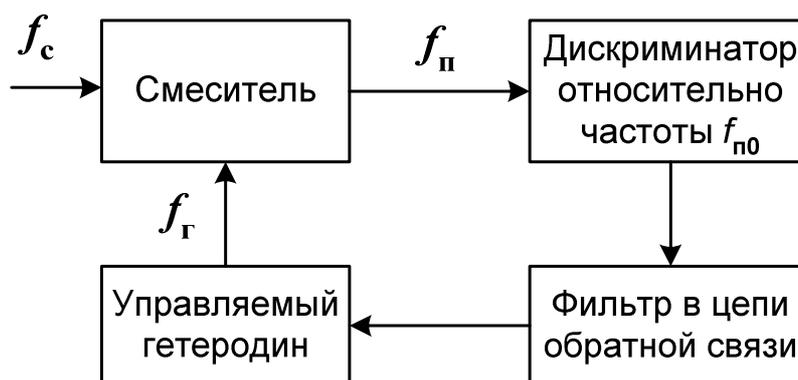


Рис. 7.10. Структура системы АПЧ

Тип дискриминатора определяет вид системы АПЧ: при использовании частотного дискриминатора это будет система частотной автоподстройки (ЧАП), а при использовании фазового дискриминатора – система фазовой автоподстройки (ФАП).

В данном разделе курса рассматривается система ЧАП. Для упрощения анализа примем, что $f_{\Pi} = f_c - f_{\Gamma}$, т.е. будем считать, что в радиоприёмнике используется нижняя настройка гетеродина. Структурная схема системы ЧАП показана на рис. 7.11. Её блоки выполняют следующие функции:

- **смеситель (См)** переносит спектр сигнала на промежуточную (разностную) частоту;
- **усилитель промежуточной частоты (УПЧ)** усиливает преобразованный по частоте сигнал до рабочего уровня частотного дискриминатора;
- **частотный дискриминатор (ЧД)** формирует управляющее напряжение в зависимости от величины и знака отклонения f_{Π} от переходной частоты ЧД $f_{\Pi 0}$;
- **фильтр низких частот (ФНЧ)** ослабляет влияние шума и обеспечивает требуемую инерционность системы ЧАП;

- **усилитель постоянного тока (УПТ)** усиливает управляющее напряжение до рабочего напряжения управляемого гетеродина и (при необходимости) изменяет его знак таким образом, чтобы в системе действовала отрицательная обратная связь;
- **управляемый гетеродин (УГ)** формирует гетеродинное колебание изменяемой частоты. В качестве элемента, управляющего частотой колебаний, обычно используется варикап (диод с изменяемой ёмкостью p - n перехода), включённый в колебательный контур автогенератора^{*)}.

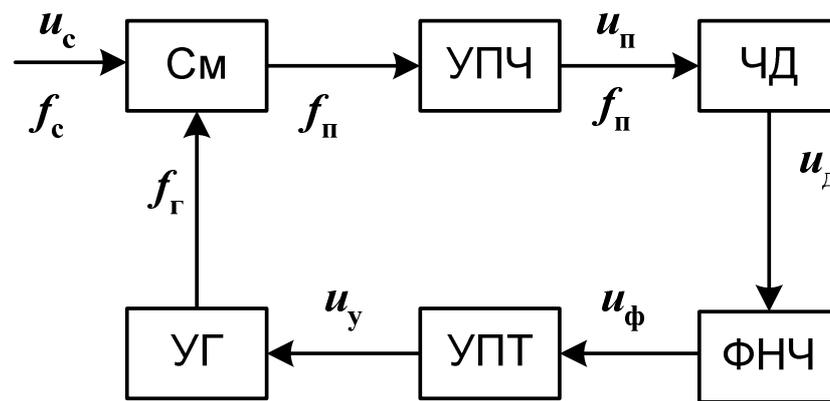


Рис. 7.11. Структурная схема системы ЧАП

Задача системы ЧАП состоит в том, чтобы удерживать отклонение промежуточной частоты от её номинального значения (так называемую остаточную расстройку) в допустимых пределах при нестабильности частот сигнала и гетеродинного колебания.

Рассмотрим принцип действия системы ЧАП. Допустим, что произошло увеличение частоты сигнала, которое вызвало увеличение промежуточной частоты $f_{п} = f_{с} - f_{г}$ по сравнению с номинальным значением $f_{п0}$. В результате этого на выходе ЧД возникает некоторое напряжение, величина и знак которого определяются параметрами характеристики дискриминатора. Под действием этого напряжения начнёт возрастать напряжение на выходе ФНЧ, стоящего в цепи обратной связи. Усиленное в УПТ выходное напряжение фильтра является управляющим напряжением для гетеродина. Если система ЧАП спроектирована как система с отрицательной обратной связью, то под действием управляющего напряжения частота гетеродинного колебания будет увеличиваться, что приведёт к уменьшению отклонения

^{*)} При увеличении запирающего напряжения, приложенного к варикапу, его ёмкость уменьшается и, следовательно, частота колебаний увеличивается.

промежуточной частоты от её номинального значения. Таким образом будет компенсирована (хотя и не полностью) расстройка промежуточной частоты, вызванная увеличением частоты сигнала. Аналогичным образом действует система ЧАП и при уменьшении частоты сигнала.

Для того чтобы проанализировать работу системы ЧАП, необходимо построить её математическую модель, а для этого нужно, прежде всего, принять некоторые математические модели её элементов.

Математическая модель системы ЧАП

Рассмотрим математические модели элементов, входящих в состав системы ЧАП.

1) **Смеситель и УПЧ.** Считая смеситель вместе с усилителем промежуточной частоты безынерционными (по сравнению с фильтром в цепи обратной связи) устройствами, примем в качестве математической модели этой части системы ЧАП выражение, связывающее промежуточную частоту с частотой сигнала и колебания гетеродина:

$$f_{\text{п}} = f_{\text{с}} - f_{\text{г}}.$$

Для упрощения дальнейшего анализа удобно перейти к отклонениям частоты:

$\Delta f_{\text{г}} = f_{\text{г}} - f_{\text{г}0}$, где $f_{\text{г}0}$ – частота гетеродина при нулевом управляющем напряжении (номинальная частота гетеродина);

$\Delta f_{\text{п}} = f_{\text{п}} - f_{\text{п}0}$, где $f_{\text{п}0}$ – переходная частота ЧД;

$\Delta f_{\text{с}} = f_{\text{с}} - f_{\text{с}0}$, где $f_{\text{с}0} = f_{\text{г}0} + f_{\text{п}0}$.

Легко показать, что

$$\Delta f_{\text{п}} = \Delta f_{\text{с}} - \Delta f_{\text{г}}.$$

Таким образом, математической моделью смесителя и УПЧ является вычитающий элемент (рис. 7.12).

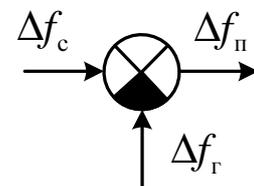


Рис. 7.12. Математическая модель смесителя и усилителя промежуточной частоты

2) **Частотный дискриминатор.** Частотный дискриминатор считается безынерционным по сравнению с ФНЧ. Поэтому в качестве его математической модели принимается нелинейный безынерционный элемент с характеристикой $u_{\text{д}} = u_{\text{д}}(\Delta f_{\text{п}})$

(рис. 7.13). На линейном участке $u_d = S_d \cdot \Delta f_n$, где S_d – крутизна характеристики ЧД.

