

# Цифровая обработка сигналов в радиоприёмных устройствах

Как известно из курса «Основы приёма и обработки сигналов», назначением любого радиоприёмного устройства является извлечение из принимаемого сигнала содержащейся в нём полезной информации. Поскольку радиосигналы – это узкополосные колебания, то математически они могут быть описаны с помощью комплексной огибающей  $\dot{U}(t)$ , которая содержит в себе всю ту же информацию, что и принимаемый высокочастотный сигнал, за исключением частоты несущей. При цифровой обработке сигналов используется цифровая комплексная огибающая  $\dot{U}(n)$ , которая определяется своей действительной и мнимой частями – низкочастотными квадратурными составляющими сигнала.

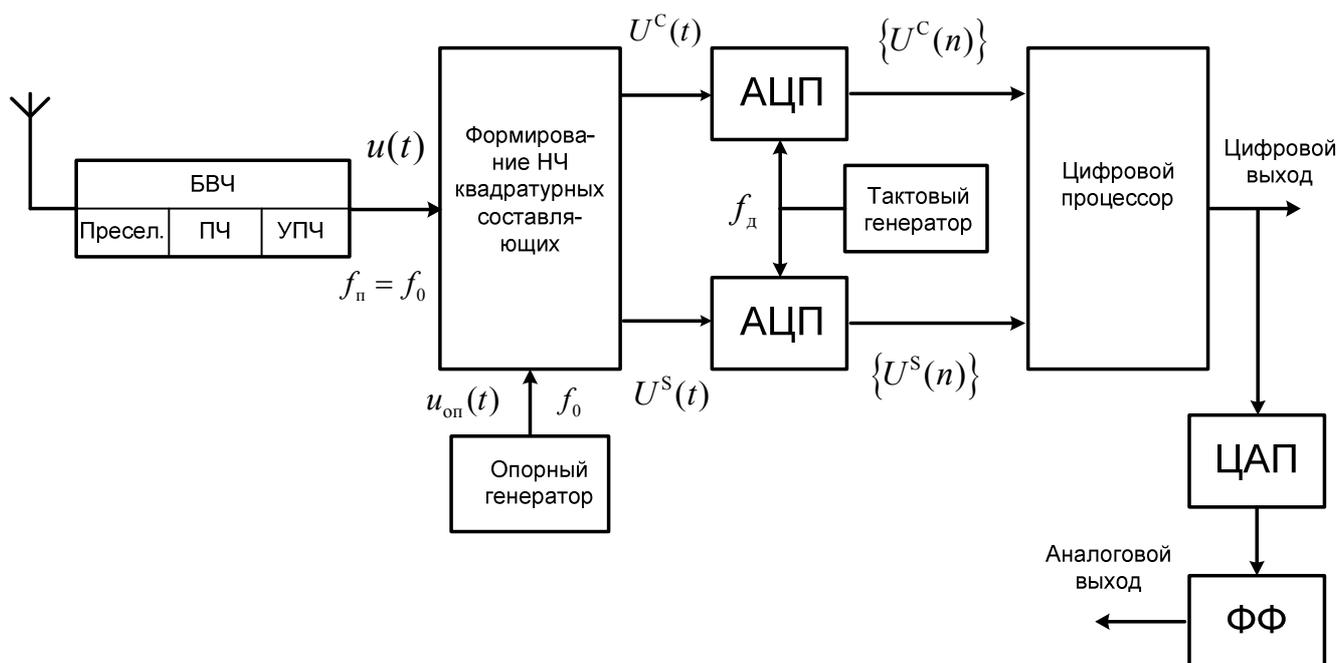
## *1. Формирование цифровой комплексной огибающей сигнала*

Для получения цифровых низкочастотных (НЧ) квадратурных составляющих сигнала, определяющих цифровую комплексную огибающую, могут использоваться два подхода. Первый основан на том, что сначала формируются аналоговые низкочастотные составляющие сигнала, а затем они преобразуются в цифровую форму с помощью двух синхронно работающих аналого-цифровых преобразователей (АЦП) или одного двухканального.

При втором подходе оцифровывается узкополосный высокочастотный сигнал, как правило, на промежуточной частоте, а затем из полученного цифрового высокочастотного сигнала формируется низкочастотная комплексная огибающая. В этом случае используется только один АЦП, но работающий при более высокой частоте дискретизации.

### *1.1. Формирование цифровой комплексной огибающей на основе аналоговых низкочастотных квадратурных составляющих сигнала*

Начнём с первого варианта построения цифрового радиоприёмника. Его структурная схема показана на рис. 1.



**Рис 1. Укрупнённая структурная схема цифрового радиоприёмника с формированием аналоговых НЧ квадратурных составляющих сигнала**

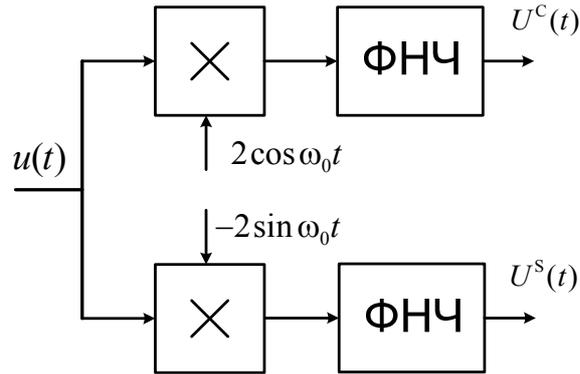
На этой схеме БВЧ – блок высокой частоты радиоприёмника, который состоит из преселектора, преобразователя частоты (ПЧ) и усилителя промежуточной частоты (УПЧ). Низкочастотные квадратурные составляющие сигнала  $U^c(t)$  (косинусная составляющая) и  $U^s(t)$  (синусная составляющая) формируются с помощью соответствующего блока, на который также подаётся гармоническое опорное колебание  $u_{\text{оп}}(t)$  с частотой  $f_0$ , равной центральной частоте спектра сигнала (промежуточной частоте БВЧ). Как будет показано далее, эти квадратурные составляющие, в случае их идеального формирования, равны, соответственно, действительной и мнимой частям комплексной огибающей сигнала:

$$U^c(t) = \text{Re}\dot{U}(t),$$

$$U^s(t) = \text{Im}\dot{U}(t).$$

Формирование квадратурных составляющих производится с помощью схемы, показанной на рис. 2 и состоящей из двух преобразователей на нулевую частоту, опорные колебания которых имеют угловую частоту

ту  $\omega_0 = 2\pi f_0$  и сдвинуты по фазе одно относительно другого на  $\frac{\pi}{2}$ <sup>\*</sup>). Такие опорные колебания могут формироваться либо с помощью специального автогенератора квадратурных колебаний, либо с помощью фазорасщепляющей цепи, схема и принцип действия которой рассмотрены в разделе «Демодуляторы сигналов» курса «Основы приёма и обработки сигналов». Каждый преобразователь на нулевую частоту состоит из перемножителя и фильтра низких частот (ФНЧ).



**Рис 2. Схема формирования НЧ квадратурных составляющих**

Полученные таким образом квадратурные составляющие сигнала далее преобразуются в цифровую форму с помощью двух АЦП, синхронно работающих с частотой дискретизации  $f_d$ . В результате образуются последовательности отсчётов цифровых низкочастотных квадратурных составляющих сигнала  $\{U^c(n)\}$  и  $\{U^s(n)\}$ , которые далее обрабатываются в цифровом процессоре. Из цифрового выходного сигнала с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и формирующего фильтра (ФФ) при необходимости может быть получен аналоговый выходной сигнал.

Рассмотрим математические соотношения, описывающие формирование аналоговых низкочастотных квадратурных составляющих сигнала. Узкополосный сигнал с центральной угловой частотой  $\omega_0$  можно записать в виде гармонического колебания с переменной амплитудой  $U(t)$  и переменной фазой  $\varphi(t)$ :

$$u(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (1)$$

<sup>\*</sup> Такую пару преобразователей частоты называют квадратурным смесителем и обычно реализуют в виде одной микросхемы.

т.е. как колебание, которое в общем случае имеет и амплитудную модуляцию, и фазовую модуляцию. Комплексная огибающая сигнала относительно частоты  $\omega_0$  равна<sup>\*)</sup>

$$\dot{U}(t) = U(t)e^{j\varphi(t)} = U(t)\cos\varphi(t) + jU(t)\sin\varphi(t).$$

Её действительная и мнимая части определяются выражениями

$$\operatorname{Re}\dot{U}(t) = U(t)\cos\varphi(t), \quad (2,а)$$

$$\operatorname{Im}\dot{U}(t) = U(t)\sin\varphi(t). \quad (2,б)$$

Для того чтобы понять принцип получения низкочастотных квадратурных составляющих сигнала, найдём напряжение на выходах перемножителей схемы на рис. 2.

1) Напряжение на выходе перемножителя синфазного (верхнего на схеме) канала равно

$$U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \cdot 2\cos\omega_0 t = U(t)\cos\varphi(t) + U(t)\cos(2\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Составляющая этого колебания с частотой  $2\omega_0$  не проходит на выход ФНЧ, следовательно, напряжение  $U^c(t)$  на выходе синфазного канала равно  $U(t)\cos\varphi(t)$ , что совпадает с правой частью выражения (2,а). Поэтому можно записать, что

$$U^c(t) = \operatorname{Re}\dot{U}(t). \quad (3)$$

Учитывая то, что выражение  $U^c(t) = U(t)\cos\varphi(t)$  содержит функцию косинуса, будем далее называть эту низкочастотную квадратурную составляющую сигнала **косинусной**.

2) Напряжение на выходе перемножителя квадратурного (нижнего на схеме) канала равно

$$\begin{aligned} U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \cdot (-2\sin\omega_0 t) &= U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \cdot 2\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U(t)\cos\left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2}\right) + U(t)\cos\left(2\omega_0 t + \varphi(t) + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Составляющая с частотой  $2\omega_0$  также не проходит на выход ФНЧ, следовательно, напряжение  $U^s(t)$  на выходе ФНЧ квадратурного канала

---

<sup>\*)</sup> В более общем случае определение комплексной огибающей рассмотрено в п. 1.2.

равно  $U(t) \cos\left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2}\right) = U(t) \sin \varphi(t)$ , что совпадает с правой частью выражения (2,б). Поэтому можно записать, что

$$U^S(t) = \text{Im} \dot{U}(t). \quad (4)$$

Эту низкочастотную квадратурную составляющую сигнала будем называть *синусной*.

Таким образом, в случае идеальных ФНЧ, полностью подавляющих составляющие с удвоенной частотой несущей, на выходах данной схемы действительно образуются напряжения, равные косинусной и синусной низкочастотным составляющим сигнала. После их преобразования в АЦП получаются цифровые квадратурные составляющие.

Достоинством такого способа формирования цифровых низкочастотных квадратурных составляющих является то, что преобразование в цифровую форму производится для низкочастотных колебаний и, следовательно, можно использовать АЦП с низкой частотой дискретизации  $f_d$ , которая определяется теоремой Котельникова:

$$f_d \geq 2F_{\max}^{C,S},$$

где  $F_{\max}^{C,S}$  – максимальная частота в спектре квадратурных составляющих, равная половине ширины спектра сигнала.

Недостатком является необходимость использования двух работающих синхронно идентичных АЦП, а также погрешности формирования аналоговых квадратурных составляющих, которые обусловлены следующими причинами:

- неортогональностью опорных колебаний, т.е. отличием фазового сдвига между ними от  $\frac{\pi}{2}$ ;
- неидентичностью коэффициентов передачи перемножителей;
- неидентичностью частотных характеристик ФНЧ.

### **1.2. Формирование цифровой комплексной огибающей на основе преобразования Гильберта**

Теперь рассмотрим второй способ получения цифровых низкочастотных квадратурных составляющих, основанный на обработке оцифрованного сигнала промежуточной частоты. Для этого сначала более подробно рассмотрим понятие комплексной огибающей узкопо-

лосного сигнала, который обозначим  $s(t)$  – как это принято в теории сигналов.

