



**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
«МЭИ»**

Институт \_\_\_\_\_ ИРЭ \_\_\_\_\_ Кафедра \_\_\_\_\_ светотехники \_\_\_\_\_

Направление \_\_\_\_\_ Электроника и микроэлектроника \_\_\_\_\_

**ЗАДАНИЕ НА МАГИСТЕРСКУЮ  
ДИССЕРТАЦИЮ**

по программе подготовки магистров \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Квантовая и оптическая электроника \_550705\_\_\_\_\_

Тема \_\_Моделирование световых полей в атмосфере с разорванной  
облачностью \_\_\_\_\_

Время выполнения работы с 1.09.2011г. по 18.06.2012 г.

Студент \_\_\_\_\_ Шагалов О.В. \_\_\_\_\_ ЭР-06-06 \_\_\_\_\_  
*Фамилия, и., о. группа подпись*

Научный руководитель \_\_\_\_\_ профессор \_\_д.т.н. \_\_Будак В.П. \_\_\_\_\_  
*должность, звание, фамилия, и., о.*

Консультант \_\_\_\_\_  
*должность, звание, фамилия, и., о.*

Консультант \_\_\_\_\_  
*должность, звание, фамилия, и., о.*

Зав. кафедрой \_\_проф. \_\_Григорьев А.А. \_\_\_\_\_  
*звание, фамилия, и., о., подпись, дата утверждения задания*

Место выполнения научной работы \_\_кафедра светотехники \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Москва

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_\_ г.

## **1.Обоснование выбора темы диссертационной работы**

На сегодняшний день решения обширного круга научных и прикладных задач немислимы без использования средств оптического дистанционного зондирования. Поскольку многие задачи в этой области являются косвенными, для их решения необходимо создание математических моделей переноса излучения в среде. Ряд таких задач требует крайне высокой точности алгоритмов обработки результатов измерений. Для этого необходимо учитывать все существенные факторы, влияющие на сигнал. Одним из таких факторов является влияние на сигнал облаков, без учета которого ошибка может достигать 140%. Наряду с точностью к алгоритмам обработки данных дистанционного зондирования предъявляются высокие требования по скорости. Существующие программы являются очень ресурсоемкими, поэтому для создания алгоритма требуется не только точно учесть все факторы, влияющие на сигнал, но и найти способы ускорения выполнения программы.

**Научный руководитель** \_\_ Будак В.П. \_\_\_\_\_ дата \_\_\_\_\_

**Студент** \_\_\_\_ Шагалов О.В. \_\_\_\_\_ дата \_\_\_\_\_

## **2. Консультации по разделу**

---

---

---

---

---

**Подпись консультанта** \_\_\_\_\_ дата \_\_\_\_\_

## **3. Консультации по разделу**

---

---

---

---

---

**Подпись консультанта** \_\_\_\_\_ дата \_\_\_\_\_

#### 4. План работы над магистерской диссертацией

<b>№ п\п</b>	<b>Содержание разделов</b>	<b>Срок вы- пол- нения</b>	<b>Трудоём- кость в %</b>
<b>I.</b>	<b>Теоретическая часть</b>	01.09 – 15.10	9%
		20.10 – 31.11	15%
<b>II.</b>	<b>Экспериментальная часть</b>	1.12 – 30.01	16%
			42%
		1.02 – 10.03	8%
		15.03 – 30.03	
<b>III.</b>	<b>Публикации</b>	1.04 – 29.04	10%
<b>IV.</b>	<b>Оформление диссертации</b>	01.05 – 15.05	8%
		20.05 – 31.05	14%

--	--	--	--

## **5. Рекомендуемая литература**

1. Чандрасекар, С. (1953) Перенос лучистой энергии // Издательство иностранной литературы, Москва, 432с.
2. Adams, M.L., Larsen, E.W. (2002) Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy, vol. 40, p. 3-159.
3. Budak, V.P., Klyukov, D.A., Korkin, S.V. (2010) Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // Light Scattering Review, vol. 5, p. 147-203.
4. Будак, В.П. (1986) Малоугловая модификация метода сферических гармоник для расчета светового поля бесконечно широкого пучка в мутных средах // Сб. научн. труд. МЭИ, № 106, с. 20-25.

## **6. Краткие сведения о студенте:**

**Домашний адрес** г. Москва, ул. Просторная, д. 5, кв. 48

**Телефон служебный** \_\_\_\_\_ **домашний** +7 (916) 427 92 27

***Примечание:*** задание брошюруется вместе с диссертацией и с отзывами руководителя и рецензентов.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	8
Структура диссертации.....	9
1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР .....	11
1.1. Влияние облаков на дистанционное зондирование подстилающей поверхности .....	11
1.2. Методы расчета переноса излучения с учетом облачности .....	16
1.3. Методы решения плоской задачи.....	19
1.4. Цели и задачи настоящей диссертации.....	24
2. УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УПИ .....	26
2.1. Сравнение алгоритмов решения векторного уравнения переноса излучения по эффективности для плоского слоя мутной среды .....	26
2.2. Влияние аппаратно-программных средств на эффективность алгоритма...	33
2.3. Метод итераций.....	35
2.4. Двухпотокное приближение.....	40
Выводы по второй главе.....	53
3. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТЬЮ.....	55
3.1. Простые итерации в среде с произвольной 3М геометрией.....	55
3.2. Решение УПИ для слоя мутной среды, содержащего цилиндрическое отверстие методом Монте-Карло .....	59
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	63
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	64

## ВВЕДЕНИЕ

Решение широкого круга научных и прикладных задач стало доступно с использованием методов оптического дистанционного зондирования (ОДЗ). ОДЗ эффективно используется в исследовании окружающей среды, сельском хозяйстве, экологии, отслеживании и контроле чрезвычайных ситуаций [gis-lab.info]. При ОДЗ происходит определение интересующих параметров среды или подстилающей поверхности (ПП) по отраженному и прошедшему средоу излучению. Современное оборудование позволяет проводить измерения с невероятно высокой точностью (например, погрешность, вносимая в измерения собственными шумами приемника в программе GOSAT, составляет всего 0.3% [nasa, 2008]), поэтому к алгоритмам обработки также выдвигаются высокие требования.

Одним из примеров таких задач является определение газового состава атмосферы. Для достижения необходимой точности нужно учитывать многие существенные факторы, влияющие на сигнал. Так, например, пренебрежение поляризацией излучения ведет к погрешности до 10% процентов [Соболев, 1956].

Одним из существенных факторов является учет разорванной облачности, поскольку облака, находящиеся не только непосредственно в поле зрения, но и вблизи него, оказывают существенное влияние на сигнал. Погрешность измерения без учета эффектов разорванной облачности может привести к ошибке, в предельном случае до 140% [Kassianov et al., 2009]. На сегодняшний день нами не найдено в литературе модели, точно учитывающей влияние разорванной облачности на принимаемый сигнал оптико-электронной системой (ОЭС) при ОДЗ.

Поскольку определение параметров среды является косвенной задачей, для интерпретации данных ОЭС приходится многократно решать прямую задачу переноса излучения в среде. Поэтому наряду с точностью важнейшим требованием к алгоритмам обработки данных ОЭС является скорость.



Исходя из вышесказанного целью настоящей диссертации является создание быстрого алгоритма решения задачи переноса излучения в атмосфере для простейшего случая разорванной облачности – цилиндрического отверстия в плоскопараллельном облаке.

Для достижения данной цели нам необходимо в данной диссертации решить следующие задачи:

1. Исследование точности и сходимости основных существующих алгоритмов решения УПИ;
2. Определение путей повышения эффективности алгоритмов решения УПИ;
3. Разработка и анализ возможностей алгоритма решения УПИ для гладкой части в двухпоточковом приближении;
4. Создание модели на основе точного решения для простейшего случая разорванной облачности (цилиндрическое отверстие в плоском облаке).

## **Структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы.

В первом параграфе первой главы проводится анализ влияния эффектов разорванной облачности на сигнал ОЭС при ОДЗ ПП. Показывается, что пренебрежение этими эффектами может приводить в ряде случаев к огромным погрешностям.

Второй параграф первой главы посвящен существующим методам решения уравнения переноса излучения (УПИ) с учетом разорванной облачности, из которого видно, что ни один из методов не позволяет учесть разорванную облачность с необходимой точностью.

Третий параграф представляет собой аналитический обзор существующих методов решения для простейшего случая приближения атмосферы - плоского слоя (задачи). Говорится о том, что решение в численном виде может быть представлено только в виде суммы анизотропной по углу части, находящейся аналитически и регулярной добавки, которую можно найти легко численно.

Также приводится историческое развитие наиболее удачного из методов представления анизотропной части – малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ). В конце параграфа формулируется основной подход к решению поставленной в настоящей диссертации задаче.

В четвертом параграфе ставятся цели и задачи настоящей диссертации.

В первом параграфе второй главы проводится сравнение существующих алгоритмов решения плоской задачи, и показывается, что использование МСГ для выделения анизотропной части решения является оптимальным.

Во втором параграфе второй главы проводится анализ влияния аппаратно-программных средств на эффективность алгоритмов решения УПИ.

Третий параграф посвящен мощному методу ускорения сходимости решения – синтетической итерации.

В четвертом параграфе анализируется возможность двухпоточкового метода для нахождения гладкой части решения.

Первый параграф третьей главы посвящен методу итераций для случая произвольной геометрии среды.

Во втором параграфе для верификации последующего решения, предложенным в 1.3 подходом, описывается подход к решению для плоского слоя, содержащего плоское облако с цилиндрическим отверстием методом Монте-Карло.

В заключении приводятся некоторые теоретические и практические результаты настоящей диссертации.

# 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

## 1.1. Влияние облаков на дистанционное зондирование подстилающей поверхности

На сегодняшний день мировая гонка вооружения отошла на второй план. В связи с этим на первое место встала, несомненно, медицина, а вслед за ней - глобальные проблемы для всего человечества, в частности, возможности глобального потепления. Глобальным потеплением называется явление постепенного повышения среднегодовой температуры атмосферы Земли и океанов, в результате которого происходит таяние ледников на полюсах, что может привести к изменению климата всей планеты. Несмотря на то, что глобальное потепление не является строго доказанным научным фактом, изучение этого вопроса является одинаково важным для всех, и может быть сравнимо с тем, что, несмотря на прогноз и солнце за окном вы все равно на всякий случай берете зонт, если рассматривать это в масштабах всего человечества [ipcc, 2007].

Существенный вклад в глобальное потепление вносит парниковый эффект, который заключается в следующем. Большая часть солнечного излучения, сосредоточенная в видимом диапазоне длин волн, практически не задерживается атмосферой и достигает поверхности Земли. Поверхность нагревается и излучает энергию, но уже в инфракрасном диапазоне, для которого атмосфера существенно непрозрачна, и препятствует выходу излучения от Земли в открытый космос. Это происходит из-за наличия в атмосфере так называемых парниковых газов, спектральные линии поглощения которых главным образом находятся как раз в инфракрасной области оптического диапазона. Такими газами являются водяные пары, диоксид углерода, метан, озон и фреоны. В результате происходит нагревание нижних слоев атмосферы и океанов, чем и обуславливается вклад парникового эффекта в глобальное потепление [ipcc, 2007]. Наибольшее влияние на парниковый эффект оказывают водяные пары и углекислый газ. Сократить количество водяного пара в атмосфере в целом не пред-

ставляется возможным, однако увеличение температуры Земли за счет других факторов вызывает увеличение испарения воды, а значит путем сокращения их вкладов можно оказывать некоторое влияние и на общую концентрацию паров воды. Источниками углекислого газа являются вулканические выбросы, жизнедеятельность биосферы, а также антропогенные факторы – сжигание ископаемого топлива и некоторые технологические процессы. В 1997 году Киотским протоколом было ограничено производство парниковых газов развитыми странами и странами с переходной экономикой, однако вопрос изучения вклада парникового эффекта остается открытым [ipcc, 2007].

Согласно исследователям [Rayner, O'Brien, 2001], точный ответ на вопрос «Грозит ли нам глобальное потепление?» можно при помощи газодинамической модели Земли, созданной в NASA, которая, однако, нуждается в большом количестве измерений по всему земному шару с точностью не хуже 1%. Для этих целей лучше всего зарекомендовали себя методы оптического дистанционного зондирования (ОДЗ). При этом происходит спектральный анализ прошедшего среду излучения, по результатам которого определяются параметры среды, а, следовательно, и ее газовый состав.

Измерение в большом количестве точек возможно только с использованием спутниковых систем, поэтому в своей работе мы будем ориентироваться именно на них. На сегодняшний день существует несколько космических программ, связанных с оптическим дистанционным зондированием земной поверхности, с целью определения газового состава атмосферы. Среди них необходимо отметить следующие:

1. Программа NASA «Earth Observing System», в рамках которой было запущено три спутника. Спутник TERRA (EOS AM-1), запущенный в декабре 1999 года, на борту которого находятся пять измерительных приборов: ASTER (Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer), CERES (Clouds and the Earth's Radiant Energy System), MISR (Multi-angle Imaging SpectroRadiometer), MODIS (Moderate-resolution Imaging Spectroradiometer), MOPITT (Measurements of Pollution in the Troposphere). Спутник AQUA (EOS

PM-1), запущенный в мае 2004 года, на борту которого находятся шесть приборов, включая MODIS: AMSR-E (Advanced Microwave Scanning Radiometer-EOS), AMSU-A (Advanced Microwave Sounding Unit), AIRS (Atmospheric Infrared Sounder), HSB (Humidity Sounder for Brazil), CERES (Clouds and the Earth's Radiant Energy System). А также спутник Aura (EOS CH-1), запущенный в июле 2004 года, несущий следующие приборы: HIRDLS (High Resolution Dynamics Limb Sounder), MLS (Microwave Limb Sounder), OMI (Ozone Monitoring Instrument), TES (Tropospheric Emission Spectrometer) [NASA, 2004].

2. Спутник CALIPSO (The Cloud-Aerosol Lidar and Infrared Pathfinder Satellite Observation), запущенный совместно NASA и CNES в апреле 2006 года, имеющий на борту три измерительных прибора: CALIOP (Cloud-Aerosol Lidar with Orthogonal Polarization), WFC (Wide Field Camera), IIR (Imaging Infrared Radiometer) [NASA, 2006].

3. Программа JAXA «GOSAT», в рамках которой в январе 2009 года был запущен спутник IBUKI, несущий гиперспектральный Фурье-спектрометр TANSO-FTS и картограф облаков TANSO-CAI [JAXA, 2009].

4. Первый спутник программы NASA «Orbiting Carbon Observatory», который был запущен в феврале 2009 года, однако, не смог выйти на орбиту и затонул в Индийском океане [NASA, 2009].

5. Российская система РУСАЛКА (Ручной Спектральный АнаЛизатор Компонентов Атмосферы), не имеющий пока отдельного спутника, и находящийся на борту МКС [smiswww, 2009].

Приведенный список является далеко не полным, и это говорит о том, что исследования в данной области имеют большие перспективы, и разработки в этом направлении ведутся во многих странах мира.

Поскольку определение параметров среды по регистрируемому излучению является косвенной задачей, важнейшую роль в ее решении играет математическая модель переноса излучения в атмосфере, для создания которой требуется решать интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения (УПИ)

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla)L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\varepsilon \Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{l}') L(\mathbf{r}, \mathbf{l}') d\mathbf{l}' + q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (1.1)$$

где  $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$  - яркость в точке  $\mathbf{r}$  по направлению  $\hat{\mathbf{l}}$  (здесь и далее «крышкой» будем обозначать единичные вектора),  $\varepsilon$  - коэффициент ослабления, равный сумме коэффициента поглощения и коэффициента рассеяния,  $\Lambda$  - альbedo однократного рассеяния,  $x(\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{l}')$  - индикатриса рассеяния,  $q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$  - функция источников.