3) **Фильтр низких частот** – линейный элемент с передаточной функцией $K_\phi(p)$.

4) **Усилитель постоянного тока** – линейный безынерционный элемент с коэффициентом передачи $K_{УПТ}$.

5) **Управляемый генератор** моделируется как нелинейный безынерционный элемент с характеристикой $\Delta f_r = \Delta f_r(u_y)$ (рис. 7.14). На линейном участке $\Delta f_r = S_y \cdot u_y$, где S_y – крутизна характеристики, называемая также крутизной управителя частоты.

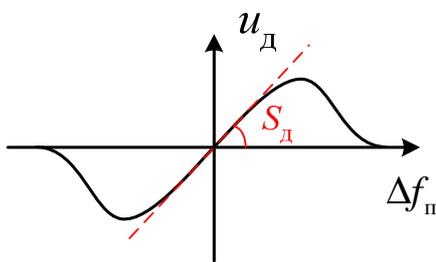


Рис. 7.13. Характеристика ЧД

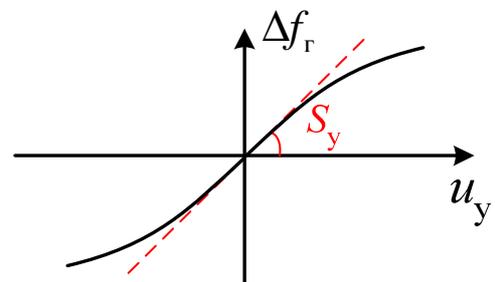


Рис. 7.14. Характеристика управителя частоты

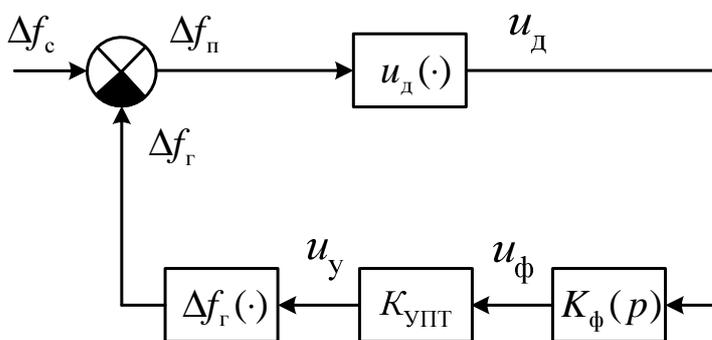


Рис. 7.15. Структурная схема математической модели системы ЧАП

Структурная схема математической модели системы ЧАП, полученная на основе принятых моделей её компонентов, показана на рис. 7.15. Это – нелинейная инерционная система автоматического регулирования.

Если в приёмнике используется верхняя настройка гетеродина, при которой $f_n = f_r - f_c$, то знак управляющего напряжения нужно изменить на противоположный (например, поменяв местами выводы ЧД или применив инвертирующий УПТ), поскольку в системе ЧАП всегда должна действовать отрицательная обратная связь.

Определить аналитически характеристики нелинейной инерционной системы автоматического регулирования в общем случае нель-

зя. Поэтому из полной модели системы ЧАП получим две упрощённые модели, изучением которых мы и ограничимся:

- линеаризованную инерционную модель (при малых значениях $\Delta f_{\text{п}}$ и u_{y});
- нелинейную безынерционную модель (при больших по величине, но медленных изменениях Δf_{c} или Δf_{r}).

Линеаризованная модель системы ЧАП

При малых отклонениях промежуточной частоты $\Delta f_{\text{п}}$ и, соответственно, малом управляющем напряжении u_{y} можно заменить нелинейные элементы $u_{\text{чд}}(\cdot)$ и $\Delta f_{\text{r}}(\cdot)$ линейными с коэффициентами передачи $S_{\text{д}}$ и S_{y} соответственно. В результате получится математическая модель линейной системы, структурная схема которой показана на рис. 7.16.

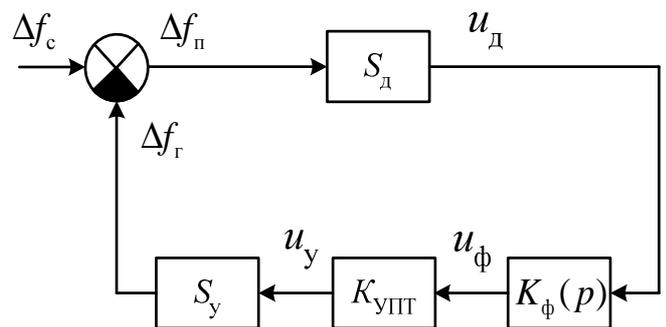


Рис. 7.16. Структурная схема линеаризованной математической модели системы ЧАП

Линейная система автоматического регулирования характеризуется передаточной функцией $K(p)$. Найдём передаточную функцию системы ЧАП, связывающую изменение промежуточной частоты $\Delta f_{\text{п}}$ с вызвавшим его изменением частоты сигнала Δf_{c} ,

$$K_{\Delta f_{\text{c}} \Delta f_{\text{п}}}(p) = \frac{\mathcal{L}\{\Delta f_{\text{п}}(t)\}}{\mathcal{L}\{\Delta f_{\text{c}}(t)\}}, \quad (7.1)$$

где $\mathcal{L}\{\Delta f_{\text{п}}(t)\}$ – изображение (преобразование Лапласа) изменения промежуточной частоты, $\mathcal{L}\{\Delta f_{\text{c}}(t)\}$ – изображение изменения частоты сигнала, $\mathcal{L}\{\cdot\}$ – символ оператора преобразования Лапласа.

Из курса «Радиоавтоматика» известно, что для линейной системы автоматического регулирования общего вида (рис. 7.17) передаточные функции между различными точками определяются следующими выражениями:

$$K_{x\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + K(p)\beta(p)}, \quad (7.2,а)$$

$$K_{xy} = \frac{K(p)}{1 + K(p)\beta(p)}, \quad (7.2,б)$$

$$K_{xz} = \frac{K(p)\beta(p)}{1 + K(p)\beta(p)}. \quad (7.2,в)$$

В случае системы ЧАП $x = \Delta f_c$, $\varepsilon = \Delta f_n$, $K(p) = S_d$, $\beta(p) = S_y K_{УПТ} K_\phi(p)$. Поэтому интересующая нас передаточная функция от Δf_c к Δf_n равна

$$K_{\Delta f_c \Delta f_n}(p) = \frac{1}{1 + S_d S_y K_{УПТ} K_\phi(p)}. \quad (7.3)$$

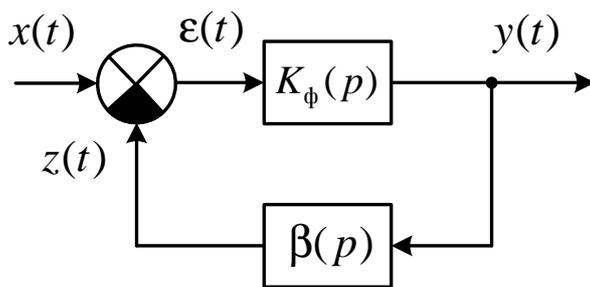


Рис. 7.17. Структурная схема линейной системы автоматического регулирования

Имея передаточную функцию и зная характер изменения частоты сигнала, можно с помощью аппарата преобразования Лапласа исследовать любые переходные процессы в системе ЧАП. Этот подход позволяет также определить характеристики системы в установившемся режиме.