### 1.2.1. Преобразование Гильберта, аналитический сигнал и комплексная огибающая

Строгое математическое определение комплексной огибающей основано на понятии **комплексного аналитического сигнала**

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t), \quad (5)$$

где  $\hat{s}(t)$  – сопряжённый по Гильберту сигнал, который определяется как преобразование Гильберта сигнала  $s(t)$ :

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (6)$$

В этом выражении подынтегральная функция обращается в бесконечность при  $\tau = t$ . Поэтому при вычислении интеграла эта особая точка исключается. Этому соответствует используемое в математике определение интеграла в смысле главного значения Коши:

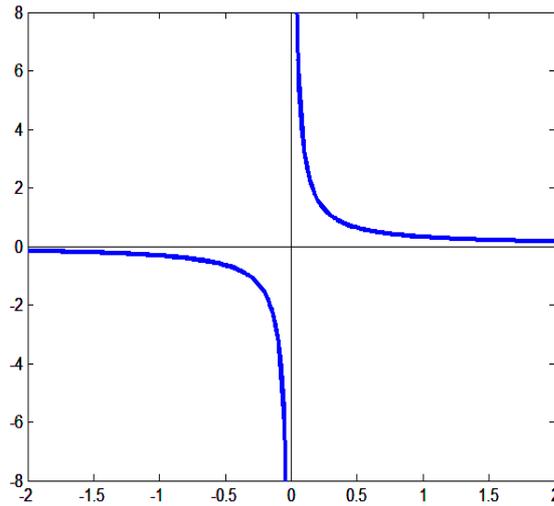
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \right).$$

Преобразование Гильберта можно записать в виде интеграла свёртки:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \frac{1}{\pi(t - \tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h_{\Gamma}(t - \tau) d\tau = s(t) * h_{\Gamma}(t), \quad (7)$$

где  $h_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi t}$  – функция, с которой производится свёртка сигнала  $s(t)$ ,

\* – символ операции свёртки. Функцию  $h_{\Gamma}(t)$  можно рассматривать как импульсную характеристику некоторой линейной системы – **преобразователя Гильберта**, а сопряжённый сигнал – как отклик такой системы на сигнал  $s(t)$ . График функции  $h_{\Gamma}(t)$  (её центральной части) показан на рис. 3. Особенность этой функции состоит в том, что она отлична от нуля на всём временном интервале  $t \in (-\infty, +\infty)$ , в том числе и для отрицательных значений времени, а при  $t = 0$  не определена, т.к. имеет разрыв 2-го рода.



**Рис 3. Импульсная характеристика идеального преобразователя Гильберта (центральная часть)**

Известно, что импульсная характеристика любой физически реализуемой системы не может начинаться раньше, чем при  $t=0$ , поскольку по определению это реакция системы на  $\delta$ -импульс, который подаётся на её вход в нулевой момент времени. Поэтому система с импульсной характеристикой  $h_{\Gamma}(t)$  физически не реализуема и её можно рассматривать только теоретически как идеальный преобразователь Гильберта. Тем не менее, определим основные характеристики такого идеального, физически нереализуемого, преобразователя Гильберта с тем, чтобы потом оценить те изменения, которые возникают при его реализации.

Комплексная частотная характеристика идеального преобразователя Гильберта равна преобразованию Фурье его импульсной характеристики:

$$\dot{H}_{\Gamma}(j\omega) = \mathcal{F}\{h_{\Gamma}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt.$$

(Здесь и далее  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  – символ преобразования Фурье). Можно показать (см. Приложение), что этот интеграл определяет функцию частоты  $\omega$  следующего вида [1, гл. 1]:

$$\dot{H}_{\Gamma}(j\omega) = -j \operatorname{sign} \omega = \begin{cases} j & \text{при } \omega < 0 \\ 0 & \text{при } \omega = 0 \\ -j & \text{при } \omega > 0 \end{cases}, \quad (8)$$

где  $\text{sign } \omega = \begin{cases} -1 & \text{при } \omega < 0 \\ 0 & \text{при } \omega = 0 \\ +1 & \text{при } \omega > 0 \end{cases}$  – функция знака.

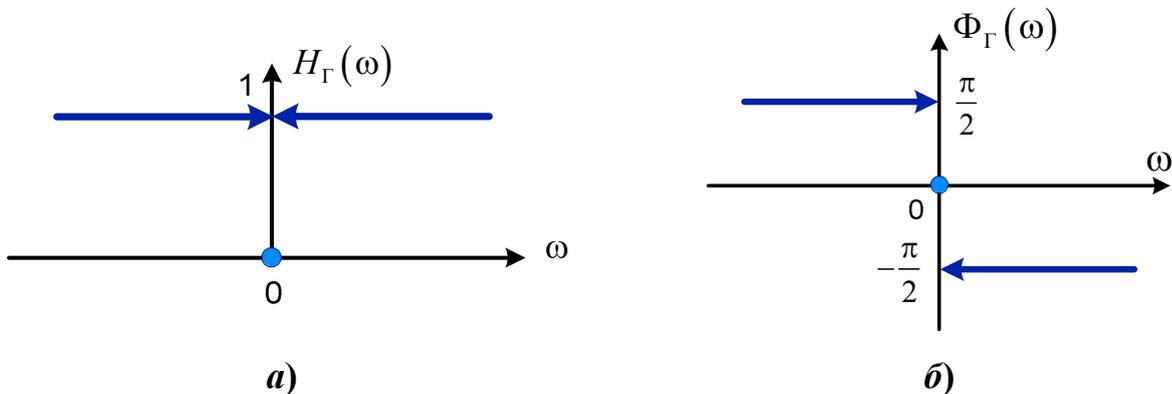
Следовательно, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) идеального преобразователя Гильберта равна

$$H_{\Gamma}(\omega) = |\dot{H}_{\Gamma}(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{при } \omega = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

а фазочастотная характеристика (ФЧХ) равна

$$\Phi_{\Gamma}(\omega) = \arg \dot{H}_{\Gamma}(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \omega > 0 \end{cases}. \quad (10)$$

При  $\omega = 0$  ФЧХ не определена, т.к. значение АЧХ равно 0. Поэтому условно можно считать, что  $\Phi_{\Gamma}(0) = 0$ . Графики АЧХ и ФЧХ идеального преобразователя Гильберта показаны на рис. 4.



**Рис 4. АЧХ (а) и ФЧХ (б) идеального преобразователя Гильберта**

Таким образом, исходя из вида АЧХ и ФЧХ можно сказать, что идеальный преобразователь Гильберта – это фазовращатель, который вносит одинаковый фазовый сдвиг на всех частотах:  $-\frac{\pi}{2}$  для положительных, физически существующих, частот и  $+\frac{\pi}{2}$  для отрицательных частот; при этом из сигнала удаляется постоянная составляющая, а уровень остальных частотных составляющих не изменяется.

Теперь найдём комплексный спектр  $\dot{Z}(j\omega) = \mathcal{F}\{z(t)\}$  аналитического сигнала (5). В силу линейности преобразования Фурье

$$\dot{Z}(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t) + j\hat{s}(t)\} = \mathcal{F}\{s(t)\} + j\mathcal{F}\{\hat{s}(t)\}. \quad (11)$$

Обозначим спектр  $\mathcal{F}\{s(t)\}$  исходного вещественного сигнала  $s(t)$  как  $\dot{S}(j\omega)$ . Тогда спектр сопряжённого сигнала  $\hat{s}(t)$  будет равен произведению спектра сигнала  $\dot{S}(j\omega)$  на комплексную частотную характеристику идеального преобразователя Гильберта:

$$\mathcal{F}\{\hat{s}(t)\} = \dot{S}(j\omega) \dot{H}_\Gamma(j\omega). \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что спектр аналитического сигнала равен

$$\dot{Z}(j\omega) = \dot{S}(j\omega) + j\dot{S}(j\omega)\dot{H}_\Gamma(j\omega) = [1 + j\dot{H}_\Gamma(j\omega)]\dot{S}(j\omega). \quad (13)$$

Подставляя в (13) выражение (8) для комплексной частотной характеристики идеального преобразователя Гильберта, получим окончательное выражение для спектра аналитического сигнала:

$$\dot{Z}(j\omega) = [1 + j(-j \operatorname{sign} \omega)]\dot{S}(j\omega) = (1 + \operatorname{sign} \omega)\dot{S}(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0 \\ \dot{S}(0) & \text{при } \omega = 0 \\ 2\dot{S}(j\omega) & \text{при } \omega > 0 \end{cases} \quad (14)$$

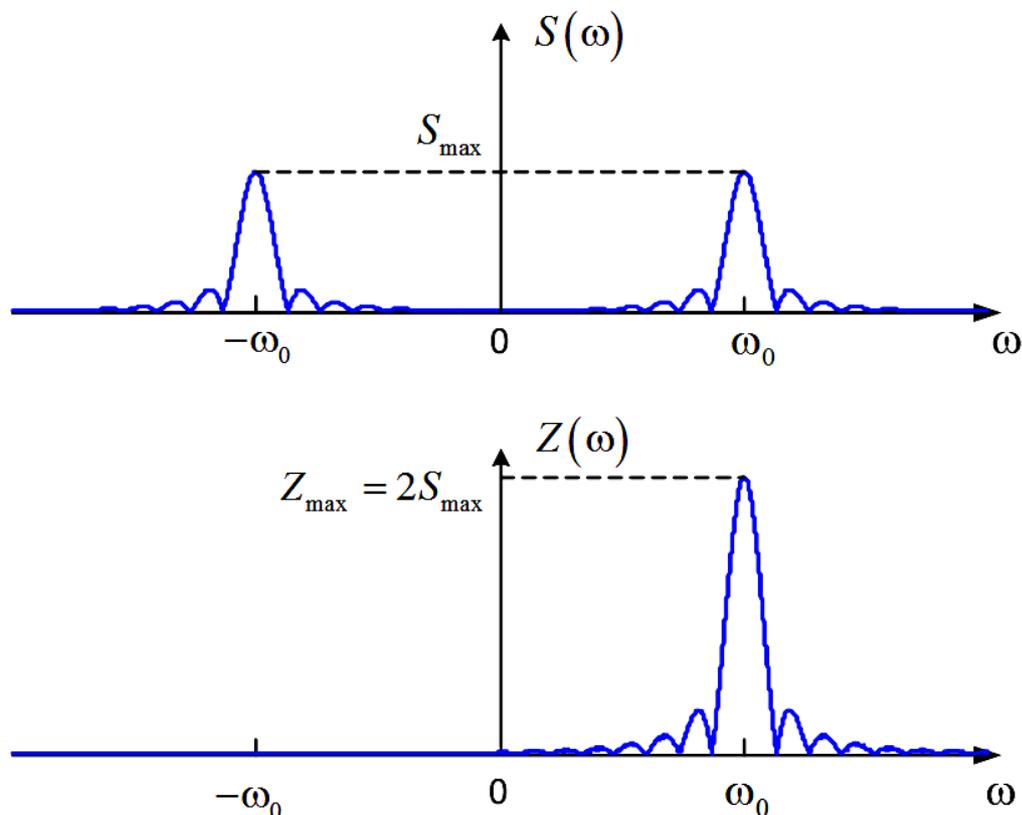
Из (14) следует, что в области отрицательных частот спектр аналитического сигнала равен нулю, а в области положительных частот – удвоенному значению спектра вещественного сигнала. Следовательно, в отличие от спектра вещественного сигнала, *спектр комплексного аналитического сигнала всегда односторонний*.

На рис. 5 показан качественный вид амплитудных спектров сигнала с центральной частотой  $\omega_0$ : спектра  $S(\omega)$  – для вещественного сигнала  $s(t)$  и спектра  $Z(\omega)$  – для комплексного аналитического сигнала  $z(t)$ . На нём также отмечено соотношение между максимальными значениями этих спектров:

$$Z_{\max} = 2S_{\max}.$$

Теперь перейдём к рассмотрению комплексной огибающей сигнала. Формально комплексную огибающую можно определить для любого колебания, однако практическое её использование целесооб-

разно только при обработке узкополосных сигналов. Поэтому далее будем считать, что сигнал  $s(t)$  – узкополосный и имеет центральную частоту  $\omega_0$  (в супергетеродинном приёмнике это обычно промежуточная частота БВЧ).