Современное оборудование позволяет проводить измерения с необходимой точностью [Hamazaki, 2008], а значит и к математической модели требования по точности крайне высоки. Для достижения этой цели в модели требуется учесть все существенные факторы, влияющие на проходящее через среду излучение. Такими факторами являются: анизотропия рассеяния, истинное поглощение газовыми компонентами, поляризация, неравномерность подстилающей поверхности, отражение подложкой, стратификация атмосферы по слоям.

В каждый момент времени как минимум половина планеты покрыта облаками [gis-lab.info], поэтому измерения со спутника почти всегда приходится вести в разрывы облаков. При этом около облаков появляются эффекты, которые существенно влияют на излучение, попадающее в поле зрения системы, и должны обязательно быть учтены при моделировании.

Наиболее перспективными для ОДЗ представляются гиперспектральные системы, которые проводят измерения на огромном количестве спектральных линий (например, в программе GOSAT таких линий 18500, [Hamazaki, 2008]). Поэтому первой частью общего решения является многократное решение прямой задачи (переноса излучения в атмосфере). Отсюда следует, что крайне высокими требованиями к математической модели предъявляются не только по точности, но и по скорости. Также требуется создать модель, которая описывала бы как можно более широкий круг реальных ситуаций, а значит необходимо сведение к минимуму априорных ограничений, таких как, например, форма индикатрисы рассеяния.

Влияние разорванной облачности на сигнал можно разделить на два типа [Marshak et al., 2008]. К первому типу можно отнести увеличение или уменьшение сигнала за счет отражения излучения от стенок облаков, поэтому необходимо учитывать трехмерную структуру облаков и сильную зависимость в этом случае от угла падения солнечного излучения [Cook et al., 2004]. Ошибки, связанные с увеличением коэффициента отражения чистого неба, которые возникают из-за неучета трехмерной структуры облаков, могут достигать 140% [Kassianov et al., 2009]. Характерным примером, относящимся к первому типу, является также тот факт, что средний коэффициент отражения от поверхности океана в случае отсутствия облаков до 30% ниже, чем в случае, когда измерения проводятся вблизи краев облаков [Koren et al., 2007]. Второй тип касается метода измерения. Поскольку облако является оптически очень плотной средой, непосредственно через облака измерения просто не проводятся. Для этого существуют специальные приборы, установленные на спутниках (например, TANSO-CAI в программе GOSAT, [JAXA, 2009]), которые определяют, насколько сильно мгновенное поле зрения системы закрыто облаками, и на основании этого системой принимается решение о проведении или не проведении измерений яркости. При этом в поле зрения, которое системой определяется как безоблачное, могут попадать облака маленьких размеров и, соответственно, таким образом искажать сигнал. Также численное моделирование, основанное на спутниковых измерениях, показывает, что между облачностью и свойствами атмосферного аэрозоля имеется сильная связь, а именно, вблизи облака увеличивается оптическая толщина аэрозоля для коротких длин волн, что приводит к эффекту «голубения» аэрозоля [Marshak et al., 2008; Zuidema et al., 2008]. Существующие алгоритмы, которые в той или иной степени учитывают влияние облаков на сигнал, основанные на методе отношений яркостей на линиях поглощения (измеряемых каналов) к яркостям на соседних линиях (опорных каналах) [Chylek et al., 2004; Kassianov et al., 2009; Kassianov et al., 2010; Kniffka, Trautmann 2011], сеточного подхода с использованием метода сферических гармоник (МСГ) [Chen et al., 2005], различных вариантах плоскопараллельного

представления облачного слоя [Kokhanovsky, Rozanov, 2008; Corti, Peter, 2009], а также на методе Монте-Карло [Kokhanovsky et al., 2007; Richtsmeier, Sundberg, 2009] дают удовлетворительные результаты для узкого круга специфических задач, однако для получения глобальной картины распределения углекислого газа имеют недостаточную точность. Еще одна сложность в математическом моделировании переноса излучения с учетом облаков связана с тем, что различные типы облаков имеют различное спектральное пропускание. Например, перистые облака обладают высоким пропусканием в видимом спектре, при этом для инфракрасного диапазона являются существенно непрозрачными.

Различные облачные образования могут быть описаны с помощью статистических моделей, например, на основе распределения Пуассона [Marshak et al., 2008]. Однако при отсутствии математической модели, удовлетворяющей точности в 1%, их эффективное использование не представляется возможным. Поэтому в данной работе мы не будем касаться статистического моделирования облачных полей, а сосредоточимся на поиске точного решения для облака определенной формы, а именно цилиндрического отверстия в плоском облаке. Этот случай является отправной точкой в решении такого рода задач, поскольку можно провести сравнение найденного решения с «обратным» ему - облачным цилиндром, который при стремлении радиуса основания к бесконечности вырождается в плоскую задачу, а для нее известно точное решение.

## **1.2. Методы расчета переноса излучения с учетом облачности**

Не только в случае определения газового состава среды, но и во многих других задачах ОДЗ при решении УПИ является необходимым учитывать реальные индикатрисы рассеяния, неоднородность среды, поляризацию, а также трехмерные эффекты (облака, неровности подстилающей поверхности). Все это приводит к тому, что в большинстве этих случаев получить аналитическое решение УПИ крайне сложно, а то и попросту невозможно [Марчук и др., 1976].

Во многих случаях практически получить решение можно с помощью метода Монте-Карло. Процесс распространения света представляется как случай-



ная марковская цепь столкновений фотонов с веществом, которые приводят либо к рассеянию, либо к поглощению фотонов. Метод Монте-Карло заключается в моделировании траекторий этой цепи на компьютере и вычислении статистической оценки для искомых функционалов. Построение случайных траекторий для физической модели процесса называется прямым моделированием. Математическая суть данного метода состоит в нахождении оптимальных способов моделирования случайных величин [Марчук и др., 1976].

Сложные задачи переноса излучения, как правило, невозможно решить методом прямого моделирования с необходимой точностью. Для этого разрабатываются методы уменьшения дисперсии оценок и алгоритмы для расчетов специальных функционалов методом Монте-Карло. Эффективность методов уменьшения дисперсии сильно зависит от специфики конкретной задачи. При этом рассмотрение нового класса задач обычно требует специальных исследований точности различных комбинаций известных алгоритмов и разработки новых модификаций [Марчук и др., 1976].

Поскольку настоящая работа посвящена переносу излучения в атмосфере с учетом облачности, рассмотрим подробнее применение метода Монте-Карло и других методов именно к световым полям с учетом облаков.

Задачи переноса излучения в многократно рассеивающей облачной среде, включающей поглощение паром и каплями воды, обычно решаются с использованием одного или нескольких упрощающих допущений: 1) облачный слой является плоскопараллельным; 2) облачный слой является однородным по составу; 3) поглощением паром и каплями можно пренебречь на относительно небольшом количестве спектральных линий. С такими допущениями решение УПИ может быть получено с помощью хорошо известных методов, например, с помощью метода дискретных ординат (МДО) [Cahalan et al., 1994]. Суть его заключается в представлении поля излучения в виде набора конечного числа усредненных в пространстве потоков, что переводит УПИ в конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [Чандрасекар, 1953]

$$\mu_i \frac{dL(\tau, \mu_i)}{d\tau} = L(\tau, \mu_i) - \frac{1}{2} \sum_j a_j L(\tau, \mu_j) + q(\tau, \mu_i), \quad (i = \pm 1, \dots, \pm n), \quad (1.2)$$

где  $a_j$  – веса в квадратурной формуле, основанной на делении интервала  $(-1, +1)$  точками  $\mu_j$ . Обычно эти точки представляют собой нули полинома Лежандра  $m$ -ной степени, при этом предпочтение обычно отдают формуле Гаусса, поскольку в этом случае при одном и том же значении  $m$  можно получить точность почти вдвое большую, по сравнению с другими квадратурными формулами [Чандрасекар, 1953].

Расширение этого и других «точных» методов на более общие геометрии облаков приводят к существенному усложнению решения, и требует больших вычислительных ресурсов [Cahalan et al., 1994].

На сегодняшний день интерпретация спутниковых измерений при оптическом дистанционном зондировании проводится в приближении независимых пикселей (англ. independent pixel approximation - IPA). Физической сутью IPA является предположение о том, что каждое измерение (мгновенное поле зрения спутника) может быть проведено как в горизонтальном однородном облаке. Откуда следует, что IPA пренебрегает горизонтальными перемещениями фотонов между полями, а значит и всеми эффектами затенения, кроме как в областях, находящихся непосредственно под облаками [Frame et al., 2008]. При этом IPA сохраняет нелинейные соотношения между оптической толщиной облака и альбедо облака, которые сами по себе могут являться источниками ошибок в глобальных климатических моделях [Chembers et al., 1997].

Напрямую такой подход был применен в ряде работ восьмидесятых - начала девяностых годов прошлого века [Ronnholm; Harshvardhan, Randall; Stephens et al.], однако в них не дается оценка погрешности IPA, для которой требуется модель пространственного распределения неоднородностей облака. Позже было показано, что вода в жидкой фазе в облаке имеет мультипликативную логарифмически нормальную структуру [Cahalan et al., 1994].

В статье Frame et al. (2008) был предложен метод использовать наклонное приближение независимых пикселей. В этом случае столбы располагаются не

строго вертикально, а по направлению прямого падающего солнечного излучения. Этот метод позволяет существенно повысить точность для углов падения солнечного излучения, сильно отличающихся от нуля. При этом такая модель все равно не учитывает сложную трехмерную структуру облаков.

Метод Монте-Карло является простейшим численным инструментом для изучения свойств излучения в неоднородных облаках [Marshak et al., 1995]. В работах McKee, Cox, Davies, Weinman, Harshvardhan при помощи метода Монте-Карло были созданы первые трехмерные модели переноса излучения с учетом облаков, основанные на их представлении в виде кубов [Cahalan et al., 1994]. Такие нереалистичные модели позволили в дальнейшем создать модели на основе метода Монте-Карло с использованием фрактальных облаков [Marshak et al., 1995].

Трехмерные модели облаков могут быть улучшены при помощи измерений, полученных с систем, находящихся на борту летательных аппаратов [Cook et al., 2004]. Содержание воды в жидкой фазе и радиусы капель (средние значения и дисперсия) используются для вычисления средних коэффициентов поглощения и индикатрис рассеяния, а также позволяют получить представление количестве неоднородностей (содержание воды в горизонтальных направлениях изменяется гораздо больше, чем радиусы капель). Другие измерения с борта летательного аппарата обеспечивают некоторую информацию о зонах покрытия, распределения и глубины облаков, хотя и не позволяют определить их верхушки. Однако содержание воды в жидкой фазе адиабатно увеличивается с высотой, а это также увеличивает радиусы капель и поглощение [Cook et al., 2004].

### **1.3. Методы решения плоской задачи**

Особое место в теории переноса излучения занимают случаи, когда искомое поле яркости зависит только от одной пространственной координаты - плоские задачи [Адзерихо, 1975]

$$\mu \frac{\partial L(\tau, \mu)}{\partial \tau} + L(\tau, \mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{l}}', \quad (1.3)$$

где  $\mu = (\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{r})$  – средний косинус угла рассеяния.

Их выделение обусловлено относительной простотой решения (по сравнению с трехмерными задачами) в совокупности с тем фактом, что они достаточно хорошо описывают многие реальные ситуации [Адзерихо, 1975]. Плоские задачи можно разделить на два случая. Случай полубесконечной среды, соответствующий атмосфере звезд, и случай конечной среды [Chandrasekhar 1953], соответствующий, например, случаю переноса солнечного излучения в атмосфере Земли, при сравнительно небольших углах падения, когда сферичностью атмосферы можно пренебречь.

Физической основой теории переноса является лучевое приближение, порождающее пространственно-угловые особенности, которые не могут быть представлены численно. Группа методов наиболее точно учитывающие эти особенности получила название малоуглового приближения (МУП). При сильно анизотропном теле яркости путь, пройденный рассеянными фотонами, мало отличается от пути, пройденного нерассеянными, что позволяет пренебречь дисперсией путей рассеянных фотонов. Центральной проблемой МУП является расчет многомерной свертки на сфере индикатрисы рассеяния и яркости падающего излучения, для которой существуют три основных пути решения [Будак, 2007]. В первом подходе, предложенном Боте, процесс рассеяния частиц представлялся марковской цепью блужданий, и помимо пренебрежения дисперсией фотонов также предполагал большую остроту индикатрисы, по сравнению с телом яркости, поэтому такая форма МУП не решает главную задачу, а именно строгий учет особенности.

Гаудсмитом и Саундерсеном был предложен другой подход, основанный на теореме сложения для полиномов Лежандра, который пренебрегал только путем рассеянных фотонов, но при этом не мог быть обобщен ни на какие другие источники, кроме плоского однонаправленного.

В работах Компанеца, Мольера, Снайдера-Скотта была предложена третья форма МУП, которая наряду с пренебрежением дисперсии путей рассеянных фотонов предполагала возможность замены свертки на сфере в области малых углов сверткой на плоскости [Будак, 2007].

В 1982 году был предложен новый малоугловой подход на примере точечного изотропного источника, основанный на методе сферических гармоник (СГ) – малоугловая модификация метода сферических гармоник (МСГ) [Будак, Савенков, 1982]. При этом яркость и индикатриса рассеяния раскладываются в ряд по полиномам Лежандра

$$L(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k(r) P_k(\mu), \quad x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}'), \quad (1.4)$$

где  $C_k(r)$  – коэффициенты разложения,  $P_k(\mu)$  – полиномы Лежандра,  $f_k$  – коэффициенты разложения индикатрисы. Далее делается предположение о том, что коэффициенты разложения яркости и индикатрисы являются непрерывными функциями номера в предположении линейной аппроксимации между предыдущим и последующим коэффициентами. В результате этого бесконечная система связанных уравнений заменяется одним уравнением математической физики. Показано, что решение при использовании такого подхода описывает все особенности решения УПИ [Будак и др., 1983; Будак и др., 1984]. В статье 1985 года [Будак и др.] проводится сравнение МСГ с известными формами МУП, и показано, что уравнение в представлении МСГ является наиболее общим, пренебрегающим только дисперсией путей рассеянных фотонов и обратным рассеянием, и другие формы следуют из него.

Однако во многих случаях, представляющих практический интерес, дисперсия путей рассеянных фотонов играет решающую роль. Например, глубинный световой режим и переход к глубинному световому режиму, когда все большую играют высшие кратности рассеяния, и тело яркости в малой степени определяется граничными условиями (ГУ). Эти случаи являются частью задачи расчета светового поля бесконечно широкого пучка в мутной среде, и для них получены решения [Будак, 1986].

В 1994 году было получено обобщение решения по МСГ на векторное уравнение переноса излучения (ВУПИ) – УПИ с учетом поляризации [Астахов и др., 1994]. В этом случае яркость представляется в виде четырех, легко измеряемых на практике, параметров  $L = \{I, Q, U, V\}$ , где  $I$  – яркость пучка лучей,  $Q$  и  $U$  – компоненты, отвечающие за линейную поляризацию,  $V$  – компонент, отвечающий за круговую поляризацию.

МУП, особенно в форме МСГ, дает хорошие результаты расчета излучения во всю переднюю полусферу, и показывает практически полную неэффективность для больших углов [Будак, Козельский, 2005]. Для определения полного тела яркости был предложен подход, впервые отмеченный Е. Милном, разработанный А. Эддингтоном и окончательно сформулированный С. Чандрасекаром. Идея заключается в представлении общего решения в виде суммы анизотропной (содержащей особенность) части, вычисленной аналитически, и гладкой добавки, которая может быть посчитана численно.

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}). \quad (1.5)$$

Подход стал классическим, и все существующие на сегодняшний день решения представляют собой этапы его развития, и отличаются только способами представления анизотропной и гладкой частей.

В статье 1962 года [Романова] впервые было сформулировано решение УПИ в виде суммы анизотропной части как МУП в первой форме и регулярной части решения, найденным методом дискретных ординат.

Однако, как было сказано выше, первый подход МУП не позволяет точно учесть особенности решения УПИ, а потому такое представление решения УПИ не является оптимальным.