Характеристики системы ЧАП

Найдём *остаточную расстройку* – отклонение Δf_n промежуточной частоты от номинального значения в установившемся режиме при изменении частоты сигнала на некоторую величину $\Delta f_{с.нач}$, называемую *начальной расстройкой*.

Установившийся режим достигается при $t \rightarrow \infty$. Поэтому для определения остаточной расстройки воспользуемся следующим предельным соотношением для преобразования Лапласа:

$$\Delta f_{п.ост} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta f_n(t) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \mathcal{L}\{\Delta f_n(t)\}), \quad (7.4)$$

где $\mathcal{L}\{\Delta f_{\text{п}}(t)\} = K_{\Delta f_c \Delta f_{\text{п}}}(p) \cdot \mathcal{L}\{\Delta f_c(t)\}$ – изображение (преобразование Лапласа) процесса изменения отклонения промежуточной частоты. Для определенности будем считать, что частота сигнала изменилась скачком в нулевой момент времени, т.е. $\Delta f_c(t)$ представляет собой ступенчатую функцию высотой $\Delta f_{\text{с.нач}}$ (рис. 7.18). Её преобразование Лапласа равно

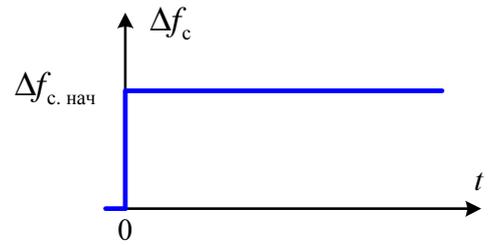


Рис. 7.18. Скачкообразное изменение частоты сигнала

$$\mathcal{L}\{\Delta f_c(t)\} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{p}.$$

В этом случае в соответствии с (7.4) остаточная расстройка равна

$$\Delta f_{\text{п.ост}} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p K_{\Delta f_c \Delta f_{\text{п}}}(p) \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{p} \right) = \Delta f_{\text{с.нач}} K_{\Delta f_c \Delta f_{\text{п}}}(0) = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}} K_{\phi}(0)}.$$

Примем, что $K_{\phi}(0) = 1$, т.е. фильтр в цепи обратной связи не содержит интегратора (поскольку для интегратора $K(p) = \frac{1}{p}$ и $K(0) \rightarrow \infty$) и его коэффициент передачи по постоянному току равен 1. Тогда

$$\Delta f_{\text{п.ост}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{1 + A}, \quad (7.5)$$

где $A = S_d S_y K_{\text{УПТ}}$ – петлевое усиление (коэффициент передачи разомкнутой системы).

Эффективность работы системы ЧАП в установившемся режиме характеризуется **коэффициентом автоподстройки**, который показывает, во сколько раз остаточная расстройка меньше начальной:

$$K_{\text{ЧАП}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{\Delta f_{\text{п.ост}}}. \quad (7.6)$$

Следовательно, остаточная расстройка равна $\Delta f_{\text{п.ост}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}}$. Сравнивая это выражение с формулой (7.5) для $\Delta f_{\text{п.ост}}$, получаем формулу,

выражающую коэффициент автоподстройки через параметры блоков системы ЧАП:

$$K_{\text{ЧАП}} = 1 + A = 1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}}. \quad (7.7)$$

Видно, что при любом значении петлевого усиления остаточная расстройка не равна нулю, т.е. в системе ЧАП, не имеющей интегратора в цепи обратной связи, принципиально не может быть нулевой остаточной ошибки. Это понятно, поскольку для подстройки частоты гетеродина необходимо иметь некоторое ненулевое управляющее напряжение, которое в системе ЧАП может быть получено только из сигнала ошибки на выходе дискриминатора. Поэтому система ЧАП относится к классу *статических систем автоматического регулирования*.

Мы определили остаточную расстройку в системе ЧАП. Теперь рассмотрим характер переходных процессов в системе при скачкообразном изменении частоты сигнала. Характер этих процессов зависит от того, какой фильтр стоит в цепи обратной связи системы. Поэтому, прежде всего, уточним тип фильтра.

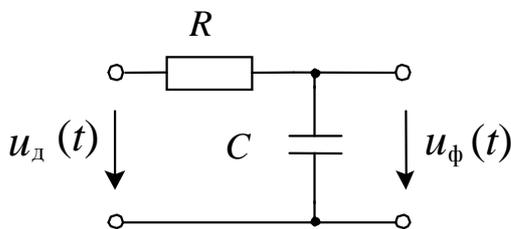


Рис. 7.19. Интегрирующая RC-цепь (ФНЧ 1-го порядка)

Простейший ФНЧ – это однозвенный RC-фильтр (или интегрирующая RC-цепь) (рис. 7.19) с передаточной функцией $K_{\phi}(p) = \frac{1}{1 + pT}$,

где $T = RC$ – постоянная времени фильтра. Именно для такого фильтра мы и рассмотрим переходные процессы в системе ЧАП. В соответствии с (7.3) передаточная функция системы в этом случае равна

$$K_{\Delta f_c \Delta f_{\Pi}}(p) = \frac{1}{1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}} \frac{1}{1 + pT}} = \frac{1 + pT}{(A + 1) + pT} = \frac{1 + pT}{K_{\text{ЧАП}} + pT} = \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT/K_{\text{ЧАП}}}{1 + pT/K_{\text{ЧАП}}}.$$

Обозначим отношение $T/K_{\text{ЧАП}}$ как $T_{\text{ЧАП}}$ и назовём его *постоянной времени системы ЧАП* (смысл такого наименования будет понятен из дальнейшего). Тогда

$$K_{\Delta f_c \Delta f_{\Pi}}(p) = \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT_{\text{ЧАП}}}{1 + pT_{\text{ЧАП}}}. \quad (7.8)$$

Для определения реакции системы ЧАП на скачок частоты воспользуемся операционным методом. В соответствии с этим методом изображение (преобразование Лапласа) процесса изменения промежуточной частоты под действием скачкообразного изменения частоты сигнала равно произведению изображения входного воздействия (скачка частоты) на передаточную функцию системы ЧАП:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\Delta f_{\Pi}(t)\} &= \mathcal{L}\{\Delta f_c(t)\} \cdot K_{\Delta f_c \Delta f_{\Pi}}(p) = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{p} \cdot \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT_{\text{ЧАП}}}{1 + pT_{\text{ЧАП}}} = \\ &= \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \cdot \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})}. \end{aligned}$$

Обозначим $F(p) = \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})}$, тогда $\mathcal{L}\{\Delta f_{\Pi}(t)\} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} F(p)$ и

$$\Delta f_{\Pi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} F(p) \right\} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}. \quad (7.9)$$

С помощью таблиц преобразования Лапласа или используя для вычисления интеграла, определяющего обратное преобразование Лапласа, метод вычетов (см. Приложение 1), можно получить следующее выражение для процесса изменения отклонения промежуточной частоты от номинального значения при скачкообразном изменении частоты сигнала:

$$\Delta f_{\Pi}(t) = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \left[1 + (K_{\text{ЧАП}} - 1)e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} \right]. \quad (7.10)$$