**Рис 5. Амплитудные спектры вещественного и комплексного сигналов**

Комплексная огибающая  $\dot{U}(t)$  сигнала  $s(t)$  также является комплексным сигналом, но в отличие от аналитического сигнала  $z(t)$ , её спектр расположен не на центральной частоте сигнала  $\omega_0$ , а на нулевой частоте. Поэтому для получения комплексной огибающей нужно выполнить такое преобразование аналитического сигнала, в результате которого его спектр сместится в сторону нуля (т.е. на графике – влево по оси частот) на величину частоты  $\omega_0$ .

Из свойств преобразования Фурье известно, что для этого следует умножить аналитический сигнал  $z(t)$  на комплексную экспоненциальную функцию вида  $e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t$ . Такую функцию удобно рассматривать как комплексно-сопряжённый аналитический сигнал гармонического колебания  $\cos \omega_0 t$  единичной амплитуды с частотой  $\omega_0$ . По аналогии с напряжением  $u_{\text{оп}}(t)$  опорного генератора в схеме на рис. 1, которое используется для формирования аналоговых низкочас-

тотных квадратурных составляющих сигнала, назовём этот аналитический сигнал *комплексным опорным колебанием*  $z_{\text{он}}(t) = e^{j\omega_0 t}$ . Тогда комплексная огибающая будет определяться следующим выражением:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= z(t)z_{\text{он}}^*(t) = (s(t) + j\hat{s}(t))e^{-j\omega_0 t} = (s(t) + j\hat{s}(t))(\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) = \\ &= s(t)\cos \omega_0 t + \hat{s}(t)\sin \omega_0 t + j(\hat{s}(t)\cos \omega_0 t - s(t)\sin \omega_0 t), \end{aligned} \quad (15)$$

а низкочастотные квадратурные составляющие сигнала будут равны соответственно

$$U^C(t) = \text{Re}\dot{U}(t) = s(t)\cos \omega_0 t + \hat{s}(t)\sin \omega_0 t, \quad (16)$$

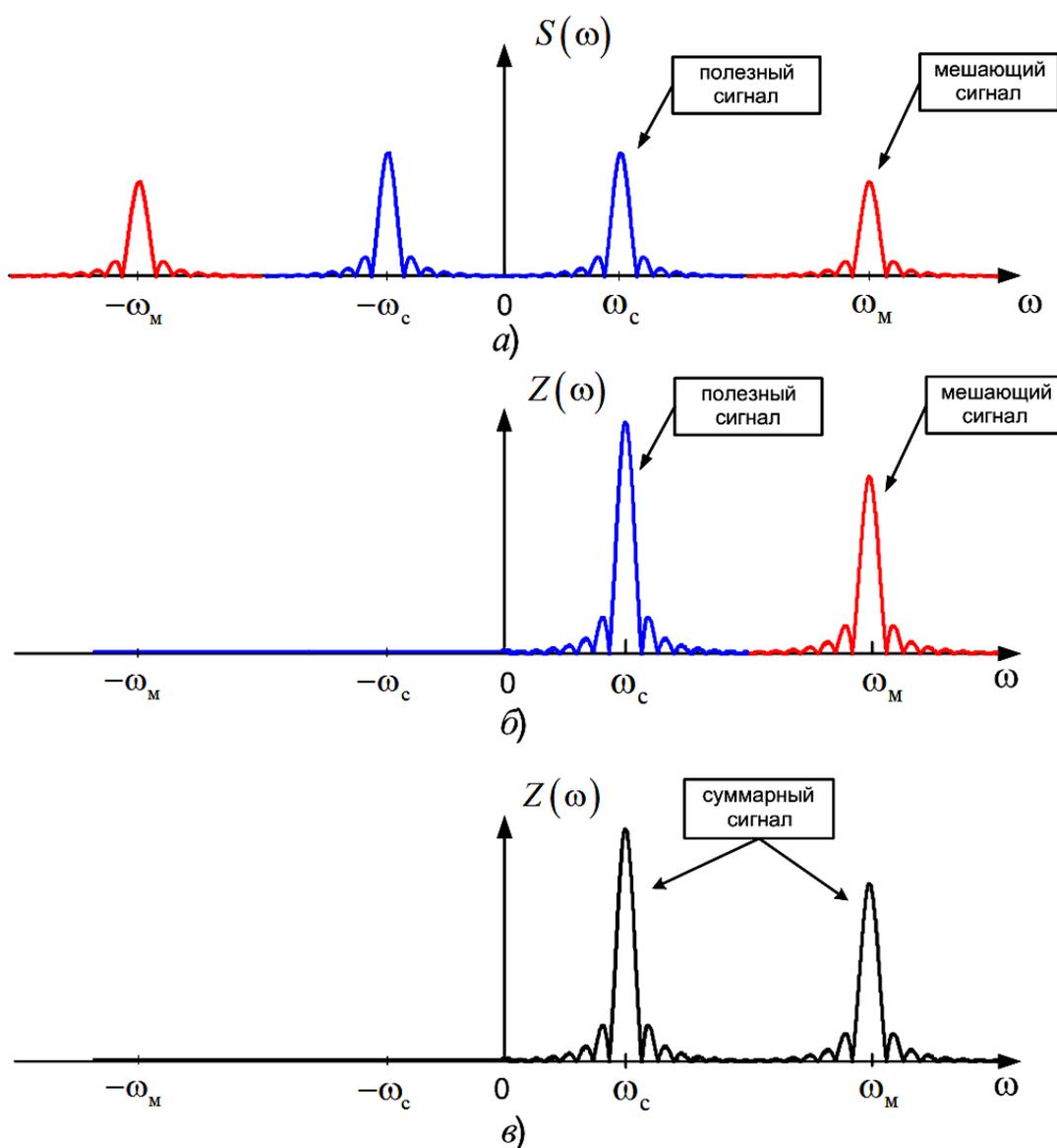
$$U^S(t) = \text{Im}\dot{U}(t) = \hat{s}(t)\cos \omega_0 t - s(t)\sin \omega_0 t. \quad (17)$$

### 1.2.2. Частотная селекция комплексного сигнала

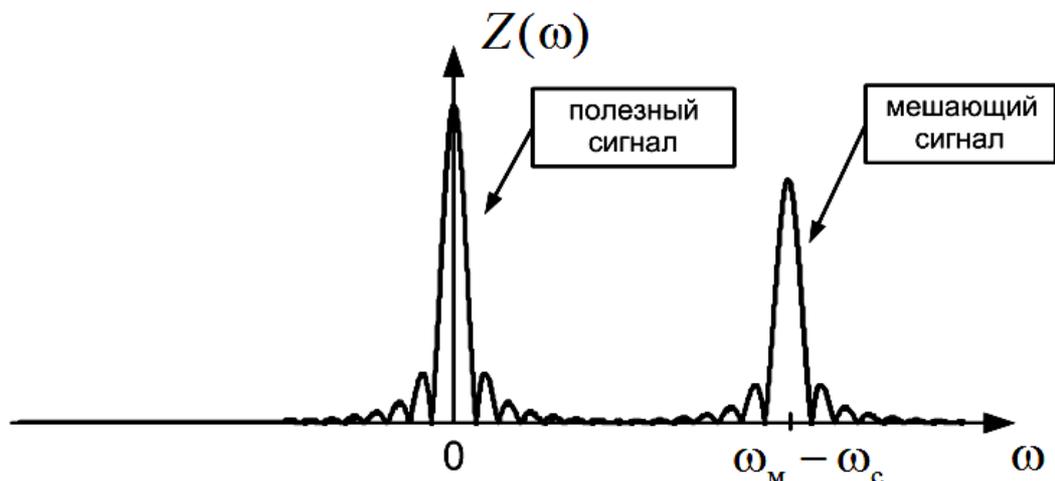
Комплексная огибающая содержит всю информацию о законе модуляции сигнала. Следовательно, используя комплексную огибающую, можно выполнить такие необходимые при обработке сигнала операции, как фильтрация – для выделения из смеси с помехами, и демодуляция – для извлечения полезной информации.

Рассмотрим, каким образом выполняется частотная фильтрация сигнала, обеспечивающая частотную селективность приёмника по соседнему каналу. Будем считать, что на входе приёмника действуют два сигнала с близкими частотами – полезный (на частоте  $\omega_c$ ) и мешающий (на частоте  $\omega_m$ ). Их амплитудные спектры показаны на рис. 6,а. Амплитудные спектры соответствующих аналитических сигналов изображены на рис. 6,б. На рис. 6,в показан амплитудный спектр аналитического сигнала для суммарного принимаемого колебания. Спектр этого сигнала целиком расположен в области положительных частот.

Теперь рассмотрим амплитудный спектр комплексной огибающей суммарного колебания. Поскольку приёмник должен обеспечивать неискажённый приём полезного сигнала на частоте  $\omega_c$ , то комплексная огибающая суммарного колебания формируется относительно этой частоты, т.е. в формулах (15) – (17) в качестве частоты опорного колебания  $\omega_0$  берётся частота полезного сигнала  $\omega_c$ . Поэтому спектр комплексной огибающей полезного сигнала будет располагаться на нулевой частоте, а спектр комплексной огибающей мешающего сигнала – на частоте  $\omega_m - \omega_c$  (рис. 7).

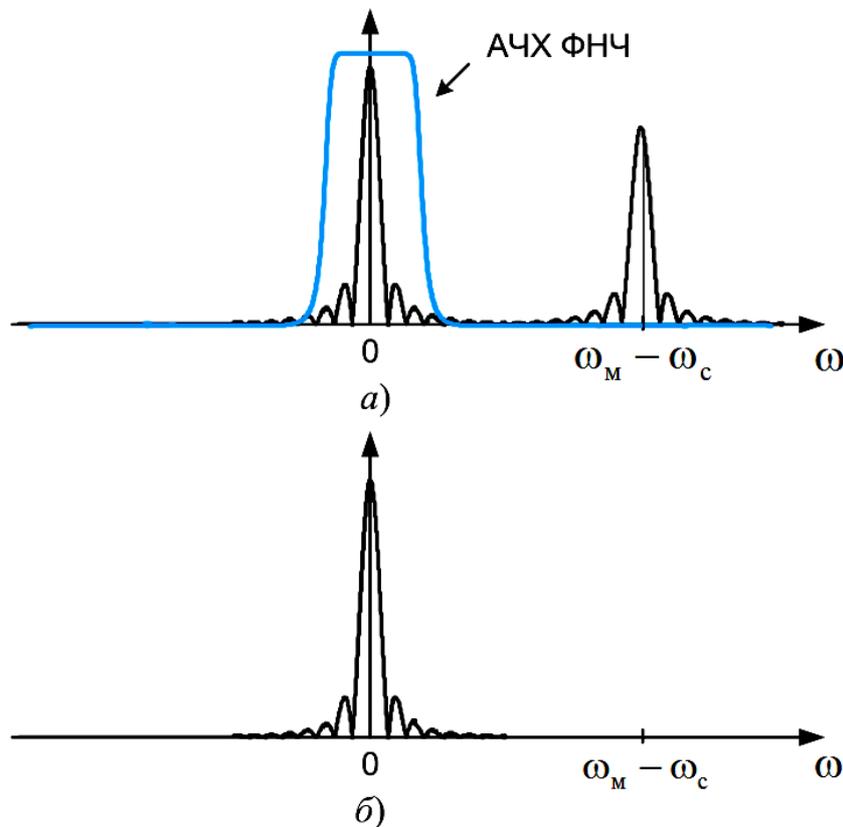


**Рис 6. Амплитудные спектры вещественных (а) и комплексных (б) сигналов при приёме смеси полезного сигнала и мешающего; амплитудный спектр комплексного суммарного сигнала (в)**



**Рис 7. Амплитудный спектр комплексной огибающей суммарного сигнала**

Следовательно, выделить комплексную огибающую полезного сигнала и подавить – мешающего можно с помощью фильтра низких частот, имеющего достаточно прямоугольную форму АЧХ с частотой среза, соответствующей граничной частоте спектра комплексной огибающей полезного сигнала (рис. 8,а). Спектр комплексной огибающей колебания на выходе такого ФНЧ показан на рис. 8,б. Видно, что составляющая спектра на частоте  $\omega_m - \omega_c$  практически отсутствует и, следовательно, таким способом может быть обеспечена требуемая избирательность приёмника по соседнему каналу.