Более удачный подход был предложен в статье [Будак и др., 2004]. Суть метода заключается в представлении анизотропной части в МСГ, а гладкой добавки – по методу СГ. Из приведенного сравнения видно, что решение при таком выборе представления составляющих его частей, при одинаковой точности превосходит метод сферических гармоник по скорости более чем в 360 раз. Од-

нако, представление гладкой части в виде ряда по сферическим функциям имеет свои недостатки. Плохо обусловленная матрица приводит к осцилляциям в решении, а также в этой форме является неудобным представление граничных условий [Будак и др., 2004].

Для ухода от этой проблемы было предложено заменить метод сферических гармоник на метод дискретных ординат, который не имеет указанных недостатков [Boudak, Korkin, 2005; Будак, Коркин, 2008а]. Было показано, что большинство наблюдаемых явлений может быть описано с использованием данной модели с достаточной точностью, однако время счета программы по-прежнему остается очень велико.

В 2008 году была дана полная формулировка решения ВУПИ на основе суммы МСГ и МДО, а также сформулирован подход к решению трехмерных задач в среде с произвольной геометрии. Приведено решение для простейшего случая – получено распределение яркости от точечного изотропного источника. Для этого использовалась трехмерная сетка, представляющая собой систему коаксиальных цилиндров [Boudak и Korkin 2008b]. Гладкая часть решения получена с помощью метода конечных элементов.

В 2009-2010 годах было проведено сравнение известных на тот момент алгоритмов [Boudak, Korkin, 2009; Sokoletsky et al., 2009; Kokhanovsky et al., 2010], которое показало, что решение с выделением анизотропной части в МСГ и представлении гладкой по МДО является наилучшим для расчета излучения «вперед», но для получения полного решения с использованием этого алгоритма требуется времени примерно столько же, сколько и остальным.

В 2011 году была получена полная матричная формулировка теории переноса излучения в мытной среде, которая позволила использовать матрично-операторный метод (МОМ), в результате чего была построена и реализована модель переноса излучения в атмосфере с учетом всех существенных факторов, перечисленных в параграфе 1.1, за исключением лишь разорванной облачности [Будак и др., 2011].

Одно из главных отличий модели, созданной научной группой кафедры светотехники НИУ МЭИ под руководством профессора Будака В.П., в которой анизотропная часть представлена в МСГ, а регулярная – по МДО, является непосредственное использование МДО, в то время как в остальных известных моделях на заключительной стадии используется метод итераций. В этом случае производят переход в координатную систему, связанную с лучом и представляют искомое поле яркости в виде суммы яркостей соответствующих кратностей рассеяния [Будак, 2007]. Само УПИ в этом случае переходит в интегральное уравнение Пайерлса

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}: \quad \frac{d}{d\xi} L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) + \varepsilon L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (1.6)$$

Использование даже одной итерации сильно уточняет решение, что подтвердилось на практике, когда после нахождения гладкой части по МДО была взята итерация от найденного решения [Будак и др., 2011]. Это позволило предположить, что при использовании итерации нет необходимости считать гладкую часть решения столь точно – методом дискретных ординат. В таком случае мы можем заменить решение УПИ для гладкой части по МДО на простейший и, как следствие, наименее ресурсоемкий двухпоточковый метод (двухпоточковое приближение (ДП), метод Шварцильда-Шустера), который, по сути, является частным случаем МДО при количестве ординат, равному двум. Другими словами происходит усреднение искомого поля яркости по двум полусферам направлений в пространстве. Отсюда следует, что решение в общем случае сотен уравнений по МДО заменится на решение двух обыкновенных дифференциальных уравнений в двухпоточковом приближении.

#### **1.4. Цели и задачи настоящей диссертации**

Принимая во внимание все вышесказанное, целью настоящей диссертации является существенное повышение скорости сходимости алгоритмов нахождения гладкой части решения.



Для достижения данной цели нам необходимо решить в настоящей диссертации следующие задачи:

5. Исследование точности и сходимости основных существующих алгоритмов решения УПИ;
6. Определение путей повышения эффективности алгоритмов решения УПИ;
7. Разработка и анализ возможностей алгоритма решения УПИ для гладкой части в двухпоточковом приближении;
8. Создание модели на основе точного решения для простейшего случая разорванной облачности (цилиндрическое отверстие в плоском облаке).

## 2. УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УПИ

### 2.1. Сравнение алгоритмов решения векторного уравнения переноса излучения по эффективности для плоского слоя мутной среды

Сравнение существующих алгоритмов решения скалярного и векторного УПИ показывает совпадение результатов вычислений на уровне машинной точности [Sokoletsky et al., 2009; Kokhanovsky et al., 2010]. Это позволяет предположить, что все алгоритмы расчета являются, по сути, разными вариантами единого метода решения. Но при этом сравнение по времени дает разброс более чем на порядок, а это значит, что в реализации каждого алгоритма есть особенности (разрывы) влияющие на время счета [Будак и др., 2011]. Проанализируем основные алгоритмы реализации на ЭВМ решения ВУПИ.

Рассмотрим краевую задачу ВУПИ для плоского слоя мутной среды глубиной  $\tau_0$ , который облучается плоским мононаправленным источником поляризованного излучения в направлении  $\hat{\mathbf{I}}_0$ :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} + \vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{R}(\chi) \vec{x}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{R}(\chi') \vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}} \\ \vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}) > 0} = \vec{L}_0 \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}) < 0} = 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})$  - вектор-параметр Стокса светового поля в среду на оптической глубине  $\tau$  в направлении  $\hat{\mathbf{I}}$ . Введем декартову систему координат  $OXYZ$ , в которой ось  $OZ$  направлена вниз перпендикулярно границе слоя,  $\hat{\mathbf{z}}$  - единичный вектор вдоль  $OZ$ ;

$$\hat{\mathbf{I}} = \left\{ \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \mu \right\}, \hat{\mathbf{I}}_0 = \left\{ \sqrt{1 - \mu_0^2}, 0, \mu_0 \right\}, \mu = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}), \mu_0 = (\hat{\mathbf{I}}_0, \hat{\mathbf{z}}); \quad (2.2)$$

$\vec{x}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  - матрица рассеяния;  $A$  - альбеда однократного рассеяния;  $\vec{R}(\chi)$  - матрица преобразования (ротатор) параметров Стокса при повороте плоскости референции;  $\chi$  - двугранный угол между плоскостями  $(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{I}})$  и  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}')$ ;  $\chi$  - двугранный угол между плоскостями  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}')$  и  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{z}})$ .

Для численного решения ВУПИ необходимо заменить интеграл рассеяния конечной суммой, для чего лучше всего подходит метод дискретных ординат, поскольку в этом случае решение ВУПИ принимает ясную лучевую трактовку, что упрощает формулировку сложных граничных условий [Будак и др., 2011].

Чтобы уйти от проблемы, связанной с наличием особенности в граничных условиях, представим решение в виде суммы анизотропной и гладкой частей:

$$\vec{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = \vec{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{l}}) + \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{l}}). \quad (2.3)$$

Только в лучевом приближении эти особенности распространяются вглубь среды. Поскольку лучевое приближение – физическая основа УПИ, то выделение (2.3) обязательно при решении всех задач ВУПИ [Kaper, Kellogg, 1977].

Поскольку анизотропная часть представляется аналитически, то интеграл рассеяния от нее также определяется аналитически. Подстановка (2.3) в (2.1) превращает исходную краевую задачу в задачу для регулярной (гладкой) части

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{l}})}{\partial \tau} + \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{R}(\chi) \vec{x}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \vec{R}(\chi') \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}} + \vec{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \\ \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\tau=0, \mu>0} = \vec{0}, \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = \vec{0} \end{cases}, \quad (2.4)$$

где

$$\vec{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{R}(\chi) \vec{x}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \vec{R}(\chi') \vec{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}} - \mu \frac{\partial \vec{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{l}})}{\partial \tau} - \vec{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \quad (2.5)$$

является функцией источников.

Для скалярного варианта УПИ разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра приводит на основе теоремы сложения для сферических функций к разделению зависимостей от азимутального и зенитного углов, что преобразует двукратный интеграл в однократный и позволяет заменить его гауссовой квадратурой. Но в случае переноса поляризованного излучения плоскости референции падающего и рассеянного лучей, а также плоскость рассеяния не совпадают, что требует применения ротатора, который искажает угло-

вую симметрию подынтегрального уравнения и не позволяет применять теорему сложения [Будак и др., 2011].

Было предложено [Kušcer, Ribarič, 1959] вместо линейного базиса (Stokes polarization, SP) использовать для определения параметров поляризации циркулярный базис (circular polarization, CP)

$$\vec{L}_{CP} = \begin{bmatrix} L_{+2} \\ L_{+0} \\ L_{-0} \\ L_{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q - iU \\ I - V \\ I + V \\ Q + iU \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \vec{T}_{CS} \vec{L}_{SP}, \quad \vec{T}_{SC} \equiv \vec{T}_{CS}^{-1}. \quad (2.6)$$

Такое представление изменяет форму ротатора, что позволяет использовать для представления матрицы рассеяния обобщенные сферические функции  $P_{mn}^k(\cos\theta)$ , для которых справедлива своя форма теоремы сложения, соответствующая симметрии ротатора в представлении CP [Будак и др., 2011]

$$e^{-im\chi} P_{mn}^k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}') e^{-im\chi'} = \sum_{q=-k}^k (-1)^q P_{mq}^k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) P_{qn}^k(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{I}}) e^{iq(\varphi - \varphi')}. \quad (2.7)$$

Однако в результате применения теоремы сложения все коэффициенты в ВУПИ становятся комплексные, что затрудняет численную реализацию, поэтому требуется вернуться к представлению SP.

Рассмотрим отдельно матрицу локального преобразования

$$\begin{aligned} \vec{S}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') &\equiv \vec{R}(\chi) \vec{x}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{R}(\chi') = \\ &= \vec{T}_{SC} \vec{T}_{CS} \vec{R}(\chi) \vec{T}_{SC} \vec{T}_{CS} \vec{x}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{T}_{SC} \vec{T}_{CS} \vec{R}(\chi') \vec{T}_{SC} \vec{T}_{CS} = \\ &= \vec{T}_{SC} \vec{R}_{CP}(\chi) \vec{x}_{CP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{R}_{CP}(\chi') \vec{T}_{CS} = \vec{T}_{SC} \vec{S}_{CP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{T}_{CS}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\vec{x}_{CP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \equiv \vec{T}_{CS} \vec{x}_{SP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{T}_{SC}$  – матрица рассеяния;  $\vec{R}_{CP}(\chi) = \vec{T}_{CS} \vec{R}(\chi) \vec{T}_{SC}$  – матрица ротатора в представлении CP.

Представим элементы матрицы рассеяния в виде разложения по обобщенным сферическим функциям

$$\left[ \vec{x}_{CP}(\cos\gamma) \right]_{rs} = \sum_{k=\max(r,s)}^K (2k+1) x_{rs}^k P_{r,s}^k(\cos\gamma), \quad (2.9)$$

где  $r$  и  $s$  принимают только значения  $\pm 0$  и  $2$ ;  $K$  – количество гармоник в разложении.

С учетом теоремы сложения (2.7) имеем для элементов матрицы локального преобразования в СР-базисе

$$\left[ \vec{\mathbf{S}}_{CP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \right] = \left[ \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{q=-k}^k (-1)^q e^{iq(\varphi-\varphi')} x_{rs}^k P_{rq}^k(\mu) P_{qs}^k(\mu') \right] \quad (2.10)$$

Введем диагональную матрицу

$$\vec{\mathbf{Y}}_l^q(\mu) = \text{Diag}\left(P_{-2,q}^l(\mu), P_{-0,q}^l(\mu), P_{+0,q}^l(\mu), P_{+2,q}^l(\mu)\right). \quad (2.11)$$

Принимая во внимание соотношение взаимности  $P_{m,n}^k(\mu) = P_{n,m}^k(\mu)$ , полу-

чим

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') &= \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{q=-k}^k (-1)^q e^{iq(\varphi-\varphi')} \vec{\mathbf{T}}_{SC} \hat{\mathbf{Y}}_k^q(\mu) \vec{x}_k \vec{\mathbf{Y}}_k^q(\mu') \vec{\mathbf{T}}_{CS} \equiv \\ &\equiv \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{q=-k}^k e^{iq(\varphi-\varphi')} \vec{\mathbf{S}}_k^q(\mu, \mu'), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\vec{x}_k \equiv [x_{rs}^k]$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{S}}_k^q(\mu, \mu') &= (-1)^q \vec{\mathbf{T}}_{SC} \vec{\mathbf{Y}}_k^q(\mu) \vec{x}_k \vec{\mathbf{Y}}_k^q(\mu') \vec{\mathbf{T}}_{CS} = \\ &= (-1)^q \vec{\mathbf{T}}_{SC} \vec{\mathbf{Y}}_k^q(\mu) \vec{\mathbf{T}}_{CS} \vec{\mathbf{T}}_{SC} \vec{x}_k \vec{\mathbf{T}}_{SC} \vec{\mathbf{T}}_{CS} \vec{\mathbf{Y}}_k^q(\mu') \vec{\mathbf{T}}_{CS} = \\ &= \vec{\mathbf{P}}_n^k(\mu) \vec{\chi}_k \vec{\mathbf{P}}_n^k(\mu'), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\vec{\chi}_k = \vec{\mathbf{T}}_{SC} \vec{x}_k \vec{\mathbf{T}}_{CS}$  - так называемая «греческая матрица» [Нерман, 1965];

$$\vec{\mathbf{P}}_n^l(\mu) = (-i)^n \vec{\mathbf{T}}_{SC} \vec{\mathbf{Y}}_l^n(\mu) \vec{\mathbf{T}}_{CS} = \begin{bmatrix} Q_l^n(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_l^n(\mu) & -iT_l^n(\mu) & 0 \\ 0 & iT_l^n(\mu) & R_l^n(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_l^n(\mu) \end{bmatrix} \equiv \vec{\mathbf{P}}_R + i\vec{\mathbf{P}}_I; \quad (2.14)$$

$\vec{\mathbf{P}}_R$ ,  $\vec{\mathbf{P}}_I$  - действительные части матрицы  $\vec{\mathbf{P}}_n^l(\mu)$ ;

$$\begin{aligned}
R_l^n(\mu) &= 0,5i^m \left( P_{m,2}^k(\mu) + P_{m,-2}^k(\mu) \right), \\
T_l^n(\mu) &= 0,5i^m \left( P_{m,2}^k(\mu) - P_{m,-2}^k(\mu) \right), \\
Q_l^n(\mu) &= \sqrt{\frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^m(\mu).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Окончательно ВУПИ из (2.1) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} + \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= \\
&= \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{q=-k}^k \vec{P}_n^k(\mu) \oint e^{iq(\varphi-\varphi')} \vec{\chi}_k \vec{P}_n^k(\mu') \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}' + \vec{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{I}}).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

При таком случае уже возможно преобразование интеграла рассеяния в однократный интеграл, однако он содержит комплексные выражения, хотя само выражение (2.16) является действительным [Будак и др., 2011]. С учетом симметрии

$$R_l^n(\mu) = R_l^{-n}(\mu), \quad T_l^n(\mu) = T_l^{-n}(\mu) \tag{2.17}$$

можно получить:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} + \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{m=0}^k (2 - \delta_{0,m}) \times \\
&\times \oint \left( \vec{C}_k^m(\mu, \mu') \cos m(\varphi - \varphi') + \vec{S}_k^m(\mu, \mu') \sin m(\varphi - \varphi') \right) \vec{L}_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}' + \vec{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{I}}),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{C}_l^n(\mu, \mu') &= \vec{P}_R^l(\mu) \vec{\chi}_l \vec{P}_R^l(\mu') - \vec{P}_I^l(\mu) \vec{\chi}_l \vec{P}_I^l(\mu'), \\
\vec{S}_l^n(\mu, \mu') &= \vec{P}_R^l(\mu) \vec{\chi}_l \vec{P}_R^l(\mu') + \vec{P}_I^l(\mu) \vec{\chi}_l \vec{P}_I^l(\mu').
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Полученное выражение справедливо для всех матриц рассеяния, при этом для аэрозольной блочно-диагональной матрицы оно может быть упрощено [Будак и др., 2011]. Представим решение (2.4) в виде:

$$L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \sum_{m=0}^M (2 - \delta_{0,m}) \left[ \phi_1(m\varphi) \vec{L}_1^m(\tau, \mu) + \phi_2(m\varphi) \vec{L}_2^m(\tau, \mu) \right], \tag{2.20}$$