График этого процесса показан на рис. 7.20. Видно, что, как и следовало ожидать, при $t = 0$ $\Delta f_{\Pi}(0) = \Delta f_{\text{с.нач}}$, а при $t \rightarrow \infty$

$$\Delta f_{\Pi}(t) \rightarrow \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} = \Delta f_{\text{п.ост}}.$$

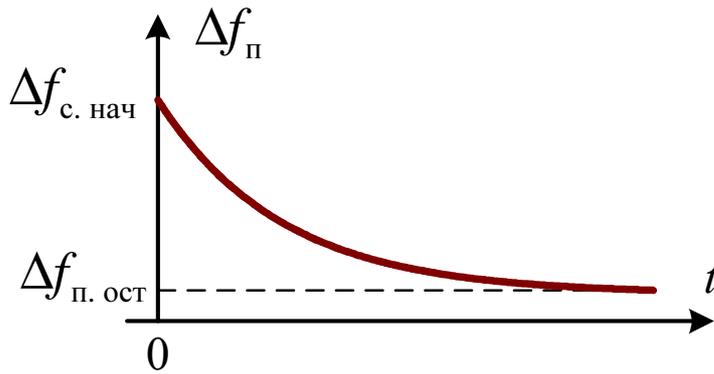


Рис. 7.20. Переходный процесс для отклонения промежуточной частоты при скачке частоты сигнала

Таким образом, процесс установления промежуточной частоты в системе ЧАП описывается экспоненциальной функцией (7.10) с постоянной времени $T_{\text{ЧАП}} = T/K_{\text{ЧАП}}$. Поэтому длительность переходного процесса, т.е. быстродействие системы ЧАП определяется её постоянной времени. Для повышения бы-

стродействия системы ЧАП и уменьшения остаточной ошибки необходимо увеличивать коэффициент автоподстройки $K_{\text{ЧАП}} = 1 + A$ путём увеличения петлевого усиления $A = S_d S_y K_{\text{УПГ}}$. Однако при этом возникает опасность самовозбуждения системы. Эти вопросы рассмотрены в следующем разделе.

Процесс установления частоты гетеродина можно найти аналогично, используя передаточную функцию $K_{\Delta f_c \Delta f_r}(p)$. Однако проще его определить по полученному уже выражению (7.10) для изменения промежуточной частоты $\Delta f_{\Pi}(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta f_r(t) &= \Delta f_c(t) - \Delta f_{\Pi}(t) = \Delta f_{\text{с.нач}} - \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \left[1 + (K_{\text{ЧАП}} - 1) e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} \right] = \\ &= \Delta f_{\text{с.нач}} - \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} - \Delta f_{\text{с.нач}} \frac{K_{\text{ЧАП}} - 1}{K_{\text{ЧАП}}} e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} = \\ &= \Delta f_{\text{с.нач}} \left(1 - \frac{1}{K_{\text{ЧАП}}} \right) - \Delta f_{\text{с.нач}} \left(1 - \frac{1}{K_{\text{ЧАП}}} \right) e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} = \\ &= \Delta f_{\text{с.нач}} \left(1 - \frac{1}{K_{\text{ЧАП}}} \right) (1 - e^{-t/T_{\text{ЧАП}}}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

График процесса $\Delta f_r(t)$ показан на рис. 7.21. Заметим, что переходный процесс по частоте гетеродина имеет такой же вид, как и процесс изменения напряжения на конденсаторе интегрирующей RC-цепи с постоянной времени $T_{\text{ЧАП}}$.

(Напомним, что мы рассматриваем простейший случай, когда в контуре обратной связи системы ЧАП стоит фильтр 1-го порядка, т.е. интегрирующая RC-цепь). Пользуясь этой аналогией, а также зная, что в установившемся режиме $\Delta f_{\Gamma} = \Delta f_{\text{с.нач}} - \Delta f_{\text{п.ост}}$, легко записать выражение для $\Delta f_{\Gamma}(t)$, а по нему найти $\Delta f_{\text{п}}(t)$.

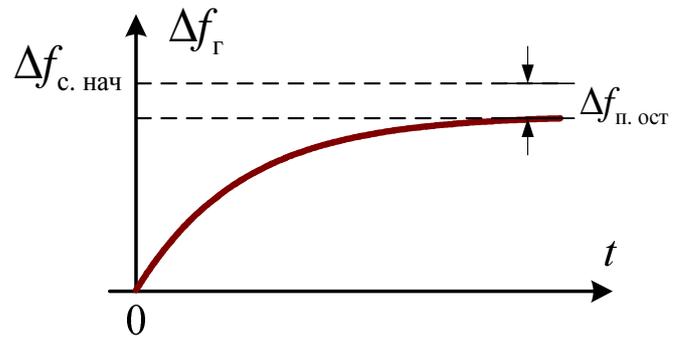


Рис. 7.21. Переходный процесс для отклонения частоты гетеродина при скачке частоты сигнала

Устойчивость системы ЧАП

Применим к системе ЧАП один из критериев устойчивости, известный из курса «Радиоавтоматика». Рассмотрим сначала линейную систему автоматического регулирования общего вида, изображённую на рис. 7.17.

Известно, что для устойчивости такой системы необходимо и достаточно выполнение следующего условия (критерия Найквиста):

Линейная система автоматического регулирования устойчива, если годограф комплексной частотной характеристики разомкнутой системы $\dot{K}(j\Omega)\dot{\beta}(j\Omega)$ не охватывает на комплексной плоскости точку -1.

Для системы ЧАП частотная характеристика разомкнутой системы определяется выражением

$$\dot{K}(j\Omega)\dot{\beta}(j\Omega) = S_{\text{д}} S_{\text{у}} K_{\text{УПТ}} \dot{K}_{\text{ф}}(j\Omega) = A \cdot \dot{K}_{\text{ф}}(j\Omega).$$

Поэтому для применения критерия Найквиста необходимо рассмотреть годограф частотной характеристики ФНЧ, умноженной на петлевое усиление A (рис. 7.22).

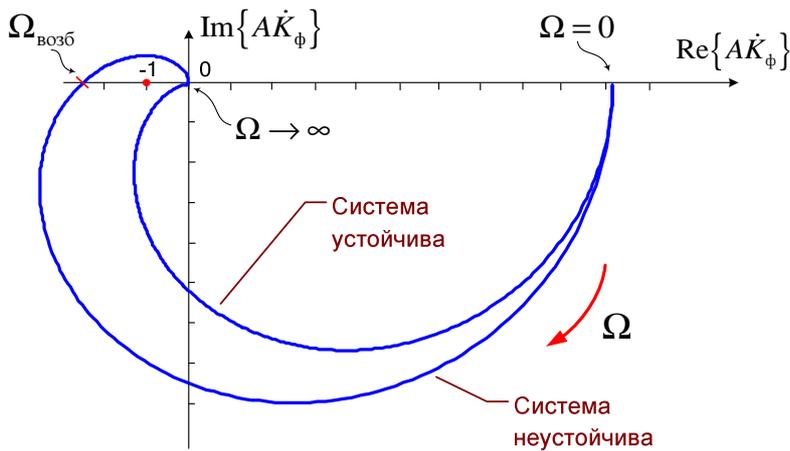


Рис. 7.22. Годограф функции $AK_{\phi}(j\Omega)$

на данной частоте в системе вместо отрицательной обратной связи действует достаточно глубокая положительная обратная связь и в результате этого система переходит в режим самовозбуждения.