**Рис 8. Амплитудные спектры комплексной огибающей суммарного колебания на входе (а) и выходе (б) фильтра**

Поскольку комплексная огибающая физически представляется двумя низкочастотными квадратурными составляющими, то при технической реализации данного способа обработки сигнала необходимо использовать два идентичных ФНЧ.

### ***1.2.3. Формирование сопряжённого сигнала с помощью цифрового фильтра Гильберта***

Поскольку идеальный преобразователь Гильберта физически реализовать невозможно, то для приближённого формирования сопря-

жённого сигнала используют физически реализуемые системы (как аналоговые, так и цифровые), которые имеют импульсную характеристику, соответствующую по виду  $h_{\Gamma}(t)$ , но сдвинутую вправо так, чтобы при  $t < 0$  она была равна 0. При этом, естественно, возникает некоторая погрешность формирования сопряжённого сигнала.

При цифровой обработке сигналов для приближённого формирования сопряжённого сигнала в качестве преобразователя Гильберта можно использовать как рекурсивные фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры), так и нерекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры). Рассмотрим нерекурсивный цифровой КИХ-фильтр, приближённо выполняющий преобразование Гильберта оцифрованного сигнала промежуточной частоты, – *фильтр Гильберта*.

Начнём с простейшего, но как далее будет видно, практически неприемлемого, способа определения коэффициентов такого фильтра на основе дискретизации его импульсной характеристики. Известно, что коэффициенты КИХ-фильтра совпадают с отсчётами его импульсной характеристики [1, гл. 4]. Поэтому для их определения следует:

- 1) усечь одинаковым образом слева и справа импульсную характеристику идеального преобразователя Гильберта  $h_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi t}$ , т.е. сделать её конечной;
- 2) усечённую импульсную характеристику сдвинуть вправо так, чтобы она полностью располагалась в области  $t \geq 0$  ;
- 3) взять отсчёты сдвинутой импульсной характеристики с частотой дискретизации сигнала.

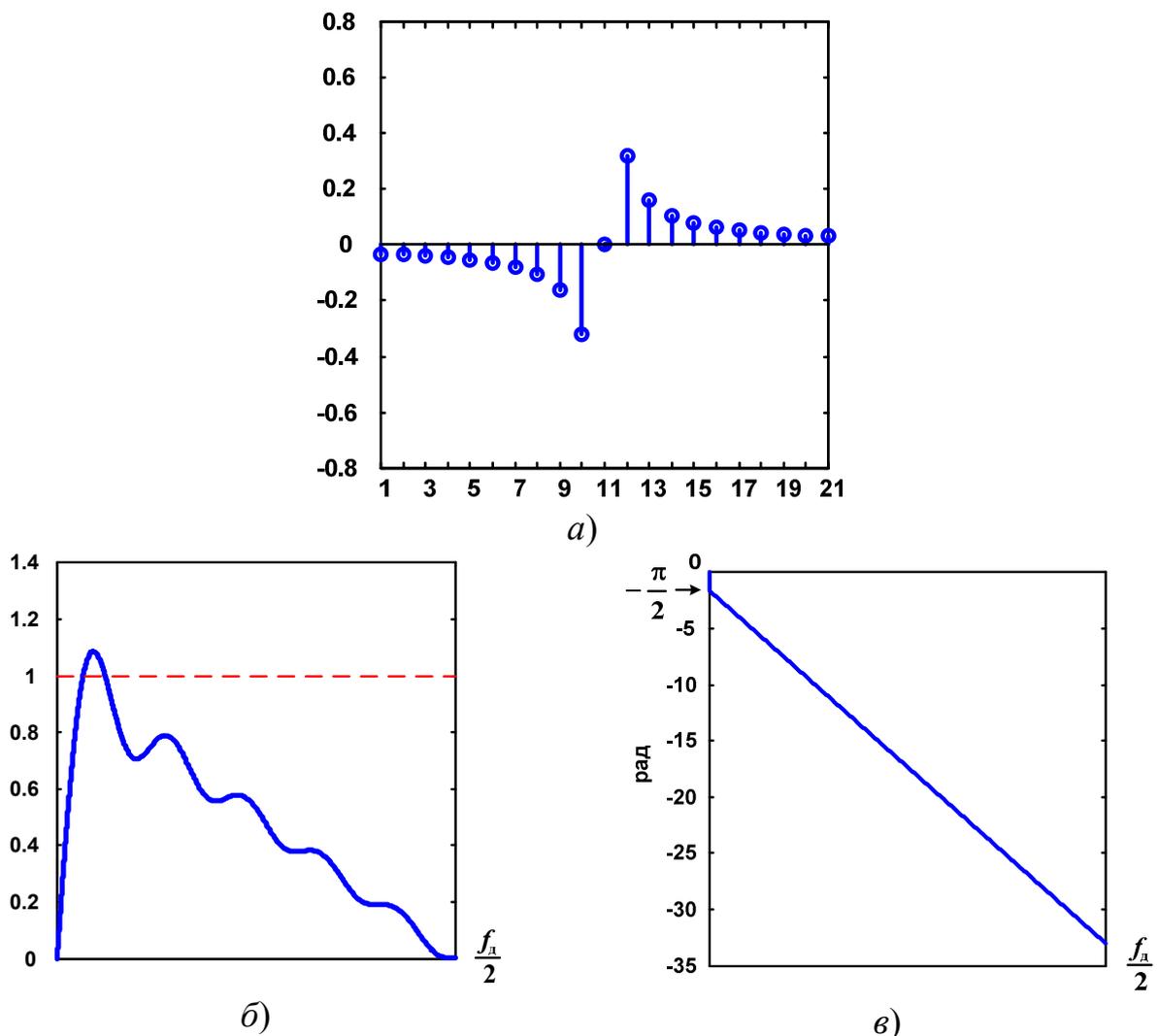
При этом величину сдвига  $t_0$  нужно задавать таким образом, чтобы после дискретизации получить импульсную характеристику КИХ-фильтра, антисимметричную относительно её середины. При этом центральный отсчёт с номером  $n_0$ , которому соответствует разрыв функции  $h_{\Gamma}(t)$ , задаётся равным 0. Таким образом, импульсная характеристика цифрового фильтра Гильберта определяется выражением

$$h_{\text{ЦФГ}}(n) = \begin{cases} 0, & n = n_0 \\ \frac{1}{\pi(n - n_0)}, & n \neq n_0 \end{cases} \quad (18)$$

$$n = 1, 2, \dots, 2n_0 - 1$$

Из курса «Цифровая обработка сигналов» известно [2], что любой цифровой КИХ-фильтр с антисимметричной импульсной характеристикой имеет линейную ФЧХ с начальным сдвигом  $\pm \frac{\pi}{2}$ , т.е. именно такую, какую должен иметь идеальный преобразователь Гильберта в сочетании с устройством задержки на  $n_0$  отсчётов<sup>\*)</sup>. Задержка, которая приводит к наклону ФЧХ, связана со сдвигом импульсной характеристики на время  $t_0$  и неизбежна для любой физически реализуемой системы. Это необходимо учитывать при дальнейшей обработке сигнала.

В качестве примера на рис. 9,а показана импульсная характеристика фильтра Гильберта при  $n_0 = 11$ , имеющая  $n_{\text{ЦФГ}} = 2n_0 - 1 = 21$  отсчёт. На рис. 9,б и рис. 9,в показаны его АЧХ и ФЧХ.



**Рис 9. Характеристики КИХ-фильтра с импульсной характеристикой (18): импульсная (а), АЧХ (б), ФЧХ (в)**

<sup>\*)</sup> Требуемый знак начального фазового сдвига всегда может быть обеспечен заданием знака отсчётов импульсной характеристики.

Видно, что ФЧХ действительно линейна с начальным фазовым сдвигом  $-\frac{\pi}{2}$ , однако АЧХ значительно неравномерна и близка по форме к треугольной. Можно показать, что при увеличении числа отсчётов импульсной характеристики, т.е. при увеличении порядка фильтра, увеличивается частота колебаний АЧХ, но её форма в среднем остаётся треугольной, и амплитуда колебаний не уменьшается. Поэтому для получения сопряжённого сигнала такой простейший вариант цифрового КИХ-фильтра Гильберта практически не используется из-за присущих ему значительных амплитудных искажений.

Доказано, что АЧХ фильтра Гильберта можно значительно улучшить, если внести в импульсную характеристику (18) следующие изменения:

- 1) отсчёты импульсной характеристики, расположенные через один относительно центрального, приравнять к 0;
- 2) значения остальных отсчётов увеличить в 2 раза.

Такая импульсная характеристика определяется следующим выражением:

$$h_{\text{ЦФГ}}(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n - n_0) \text{ чётное} \\ \frac{2}{\pi(n - n_0)}, & \text{если } (n - n_0) \text{ нечётное} \end{cases} \quad (19)$$

$$n = 1, 2, \dots, 2n_0 - 1$$

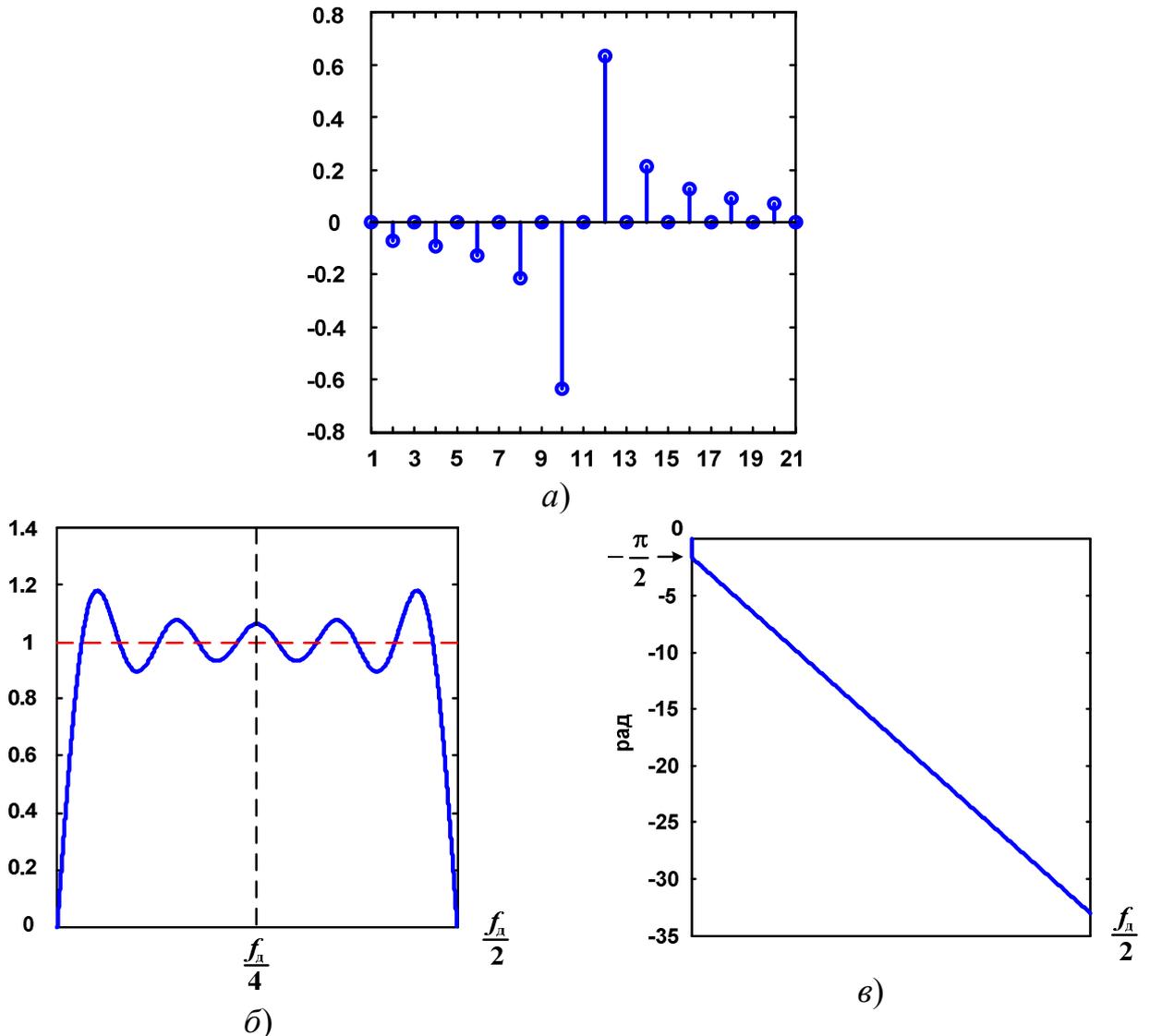
Его математический вывод приведён в [3, п. 2.27].