что приведет ВУПИ к следующей форме

$$\mu \frac{\partial \vec{L}_c^m(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \vec{L}_c^m(\tau, \mu) =$$

$$= \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=0}^K (2k+1) \vec{\Pi}_k^m(\mu) \vec{\chi}_k \int_{-1}^1 \vec{\Pi}_k^m(\mu') \vec{L}_c^m(\tau, \mu') d\mu' + \vec{\Delta}(\tau, \mu), \quad (2.21)$$

$c=1,2.$

Здесь  $M$  – количество азимутальных членов ряда Фурье,  $m \in \overline{0, M}$ ;

$$\vec{\Pi}_m^k(\mu) = \begin{bmatrix} Q_k^m(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_k^m(\mu) & -T_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & -T_k^m(\mu) & R_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_k^m(\mu) \end{bmatrix};$$

$$\phi_1(\varphi) = \text{diag}(\cos \varphi, \cos \varphi, \sin \varphi, \sin \varphi); \quad (2.22)$$

$$\phi_2(\varphi) = \text{diag}(-\sin \varphi, -\sin \varphi, \cos \varphi, \cos \varphi).$$

Не останавливаясь подробно на решении, которое можно найти в статье [Будак и др., 2011], отметим, поскольку регулярная часть является гладкой функцией угла, при решении ВУПИ (2.21) по МДО все матрицы будут конечные, что позволяет записать систему уравнений, получающуюся в следствие использования МДО в матричной форме

$$\frac{d\vec{L}(\tau)}{d\tau} = -\vec{B}\vec{L}(\tau) + \vec{M}^{-1} \vec{\Delta}(\tau). \quad (2.23)$$

Полученная система имеет аналитическое решение в матричной форме:

$$-\vec{L}(0) + e^{\vec{B}\tau_0} \vec{L}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{\vec{B}\tau} \vec{M}^{-1} \vec{\Delta}(\tau, \mu_0) d\tau. \quad (2.24)$$

Главной проблемой решения уравнения (2.24) является наличие отрицательных и положительных экспонент в решении, что приводит к быстрому ухудшению обусловленности системной матрицы [Будак и др., 2011]. Для устранения этого используется масштабное преобразование, что позволяет получить выражение для выходящего из слоя излучения через падающее. Это позволяет воспользоваться матрично-операторным методом, при котором два смежных слоя заменяются одним, и описываются таким же по форме выражением, но с эффективными параметрами. Согласно [Будак и др., 2011] решение в такой форме эквивалентно уравнениям Амбарцумяна-Чандрасекара, получен-

ным с помощью принципа инвариантного погружения. Это означает, что после выделения анизотропной части и дискретизации для ВУПИ существует единственное аналитическое решение в матричной форме.

Трудоемкость численной реализации определяется в основном размерами входящих в выражения матриц [Будак и др., 2011]. В общем случае  $M \approx N \approx K$ , то есть определяется матрицей рассеяния среды. Однако в случае правильного выделения анизотропной части, когда регулярная близка к изотропной форме, соотношение зависит не от параметров среды, а определяется методом выделения анизотропной части. Поэтому дальнейшее сравнение различных программных реализаций будем вести с позиции метода выделения анизотропной части.

Исторически первым был метод, при котором аналитически выделялось только прямое нерассеянное излучение, который является неэффективным в случае сильной анизотропии [Будак и др., 2011].

В программе DISORT используется метод delta-M, который заключается в представлении матрицы рассеяния в виде суммы дельта-функции и гладкой функции по углу рассеяния. Такой подход искажает исходную краевую задачу, что приводит иногда к неправильному выбору параметра, отвечающего за долю анизотропного рассеяния, что влечет за собой сильные осцилляции в решении и всегда приводит к искажению распределения в области малых углов визирования, что эквивалентно пренебрежению грубой фракцией аэрозоля [Будак и др., 2011].

В программе Pstar используется метод TMS, при котором анизотропная часть выделяется на основе приближенного аналитического представления углового распределения яркости для первых двух кратностей рассеяния. При таком подходе в уравнении для второй кратности рассеяния появляется трехкратный интеграл, время счета которого существенно превышает расчет решения (2.24), полученное с использованием масштабного преобразования [Будак и др., 2011].

Программы для решения скалярного УПИ MDOM и векторного – MVDOM используют для выделения анизотропной части МСГ. Это приводит к



тому, что регулярная часть решения в этом случае является почти изотропной по углу функцией, что существенно уменьшает  $M$ ,  $N$ , и они почти не зависят от  $K$  [Будак и др., 2011].

Сравнение указанных программ показало, что точность МСГ существенно лучше, чем точность TMS для сильной анизотропии больших оптических толщ, поэтому в нашей работе для выделения анизотропной части мы будем использовать именно МСГ. При этом МСГ имеет недостаток - медленный расчет тонкой структуры в обратной полусфере угловых распределений поляризации, что приводит к мысли о возможной эффективности итерации.

## **2.2. Влияние аппаратно-программных средств на эффективность алгоритма**

Поскольку МСГ показало себя наиболее эффективным методом выделения анизотропной части решения, а программа MVDOM является разработкой научной группы кафедры, на которой выполняется настоящая диссертация, исследование влияния аппаратно-программных средств производилось на основе программы MVDOM.

Прежде всего необходимо отметить, что независимо от метода выделения анизотропной части решения, при реализации дискретизованного ВУПИ, необходимо решать три основные проблемы линейной алгебры: умножение матриц, решение задачи на собственные векторы и значения, вычисление обратной матрицы [Будак и др, 2011]. Такие операции наиболее оптимально сегодня реализованы в пакетах линейной алгебры: LAPACK, IMSL, NAG и некоторых других. Эти библиотеки существуют для любой платформы. При этом существуют специализированные библиотеки, оптимизированные для определенного процессора. Например, библиотека MKL (Math Kernel Library) – это LAPACK, оптимизированная компанией Intel для процессоров Intel. Важнейшими достоинствами MKL являются поддержка многоядерности и многопроцессорности и автоматическое распараллеливание всех операций, что существенно увеличивает скорость выполнения программы. MKL используют специализированные

математические пакеты, такие как Matlab, Maple, Mathematica [Будак и др., 2011].

Существенное ускорение алгоритмов и более рациональное использование памяти возможно с использованием алгоритмов разреженных матриц (sparse matrices). Это эффективно при работе с матрицами, у которых значение большого числа элементов являются нулями. При этом хранятся только ненулевые элементы и дополнительная информация об индексах. Существует несколько форматов хранения разреженных матриц: compressed sparse row (CSR) format, compressed sparsed column (CSC) и Coordinate Format. Выбор формата определяется типом операции с матрицами [Будак и др., 2011].

Программа MVDOM реализована на двух языках – Matlab и Fortran. Влияние различных факторов на время счета программы для двух тестов приведено в таблице 2.1. Тест №1:  $N=101$ ,  $K=500$ ,  $M=32$ ; тест №2:  $N=101$ ,  $K=1000$ ,  $M=32$ . Тесты выполнялись на компьютере IntelCore 2 Duo 3 ГГц, 2 Гб RAM, Intel Fortran Compiler 11.1 с библиотекой MKL 10.2. Использовались два компилятора – gfortran и ifort.

Условия реализации кода	Время счета теста №1, с	Время счета теста №2, с
gfortran + LAPACK	240	530
gfortran + LAPACK+optimization	230	505
ifort + LAPACK	210	490
ifort + MKL	115	250
ifort + MKL + optimization	105	230
ifort + MKL + optimization + sparse matrices	33	44
MATLAB 2010b	27	45
MATLAB 2010b + CUDA	22	33

Таблица 2.1. Сравнение времени счета для двух тестов

Такое влияние объясняется тем, что все тесты относятся к аэрозольному рассеянию, имеющему блочно-диагональную матрицу рассеяния, что определяет не менее половины элементов нулевыми.

Также было проведено отдельное исследование эффективности использования алгоритма разреженных матриц: зависимость времени счета от  $K$ . Благодаря этому алгоритму операции с двумерными массивами становятся эквивалентно одномерными, что определяет линейную зависимость времени счета от  $K$  в отличие от  $K^2$  в обычном случае [Будак и др., 2011].

Перспективным средством ускорения кода является использование графически процессоров общего назначения. Программно-аппаратная архитектура (Compute Unified Device Architecture, CUDA) позволяет проводить вычисления на графических процессорах nVIDIA GPUs, а это в свою очередь открывает возможность проведения стандартных процедур библиотеки LAPACK в рамках архитектуры CUDA. MATLAB 2010b поддерживает nVIDIA CUDA GPUs, однако достоинства вычислений на GPU существенны при использовании больших массивов, в обратной ситуации вычисления на CPU являются более эффективными.

В коде MVDOM использовался алгоритм выделения анизотропии на основе МСГ, что существенно снизило размеры всех массивов. При тестировании не приходилось брать число  $N$  более 300. Оценка времени счета с помощью профайлера показывает, что половина времени уходит на нахождение собственных значений. Однако эта процедура не реализована в пакете MATLAB GPU. Нам удалось снизить время выполнения программы на 20% за счет перемножения матриц на nVIDIA GeForce 480 GTX GPU [Будак и др., 2011].

### 2.3. Метод итераций

Существенным отличием программ MDOM и NVDOM от остальных является реализация чистого алгоритма метода дискретных ординат, в то время как остальные используют в дополнении к дискретным ординатам еще и итерацию от полученного решения. Это носит название пост-процессорной обработки [Thomas GE, Stamnes K, 2002] решения для аппроксимации решения на произвольной сетке углов визирования.

В работах [Марчук, Лебедев, 1981] и [Adams, Larsen 2002] проведено подробное исследование метода итераций. Остановимся на основных определениях и свойствах метода итераций.

Представим УПИ в операторном виде

$$Tu = Su + q, \quad (2.25)$$

где  $T$  – оператор переноса,  $S$  – оператор рассеяния,  $q$  – функция источников,  $u$  – пространственно-угловое распределение яркости.

Введем следующие обозначения

$$A \equiv I - T^{-1}S, \quad \bar{q} \equiv T^{-1}q, \quad (2.26)$$

где  $I$  – оператор идентичного преобразования, что позволит переписать УПИ (2.25) в интегральной форме Peierls

$$Au = \bar{q}. \quad (2.27)$$

Элемент  $u \in \Omega$  назовем неподвижной точкой оператора  $P$ , если  $u$  является решением интегрального УПИ (2.27).

Оператор  $A$  называется сжатием на  $\Omega$ , если  $\forall x, y \in \Omega$ :

$$\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y), \quad \alpha \in [0, 1), \quad (2.28)$$

где  $\rho(x, y)$  – расстояние между двумя элементами  $x$  и  $y$ .

Пусть задана последовательность  $u^k \in \Omega, k \in \overline{[0, \infty)}$ :

$$u^{k+1} = A(u^k). \quad (2.29)$$

Говорят, что на  $\Omega$  задан оператором  $A$  итерационный метод или метод последовательных приближений, а рекуррентная последовательность  $\{u^k\}$  называется итерацией. Причем  $u^0 \in \Omega$  – произвольный элемент.

Имеет место следующая теорема: предел итерации есть решение (2.27), а быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\rho(u^k, u) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \rho(u^1, u^0). \quad (2.30)$$

В дальнейшем подобную процедуру будем называть простой итерацией (source iteration). Поскольку для УПИ  $\alpha \sim \Lambda$ , что для атмосферы близко к едини-

це, то сходимость метода простых итераций является медленной. В работе [Корр, 1963] была предложена синтетическая схема ускорения итераций. В этой схеме простая итерация рассматривается только как первый этап, по крайней мере, двухэтапного итерационного процесса. Соответственно, определим  $u^{(k+1/2)}$  как результат простой итерации:

$$Tu^{(k+1/2)} = Su^{(k)} + q. \quad (2.31)$$

Необходимо сформулировать уравнение для  $u^{(k+1)}$ , причем цель, чтобы получаемое приближение  $u^{(k+1)}$  было бы существенно точнее  $u^{(k+1/2)}$ . Для определения такой процедуры вычтем из исходного уравнения (2.25) уравнение (2.31):

$$T(u - u^{(k+1/2)}) = S(u - u^{(k)}) \equiv S(u - u^{(k+1/2)}) + S(u^{(k+1/2)} - u^{(k)}), \quad (2.32)$$

что является УПИ для разницы  $(u - u^{(k+1/2)})$  от точного решения с новой функцией источников  $(u^{(k+1/2)} - u^{(k)})$ :

$$T(u - u^{(k+1/2)}) = S(u - u^{(k+1/2)}) + S(u^{(k+1/2)} - u^{(k)}), \quad (2.33)$$

или уравнение для аддитивной поправки до точного решения

$$(T - S)(u - u^{(k+1/2)}) = S(u^{(k+1/2)} - u^{(k)}). \quad (2.34)$$

Соответственно имеем решение

$$u = u^{(k+1/2)} + (T - S)^{-1}S(u^{(k+1/2)} - u^{(k)}) \quad (2.35)$$

Проблема заключается в том, что точный оператор  $(T - S)^{-1}$  неизвестен: если бы он был известен, то не надо было бы строить никакой итерационной схемы, а можно было бы сразу решать исходное уравнение (2.25).

Основная идея синтетического ускорения [Корр, 1963] заключается в том, чтобы вместо точного оператора  $(T - S)^{-1}$  в уравнении (2.35) использовать его некоторое известное приближение

$$M \approx (T - S)^{-1}, \quad (2.36)$$

что позволяет сформулировать выражение для  $(k+1)$ -итерации

$$u = u^{(k+1/2)} + MS(u^{(k+1/2)} - u^{(k)}). \quad (2.37)$$

Если вернуться к исходному уравнению (2.27), то простую итерацию можно представить в виде

$$u^{(k+1)} = (I - A)u^{(k)} + \bar{q}, \quad (2.38)$$

а синтетическое ускорение в форме:

$$u^{(k+1/2)} = (I - A)u^{(k)} + \bar{q}. \quad (2.39)$$

Исключая из (2.37) с помощью (2.39)  $u^{(k+1/2)}$ , получим

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + (I + MS)(-Au^{(k)} + \bar{q}). \quad (2.40)$$

Определим

$$P \equiv I + MS, \quad (2.41)$$

что позволит переписать (2.40) в виде

$$u^{(k+1)} = (I - PA)u^{(k)} + P\bar{q}. \quad (2.42)$$

Поскольку  $M \approx (T - S)^{-1}$ , то

$$P \approx I + (T - S)^{-1}S = (T - S)^{-1}[(T - S) + S] = (T - S)^{-1}T = (T^{-1}T - T^{-1}S) = (I - T^{-1}S) \equiv A^{-1}.$$

Откуда  $PA \approx I$  и сходимость метода должна быть очень быстрой. Это позволяет сформулировать центральную идею быстрой итерации – сочетание приближенного решения полного УПИ с простой итерацией, причем в приближенном решении важно точно учесть энергетику, а итерацией подправить угловое распределение.

Рассмотрим возможности итераций на примере включения итерации в алгоритм программы MDOM. Для вычисления итерации необходимо определить поле внутри слоя.