Рассмотрим устойчивость системы ЧАП при различных типах фильтров в контуре обратной связи. При этом по-прежнему будем считать, что единственным инерционным элементом системы является ФНЧ.

А) ФНЧ 1-го порядка (однозвенная RC-цепь)

Фильтр 1-го порядка имеет передаточную функцию $K_{\phi 1}(p) = \frac{1}{1 + pT}$. Следовательно, частотная характеристика разомкнутой системы равна

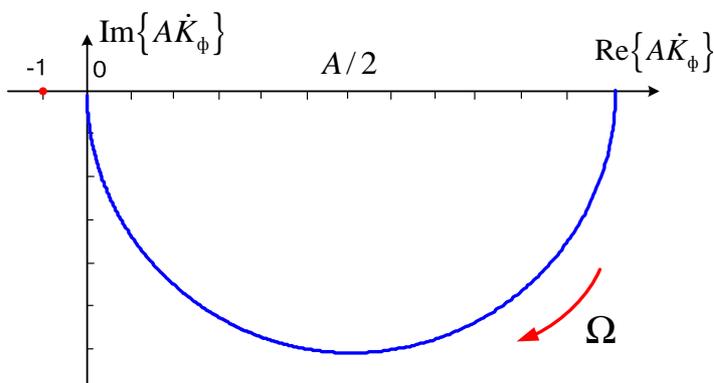


Рис. 7.23. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае фильтра 1-го порядка

$AK_{\phi 1}(j\Omega) = \frac{A}{1 + j\Omega T}$. Можно показать (см. Приложение 2), что годограф такой частотной характеристики имеет вид полуокружности радиусом $A/2$ с центром в точке $A/2$ (рис. 7.23). Он не охватывает точку -1 , поэтому система ЧАП с фильтром 1-го порядка устойчива.

Б) ФНЧ 2-го порядка

Рассмотрим в качестве примера ФНЧ 2-го порядка две последовательно соединённые идентичные интегрирующие RC -цепи, разделённые буферным каскадом. Передаточная функция такого фильтра

$$\text{равна } K_{\phi 2}(p) = \frac{1}{(1 + pT)^2}, \text{ а}$$

частотная характеристика разомкнутой системы имеет

$$\text{вид } AK_{\phi 2}(j\Omega) = \frac{A}{(1 + j\Omega T)^2}.$$

Годограф частотной характеристики

показан на рис. 7.24. Максимальный фазовый сдвиг в разомкнутой системе в данном случае

удваивается по сравнению с

системой, имеющей фильтр 1-го порядка, и достигает $-\pi$. Однако это будет лишь в пределе, при $\Omega \rightarrow \infty$, когда $|AK_{\phi 2}| \rightarrow 0$, поэтому система остаётся устойчивой.

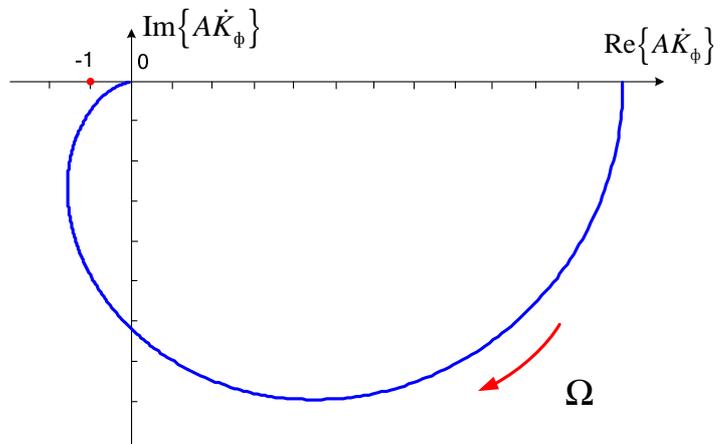


Рис. 7.24. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае фильтра 2-го порядка

В) ФНЧ 3-го порядка

Рассмотрим ФНЧ 3-го порядка, состоящий из трёх последовательно соединённых идентичных интегрирующих RC -цепей, разделённых буферными каскадами.

$$\text{Передаточная функция такого фильтра равна } K_{\phi 3}(p) = \frac{1}{(1 + pT)^3},$$

а частотная характеристика разомкнутой системы имеет вид

$$AK_{\phi 3}(j\Omega) = \frac{A}{(1 + j\Omega T)^3}.$$

Годограф частотной характеристики показан на рис. 7.25 для двух значений петлевого усиления A .

Максимальный фазовый сдвиг в разомкнутой системе в данном случае утраивается по сравнению с ФНЧ 1-го порядка и составляет

$\varphi_{3\max} = -\frac{3\pi}{2}$, следовательно по фазе условие самовозбуждения выполняется с запасом.

Выполнение условия самовозбуждения по амплитуде зависит от величины коэффициента петлевого усиления. При петлевом усилении A' годограф не охватывает точку -1 , и система устойчива. При $A'' > A'$ годограф проходит левее точки -1 , следовательно, условие устойчивости не выполняется, и происходит самовозбуждение системы ЧАП на частоте $\Omega_{\text{возб}}$.

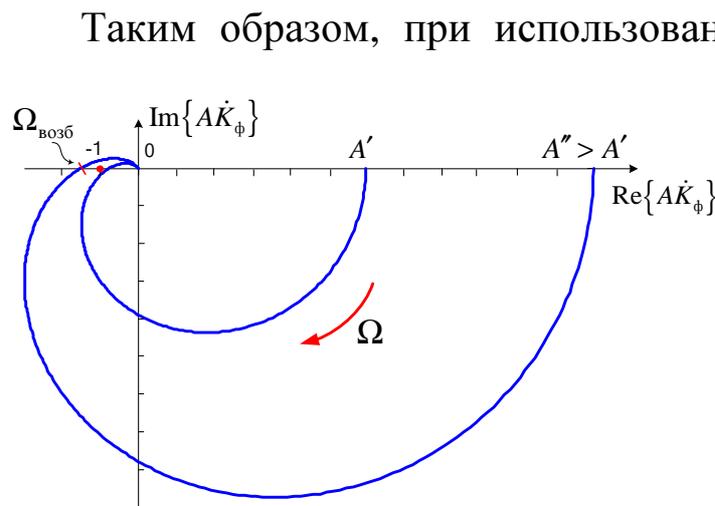


Рис. 7.25. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае фильтра 3-го порядка

ФНЧ 3-го порядка система ЧАП может быть неустойчивой при достаточно большой величине петлевого усиления.

Физически это объясняется тем, что на некоторой частоте $\Omega_{\text{возб}}$ каждое звено фильтра вносит фазовый сдвиг $-180^\circ/3 = -60^\circ$. При этом коэффициент передачи ФНЧ на частоте, соответствующей фазовому сдвигу -60° , уменьшается незначительно (рис. 7.26).