График импульсной характеристики (19) при том же количестве отсчётов  $n_{\text{ЦФГ}} = 21$ , что и ранее, показан на рис. 10,а; графики АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 10,б и рис. 10,в соответственно. Видно, что ФЧХ фильтра не изменилась, а форма АЧХ стала в среднем близкой к прямоугольной с коэффициентом передачи 1. При этом АЧХ симметрична относительно середины и имеет наименьшие колебания вблизи частоты  $\frac{f_d}{4}$ . На граничных частотах 0 и  $\frac{f_d}{2}$  значение АЧХ равно 0. Колебания АЧХ относительно среднего уровня 1 обусловлены конечным числом отсчётов импульсной характеристики.

Для уменьшения колебаний АЧХ производится её сглаживание путём коррекции величины ненулевых отсчётов импульсной характеристики [1, гл. 6], [3, п. 3.37]. Один из способов коррекции состоит в том,

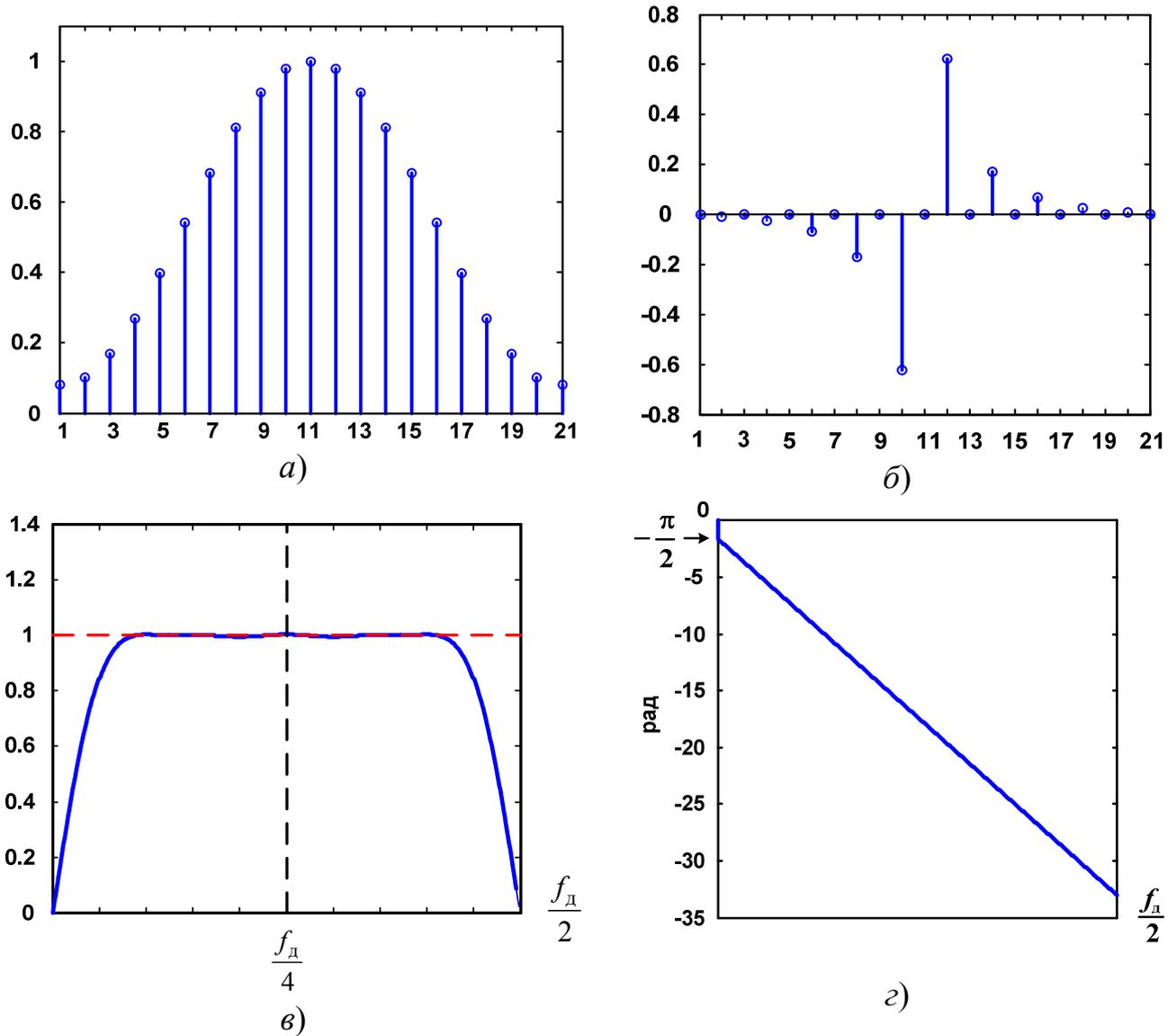
что отсчёты импульсной характеристики (19) умножаются на отсчёты весовой (оконной) функции, плавно спадающей к краям [4]. В качестве такой функции часто используется функция Хэмминга [1, гл. 5]

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(2\pi \frac{n-1}{N-1}\right), \quad n = \overline{1, n_{\text{ЦФГ}}}. \quad (20)$$



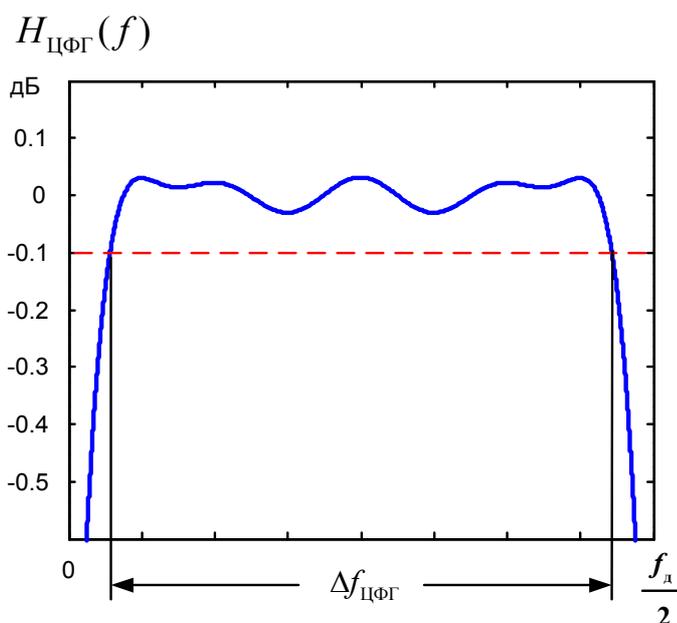
**Рис 10. Характеристики КИХ-фильтра Гильберта с импульсной характеристикой (19): импульсная (а), АЧХ (б), ФЧХ (в)**

На рис. 11,а показаны отсчёты функции Хэмминга. На рис. 11,б приведена импульсная характеристика, умноженная на оконную функцию Хэмминга, на рис. 11,в – АЧХ фильтра Гильберта с такой импульсной характеристикой, а на рис. 11,г – его ФЧХ. Видно, что ФЧХ фильтра не изменилась, а колебания на вершине АЧХ значительно уменьшились.

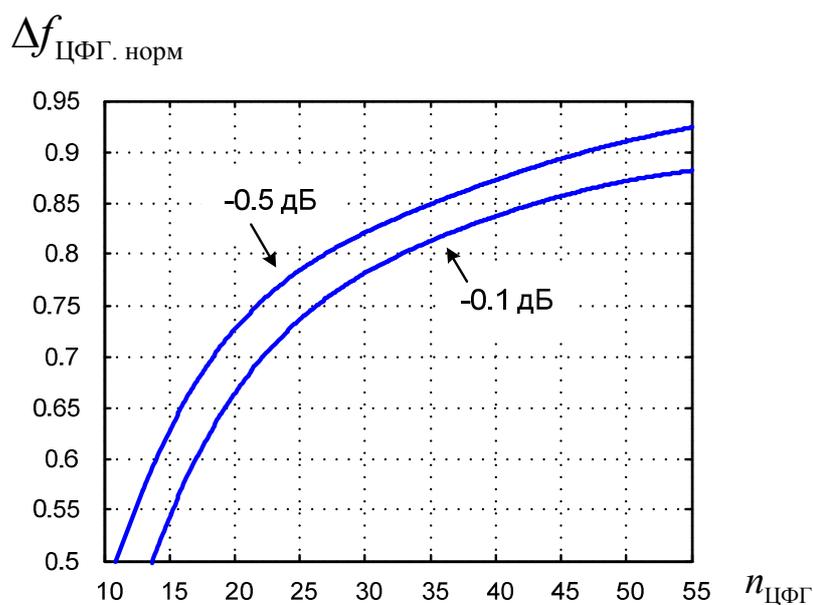


**Рис 11. Характеристики фильтра Гильберта с окном Хэмминга: оконная функция (а), импульсная характеристика (б), АЧХ (в), ФЧХ (г)**

На рис. 12 изображена центральная часть АЧХ, выраженной в децибелах, и отмечена её ширина  $\Delta f_{\text{ЦФГ}}$  по уровню  $-0,1$  дБ. В пределах этой области частот амплитудные искажения сопряжённого сигнала практически отсутствуют. Величина  $\Delta f_{\text{ЦФГ}}$  зависит от количества отсчётов импульсной характеристики фильтра Гильберта  $n_{\text{ЦФГ}}$ . На рис. 13 приведены графики зависимости ширины АЧХ  $\Delta f_{\text{ЦФГ}}$ , нормированной на  $\frac{f_d}{2}$ , от количества отсчётов импульсной характеристики для двух значений уровня:  $-0,1$  дБ и  $-0,5$  дБ.



**Рис 12. АЧХ фильтра Гильберта с окном Хэмминга**



**Рис 13. Зависимость нормированной ширины АЧХ фильтра Гильберта от количества отсчётов импульсной характеристики**

С учётом того, что АЧХ фильтра Гильберта наиболее равномерна в центральной части, т.е. вблизи частоты  $\frac{f_d}{4}$ , для получения сопряжённого сигнала с наименьшими амплитудными искажениями нужно, чтобы спектр сигнала располагался в окрестности этой частоты. Для

этого необходимо, чтобы частота сигнала  $f_0$  и частота дискретизации  $f_d$  были связаны следующим соотношением:

$$f_0 = \frac{f_d}{4} \text{ или } f_d = 4f_0.$$

Поскольку импульсная характеристика цифрового фильтра Гильберта (19) сдвинута так, что её центральный отсчёт имеет номер  $n_0$ , то сопряжённый сигнал формируется на выходе фильтра с задержкой на  $n_0$  отсчётов. Следовательно, для того чтобы обеспечить синхронность при обработке обеих составляющих цифрового аналитического сигнала (его действительной и мнимой частей), такую же задержку необходимо внести и в исходный сигнал. В результате будет сформирован задержанный аналитический сигнал

$$z(n - n_0) = s(n - n_0) + j\hat{s}(n - n_0).$$

Поскольку его задержка относительно исходного сигнала известна, то она может быть легко учтена при дальнейшей обработке. Поэтому для упрощения записи математических выражений для цифровых сигналов и алгоритмов работы цифровых демодуляторов далее эту задержку учитывать не будем.