Матричное дифференциальное уравнение (2.23) дополняется условиями на границе для  $\vec{L}_-(0)$ ,  $\vec{L}_+(\tau_0)$ , что определяет двухточечную краевую задачу для  $\vec{L}_+(0)$  и  $\vec{L}_-(\tau_0)$ . Для нахождения итерации от решения необходимо знать поле в произвольной точке среды  $\vec{L}(\tau)$ , что невозможно непосредственно из краевой задачи. Однако после решения краевой задачи становятся известны полные значения коэффициентов на верхней  $\vec{L}(0)$  и нижней  $\vec{L}(\tau_0)$  границах, что определяет две независимые эквивалентные одноточечные краевые задачи

для уравнения (2.23), каждая из которых легко интегрируется и уже позволяет найти поле внутри слоя  $\vec{L}(\tau)$ :

$$\vec{U}^{-1} \vec{L}(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-\vec{\Gamma} \tau} \vec{u}_{11} \vec{L}_+(0) \\ e^{-\vec{\Gamma} \tau} \vec{u}_{21} \vec{L}_-(0) \end{bmatrix} + e^{-\vec{\Gamma} \tau} \int_0^{\tau} e^{\vec{\Gamma} t} \vec{U}^{-1} \vec{M}^{-1} \vec{\Delta}(t, \mu_0) dt, \quad (2.43)$$

$$\vec{U}^{-1} \vec{L}(\tau) = \begin{bmatrix} e^{\vec{\Gamma} \cdot (\tau_0 - \tau)} \vec{u}_{11} \vec{L}_-(\tau_0) + e^{\vec{\Gamma} \cdot (\tau_0 - \tau)} \vec{u}_{12} \vec{L}_+(\tau_0) \\ e^{\vec{\Gamma} \cdot (\tau_0 - \tau)} \vec{u}_{21} \vec{L}_-(\tau_0) + e^{\vec{\Gamma} \cdot (\tau_0 - \tau)} \vec{u}_{22} \vec{L}_+(\tau_0) \end{bmatrix} - e^{-\vec{\Gamma} \tau} \int_{\tau}^{\tau_0} e^{\vec{\Gamma} t} \vec{U}^{-1} \vec{M}^{-1} \vec{\Delta}(t, \mu_0) dt. \quad (2.44)$$

где  $u_{ij}$  – собственные значения матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\vec{\Delta}(t, \mu_0)$  - функция источников,  $\vec{\Gamma}$  - диагональная матрица корней характеристического уравнения,  $\vec{L}_+$  и  $\vec{L}_-$  - вектора восходящих и нисходящих полей соответственно.

Каждое из выражений (2.43) и (2.44) имеет экспоненциальные члены, как с отрицательными, так и положительными показателями, что создает вычислительные трудности для значительных оптических толщ. Однако поскольку эти уравнения описывают одно и то же поле в среде, то их можно скомбинировать, взяв из (2.43) только нижнюю половину уравнений, а из (2.44) верхнюю. Скомбинированное выражение позволяет рассчитывать поле в глубине среды без каких-либо ограничений. Интегралы, входящие в (2.43) и (2.44), легко вычисляются.

Для расчета итераций от полученного решения воспользуемся интегральным представлением Пайерлса УПИ [Budak et al., 2010]:

$$L(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = \begin{cases} e^{-\tau/\mu_0} \delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0) + \frac{\Lambda}{4\pi\mu} \int_0^{\tau} e^{-(\tau-t)/\mu} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(t, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' dt, & \mu \geq 0; \\ -\frac{\Lambda}{4\pi\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-(\tau-t)/\mu} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(t, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' dt, & \mu < 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

где  $\mu = (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{z}})$ ,  $\mu_0 = (\hat{\mathbf{l}}_0, \hat{\mathbf{z}})$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$  – единичный вектор вдоль оси, направленной перпендикулярно границам вниз,  $\hat{\mathbf{l}}_0$  – направление падения излучения на слой.

Подставляя в правую часть полное полученное решение (2.45), получим первую итерацию от него. Для расчета интеграла рассеяния представим индикатрису рассеяния в ряд по полиномам Лежандра и воспользуемся теоремой

сложения для сферических функций, что позволяет свести двукратный интеграл к однократному. МСГ имеет аналитический вид ряда по сферическим функциям с экспоненциальными коэффициентами, что приводит к аналитическому выражению для первой итерации от анизотропной части.

Интеграл по зенитному углу  $\cos\theta=\mu$  от гладкой части решения вычислим на основе метода гауссовых квадратур эквивалентного дискретизации УПИ. Выражение для первой итерации от гладкой части решения можно также получить аналитически, однако оно становится очень громоздким. Поскольку гладкая часть зависит от оптической толщине достаточно медленно, то расчет интеграла по  $dt$  в (2.45) лучше проводить численно с интерполяцией значений по толщине.

Поскольку тело яркости гладкой добавки является достаточно гладкой, практически изотропной функцией, то приближенный ее расчет может строиться в двухпоточковом приближении (2П – по сути метод дискретных ординат с двумя ординатами и нормировкой индикатрисы) или в диффузионном приближении (метод сферических гармоник  $P_1$ ).

Представляется наиболее эффективным метод 2П вследствие своей предельной простоты, что даст наилучший результат по времени.

## 2.4. Двухпоточковое приближение

Двухпоточковое приближение (метод Шварцильда-Шустера) является простейшим методом решения уравнения переноса излучения [Адзерихо, 1975], и как следствие, при прочих равных наименее точным. Однако, исходя из предположений, данных в конце параграфа 1.3, мы будем использовать именно его из соображений скорости. Для простоты ограничимся скалярным вариантом. Следует отметить, что в матричном виде различия между скалярным УПИ и ВУПИ проявляется лишь в том, что размерности всех матриц для ВУПИ имеют в четыре раза большие размеры.



Рассмотрим краевую задачу УПИ для плоского слоя неизлучающей мутной среды глубиной  $\tau_0$ , облучаемого плоским мононаправленным источником с единичной яркостью

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L(\tau, \mu)}{\partial \tau} = -L(\tau, \mu) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}', \\ L(\tau, \mu)|_{\tau=0, \mu>0} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), L(\tau, \mu)|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Суть двухпоточкового метода заключается в усреднении искомого поля яркости по двум полусферам направлений в пространстве. Для это проинтегрируем УПИ из (2.46) по верхней (восходящий поток) и нижней (нисходящий поток) полусферам. Несмотря на то, что метод выделения только прямого излучения имеет довольно грубую точность, для наглядности сперва воспользуемся им для выделения анизотропной части. Вновь представим полное решение как сумму гладкой и анизотропной частей

$$L(\tau, \mu) = L_0(\tau, \mu) + \tilde{L}(\tau, \mu) \quad (2.47)$$

и подставим это выражение в УПИ из (2.46), что приведет его к виду

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \{L_0(\tau, \mu) + \tilde{L}(\tau, \mu)\}}{\partial \tau} + L_0(\tau, \mu) + \tilde{L}(\tau, \mu) = \\ = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \{L_0(\tau, \mu') + \tilde{L}(\tau, \mu')\} d\hat{\mathbf{I}}' \end{aligned} \quad (2.48)$$

Преобразуем УПИ (2.48) таким образом, чтобы выделить функцию источников, а само УПИ трансформировать в УПИ для гладкой части

$$\mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau, \mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' + Q(\tau, \mu, \mu'), \quad (2.49)$$

где

$$Q(\tau, \mu, \mu') = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L_0(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' - \mu \frac{\partial L_0(\tau, \mu)}{\partial \tau} - L_0(\tau, \mu) \quad (2.50)$$

и есть функция источников.

Прямое излучение  $L_0(\tau, \mu)$  по определению удовлетворяет УПИ в отсутствие рассеяния

$$\mu \frac{\partial L_0(\tau, \mu)}{\partial \tau} + L_0(\tau, \mu) = 0. \quad (2.51)$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому его решением будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0(\tau, \mu)}{L_0(\tau, \mu)} = -\frac{\partial \tau}{\mu} &\Rightarrow \int \frac{\partial L_0(\tau, \mu)}{L_0(\tau, \mu)} = -\int \frac{\partial \tau}{\mu} \Rightarrow \ln L_0(\tau, \mu) = \\ &= -\frac{\tau}{\mu} + C(\mu) \Rightarrow L_0(\tau, \mu) = C(\mu)e^{-\tau/\mu} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Константу интегрирования найдем из начального условия первого начального условия (2.46):

$$C(\mu) = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0). \quad (2.53)$$

Тогда прямая составляющая будет равна

$$L(\tau, \mu) = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0)e^{-\tau/\mu} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0)e^{-\tau/\mu_0}. \quad (2.54)$$

Подставим найденную прямую составляющую в выражение для функции источников (2.50)

$$\begin{aligned} Q(\tau, \mu, \mu') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu} d\hat{\mathbf{I}}' - \mu \frac{\partial \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu}}{\partial \tau} - \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu} = \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu_0} - \mu \cdot \frac{1}{\mu} \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu_0} - \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu_0} = \frac{\Lambda}{4\pi} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu_0}. \end{aligned}$$

С учетом этого УПИ для гладкой части принимает вид

$$\mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau, \mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' + \frac{\Lambda}{4\pi} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (2.55)$$

Для перехода к двухпотокковому приближению проинтегрируем последнее уравнение по двум полусферам направлений

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_-} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau, \mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{I}} + \int_{\Omega_-} \tilde{L}(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{I}} &= \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\Omega_-} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' d\hat{\mathbf{I}} + \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \int_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) d\hat{\mathbf{I}}, \\ \int_{\Omega_+} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau, \mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{I}} + \int_{\Omega_+} \tilde{L}(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{I}} &= \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\Omega_+} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' d\hat{\mathbf{I}} + \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \int_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) d\hat{\mathbf{I}}, \end{aligned} \right. \quad (2.56)$$

где  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  означают нижнюю и верхнюю полусферы соответственно.

Рассмотрим первое уравнение системы (2.56) и проинтегрируем каждый его член отдельно:

$$\int_{\Omega_-} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau, \mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{l}} = \mu_{\uparrow} \frac{d\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)}{d\tau}; \quad (2.57)$$

$$\int_{\Omega_-} \tilde{L}(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{l}} = \tilde{E}_{\uparrow}(\tau); \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\Omega_-} \oint x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{l}}' d\hat{\mathbf{l}} &= \frac{\Lambda}{4\pi} \left[ \int_{\Omega_-} \int_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{l}}' d\hat{\mathbf{l}} + \int_{\Omega_-} \int_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{l}}' d\hat{\mathbf{l}} \right] = \\ &= \Lambda\beta_c \tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o \tilde{E}_{\downarrow}(\tau), \end{aligned} \quad (2.59)$$

где  $\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)$  - пространственная облученность отраженного излучения в зависимости от глубины слоя;  $\mu_{\uparrow}$  - средний косинус тела яркости в верхнюю полусферу;  $\beta_c$  и  $\beta_o$  - коэффициенты рассеяния, совпадающий и противоположный направлению излучения, соответственно;

$$\frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \int_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}_0) d\hat{\mathbf{l}} = \Lambda\beta_{o0} e^{-\tau/\mu_0}, \quad (2.60)$$

где  $\beta_{o0}$  - коэффициент рассеяния падающего излучения. С учетом этого первое уравнение системы (2.56) принимает вид

$$\mu_{\uparrow} \frac{\partial \tilde{E}_{\uparrow}(\tau)}{\partial \tau} + \tilde{E}_{\uparrow}(\tau) = \Lambda\beta_c \tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o \tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_{o0} e^{-\tau/\mu_0}. \quad (2.61)$$

Одной из положительных особенностей двухпоточкового метода является полная симметрия, поскольку усреднение происходит по полупространствам. Поэтому для второго уравнения системы (2.56) результат интегрирования можно получить заменой соответствующих индексов «вверх-вниз» в (2.61). При этом система (2.56) примет вид

$$\begin{cases} \mu_{\downarrow} \frac{d\tilde{E}_{\downarrow}(\tau)}{d\tau} = (\Lambda\beta_c - 1)\tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_o \tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_{o0} e^{-\tau/\mu_0}, \\ \mu_{\uparrow} \frac{d\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)}{d\tau} = (\Lambda\beta_c - 1)\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o \tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_{o0} e^{-\tau/\mu_0}, \end{cases} \quad (2.62)$$

или то же самое в матричной форме

$$\vec{M} \frac{d\vec{E}(\tau)}{d\tau} = -\vec{A}\vec{E}(\tau) + \Lambda e^{-\tau/\mu_0} \vec{F}, \quad (2.63)$$

где  $\vec{M} = \text{diag}(\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow})$ ,  $\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 - \Lambda\beta_c & -\Lambda\beta_o \\ -\Lambda\beta_o & 1 - \Lambda\beta_c \end{bmatrix} \equiv \vec{I} - \Lambda \begin{bmatrix} \beta_c & \beta_o \\ \beta_o & \beta_c \end{bmatrix}$  и  $\vec{F} = \begin{bmatrix} \beta_{c0} \\ \beta_{o0} \end{bmatrix}$ . Стоит

отметить уже сейчас, что в матричной форме, при выделении анизотропной части по МСГ изменится вид только функции источников (то есть только вектора  $\vec{F}$ ), а значит общий вид решения сохранится.

Система (2.63) является системой двух обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений. Для ее решения воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\vec{E}(\tau) = \exp(-\vec{B}\tau) \cdot \vec{C} \quad (2.64)$$

где  $\vec{B} = \vec{M}^{-1} \vec{A}$ .

Представим константу в виде функции, зависящей от  $\tau$ , тогда

$$\vec{E}(\tau) = \exp(-\vec{B}\tau) \begin{bmatrix} \vec{E}_{0\downarrow}(\tau) \\ \vec{E}_{0\uparrow}(\tau) \end{bmatrix} = \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau). \quad (2.65)$$

Подставим выражение (2.65) в матричное УПИ (2.63)

$$\vec{M} \frac{d \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau)}{d\tau} = -\vec{A} \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau) + \Lambda e^{-\tau/\mu_0} \vec{F}, \quad (2.66)$$

$$\vec{M} \left\{ -\vec{B} \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau) + \exp(-\vec{B}\tau) \frac{d\vec{E}_0(\tau)}{d\tau} \right\} = -\vec{A} \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau) + \Lambda e^{-\tau/\mu_0} \vec{F},$$

$$-\vec{A} \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau) + \vec{M} \exp(-\vec{B}\tau) \frac{d\vec{E}_0(\tau)}{d\tau} = -\vec{A} \exp(-\vec{B}\tau) \vec{E}_0(\tau) + \Lambda e^{-\tau/\mu_0} \vec{F},$$

$$\frac{d\vec{E}_0(\tau)}{d\tau} = \Lambda e^{-\tau/\mu_0} \exp(\vec{B}\tau) \vec{M}^{-1} \vec{F}. \quad (2.67)$$

Полученная система уравнений является системой уравнений с разделяющимися переменными, поэтому

$$d\vec{E}_0(\tau) = \Lambda e^{-\tau/\mu_0} \exp(\vec{B}\tau) \vec{M}^{-1} \vec{F} d\tau = \Lambda e^{-\vec{I}\tau/\mu_0} e^{\vec{B}\tau} \vec{M}^{-1} \vec{F} d\tau = \Lambda e^{(-\vec{I} + \vec{B}\mu_0)\tau/\mu_0} \vec{M}^{-1} \vec{F} d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\tau) - \tilde{\mathbf{E}}_0(0) = \Lambda \int_0^\tau e^{(-\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{B}}\mu_0)t/\mu_0} d\tau \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}, \quad (2.68)$$

где

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{(-\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{B}}\mu_0)t/\mu_0} d\tau &= \mu_0 (-\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( e^{(\mu_0 \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{I}})\tau/\mu_0} - \tilde{\mathbf{I}} \right) = \\ &= \mu_0 (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{I}} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\tilde{\mathbf{B}}\tau} \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

С учетом этого

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\tau) = \tilde{\mathbf{E}}_0(0) + \Lambda \mu_0 (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{I}} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\tilde{\mathbf{B}}\tau} \right) \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (2.70)$$