Найдём коэффициент передачи ФНЧ на частоте возбуждения. ФЧХ одного звена (интегрирующей RC-цепи 1-го порядка) равна $\varphi_1(\Omega) = -\arctg(\Omega T)$. На частоте возбуждения $-\arctg \Omega_{\text{возб}} T = -\frac{\pi}{3}$, откуда следует, что $\Omega_{\text{возб}} T = \text{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. При этом коэффициент передачи звена равен

$$K_1(\Omega_{\text{возб}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega_{\text{возб}} T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, коэффициент передачи трёхзвенного ФНЧ на частоте возбуждения равен

$$K_{\text{ф3}}(\Omega_{\text{возб}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, если в системе ЧАП с трёхзвенным ФНЧ 3-го порядка петлевое усиление $A > 1/K_{\text{ф3}}(\Omega_{\text{возб}}) = 8$ (т.е. коэффициент автоподстройки $K_{\text{ЧАП}} = A + 1 > 9$), то система неустойчива.

Это условие практически всегда выполняется, так как для обеспечения малой остаточной расстройки обычно задают $K_{\text{ЧАП}} \gg 9$.

Напомним, что проведённый анализ устойчивости системы ЧАП основан на предположении, что единственным инерционным элементом системы является ФНЧ в цепи обратной связи. Более строгий анализ показывает, что из-за группового запаздывания сигнала в фильтре УПЧ на время $\tau_{\text{УПЧ}}$ (т.е. из-за инерционности УПЧ) возникает дополнительный фазовый сдвиг, и система ЧАП может возбудиться

даже тогда, когда в цепи обратной связи стоит фильтр 1-го порядка. Это произойдёт в том случае, когда на некоторой частоте $\Omega_{\text{возб}}$ сумма фазового сдвига $\Delta\varphi_{\text{УПЧ}} = -\tau_{\text{УПЧ}}\Omega_{\text{возб}}$, обусловленного запаздыванием в УПЧ, и фазового сдвига $\Delta\varphi_{\text{ФНЧ}} = -\text{arctg}\Omega_{\text{возб}}T$, связанного с инерционностью ФНЧ, будет равна $-\pi$, а коэффициент передачи разомкнутой системы будет превышать 1.

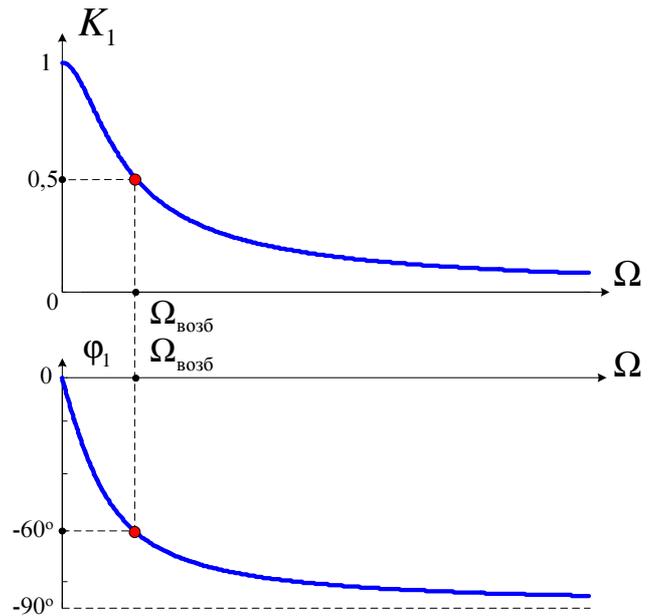


Рис. 7.26. АЧХ и ФЧХ одного звена фильтра 3-го порядка

Что собой представляет физически самовозбуждение системы ЧАП? Если в системе выполняется условие самовозбуждения, то при подаче на вход системы немодулированного сигнала напряжение промежуточной частоты и колебание гетеродина будут иметь частотную модуляцию с частотой $\Omega_{\text{возб}}$. Если же на входе системы сигнала нет, то её самовозбуждение невозможно, поскольку в этом случае напряжение на выходе смесителя равно нулю и, следовательно, система разомкнута.

При самовозбуждении системы ЧАП она перестаёт выполнять свою функцию, и приёмник становится неработоспособным.

Статические характеристики системы ЧАП в нелинейном режиме^{*)}

При медленном изменении частоты сигнала, когда переходными процессами можно пренебречь, т.е. в статическом режиме, работа системы ЧАП описывается *характеристикой регулирования* – зависимостью остаточной расстройки по промежуточной частоте $\Delta f_{п.ост}$ от расстройки по частоте сигнала $\Delta f_{с.нач}$. Если бы система ЧАП была линейной, то характеристика регулирования имела бы вид прямой линии, поскольку в этом случае $\Delta f_{п.ост} = \Delta f_{с.нач} / K_{ЧАП}$. Наличие нелинейных блоков в системе ЧАП, и в первую очередь ЧД, приводит к тому, что характеристика регулирования имеет более сложный вид.

Для упрощения анализа работы системы ЧАП в нелинейном режиме сделаем ряд допущений:

- 1) коэффициент передачи ФНЧ на нулевой частоте будем считать равным единице: $K_{\phi}(0) = 1$;
- 2) не будем учитывать нелинейность характеристики управителя частоты, т.е. примем, что $\Delta f_{\Gamma} = S_y u_y$.

Таким образом, систему ЧАП будем рассматривать как безынерционную нелинейную систему автоматического регулирования, содержащую единственный нелинейный элемент – частотный дискриминатор с характеристикой $u_d(\Delta f_{п})$. Структурная схема математической модели такой системы показана на рис. 7.27. В соответствии с этой структурной схемой система ЧАП описывается следующим нелинейным алгебраическим уравнением (здесь и далее начальная расстройка по частоте сигнала для краткости обозначается как Δf_c , а остаточная расстройка по промежуточной частоте – как $\Delta f_{п}$):

$$\Delta f_{п} = \Delta f_c - \Delta f_{\Gamma} = \Delta f_c - S_y K_{УПТ} u_d(\Delta f_{п}).$$

Решим это уравнение графически. Для этого запишем его в следующем виде:

$$S_y K_{УПТ} u_d(\Delta f_{п}) = \Delta f_c - \Delta f_{п}. \quad (7.12)$$

^{*)} В данном разделе использованы материалы книги [Кривицкий Б.Х. Автоматическое слежение за частотой. – М., Энергия, 1974].

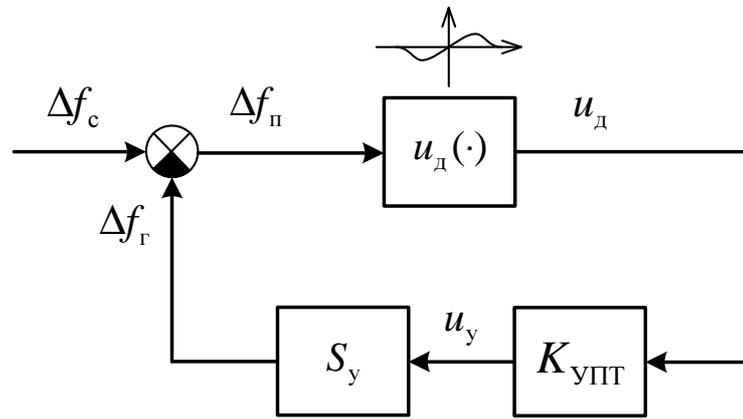


Рис. 7.27. Структурная схема нелинейной математической модели системы ЧАП

Левая и правая части этого уравнения определяют одну и ту же величину – отклонение частоты гетеродина $\Delta f_г$. Поэтому решение уравнения, т.е. значение остаточной расстройки $\Delta f'_п$ при некоторой заданной величине начальной расстройки $\Delta f'_с$, будет определяться абсциссой точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения (7.12) (рис. 7.28).