В соответствии с (15) для получения цифровой комплексной огибающей аналитический сигнал умножается на комплексно-сопряжённое цифровое опорное колебание с угловой частотой  $\omega_0$

$$z_{\text{оп}}^*(n) = e^{-j\omega_0 t_n} = e^{-j\omega_0(n-1)\Delta t_d}, \quad (21)$$

где  $t_n = (n-1)\Delta t_d$  – время взятия  $n$ -го отсчёта сигнала,  $\Delta t_d = 1/f_d$  – интервал дискретизации. В результате получаются отсчёты комплексной огибающей сигнала при частоте дискретизации  $f_d$ :

$$\dot{U}(n) = z(n) \cdot z_{\text{оп}}^*(n) = z(n) \cdot e^{-j\omega_0(n-1)\Delta t_d}. \quad (22)$$

Соответственно, отсчёты цифровых низкочастотных квадратурных составляющих определяются следующими выражениями<sup>\*)</sup>:

$$U^C(n) = s(n) \cos(\omega_0(n-1)\Delta t_d) + \hat{s}(n) \sin(\omega_0(n-1)\Delta t_d), \quad (23)$$

<sup>\*)</sup> По аналогии с супергетеродинным приёмником устройство (или алгоритм) формирования цифрового опорного колебания иногда называют цифровым гетеродином, а вычисление комплексной огибающей в соответствии с (22) – цифровым преобразованием частоты.

$$U^S(n) = -s(n) \sin(\omega_0(n-1)\Delta t_d) + \hat{s}(n) \cos(\omega_0(n-1)\Delta t_d). \quad (24)$$

Если частота сигнала и частота дискретизации заданы так, что  $f_0 = \frac{f_d}{4}$ , то выражения для  $U^C(n)$  и  $U^S(n)$  значительно упрощаются.

Действительно, в этом случае  $\omega_0(n-1)\Delta t_d = 2\pi \frac{f_d}{4}(n-1) \frac{1}{f_d} = \frac{\pi}{2}(n-1)$  и, следовательно, функции косинуса и синуса принимают только три значения 1, -1 и 0:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\cos(\omega_0(n-1)\Delta t_d)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	...
$\sin(\omega_0(n-1)\Delta t_d)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	...

Очевидно, что умножение отсчётов сигнала  $s(n)$  и сопряжённого сигнала  $\hat{s}(n)$  на эти значения не требует выполнения каких-либо арифметических операций, и формирование отсчётов низкочастотных квадратурных составляющих сигнала производится по следующей схеме:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$U^C(n)$	$s(1)$	$\hat{s}(2)$	$-s(3)$	$-\hat{s}(4)$	$s(5)$	$\hat{s}(6)$	$-s(7)$	$-\hat{s}(8)$	...
$U^S(n)$	$\hat{s}(1)$	$-s(2)$	$-\hat{s}(3)$	$s(4)$	$\hat{s}(5)$	$-s(6)$	$-\hat{s}(7)$	$s(8)$	...

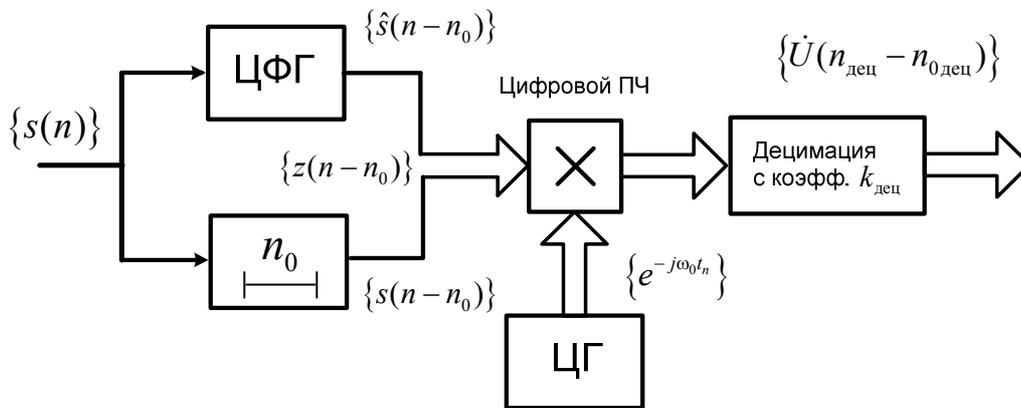
Таким образом, задавать частоту сигнала и частоту дискретизации в соответствии с соотношением  $f_0 = \frac{f_d}{4}$  целесообразно не только для уменьшения амплитудных искажений сопряжённого сигнала, но и для упрощения вычисления комплексной огибающей.

Поскольку ширина спектра комплексной огибающей меньше, чем ширина спектра аналитического сигнала, то после вычисления квадратурных составляющих в соответствии с (23), (24) можно понизить частоту их дискретизации. Для этого производится децимация<sup>\*\*)</sup> отсчётов квадратурных составляющих с некоторым коэффициентом  $k_{\text{дец}}$ . После этого дальнейшая обработка комплексного цифрового сигнала выпол-

<sup>\*\*)</sup> Децимацией (прореживанием) цифрового сигнала с коэффициентом децимации  $k_{\text{дец}}$  называется формирование из отсчётов сигнала с номерами 1,  $k_{\text{дец}} + 1$ ,  $2k_{\text{дец}} + 1$ ,  $3k_{\text{дец}} + 1$ , ... нового цифрового сигнала.

няется при пониженной в  $k_{\text{дец}}$  раз частоте дискретизации, что упрощает её техническую реализацию.

Укрупнённая структурная схема алгоритма цифрового формирования комплексной огибающей приведена на рис. 14.



**Рис 14. Структурная схема алгоритма цифрового формирования комплексной огибающей сигнала**

Здесь широкими стрелками показана передача комплексных отсчётов, ЦФГ – цифровой фильтр Гильберта, ЦГ – цифровой гетеродин,  $k_{\text{дец}}$  – коэффициент децимации,  $n_{\text{дец}}$  – номер отсчёта после децимации.

## 2. Цифровые демодуляторы сигналов

Рассмотрим алгоритмы цифровых демодуляторов, основанные на обработке комплексной огибающей  $\dot{U}(n)$ , сформированной относительно опорного колебания с частотой  $f_0$  и представленной цифровыми низкочастотными квадратурными составляющими сигнала  $U^c(n)$  и  $U^s(n)$ . Частота дискретизации квадратурных составляющих задаётся в соответствии с теоремой Котельникова и должна быть не менее ширины спектра сигнала. Такую же частоту дискретизации имеет и выходной цифровой сигнал демодулятора.

### 2.1. Цифровой амплитудный демодулятор

Алгоритм работы цифрового амплитудного демодулятора (ЦАД) основан том, что амплитуда аналогового сигнала равна модулю его комплексной огибающей:

$$U(t) = |\dot{U}(t)| = \sqrt{U^c(t)^2 + U^s(t)^2}.$$

Аналогичное соотношение справедливо и для цифровых сигналов:

$$U(n) = |\dot{U}(n)| = \sqrt{U^c(n)^2 + U^s(n)^2}, \quad (25)$$

где  $U(n)$  – цифровая огибающая сигнала.

Для упрощения реализации ЦАД цифровую огибающую сигнала можно вычислять по следующим приближённым формулам:

$$U(n) \approx \max(|U^c(n)|, |U^s(n)|) + \frac{1}{2} \min(|U^c(n)|, |U^s(n)|), \quad (26)$$

$$U(n) \approx \frac{123}{128} \max(|U^c(n)|, |U^s(n)|) + \frac{13}{32} \min(|U^c(n)|, |U^s(n)|). \quad (27)$$

В отличие от точной формулы (25) рассчитанное по ним значение огибающей зависит от фазы сигнала. При этом первая формула [5, ф-ла (5.17)] (называемая иногда в литературе формулой Робертсона) для всех значений фазы, кроме кратных  $\frac{\pi}{2}$ , даёт завышенное значение огибающей и её максимальная погрешность составляет 12%; вторая формула даёт в среднем истинное значение огибающей, её максимальная погрешность 4%. Использование этих формул позволяет при реализации алгоритма исключить операции возведения в квадрат и извлечения корня, требующие значительных вычислительных затрат.

## 2.2. Цифровой фазовый демодулятор

Величина фазового сдвига аналогового сигнала относительно опорного колебания выражается через комплексную огибающую и её составляющие следующим образом:

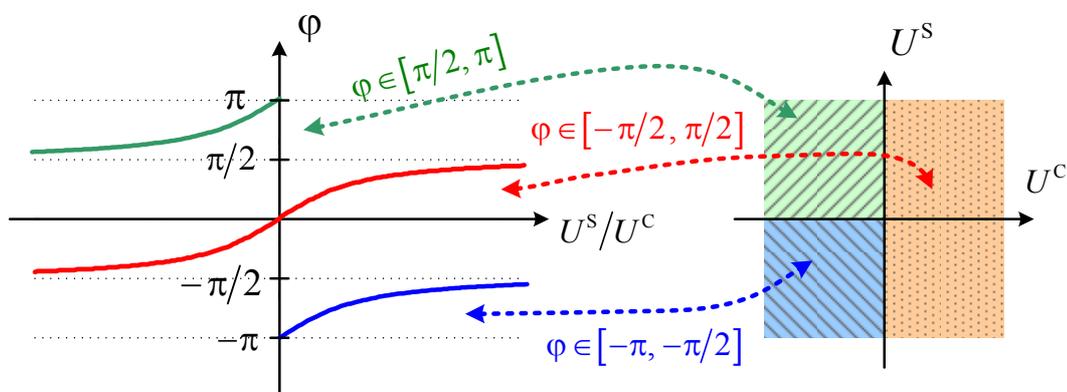
$$\varphi(t) = \arg \dot{U}(t) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \dot{U}(t)}{\operatorname{Re} \dot{U}(t)} = \operatorname{arctg} \frac{U^s(t)}{U^c(t)}. \quad (28)$$

Фаза цифрового сигнала определяется аналогично:

$$\varphi(n) = \arg \dot{U}(n) = \operatorname{arctg} \frac{U^s(n)}{U^c(n)}. \quad (29)$$

При реализации алгоритма вычисления фазы (29) нужно учитывать то обстоятельство, что функция  $\operatorname{arctg}(\cdot)$  неоднозначна: её главная

ветвь определяет фазу только в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , т.е. в правой полуплоскости, где  $U^c(n) > 0$  (рис. 15).

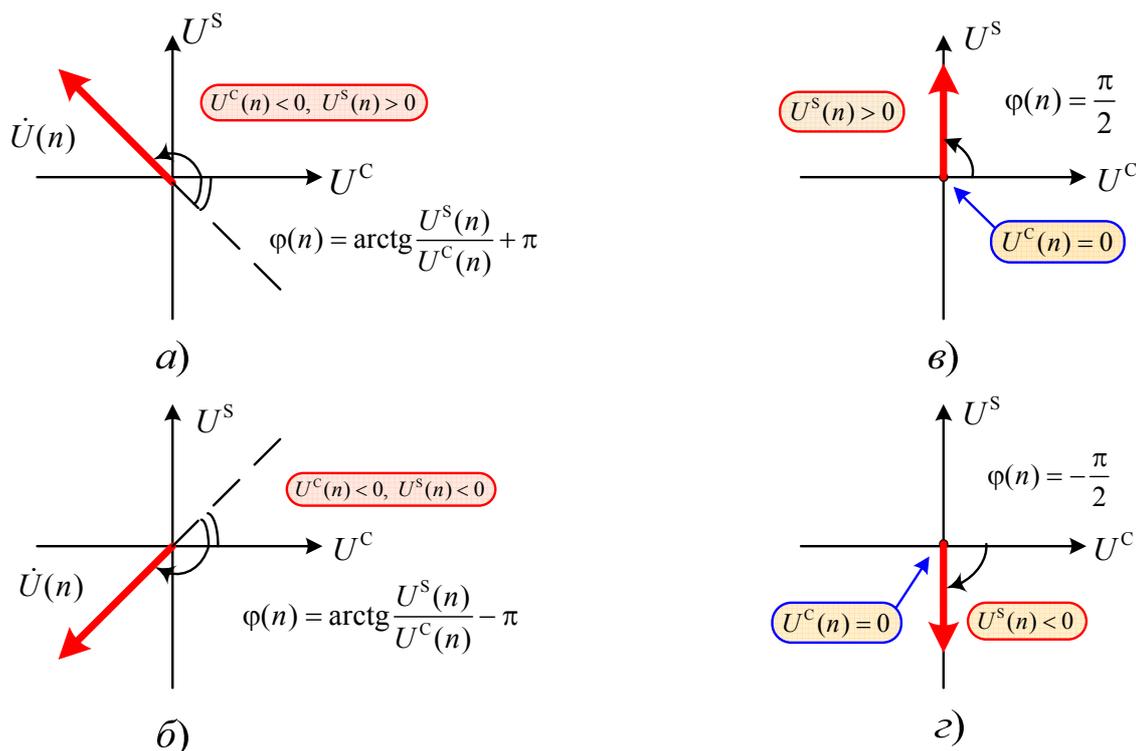


**Рис. 15. Функция  $\text{arctg}(\cdot)$**

Для получения алгоритма цифрового фазового демодулятора (ЦФД), работающего в полном интервале значений фазы  $[-\pi, \pi]$ , нужно дополнительно использовать участки соседних ветвей графика. Если вектор комплексной огибающей сигнала лежит в левой полуплоскости (т.е.  $U^c(n) < 0$ ), то при определении фазы к главному значению функции  $\text{arctg} \frac{U^s(n)}{U^c(n)}$  нужно прибавить  $\pm\pi$ . Знак этого дополнительного слагаемого следует выбирать так, чтобы значение фазы было либо в интервале  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  (рис. 16,а), либо  $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$  (рис. 16,б).