Умножая полученное решение на решение однородного, получим полное решение:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tau) = e^{-\tilde{\mathbf{B}}\tau} \tilde{\mathbf{E}}_0(0) + \Lambda \mu_0 e^{-\tilde{\mathbf{B}}\tau} (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{I}} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\tilde{\mathbf{B}}\tau} \right) \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (2.71)$$

Неизвестные константы найдем, подставив в последнее уравнение известные граничные условия

$$\tilde{\mathbf{E}}_\downarrow(0) = 0, \tilde{\mathbf{E}}_\uparrow(\tau_0) = 0. \quad (2.72)$$

С учетом того, что  $\tilde{\mathbf{E}}_\downarrow(0) = \tilde{\mathbf{E}}_{0\downarrow}(0) = 0$ , имеем

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_\downarrow(\tau_0) \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-\tilde{\mathbf{B}}\tau_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_\uparrow(0) \end{bmatrix} + \Lambda \mu_0 e^{-\tilde{\mathbf{B}}\tau_0} (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{I}} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\tilde{\mathbf{B}}\tau_0} \right) \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (2.73)$$

Представим матричную экспоненту через собственные векторы и собственные значения матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$ . В связи с чем предыдущее уравнение переписется в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_\downarrow(\tau_0) \\ 0 \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{U}} e^{-\Gamma\tau_0} \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_\uparrow(0) \end{bmatrix} + \\ &+ \Lambda \mu_0 \tilde{\mathbf{U}} e^{-\Gamma\tau_0} \tilde{\mathbf{U}}^{-1} (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{I}} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\tilde{\mathbf{B}}\tau_0} \right) \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Умножим последнее уравнение на  $e^{\Gamma\tau_0} \tilde{\mathbf{U}}^{-1}$

$$\begin{aligned} e^{\Gamma\tau_0} \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_\downarrow(\tau_0) \\ 0 \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_\uparrow(0) \end{bmatrix} &= \\ &= \Lambda \mu_0 \tilde{\mathbf{U}}^{-1} (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{I}} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\tilde{\mathbf{B}}\tau_0} \right) \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Преобразуем левую часть отдельно:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau_0} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \tau_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{E}_\uparrow(0) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau_0} u_{11} & e^{\lambda_1 \tau_0} u_{12} \\ e^{\lambda_2 \tau_0} u_{21} & e^{\lambda_2 \tau_0} u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{12} \tilde{E}_\uparrow(0) \\ u_{22} \tilde{E}_\uparrow(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau_0} u_{11} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) - u_{12} \tilde{E}_\uparrow(0) \\ e^{\lambda_2 \tau_0} u_{21} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) - u_{22} \tilde{E}_\uparrow(0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

С учетом этого

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau_0} u_{11} & -u_{12} \\ e^{\lambda_2 \tau_0} u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) \\ \tilde{E}_\uparrow(0) \end{bmatrix} = \Lambda \mu_0 \tilde{U}^{-1} (\tilde{I} - \mu_0 \tilde{B})^{-1} (\tilde{I} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\tilde{B} \tau_0}) \tilde{M}^{-1} \tilde{F}. \quad (2.77)$$

Откуда получаем выражение для неизвестных граничных условий

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) \\ \tilde{E}_\uparrow(0) \end{bmatrix} = \Lambda \mu_0 \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau_0} u_{11} & -u_{12} \\ e^{\lambda_2 \tau_0} u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}^{-1} \tilde{U}^{-1} (\tilde{I} - \mu_0 \tilde{B})^{-1} (\tilde{I} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\tilde{B} \tau_0}) \tilde{M}^{-1} \tilde{F}. \quad (2.78)$$

Для взятия итерации необходимо знать поле внутри слоя, поэтому для его определения вернемся к уравнению для облученностей (2.63)

$$\tilde{M} \frac{d\tilde{E}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{A} \tilde{E}(\tau) + \Lambda e^{-\tau/\mu} \tilde{F}. \quad (2.79)$$

Имеем пару граничных условий -

$$\tilde{E}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{E}_\uparrow(0) \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{E}(\tau_0) = \begin{bmatrix} \tilde{E}_\downarrow(\tau_0) \\ 0 \end{bmatrix},$$

что дает нам возможность решить УПИ двумя способами – «сверху» и «снизу»:

$$\tilde{E}(\tau) = e^{-\tilde{B}\tau} \tilde{E}(0) + \Lambda e^{-\tilde{B}\tau} \int_0^\tau e^{(\tilde{B}\mu_0 - \tilde{I})t/\mu_0} d\tau \tilde{M}^{-1} \tilde{F}; \quad (2.80)$$

$$\tilde{E}(\tau) = e^{\tilde{B}(\tau_0 - \tau)} \tilde{E}(\tau_0) - \Lambda e^{-\tilde{B}\tau} \int_\tau^{\tau_0} e^{(\tilde{B}\mu_0 - \tilde{I})t/\mu_0} d\tau \tilde{M}^{-1} \tilde{F}. \quad (2.81)$$

Вычислив интегралы, получим

$$\tilde{E}(\tau) = e^{-\tilde{B}\tau} \tilde{E}(0) + \Lambda \mu_0 e^{-\tilde{B}\tau} (\tilde{I} - \mu_0 \tilde{B})^{-1} (\tilde{I} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\tilde{B}\tau}) \tilde{M}^{-1} \tilde{F} \text{ и} \quad (2.82)$$

$$\tilde{E}(\tau) = e^{\tilde{B}(\tau_0 - \tau)} \tilde{E}(\tau_0) - \Lambda \mu_0 e^{-\tilde{B}\tau} (\tilde{I} - \mu_0 \tilde{B})^{-1} (e^{-\tau/\mu_0} e^{\tilde{B}\tau} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\tilde{B}\tau_0}) \tilde{M}^{-1} \tilde{F}. \quad (2.83)$$

Вычтем из первого уравнения второе, умножив предварительно оба на  $e^{\vec{B}\tau}$ , имеем

$$0 = \tilde{\mathbf{E}}(0) + \Lambda\mu_0(\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})^{-1} \left( \vec{\mathbf{I}} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\vec{B}\tau} \right) \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{F}} - e^{\vec{B}\tau_0} \tilde{\mathbf{E}}(\tau_0) \\ + \Lambda\mu_0(\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})^{-1} \left( e^{-\tau/\mu_0} e^{\vec{B}\tau} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\vec{B}\tau_0} \right) \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{F}}$$

или

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tau_0) = e^{-\vec{B}\tau_0} \tilde{\mathbf{E}}(0) + \Lambda\mu_0 e^{-\vec{B}\tau_0} (\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})^{-1} \left( \vec{\mathbf{I}} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\vec{B}\tau_0} \right) \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{F}}. \quad (2.84)$$

Отметим, что для численной реализации более удобна несколько иная форма представления решения. С учетом того, что

$$e^{-\tau/\mu_0} e^{\vec{B}\tau} = \vec{\mathbf{U}} e^{-(\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})\tau/\mu_0} \vec{\mathbf{U}}^{-1}, \quad (2.85)$$

для гладкой части решения имеем

$$e^{\vec{B}\tau} \tilde{\mathbf{E}}(\tau) = e^{\vec{B}\tau_0} \tilde{\mathbf{E}}(\tau_0) + \Lambda\mu_0(\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})^{-1} \left( \vec{\mathbf{I}} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\vec{B}\tau} \right) \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{F}} \\ - \Lambda\mu_0(\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})^{-1} \left( \vec{\mathbf{I}} - e^{-\tau_0/\mu_0} e^{\vec{B}\tau_0} \right) \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{F}}, \quad (2.86)$$

$$e^{\vec{B}\tau} \tilde{\mathbf{E}}(\tau) = \tilde{\mathbf{E}}(0) + \Lambda\mu_0(\vec{\mathbf{I}} - \mu_0\vec{\mathbf{B}})^{-1} \left( \vec{\mathbf{I}} - e^{-\tau/\mu_0} e^{\vec{B}\tau} \right) \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{F}}. \quad (2.87)$$

Для определения составляющих вектора  $\vec{\mathbf{F}}$  представим индикатрису рассеяния в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. Имеем

$$\beta_{c0} = \frac{1}{4\pi} \int_{(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}') > 0} x(\hat{\mathbf{I}}_0, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}', \quad (2.88)$$

или при разложении в ряд

$$x(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x_k P_k(\cos \gamma). \quad (2.89)$$

Для полиномов Лежандра справедлива теорема сложения

$$P_k(\hat{\mathbf{I}}_0 \cdot \hat{\mathbf{I}}') = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{m=-k}^{m=k} Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}_0) \overline{Y_k^m}(\hat{\mathbf{I}}'), \quad (2.90)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Тогда (2.88) принимает вид

$$\begin{aligned}\beta_{c0} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{m=-k}^{m=k} Y_k^m(\hat{\mathbf{i}}_0) \int_{(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{i}}') > 0} \bar{Y}_k^m(\hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}}' = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{m=-k}^{m=k} Y_k^m(\hat{\mathbf{i}}_0) \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi'} \int_0^1 P_k^m(\mu') d\mu' d\varphi'\end{aligned}\quad (2.91)$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi'} d\varphi' = \delta_{m0},$$

то

$$\beta_{c0} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k P_k(\mu_0) \int_0^1 P_k(\mu') d\mu'. \quad (2.92)$$

Интеграл

$$I_k \equiv \int_0^1 P_k(\mu') d\mu' \quad (2.93)$$

вычисляется:

1) от всех  $k \neq 0$  четных он равен  $I_k=0$ ;

2)  $k=0 \rightarrow I_k = \int_0^1 P_0(\mu') d\mu' = \int_0^1 d\mu' = 1$ ;

3)  $k=2j-1$  – нечетных  $\rightarrow \int_0^1 P_{2j-1}(\mu) d\mu = \frac{2(-1)^{j+1}}{2^{2j}(2j-1)j} \frac{2j-1!}{j-1!j-1!} \equiv \alpha_j$

что следует из общей формулы

$$\begin{aligned}& \int_0^1 P_{2l-2}^{2p-2}(\mu) P_{2j-1}^{2p-2}(\mu) d\mu = \\ &= \frac{2(-1)^{j+l+1}}{2^{2(l+j-1)}(2l-2j-1)(l+j-1)} \times \frac{2(j+p)-3! 2(l+p)-4!}{l-p! j-p! l+p-2! j+p-2!}.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\beta_{c0} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k P_k(\mu_0) \int_0^1 P_k(\mu') d\mu' = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j-1} P_{2j-1}(\mu_0) \alpha_j \quad (2.94)$$

и

$$\beta_{o0} = 1 - \beta_{c0}.$$



Для расчета прошедшего слой и отраженного излучения граничные условия из (2.78) подставляем в уравнение (2.65). Результаты вычисления программы в случае нормального падения излучения на плоский слой мутной среды с единичной облученностью (с вычитанием прямой нерассеянной составляющей и без нее) для  $L = 0.8$ ,  $\tau_0 = 4$ , двухпараметрической индикатрисы рассеяния Хенни-Гринштейна с параметрами  $g_1 = 0.9$  и  $g_2 = -0.2$  представлены на рис. 2.1.

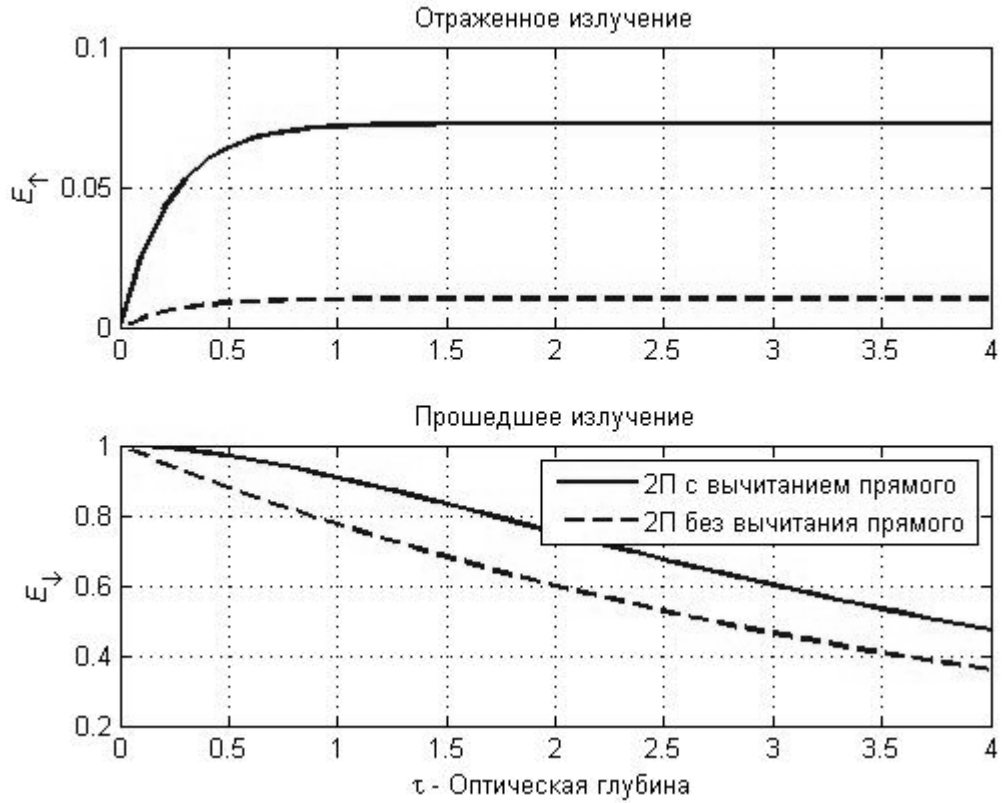


Рис. 2.1. Прошедшее слой и отраженное излучение в зависимости от оптической глубины

Для выделения анизотропной части решения по МСГ представим ее в следующем виде

$$L_a(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \frac{2k+1}{4\pi} Z_k(\tau) Q_k^n(\mu_0) Q_k^m(\mu) e^{im\varphi}, \quad (2.95)$$

где

$$Z_k(\tau) = \exp\left[-\frac{(1-\Lambda x_k)\tau}{\mu_0}\right] = \exp\left(-\frac{d_k}{\mu_0}\tau\right), \quad (2.96)$$

$$d_k = 1 - \Lambda x_k. \quad (2.97)$$

Тогда функция источников в УПИ (2.50) примет вид:

$$4\pi\mu_0\Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{k=m}^K (2k+1)d_k q_k Z_k(\tau)(\mu - \mu_0) Q_k^m(\mu) + \\ + a_k \left[ d_{K+1} q_{K+1} Z_{K+1}(\tau) \bar{Q}_K^m - d_K q_K Z_K(\tau) \bar{Q}_{K+1}^m \right], \quad (2.98)$$

где введены обозначения  $q_k \equiv Q_k^m(\mu_0)$ ,  $a_k \equiv \sqrt{(K-m+1)(K+m+1)}$ .