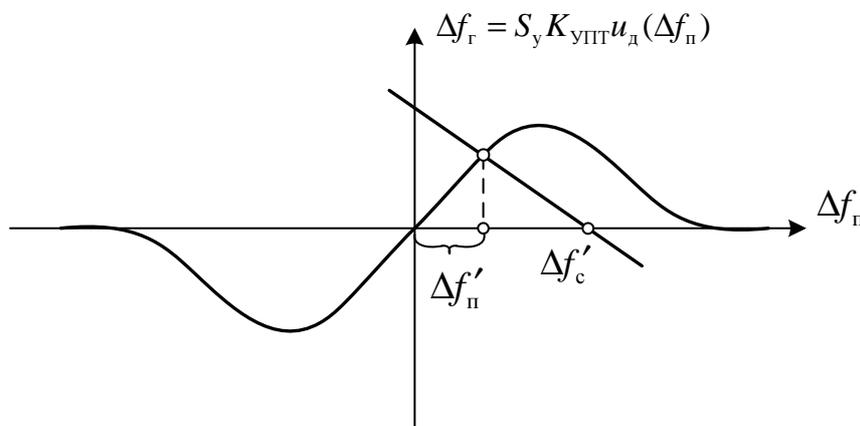


Рис. 7.28. Графическое определение остаточной расстройки

Используя этот подход, построим графически характеристику регулирования. Для этого будем постепенно увеличивать отклонение частоты сигнала $\Delta f'_с$, т.е. сдвигать вправо прямую линию, описывающую правую часть уравнения (7.12), и отмечать абсциссу точки пересечения этой прямой с графиком левой части (рис. 7.29,а). Заданное значение $\Delta f'_с$ и соответствующее ему значение $\Delta f'_п$ определяют точку на графике характеристики регулирования (рис. 7.29,б)^{*)}. Из

^{*)} На графике характеристики регулирования, показанном на рис. 8.29,б, для удобства изображения масштаб по вертикальной оси сделан меньше, чем по горизонтальной.

рис. 7.29,а видно, что пока отклонение частоты сигнала не превысит некоторого значения $\Delta f_c''$, при котором прямая $\Delta f_c - \Delta f_n$ касается нижнего сгиба графика левой части уравнения (7.12), существует только одна точка A' пересечения этих двух графиков, т.е. единственное решение уравнения (7.12), которое и определяет величину остаточной расстройки $\Delta f_n'$. При этом в области малых отклонений Δf_c характеристика регулирования линейна, и её угловой коэффициент равен $1/K_{\text{ЧАП}}$. Если $\Delta f_c < \Delta f_c''$, то система ЧАП работает эффективно: расстройка промежуточной частоты остаётся малой при значительных отклонениях частоты сигнала.

При дальнейшем увеличении отклонения частоты сигнала появляются три точки пересечения графиков: A''' , B''' и C''' . При этом состоянию устойчивого равновесия системы ЧАП соответствуют только точки A''' и C''' , а точка B''' характеризует неустойчивое равновесие: при малейшем отклонении от этого состояния система будет всё сильнее удаляться от него, стремясь к точке A''' или C''' . Наличие нескольких состояний равновесия в системе ЧАП – следствие её нелинейности. Если отклонение частоты больше $\Delta f_c''$, но не превышает значения Δf_c^{IV} , при котором прямая $\Delta f_c - \Delta f_n$ касается верхнего сгиба графика левой части уравнения (7.12), то система ЧАП по-прежнему обеспечивает подстройку частоты гетеродина, хотя и не так эффективно, как при малых отклонениях. При этом характеристика регулирования становится заметно нелинейной (см. рис. 7.29,б). Если $\Delta f_c = \Delta f_c^{IV}$, то точка устойчивого равновесия A^{IV} и неустойчивого равновесия B^{IV} сливаются, и система скачком переходит в новое состояние устойчивого равновесия, соответствующее точке C^{IV} . Это означает, что в системе ЧАП происходит срыв слежения, и она уже не обеспечивает эффективной подстройки частоты гетеродина. При этом $\Delta f_n \approx \Delta f_c$. Аналогичная картина будет и при отрицательных значениях расстройки Δf_c .

Интервал отклонений частоты сигнала, в пределах которого обеспечивается эффективная подстройка частоты гетеродина, при условии, что предварительно система ЧАП находилась в режиме слежения, называется **полосой удержания** $\Pi_{\text{уд}}$.

Будем теперь уменьшать отклонение частоты сигнала, начиная с некоторой величины $\Delta f_c > \Delta f_c^{IV}$, соответствующей режиму отсутствия слежения в системе ЧАП.

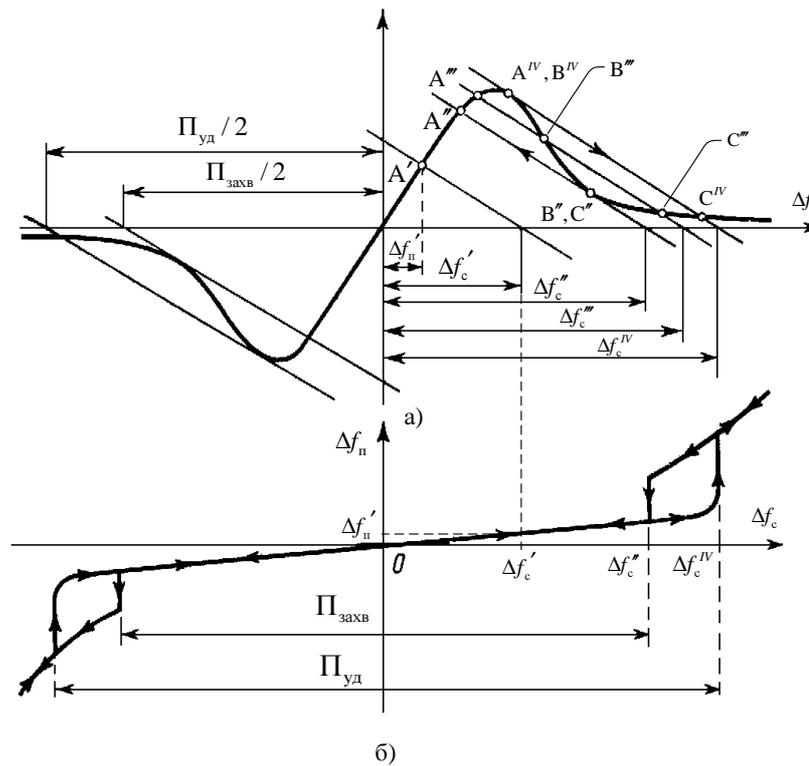


Рис. 7.29. Построение характеристики регулирования системы ЧАП

При $\Delta f_c = \Delta f_c''$ точки B'' и C'' сольются, и система скачком перейдёт в новое устойчивое состояние, соответствующее точке A'' . Это означает, что в системе ЧАП происходит «захват» частоты сигнала, и она начинает работать эффективно.

Интервал отклонений частоты сигнала, в пределах которого обеспечивается эффективная подстройка частоты гетеродина, при условии, что предварительно система ЧАП не находилась в режиме слежения, называется **полосой захвата** $\Pi_{\text{захв}}$.