При  $U^c(n) = 0$  непосредственное вычисление  $\text{arctg} \frac{U^s(n)}{U^c(n)}$  невозможно. В этом случае абсолютная величина фазы сигнала равна  $\frac{\pi}{2}$ , а знак определяется знаком квадратурной составляющей  $U^s(n)$  (рис. 16,в,г).

И, наконец, если обе составляющие сигнала равны нулю, то значение фазы не определено, т.к. при нулевой амплитуде сигнала понятие фазы не имеет смысла. Поэтому фазе может быть приписано любое значение, например, значение на предыдущем такте:  $\varphi(n) = \varphi(n-1)$ .



**Рис. 16. Определение фазы через главное значение функции  $\text{arctg}(\cdot)$**

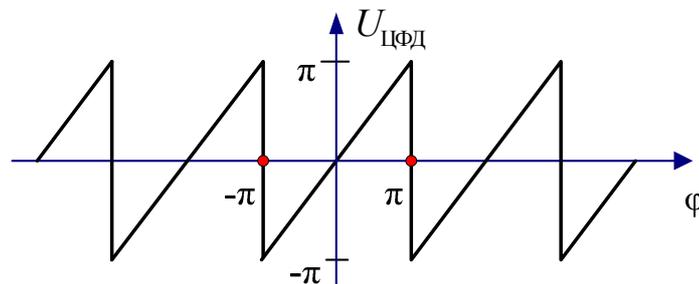
Объединяя все рассмотренные случаи, получаем следующий алгоритм определения отсчёта фазы сигнала:

$$\varphi(n) = \begin{cases} \text{arctg} \frac{U^S(n)}{U^C(n)}, & \text{если } U^C(n) > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } U^C(n) = 0 \text{ и } U^S(n) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } U^C(n) = 0 \text{ и } U^S(n) < 0 \\ \text{arctg} \frac{U^S(n)}{U^C(n)} + \pi, & \text{если } U^C(n) < 0 \text{ и } U^S(n) > 0 \\ \text{arctg} \frac{U^S(n)}{U^C(n)} - \pi, & \text{если } U^C(n) < 0 \text{ и } U^S(n) < 0 \\ \varphi(n-1), & \text{если } U^C(n) = 0 \text{ и } U^S(n) = 0 \end{cases}$$

**Замечание.** В соответствие с данным алгоритмом определяется фаза сигнала, приведённая к интервалу  $[-\pi, \pi]$ . При выходе за пределы  $\pm\pi$  фаза скачком изменяется на  $2\pi$ . При необходимости, с помощью дополнительной логической обработки последовательных отсчётов может быть определена фаза, которая не

имеет таких скачков и может принимать любые значения, в том числе за пределами интервала  $[-\pi, \pi]$ , – т.е. *непрерывная фаза*.

Вычисленное таким образом значение фазы определяет отсчёт выходного сигнала ЦФД, который по аналогии с выходным напряжением фазового демодулятора аналогового сигнала обозначим как  $U_{\text{ЦФД}}(n)$ . В случае немодулированного гармонического сигнала с частотой  $f_0$  цифровой сигнал  $U_{\text{ЦФД}}(n)$  не зависит от номера отсчёта и определяется только величиной фазового сдвига  $\varphi$  сигнала относительно опорного колебания. Зависимость  $U_{\text{ЦФД}}$  от  $\varphi$  называется детекторной характеристикой ЦФД. Она имеет крутизну 1 и периодична с периодом  $2\pi$  (рис. 17).



**Рис. 17. Характеристика цифрового фазового демодулятора**

### 2.3. Цифровой частотный демодулятор

Алгоритмы работы цифрового частотного демодулятора (ЦЧД) основаны на том, что мгновенная угловая частота аналогового сигнала определяется выражением

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega(t), \quad (30)$$

где  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – угловая частота несущей,  $\varphi(t)$  – фаза сигнала,  $\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$  – отклонение мгновенной угловой частоты от частоты  $\omega_0$ , обусловленное модуляцией сигнала. Далее будем считать, что частота опорного колебания, используемого для формирования комплексной огибающей сигнала, совпадает с частотой несущей  $\omega_0$ .

Простейший алгоритм работы ЦЧД получается при замене в (30) производной фазы по времени отношением конечных разностей:

$$\Delta\omega(t) \approx \frac{\varphi(t) - \varphi(t - \Delta t_d)}{\Delta t_d} = f_d (\varphi(t) - \varphi(t - \Delta t_d)).$$

Тогда  $n$ -й отсчёт отклонения мгновенной частоты  $\Delta f(n) = \frac{\Delta\omega(n)}{2\pi}$  будет равен

$$\Delta f(n) = \frac{f_d}{2\pi}(\varphi(n) - \varphi(n-1)), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (31)$$

где  $\varphi(n)$  – фаза сигнала в момент взятия отсчёта  $t_n = (n-1)\Delta t_d$ . Это выражение и определяет алгоритм работы ЦЧД начиная со 2-го отсчёта; 1-й отсчёт остаётся неопределённым. Важно отметить, что при вычислении разности  $\varphi(n) - \varphi(n-1)$  следует брать отсчётные значения *непрерывной фазы сигнала*, которая не имеет скачков на  $\pm 2\pi$  (см. замечание в п. 2.2).

По аналогии с выходным напряжением частотного демодулятора аналогового сигнала обозначим полученный в соответствии с (31) отсчёт цифрового сигнала на выходе ЦЧД как  $U_{\text{ЦЧД}}(n)$ :

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{f_d}{2\pi}(\varphi(n) - \varphi(n-1)), \quad n = 2, 3, \dots \quad (32)$$

Найдём детекторную характеристику такого ЦЧД, т.е. зависимость отсчёта  $U_{\text{ЦЧД}}(n)$  от отклонения частоты входного гармонического колебания от частоты опорного колебания  $f_0$ . Пусть отклонение частоты сигнала равно некоторой величине  $\Delta f'$ . Тогда отсчётные значения фазы в моменты времени  $t_n = (n-1)\Delta t_d$  и  $t_{n-1} = (n-2)\Delta t_d$  будут равны соответственно

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= 2\pi \cdot \Delta f' \cdot (n-1)\Delta t_d, \\ \varphi(n-1) &= 2\pi \cdot \Delta f' \cdot (n-2)\Delta t_d. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (31), получим:

$$\begin{aligned} U_{\text{ЦЧД}}(n) &= \frac{f_d}{2\pi} \left[ 2\pi \cdot \Delta f' \cdot (n-1)\Delta t_d - 2\pi \cdot \Delta f' \cdot (n-2)\Delta t_d \right] = \\ &= \frac{f_d}{2\pi} 2\pi \cdot \Delta f' \cdot \Delta t_d = \Delta f'. \end{aligned}$$

Видно, что в данном случае все отсчёты цифрового сигнала на выходе ЦЧД имеют постоянную величину, которая совпадает с заданным отклонением частоты входного сигнала. Следовательно, детекторная характеристика ЦЧД линейна. Её крутизна не зависит от амплитуды сигнала и равна 1.

Недостатком данного алгоритма ЦЧД является его сложность: для получения одного отсчёта выходного цифрового сигнала необходимо дважды определять непрерывную фазу сигнала на входе, что требует выполнения нелинейного преобразования в соответствии с функцией  $\arctg(\cdot)$  и логической обработки. Кроме того, при больших отклонениях частоты (близких к  $f_d/2$ ) могут возникать ошибки в определении непрерывной фазы, что приводит к резкому искажению выходного сигнала.

Упростить алгоритм работы ЦЧД можно, исключив из него операцию определения непрерывной фазы. Для того чтобы показать такую возможность, рассмотрим произведение  $n$ -го отсчёта комплексного цифрового сигнала  $\dot{U}(n) = U(n)e^{j\varphi(n)}$  на комплексно-сопряжённый предыдущий отсчёт  $\dot{U}(n-1)^* = U(n-1)e^{-j\varphi(n-1)}$ :

$$\dot{U}(n)\dot{U}(n-1)^* = U(n)e^{j\varphi(n)} \cdot U(n-1)e^{-j\varphi(n-1)} = U(n)U(n-1)e^{j(\varphi(n)-\varphi(n-1))}.$$

Видно, что изменение фазы сигнала за один такт  $\varphi(n) - \varphi(n-1)$  равно аргументу произведения  $\dot{U}(n)\dot{U}(n-1)^*$ :

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) = \arg\{\dot{U}(n)\dot{U}(n-1)^*\}.$$

Подставляя это выражение в (32), получим следующий алгоритм работы ЦЧД:

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{f_d}{2\pi} \arg\{\dot{U}(n)\dot{U}(n-1)^*\} = \frac{f_d}{2\pi} \arctg \frac{\text{Im}\{\dot{U}(n)\dot{U}(n-1)^*\}}{\text{Re}\{\dot{U}(n)\dot{U}(n-1)^*\}}. \quad (33)$$

Детекторная характеристика ЦЧД, работающего в соответствии с данным алгоритмом, также линейна.

Ещё более простой алгоритм работы ЦЧД, не требующий вычисления значения арктангенса, можно получить, используя аналитическое выражение, связывающее отклонение мгновенной угловой частоты аналогового сигнала  $\Delta\omega(t)$  с его низкочастотными квадратурными составляющими.

Получим это выражение. Для этого в соответствии с (28) выразим фазу сигнала через его низкочастотные квадратурные составляющие и найдём производную фазы:

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \operatorname{arctg} \frac{U^S(t)}{U^C(t)} \right). \quad (34)$$

Обозначим отношение  $\frac{U^S(t)}{U^C(t)}$  как  $y(t)$ . Тогда по теореме о производной сложной функции

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} y(t) = \frac{d}{dy} \operatorname{arctg} y(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{1+y^2(t)} \cdot \frac{dy(t)}{dt}. \quad (35)$$

Подставляя в это выражение переменную  $y(t) = \frac{U^S(t)}{U^C(t)}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \frac{1}{1 + \left( \frac{U^S(t)}{U^C(t)} \right)^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{U^S(t)}{U^C(t)} \right) = \frac{1}{1 + \left( \frac{U^S(t)}{U^C(t)} \right)^2} \cdot \frac{U^{S'}(t)U^C(t) - U^{C'}(t)U^S(t)}{U^C(t)^2} = \\ &= \frac{U^{S'}(t)U^C(t) - U^{C'}(t)U^S(t)}{U^C(t)^2 + U^S(t)^2}, \end{aligned}$$

где  $U^{S'}(t) = \frac{dU^S(t)}{dt}$  – производная синусной составляющей сигнала,

$U^{C'}(t) = \frac{dU^C(t)}{dt}$  – производная косинусной составляющей.