При интегрировании функции источников по верхней и нижней полусферам останутся только члены с  $m=0$ , а остальные обнуляются при усреднении по азимуту. Расчет всего выражения определяется расчетом двух основных интегралов

$$I_k^0 \equiv \int_0^1 P_k(\mu) d\mu, \quad I_k^1 \equiv \int_0^1 \mu P_k(\mu) d\mu. \quad (2.99)$$

Первый из указанных интегралов исследовался при интегрировании индикатрисы:

4) от всех  $k \neq 0$  четных он равен  $I_k^0 = 0$ ,

5)  $k=0 \rightarrow I_0^0 = \int_0^1 P_0(\mu) d\mu = \int_0^1 d\mu = 1$ ,

6)  $k=2j-1$  – нечетных  $\rightarrow \int_0^1 P_{2j-1}(\mu) d\mu = \frac{2(-1)^{j+1}}{2^{2j}(2j-1)j(j-1)!(j-1)!} \frac{(2j-1)!}{(j-1)!} \equiv \alpha_j^0$ ,

причем имеем рекуррентное выражение

$$\alpha_{j+1}^0 = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \alpha_j^0, \quad \alpha_1^0 = 0.5.$$

Для расчета второго интеграла также воспользуемся общим выражением

$$\int_0^1 P_{2l-2}^{2p-2}(\mu) P_{2j-1}^{2p-2}(\mu) d\mu = \\ = \frac{2(-1)^{j+l+1}}{2^{2(l+j-1)}(2l-2j-1)(l+j-1)} \times \frac{(2(j+p)-3)!(2(l+p)-4)!}{(l-p)!(j-p)!(l+p-2)!(j+p-2)!} \Big|_{p=1, j=1} = \\ = \frac{(-1)^l}{2^{2l-1}(2l-3)l} \times \frac{(2l-2)!}{(l-1)!(l-1)!} \equiv \alpha_l^1,$$

что дает рекуррентное выражение

$$\frac{\alpha_{l+1}^1}{\alpha_l^1} = \frac{(-1)^{l+1} 2l!}{2^{2l+1} (2l-1)(l+1)l!} \times \frac{2^{2l-1} (2l-3)l(l-1)!(l-1)!}{(-1)^l (2l-2)!} = -\frac{2l-3}{2(l+1)}$$

$$\Rightarrow \alpha_{l+1}^1 = -\frac{2l-3}{2(l+1)} \alpha_l^1,$$

причем  $\alpha_1^1 = \frac{1}{2}$ .

Соответственно для второго интеграла получим

- 1) для всех  $k \neq 0$  нечетных он равен  $I_k^1 = 0$ ,
- 2)  $k=1 \rightarrow I_1^1 = \int_0^1 \mu P_1(\mu) d\mu = \int_0^1 \mu^2 d\mu = \frac{1}{3}$ ,  $I_0^1 = \int_0^1 \mu P_0(\mu) d\mu = \int_0^1 \mu d\mu = \frac{1}{2}$ ,
- 3)  $k=2l-2$  – четных  $\rightarrow I_{2l-2}^1 = \int_0^1 P_1(\mu) P_{2l-2}(\mu) d\mu = \frac{(-1)^l (2l-2)!}{2^{2l-1} (2l-3)l(l-1)!(l-1)!} \equiv \alpha_l^1$ .

Допустим для определенности, что  $K$  – нечетное число. Тогда

$$2\mu_0 \Delta_{\downarrow}(\tau) = \sum_{k=0}^K (2k+1) d_k q_k Z_k(\tau) \beta_k + (K+1) d_{K+1} q_{K+1} Z_{K+1}(\tau) \alpha_K^0 \equiv \sum_{k=0}^{K+1} \gamma_k d_k Z_k(\tau) \quad (2.100)$$

$$\text{где } 2\mu_0 \beta_k \equiv \begin{cases} k=0: & 0.5 - \mu_0, \\ k=1: & 1/3 - 0.5\mu_0, \\ k=2j-2: & \alpha_j^1, \\ k=2j-1: & -\mu_0 \alpha_j^0; \end{cases} \quad \gamma_k \equiv \begin{cases} k=\overline{0, K}: & (2k+1) q_k \beta_k, \\ k=K+1: & 0.5(K+1) q_{K+1} \alpha_K^0 / \mu_0. \end{cases}$$

При интегрировании по верхней полусфере по  $m$  от  $-1$  до  $0$  все  $\alpha$  меняют знак, кроме случаев 2) в расчете интегралов:

$$2\mu_0 \bar{\beta}_k \equiv \begin{cases} k=0: & -0.5 - \mu_0, \\ k=1: & 1/3 + 0.5\mu_0, \\ k=2j-2: & -\alpha_j^1, \\ k=2j-1: & \mu_0 \alpha_j^0; \end{cases} \quad \bar{\gamma}_k \equiv \begin{cases} k=\overline{0, K}: & (2k+1) q_k \bar{\beta}_k, \\ k=K+1: & -0.5(K+1) q_{K+1} \alpha_K^0 / \mu_0. \end{cases}$$

Соответственно вместо системы (2.62) получим

$$\begin{cases} \mu_{\downarrow} \frac{d\tilde{E}_{\downarrow}(\tau)}{d\tau} = (\Lambda\beta_c - 1)\tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_o\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \sum_{k=0}^{K+1} \gamma_k d_k Z_k(\tau), \\ \mu_{\uparrow} \frac{d\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)}{d\tau} = (\Lambda\beta_c - 1)\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o\tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \sum_{k=0}^{K+1} \bar{\gamma}_k d_k Z_k(\tau), \end{cases} \quad (2.101)$$

или в матричной форме

$$\vec{\mathbf{M}} \frac{d\vec{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau} = -(\vec{\mathbf{I}} - \Lambda\vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{E}}(\tau) + \vec{\mathbf{\Delta}}(\tau), \quad (2.102)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau} = -\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{E}}(\tau) + \vec{\mathbf{M}}^{-1}\vec{\mathbf{\Delta}}(\tau), \quad \vec{\mathbf{B}} \equiv \vec{\mathbf{M}}^{-1}(\vec{\mathbf{I}} - \Lambda\vec{\mathbf{A}}), \quad (2.103)$$

где  $\vec{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow})$ ,  $\vec{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} \beta_c & \beta_o \\ \beta_o & \beta_c \end{bmatrix}$  и  $\vec{\mathbf{\Delta}} = \sum_{k=0}^{K+1} d_k Z_k(\tau) \begin{bmatrix} \gamma_k \\ \bar{\gamma}_k \end{bmatrix}$ .

Решение уравнение (2.103) представимо в виде

$$-\vec{\mathbf{E}}(0) + e^{\vec{\mathbf{B}}\tau_0}\vec{\mathbf{E}}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{\vec{\mathbf{B}}\tau} \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{\Delta}}(\tau, \mu_0) d\tau \quad (2.104)$$

Рассмотрим отдельно правую часть выражения (2.104)

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} e^{\vec{\mathbf{B}}\tau} \vec{\mathbf{M}}^{-1} \vec{\mathbf{\Delta}}(\tau, \mu_0) d\tau &= \sum_{k=0}^{K+1} d_k \int_0^{\tau_0} e^{\vec{\mathbf{B}}\tau} e^{-d_k \tau / \mu_0} d\tau \begin{bmatrix} \gamma_k / \mu_{\downarrow} \\ \bar{\gamma}_k / \mu_{\uparrow} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{K+1} d_k \int_0^{\tau_0} e^{(\mu_0 \vec{\mathbf{B}} - d_k \vec{\mathbf{I}})\tau / \mu_0} d\tau \begin{bmatrix} \gamma_k / \mu_{\downarrow} \\ \bar{\gamma}_k / \mu_{\uparrow} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{K+1} d_k \mu_0 (\mu_0 \vec{\mathbf{B}} - d_k \vec{\mathbf{I}})^{-1} \left( e^{(\mu_0 \vec{\mathbf{B}} - d_k \vec{\mathbf{I}})\tau_0 / \mu_0} - \vec{\mathbf{I}} \right) \begin{bmatrix} \gamma_k / \mu_{\downarrow} \\ \bar{\gamma}_k / \mu_{\uparrow} \end{bmatrix} \\ &= \mu_0 \sum_{k=0}^{K+1} d_k (\mu_0 \vec{\mathbf{B}} - d_k \vec{\mathbf{I}})^{-1} \left( e^{\vec{\mathbf{B}}\tau_0} e^{d_k \tau_0 / \mu_0} - \vec{\mathbf{I}} \right) \begin{bmatrix} \gamma_k / \mu_{\downarrow} \\ \bar{\gamma}_k / \mu_{\uparrow} \end{bmatrix} \equiv \vec{\mathbf{F}}(\tau_0, \mu_0). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Соответственно (2.104) примет вид

$$\begin{aligned} -\begin{bmatrix} 0 \\ E_{\uparrow}(0) \end{bmatrix} + \vec{\mathbf{U}} e^{\vec{\mathbf{\Gamma}}\tau_0} \vec{\mathbf{U}}^{-1} \begin{bmatrix} E_{\downarrow}(\tau_0) \\ -E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \end{bmatrix} &= \vec{\mathbf{F}}(\tau_0, \mu_0), \\ -\vec{\mathbf{U}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{\uparrow}(0) \end{bmatrix} + e^{\vec{\mathbf{\Gamma}}\tau_0} \vec{\mathbf{U}}^{-1} \begin{bmatrix} E_{\downarrow}(\tau_0) \\ -E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \end{bmatrix} &= \vec{\mathbf{U}}^{-1} \vec{\mathbf{F}}(\tau_0, \mu_0), \\ \begin{bmatrix} -u_{12} E_{\uparrow}(0) + e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{11} E_{\downarrow}(\tau_0) \\ -u_{22} E_{\uparrow}(0) + e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{21} E_{\downarrow}(\tau_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{12} E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \\ e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{22} E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \end{bmatrix} + \vec{\mathbf{U}}^{-1} \vec{\mathbf{F}}(\tau_0, \mu_0), \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -u_{12} & e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{11} \\ -u_{22} & e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\uparrow}(0) \\ E_{\downarrow}(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{12} E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \\ e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{22} E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \end{bmatrix} + \vec{U}^{-1} \vec{F}(\tau_0, \mu_0). \quad (2.106)$$

Откуда

$$\begin{bmatrix} E_{\uparrow}(0) \\ E_{\downarrow}(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{12} & e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{11} \\ -u_{22} & e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{12} E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \\ e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{22} E_{\uparrow}^{MSH}(\tau_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{12} & e^{\gamma_{\downarrow}\tau_0} u_{11} \\ -u_{22} & e^{\gamma_{\uparrow}\tau_0} u_{21} \end{bmatrix}^{-1} \vec{U}^{-1} \vec{F}(\tau_0, \mu_0). \quad (2.107)$$

Стоит отметить, что решение УПИ в матричной форме с использованием двухпотокового приближения при выделении анизотропной части по МСГ имеет такую же форму, как и при выделении только прямого излучения, однако. При этом выделение анизотропной части решения по МСГ делает гладкую часть гладкой, почти изотропной по углу функцией, чем и оправдано использование двухпотокового приближения.

## Выводы по второй главе

1. Дискретизованное уравнение переноса излучения имеет единственное аналитическое решение для гладкой части в матричной форме, а также единственный возможный алгоритм численной реализации. Это означает, что эффективность решения определяет метод представления анизотропной части решения. Результаты сравнения показали, что наиболее эффективным для этого является малоугловая модификация метода сферических гармоник, при использовании которой мы имеем регулярную часть гладкой, практически изотропной функцией угловых переменных, что позволяет брать более крупную сетку при ее численном расчете.

2. Метод синтетических итераций имеет гораздо более высокую сходимость, чем традиционный метод итераций, при этом даже одна итерация сильно уточняет решение, а значит, нет смысла использовать очень точные и ресурсоемкие методы (метод сферических гармоник, метод дискретных ординат) для определения гладкой части решения. Поэтому для анализа цилиндрического

отверстия в плоском облаке мы будем искать решение уравнения переноса излучения именно в такой форме – МСГ + двухпотокное приближение + итерация от полного решения.

### 3. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТЬЮ

#### 3.1. Простые итерации в среде с произвольной 3М геометрией

При решении УПИ искомое поле яркости можно представить в виде разложения по кратностям рассеяния. Для этого УПИ интегрируется вдоль луча, как обыкновенное дифференциальное уравнение с известной правой частью [Будак, 2007]. Сделаем переход к переменным вдоль луча из точки  $R$  по направлению  $\hat{\mathbf{l}}$ . Тогда произвольная точка  $\mathbf{r}$  на луче на расстоянии  $\xi$  от  $R$  должна удовлетворять уравнению (рис. 3.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}. \quad (3.1)$$

С учетом этого УПИ принимает вид

$$\frac{d}{d\xi} L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) + \varepsilon L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (3.2)$$

Если в уравнении (3.2) правую часть считать известной функцией, оно является линейным неоднородным уравнением относительно переменной  $\xi$ , решение которого может быть записано в форме

$$L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon \xi} + e^{-\varepsilon \xi} \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\xi} e^{-\varepsilon \zeta} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')(\mathbf{R} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}' d\zeta \quad (3.3)$$

или

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L_e(\mathbf{r} - \xi_0 \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon \xi_0} + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\xi_0} e^{-\varepsilon(\xi_0 - \zeta)} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}' d\zeta, \quad (3.4)$$

где  $\xi_0$  – расстояние по лучу до границы объема. Что то же самое в операторной форме

$$L = L_0 + \mathbf{T}L, \quad (3.5)$$

где

$$L_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L_e(\mathbf{r} - \xi_0 \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon \xi_0}, \quad (3.6)$$

$\mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S}$  – оператор переноса вдоль луча.

На основе принципа сжимающихся отображений решение (3.6) представимо в виде ряда Неймана [Будак, 2007]

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}^n L_0, \quad (3.7)$$

что физически и означает разложение по кратностям рассеяния.

Соответственно для произвольной кратности рассеяния имеем

$$L_n(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \mathbf{T}L_{n-1} = \mathbf{T}^n L_0 = \left(\frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi}\right)^n \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_n} \underbrace{\oint \dots \oint}_n \exp\left(-\varepsilon(\xi + \sum_{k=1}^n \zeta_k)\right) x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}_1) \times \dots \times x(\hat{\mathbf{l}}_{n-1}, \hat{\mathbf{l}}_n) L_0(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}_n) d\hat{\mathbf{l}}_1 \dots d\hat{\mathbf{l}}_n d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (3.8)$$

где все особенности интегрирования показаны на рис. 3.2.

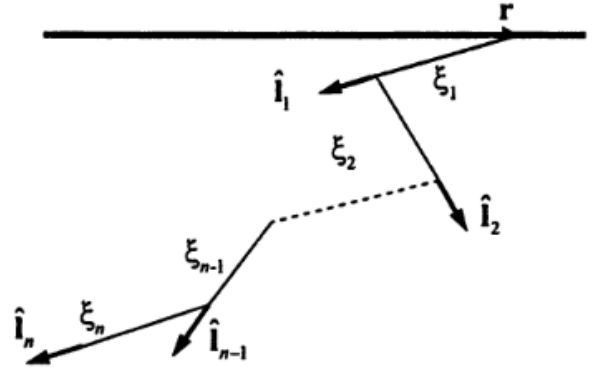
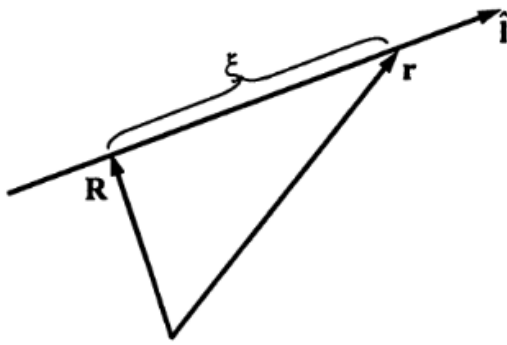


Рис. 3.1. Интегрирование вдоль луча

Рис. 3.2. Траектория n-кратного рассеяния

При численной реализации в простейшем случае происходит следующее. Задавшись  $L_0$ , необходимо определять по (3.8) и подставлять в УПИ столько кратностей рассеяния, пока оценка общего решения не будет удовлетворять заранее определенному критерию сходимости [Adams, Larsen 2002].

После выделения анизотропной части решения гладкая УПИ для произвольной геометрии среды имеет вид

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) \tilde{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon \tilde{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\varepsilon \Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \tilde{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' + S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (3.9)$$

где

$$S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = (\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \varepsilon L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) - \frac{\varepsilon \Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (3.10)$$



Переходим в лучевую систему координат, что приводит УПИ в форму интегрального уравнения Пайерлса, которое является линейным неоднородным дифференциальным уравнением относительно координаты по лучу  $\xi$ . Для него можно записать решение

$$\tilde{L}(\mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = \left( L_e(\mathbf{R}_0, \hat{\mathbf{l}}) - L_a(\mathbf{R}_0, \hat{\mathbf{l}}) \right) e^{-\varepsilon\xi_0} + e^{-\varepsilon\xi_0} \int_0^{\xi_0} F(\mathbf{R} + \zeta\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon\zeta} d\zeta, \quad (3.11)$$

где  $\xi_0$  – расстояние вдоль луча от измеряемой точки  $\mathbf{r}$  до границы среды;  $\mathbf{R}_0$  – точка пересечения луча с границей среды. Вычитание  $L_a$  связано с тем, что МСГ пренебрегает обратным рассеянием, и яркость в МСГ на границе внутри слоя не является нулевой [Budak et al., 2010].