Из-за того, что полоса удержания всегда больше полосы захвата, характеристика регулирования системы ЧАП имеет «петлеобразные» участки при значениях отклонения частоты сигнала от $\Delta f_c''$ до $\Delta f_c''''$ при положительных расстройках и от $-\Delta f_c''''$ до $-\Delta f_c''$ – при отрицательных. Характеристика такого вида называется **гистерезисной**^{*)}.

^{*)} Гистерезис (от греческого слова *hysteresis* – запаздывание) – отставание следствия от вызывающей его причины.

Контрольные вопросы

1. Для чего предназначена система автоматической регулировки усиления (АРУ)?
2. Какой вид имеет амплитудная характеристика приёмника с системой АРУ?
3. Какую функцию выполняет ФНЧ в цепи обратной связи системы АРУ?
4. Какая зависимость называется регулировочной характеристикой усилителя?
5. Для чего предназначена система автоматической подстройки частоты гетеродина?
6. Какой дискриминатор используется в составе системы частотной автоподстройки (ЧАП)?
7. Что характеризует коэффициент автоподстройки системы ЧАП?
8. Чем определяется величина остаточной расстройки в системе ЧАП?
9. Можно ли в системе ЧАП, не содержащей интегратора в цепи обратной связи, получить нулевую остаточную расстройку?
10. Чем определяется быстродействие системы ЧАП с фильтром 1-го порядка в цепи обратной связи?
11. При каком условии система ЧАП устойчива?
12. Какая зависимость называется характеристикой регулирования системы ЧАП?
13. Какая величина называется полосой захвата системы ЧАП?
14. Какая величина называется полосой удержания системы ЧАП?

Вычисление обратного преобразования Лапласа

Обратное преобразование Лапласа функции $F(p) = \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})}$ равно

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})} e^{pt} dp,$$

где a – произвольная константа, определяющая положение прямой, по которой проводится интегрирование.

Функция $F(p)$ имеет особые точки в виде простых полюсов: $p_1 = 0$, $p_2 = -1/T_{\text{ЧАП}}$. Для вычисления интеграла с помощью вычетов дополним прямую, по которой проводится интегрирование, до замкнутого контура, добавив к ней дугу C_R окружности бесконечно большого радиуса с центром в точке 0, и расположим прямую так, чтобы оба полюса находились внутри контура (рис. 7.П). Тогда интеграл по замкнутому контуру будет равен

$$\oint F(p)e^{pt} dp = \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p)e^{pt} dp.$$

Поскольку при бесконечном увеличении радиуса дуги окружности функция $F(p)$ стремится к нулю, то по лемме Жордана интеграл по этой дуге также стремится к нулю. Следовательно, при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \oint F(p)e^{pt} dp.$$

Интеграл по замкнутому контуру выражается через сумму вычетов подынтегральной функции:

$$\oint F(p)e^{pt} dp = 2\pi j \sum_{i=1}^2 \text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_i}.$$

Таким образом, обратное преобразование Лапласа равно

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sum_{i=1}^2 \text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_i}.$$

Вычет функции $F(p)e^{pt}$ в точке простого полюса равен

$$\text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_i} = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) F(p)e^{pt}.$$

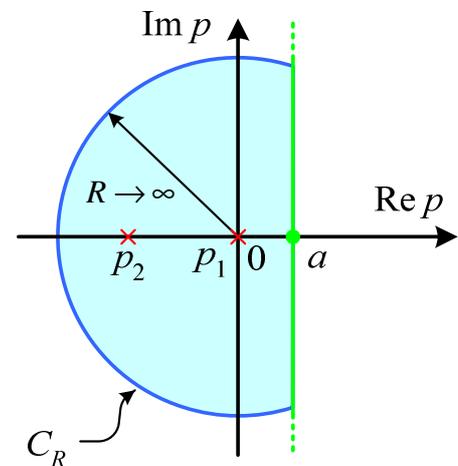


Рис. 7.П. Контур интегрирования

Найдём вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в точках $p_1 = 0$, $p_2 = -1/T_{\text{чАП}}$:

$$\text{Res}(F(p)e^{pt})\Big|_{p_1} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1 + pK_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}}}{p(1 + pT_{\text{чАП}})} e^{pt} = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(F(p)e^{pt})\Big|_{p_2} &= \lim_{p \rightarrow -1/T_{\text{чАП}}} \left(p + \frac{1}{T_{\text{чАП}}} \right) \frac{1 + pK_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}}}{p(1 + pT_{\text{чАП}})} e^{pt} = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1/T_{\text{чАП}}} \left(\frac{pT_{\text{чАП}} + 1}{T_{\text{чАП}}} \right) \frac{p \left(\frac{1}{p} + K_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}} \right)}{p(1 + pT_{\text{чАП}})} e^{pt} = \frac{1}{T_{\text{чАП}}} \left(\frac{1}{p} + K_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}} \right) e^{pt} \Big|_{p=-1/T_{\text{чАП}}} = \\ &= (K_{\text{чАП}} - 1)e^{-1/T_{\text{чАП}}}. \end{aligned}$$

Суммируя оба вычета, окончательно получим:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 1 + (K_{\text{чАП}} - 1)e^{-t/T_{\text{чАП}}}.$$

Приложение 2

Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае ФНЧ 1-го порядка в цепи обратной связи

В случае фильтра 1-го порядка с передаточной функцией $K_{\phi 1}(p) = \frac{1}{1 + pT}$ комплексная частотная характеристика разомкнутой системы равна $A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) = \frac{A}{1 + j\Omega T}$. Покажем, что при этом годограф частотной характеристики разомкнутой системы имеет вид полуокружности радиуса $A/2$, лежащей в правом нижнем квадранте. Для этого, прежде всего, найдём вещественную и мнимую части комплексной частотной характеристики:

$$A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) = \frac{A}{1 + j\Omega T} = A \frac{1 - j\Omega T}{1 + (\Omega T)^2} = \frac{A}{1 + (\Omega T)^2} - j \frac{A\Omega T}{1 + (\Omega T)^2}.$$

Видно, что при любых значениях частоты $\text{Re}\{A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega)\} > 0$ и $\text{Im}\{A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega)\} \leq 0$, следовательно, годограф расположен в правом нижнем квадранте и при $\Omega = 0$ и $\Omega \rightarrow \infty$ касается вещественной оси.

Затем, для того чтобы показать, что годограф имеет форму полуокружности с центром в точке $A/2$ на вещественной оси, найдём длину вектора $\dot{R} = A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) - \frac{A}{2}$, соединяющего эту точку, с точкой годографа, соответствующей текущей частоте Ω :

$$\begin{aligned} |\dot{R}| &= \left| AK_{\phi 1}(j\Omega) - \frac{A}{2} \right| = \left| \frac{A}{1+j\Omega T} - \frac{A}{2} \right| = A \left| \frac{2-(1+j\Omega T)}{2(1+j\Omega T)} \right| = \\ &= \frac{A}{2} \left| \frac{1-j\Omega T}{1+j\Omega T} \right| = \frac{A}{2} \left| \frac{(1+j\Omega T)^*}{1+j\Omega T} \right| = \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку длина вектора \dot{R} не зависит от частоты Ω и равна $A/2$, то годограф частотной характеристики действительно представляет собой полуокружность радиуса $A/2$ (см. рис. 7.23).