Таким образом,

$$\Delta\omega(t) = \frac{U^{S'}(t)U^C(t) - U^{C'}(t)U^S(t)}{U^C(t)^2 + U^S(t)^2}. \quad (36)$$

Для того чтобы на основе этого выражения получить алгоритм работы ЦЧД, заменим аналоговые низкочастотные квадратурные составляющие сигнала цифровыми квадратурными составляющими, а их производные – отношениями конечных разностей (операция замены обозначена стрелкой):

$$\begin{aligned} U^C(t) &\Rightarrow U^C(n); & U^S(t) &\Rightarrow U^S(n) \\ U^{C'}(t) &\approx \frac{U^C(t) - U^C(t - \Delta t_d)}{\Delta t_d} \Rightarrow f_d (U^C(n) - U^C(n-1)) \\ U^{S'}(t) &\approx \frac{U^S(t) - U^S(t - \Delta t_d)}{\Delta t_d} \Rightarrow f_d (U^S(n) - U^S(n-1)). \end{aligned}$$

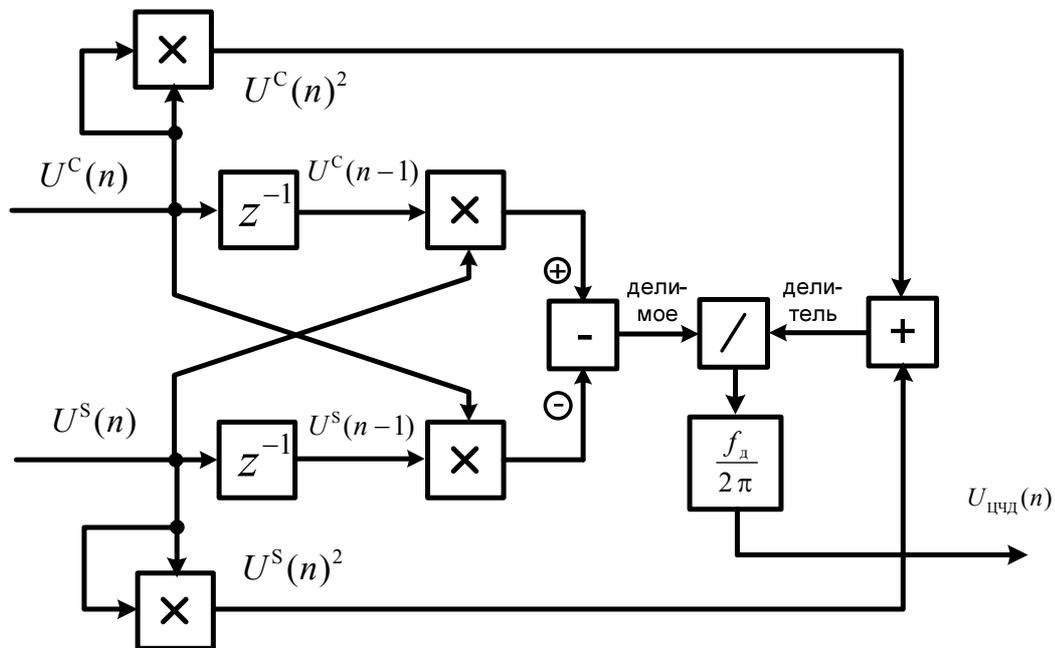
Тогда отсчёт сигнала на выходе ЦЧД будет определяться следующим выражением:

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{f_d (U^S(n) - U^S(n-1))U^C(n) - f_d (U^C(n) - U^C(n-1))U^S(n)}{U^C(n)^2 + U^S(n)^2}.$$

Раскрывая скобки и выполняя сокращение, окончательно получим:

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{f_d}{2\pi} \cdot \frac{U^C(n-1)U^S(n) - U^S(n-1)U^C(n)}{U^C(n)^2 + U^S(n)^2}. \quad (37)$$

Структурная схема ЦЧД, реализующего данный алгоритм, показана на рис. 18. Здесь  $z^{-1}$  означает задержку на 1 отсчёт.



**Рис. 18. Структурная схема цифрового частотного демодулятора**

Найдём детекторную характеристику такого ЦЧД. Пусть, как и ранее, отклонение частоты гармонического сигнала от частоты опорного колебания равно  $\Delta f'$  и амплитуда сигнала  $U$  постоянна. Тогда

$$\begin{aligned} U^C(n) &= U \cos \varphi(n), & U^S(n) &= U \sin \varphi(n), \\ U^C(n-1) &= U \cos \varphi(n-1) = U \cos(\varphi(n) - \Delta\varphi), \\ U^S(n-1) &= U \sin \varphi(n-1) = U \sin(\varphi(n) - \Delta\varphi), \end{aligned}$$

где  $\Delta\varphi = \varphi(n) - \varphi(n-1) = 2\pi \cdot \Delta f' \cdot \Delta t_d$  – изменение фазы сигнала за один такт. Подставляя эти выражения в формулу (37), определяющую отсчёт цифрового сигнала на выходе ЦЧД, получим:

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{f_d}{2\pi} \frac{U \cos(\varphi(n) - \Delta\varphi) \cdot U \sin \varphi(n) - U \sin(\varphi(n) - \Delta\varphi) \cdot U \cos \varphi(n)}{U^2 \cos^2 \varphi(n) + U^2 \sin^2 \varphi(n)}.$$

Поскольку  $U^2 \cos^2 \varphi(n) + U^2 \sin^2 \varphi(n) = U^2$ , то  $U^2$  в числителе и знаменателе этого выражения сокращается и

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{f_d}{2\pi} \left[ \cos(\varphi(n) - \Delta\varphi) \sin \varphi(n) - \sin(\varphi(n) - \Delta\varphi) \cos \varphi(n) \right].$$

Далее, используя тригонометрическую формулу  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ , запишем это выражение в следующем виде:

$$U_{\text{ЦЧД}}(n) = \frac{f_d}{2\pi} \sin \Delta\varphi = \frac{f_d}{2\pi} \sin(2\pi \cdot \Delta f' \cdot \Delta t_d) = \frac{f_d}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{\Delta f'}{f_d}\right).$$

Видно, что в данном случае сигнал на выходе ЦЧД не зависит от номера отсчёта и от амплитуды входного сигнала. Следовательно, детекторная характеристика ЦЧД не зависит от амплитуды сигнала и описывается синусоидальной функцией:

$$U_{\text{ЦЧД}} = \frac{f_d}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{\Delta f'}{f_d}\right). \quad (38)$$

Её график показан на рис. 19. Важно отметить, что в отличие от двух рассмотренных ранее алгоритмов, в данном случае детекторная характеристика нелинейна.

Основными параметрами характеристики частотного демодулятора являются:

- переходная частота – такое значение частоты сигнала, при котором сигнал на выходе ЦЧД равен нулю;
- крутизна – значение производной детекторной характеристики на переходной частоте;
- апертюра – протяжённость рабочего участка характеристики, которая приближённо определяется как расстояние между её «горбами».

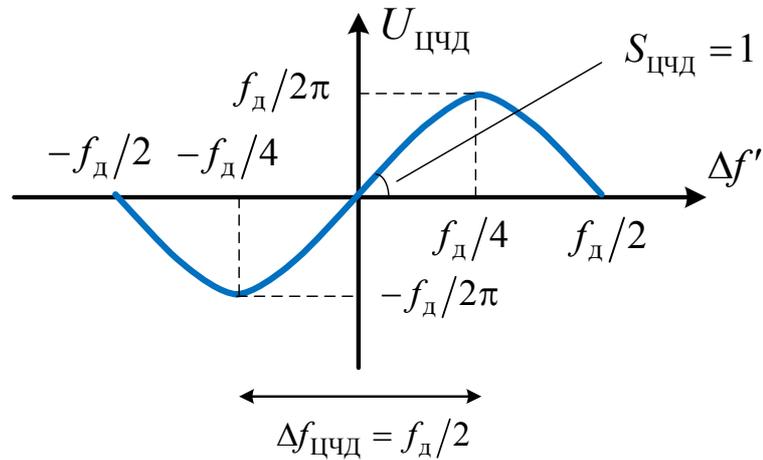
Из (38) видно, что  $\Delta f' = 0$  при  $U_{\text{ЦЧД}} = 0$ , следовательно, переходная частота ЦЧД равна частоте опорного колебания  $f_0$ .

Получим выражение для крутизны детекторной характеристики:

$$\begin{aligned} S_{\text{ЦЧД}} &= \left. \frac{dU_{\text{ЦЧД}}}{d(\Delta f')} \right|_{\Delta f'=0} = \left. \frac{d}{d(\Delta f')} \left( \frac{f_d}{2\pi} \sin \left( 2\pi \frac{\Delta f'}{f_d} \right) \right) \right|_{\Delta f'=0} = \\ &= \frac{f_d}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{f_d} \cdot \cos \left( 2\pi \frac{\Delta f'}{f_d} \right) \Big|_{\Delta f'=0} = 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Видно, что крутизна характеристики ЦЧД не зависит от частоты дискретизации и равна 1.

Из выражения (38) для детекторной характеристики и из её графика на рис. 19 следует, что апертюра характеристики равна  $\Delta f_{\text{ЦЧД}} = \frac{f_d}{2}$  и, следовательно, прямо пропорциональна частоте дискретизации. Поэтому при повышении частоты дискретизации протяжённость линейного участка характеристики ЦЧД увеличивается, а её крутизна остаётся неизменной.



**Рис. 19. Детекторная характеристика ЦЧД**

*Замечание.* Для линейризации рабочего участка детекторной характеристики иногда используют дополнительное нелинейное преобразование выходного цифрового сигнала ЦЧД в соответствии с функцией  $\arcsin(\cdot)$ , обратной синусоидальной:

$$U_{\text{ЦЧД лин}}(n) = \frac{f_d}{2\pi} \arcsin \left( 2\pi \frac{U_{\text{ЦЧД}}(n)}{f_d} \right).$$

## Литература

1. **Сергиенко А.Б.** Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
2. **Васильев В.П.** Основы теории и расчёта цифровых фильтров: учеб. пособие для вузов / В.П. Васильев, Э.Л. Муро, С.М. Смольский; под ред. С.М. Смольского. – М.: Издательский центр «Академия», 2007.
3. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
4. **Преобразование Гильберта. Аналитический сигнал** [Электронный ресурс] – Режим доступа:  
<http://ru.dsplib.org/content/hilbert/hilbert.html>
5. **Побережский Е.С.** Цифровые радиоприёмные устройства. – М.: Радио и связь, 1987.

**Комплексная частотная характеристика идеального преобразователя Гильберта**

Комплексная частотная характеристика идеального преобразователя Гильберта равна преобразованию Фурье его импульсной характеристики  $h_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi t}$ :

$$\dot{H}_{\Gamma}(j\omega) = \mathcal{F}\{h_{\Gamma}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{П.1})$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Используя формулу Эйлера, представим (П.1) в виде суммы двух интегралов:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\Gamma}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} [\cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} \cos(-\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} j \sin(-\omega t) dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен 0, поскольку его подынтегральная функция нечётная, а пределы интегрирования симметричны.

Второй интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} j \sin(-\omega t) dt = -\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt. \quad (\text{П.2})$$

Поскольку подынтегральная функция  $\frac{\sin \omega t}{t}$  в нуле не имеет разрыва (т.к.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{t} = \omega$ ), то этот интеграл можно вычислять, понимая его в обычном смысле (не в смысле Коши). Тогда, с учётом того, что  $\frac{\sin \omega t}{t}$  – чётная функция,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt.$$

Полученный интеграл является табличным интегралом Дирихле<sup>\*)</sup>:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \omega,$$

$$\text{где } \operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{при } \omega < 0 \\ 0 & \text{при } \omega = 0 \text{ — функция знака.} \\ +1 & \text{при } \omega > 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \pi \operatorname{sign} \omega. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя (П.3) в (П.2), получим окончательное выражение для комплексной частотной характеристики идеального преобразователя Гильберта:

$$\dot{H}_\Gamma(j\omega) = -j \operatorname{sign} \omega = \begin{cases} j & \text{при } \omega < 0 \\ 0 & \text{при } \omega = 0 \\ -j & \text{при } \omega > 0 \end{cases}.$$

---

<sup>\*)</sup> См., например, справочник [Интегралы и ряды. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. — М.: Наука, 1981], п. 2.5.3, ф-ла 12.