Если считать  $F(\mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}})$  известной функцией, уравнение (3.11) может быть переписано в форме интегрального уравнения

$$\tilde{L}(\mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = L_0(\mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\varepsilon\Lambda}{4\pi} \int_0^{\xi_0} e^{\varepsilon(\zeta - \xi_0)} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \tilde{L}(\mathbf{R} + \zeta\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' d\zeta, \quad (3.12)$$

где

$$L_0(\mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = \left( L_e(\mathbf{R}_0, \hat{\mathbf{l}}) - L_a(\mathbf{R}_0, \hat{\mathbf{l}}) \right) e^{-\varepsilon\xi_0} + \int_0^{\xi_0} e^{\varepsilon(\zeta - \xi_0)} S(\mathbf{R} + \zeta\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) d\zeta. \quad (3.13)$$

Поскольку уравнение (3.13) является уравнением Фредгольма второго рода, решение можно представить в виде ряда Неймана, то есть в виде разложения яркости по кратностям рассеяния

$$L_n(\mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\varepsilon\Lambda}{4\pi} \int_0^{\xi_0} e^{\varepsilon(\zeta - \xi_0)} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L_{n-1}(\mathbf{R} + \zeta\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' d\zeta. \quad (3.14)$$

Для вычисления (3.14) представим часть среды в виде сетки с шестигранными ячейками [Budak et al., 2010], к каждой точке  $\mathbf{r}_{ij}$  которой хранится дискретное значение яркости по фиксированному направлению  $\hat{\mathbf{l}}_{pq}$  в соответствии с выбранной квадратурной формулой интегрирования по телесному углу (рис. 3.3).

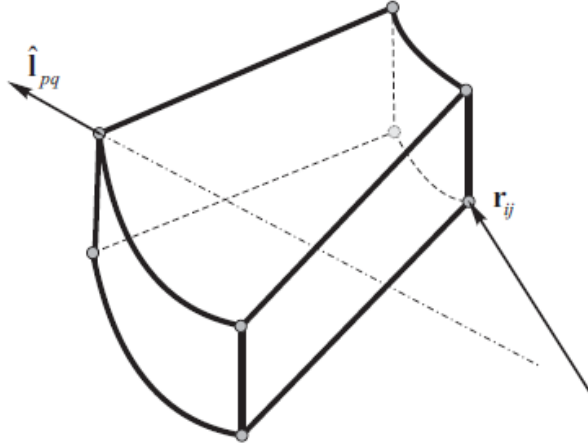


Рис. 3.3. Ячейка сетки для аппроксимации яркости между точками

В начале свертка по телесному углу вычисляется в каждой точке, а во время вычисления интеграла вдоль луча значения интеграла свертки интерполируются между точками, используя одну из схем аппроксимации.

Рассмотрим предложенный алгоритм в применении для плоского мононаправленного источника в рассеивающем плоском слое. В этом случае интегральное уравнение переноса в форме Пайерлса (3.12) принимает вид [Budak et al., 2010]

$$\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{i}}) = \begin{cases} \Delta(\tau, \hat{\mathbf{i}}) + \frac{\Lambda}{4\pi\mu} \int_0^\tau e^{-(\tau-t)/\mu} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') \tilde{L}(t, \hat{\mathbf{i}}') dt, & \mu \geq 0; \\ \Delta(\tau, \hat{\mathbf{i}}) + \frac{\Lambda}{4\pi|\mu|} \int_0^\tau e^{-(\tau-t)/\mu} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') \tilde{L}(t, \hat{\mathbf{i}}') dt, & \mu < 0; \end{cases} \quad (3.15)$$

где

$$\Delta(\tau, \hat{\mathbf{i}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \Delta_k(\tau, \mu) P_k(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_0) \quad (3.16)$$

есть функция источников, а

$$\Delta_k(\tau, \mu) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \Lambda x_k}{\mu_0 - d_k \mu} \left\{ \exp \left[ (\mu_0 - d_k \mu) \frac{\tau}{\mu \mu_0} \right] - 1 \right\} e^{-\tau/\mu} - \exp \left( -d_k \frac{\tau}{\mu_0} \right) + \exp(-\tau / \mu_0), \\ \mu \geq 0; \\ \left( \frac{\mu_0 \Lambda x_k}{\mu_0 - d_k \mu} \left\{ 1 - \exp \left[ (\mu_0 - d_k \mu) \frac{\tau_0 - \tau}{\mu \mu_0} \right] \right\} - 1 \right) \exp \left( -d_k \frac{\tau}{\mu_0} \right) + \exp(-\tau / \mu_0), \\ \mu < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Для вычисления была использована сетка, представляющая собой систему коаксиальных цилиндров. Расчеты показывают, что для этого случая сходимость наступает уже при восьми итерациях, а для нисходящего излучения количество итераций не превышает четырех [Budak et al., 2010]. При этом метод простых итераций не является оптимальным и может быть улучшен с помощью комбинации с двухпоточковым приближением (синтетическая итерация).

### 3.2. Решение УПИ для слоя мутной среды, содержащего цилиндрическое отверстие методом Монте-Карло

Для верификации решения по предложенному во второй главе подходу, проведем сначала анализ указанного случая переноса излучения в атмосфере с помощью метода Монте-Карло.

Поскольку мы имеем дело с плоским мононаправленным источником, необходимо разыгрывать не направление вылета луча, а его координату относительно отверстия в облаке. Поскольку и слой, и источник имеют бесконечные размеры, встает вопрос, на каком расстоянии от отверстия источник можно оборвать? Примем пока, что источник расходуется от нуля, который расположен на оси цилиндра на  $10R$ , где  $R$  – радиус отверстия. Высоту отверстия, наверное, разумно измерять в долях  $\tau_0$ . Зададимся верхней  $z_t$  и нижней  $z_b$  границами облака, которые однозначно определяют как положение облака в слое, так и его толщину.

В соответствии с выбором геометрических размеров источника розыгрыш координаты вылета луча будет определяться выражением

$$\rho = 10R\sqrt{\alpha}, \quad (3.18)$$

где  $\rho$  – радиус-вектор точки с координатами  $x, y$ ;  $\alpha$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0,1]$ .

Далее следует проверка на попадание в отверстие. Если  $\rho > R$ , то переходим к моделированию длины свободного пробега. В противном случае происходит попадание в отверстие. Рассмотрим пересечение луча с цилиндром.

Имеем уравнение луча

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi \hat{\mathbf{l}}, \quad (3.19)$$

где  $\mathbf{r}_0$  – точка выхода луча,  $\hat{\mathbf{l}}$  – вектор направления луча.

Точка на поверхности цилиндра на высоте  $h$  от основания должна удовлетворять уравнениям

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h)^2 = R^2, \quad (3.20)$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h, \hat{\mathbf{N}}) = 0, \quad (3.21)$$

где

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{r}_c + h\hat{\mathbf{N}} \quad (3.22)$$

- точка на оси цилиндра на высоте  $h$  от основания,  $\mathbf{r}_c$  – центр основания конуса,  $\hat{\mathbf{N}}$  – направление оси конуса,  $R$  – радиус основания конуса,  $H$  – высота конуса.

Рассмотрим уравнения (3.19), (3.21) и (3.22). Выразим из них высоту точки пересечения от основания

$$(\mathbf{r}_0 + \xi \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{r}_c - h\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{N}}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c, \hat{\mathbf{N}}) - h + \xi(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}}) = 0, \quad (3.23)$$

что приводит к выражению

$$h = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c, \hat{\mathbf{N}}) + \xi(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}}) \equiv l + \xi\mu. \quad (3.24)$$

Подставим полученный результат в (3.20)

$$\left( \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c - l\hat{\mathbf{N}} + \xi(\hat{\mathbf{l}} - (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}) \right)^2 = R^2,$$

что после возведения в квадрат дает

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c - l\hat{\mathbf{N}})^2 + 2\xi(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c - l\hat{\mathbf{N}})(\hat{\mathbf{l}} - (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}) + \xi^2(\hat{\mathbf{l}} - (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}})^2 = R^2,$$

или, раскрывая скобки, окончательно получим квадратное уравнение

$$\xi^2(1-\mu^2)^2 + 2\xi((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c, \hat{\mathbf{l}}) - l\mu) + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c)^2 - l^2 - R^2 = 0. \quad (3.25)$$

Из двух корней выбираем наименьший положительный.

В соответствии с (3.19) координаты пересечения луча с цилиндром

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_0 + \xi \hat{\mathbf{l}}. \quad (3.26)$$

Далее для луча в среде следует выбор длины свободного пробега. При постоянстве коэффициента ослабления она может быть определена следующим образом [Марчук и др., 1976; Будаков, 2007]:

$$\varepsilon \int_0^l \exp(-\varepsilon \xi) d\xi = \alpha \Rightarrow l = \ln \alpha. \quad (3.27)$$

Соответственно имеем новую координату положения луча

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \hat{\mathbf{l}}, \quad (3.28)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор предыдущей точки луча.

Дальше должна происходить проверка на вылет луча из среды. Для нижней и верхней границ условие вылета имеет вид

$$\varepsilon z' > \tau_0, \quad (3.29)$$

и проводится проверка по выражениям (3.19)-(3.26) на пересечение с цилиндром.

Далее для нашей задачи следует проверка на выход за пределы облака, которую можно представить так:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10R. \quad (3.30)$$

После указанных проверок производится розыгрыш угла рассеяния по индикатрисе рассеяния [Будаков, 2007]:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{\mu} x(\mu') d\mu' = \alpha. \quad (3.31)$$

В случае индикатрисы Хенни-Гринштейна формула розыгрыша косинуса угла рассеяния имеет вид [Будаков, 2007]

$$\mu = \frac{1}{2g} \left[ 1 + g^2 - \left( \frac{1 - g^2}{1 + g - 2g\alpha} \right)^2 \right]. \quad (3.32)$$

После чего статистический вес луча (исходя из чего он определяется?) умножается на  $\Lambda$ , производится локальная оценка по формуле

$$L(x) = L_0(x) + \frac{1}{M} \sum_{m=0}^M \left( \frac{k(x_m^0, x) L_0(x_m^0)}{p_1(x_m^0)} + \frac{k(x_m^0, x_m^1) k(x_m^1, x) L_0(x_m^0)}{p_1(x_m^0) p_2(x_m^0, x_m^1)} + \dots \right), \quad (3.33)$$

где  $k(x', x) \equiv k(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}'; \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda \varepsilon e^{-\varepsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \delta \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \hat{\mathbf{l}} \right)$ ; для сокращения записи

введено  $x = (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ .

Однако метод локальной оценки не позволяет рассчитать поток в заданном направлении, то есть яркость. Для этого используется метод двойной локальной оценки. В операторной форме интегральное УПИ эквивалентно следующему [Будак, 1998]:

$$f = K^2 f + K\psi + \psi, \quad (3.34)$$

где  $f(x)$  – плотность столкновений в фазовом пространстве  $x$ ;  $\psi(x)$  – плотность столкновений в источнике. Соответствующая этому уравнению локальная оценка

$$\varphi(x_n) = \oint_{(x)} k(x_n, x') k(x', x^*) dx' \quad (3.35)$$

и есть двойная локальная оценка, позволяющая вычислять яркость. Интеграл в (3.35) берется по лучу  $\mathbf{r}'(\zeta) = \mathbf{r}^* - \hat{\mathbf{l}}\zeta$ , и может оцениваться во одном случайном узлу  $\boldsymbol{\rho}'$  на луче визирования яркости с учетом ослабления по закону Бугера. Откуда имеем для двойной локальной оценки [Будак, 1998]

$$\varphi(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}, \zeta) = \frac{e^{-\tau(\mathbf{r}', \boldsymbol{\rho}')}}{16\pi^2 |\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{r}'|^2} x \left( \hat{\mathbf{l}}, \frac{\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{r}'}{|\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{r}'|} \right) x \left( \frac{\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{r}'}{|\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{r}'|}, \hat{\mathbf{l}}^* \right). \quad (3.36)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Дискретизованное уравнение переноса излучения имеет единственное аналитическое решение, поэтому эффективность алгоритмов в основном определяется методом выделения анизотропной части, где наилучшим является малоугловая модификация метода сферических гармоник.

2. Вследствие единственности решения дискретизованного уравнения переноса излучения, возможности повышения эффективности алгоритмов необходимо искать в направлении как можно более точного выделения анизотропной части решения, что приведет регулярную добавку к почти изотропной по углу функции, а значит, будет требовать меньше вычислительных ресурсов.

3. Использование синтетических итераций сильно уточняет решение, а потому для гладкой части является эффективным использование простейшего метода решения УПИ – двухпоточкового приближения, с помощью которого получается существенный выигрыш по времени по сравнению с методом дискретных ординат. При этом нет потери в точности, поскольку двухпоточковый метод совместно с МСГ точно учитывает энергетику, а угловое распределение уточняет итерация от полного решения.

4. С помощью предложенного подхода была разработана математическая модель переноса излучения в мутной среде, содержащей плоское облако с цилиндрическим отверстием, полностью готовая к реализации на компьютере.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Adams, M.L., Larsen, E.W. (2002) Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy, vol. 40, p. 3-159.
- Budak V.P., Korkin S.V. (2009) The Increase of Efficiency of Numerical Solution of the Vectorial Radiative Transfer Equation Based upon the Subtraction of the Anisotropic Part // AIP Conference Proceedings, Vol. 1100, Proc. Int. Rad. Symp. (IRC/IAMAS), Foz do Iguacu, Brazil, 3-8 August 2008. Eds. Nakajima T., Yamasoe M.A., p.27-30.
- Budak, V.P., Klyuykov, D.A., Korkin, S.V. (2010) Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // Light Scattering Review, vol. 5, p. 147-203.
- Budak, V.P., Klyuykov, D.A., Korkin, S.V. (2011) Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontal homogeneous slabs // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, V. 112, p. 1141-1148.
- Budak, V.P., Korkin, S.V. (2005) Mathematical model of the polarized light reflection by the turbid medium slab with an anisotropic scattering // Proc. SPIE, V. 5888. p. 363-370.
- Budak, V.P., Korkin, S.V. (2008b) On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // J Quant Spectrosc Radiat Transfer, V. 109, № 1, p.220-234.
- Chambers, L.H., Wielicki, B.A., Evans, K.F. (1997) Accuracy of the independent pixel approximation for satellite estimates of oceanic boundary layer cloud optical depth // Journal of Geophysical Research, vol. 102, p. 1779-1794.
- Чандрасекар, С. (1953) Перенос лучистой энергии // Издательство иностранной литературы, Москва, 432 с.
- Chen, Y., Liou, K.N., Gu, Y. (2005) An efficient diffusion approximation for 3D radiative transfer parameterization: application to cloudy atmospheres // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, vol. 92, p. 189-200.



- Chylek, P., Borel, C., Davis, A.B., Bender, S., Augustine, J., Hodges, G. (2004) Effect of Broken Clouds on Satellite-Based Columnar Water Vapor Retrieval // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, vol. 1, p. 175-178.
- Cook, P.A., de Oliveira, C.R.E., Haigh, J.D., Goddard, A.J. (2004) A finite element-spherical harmonics model for radiative transfer in inhomogeneous clouds. Part II. Some applications // Atmospheric Research, vol. 72, p. 223-237.
- Corti, T., Peter, T. (2009) A simple model for cloud radiative forcing // Atmospheric Chemistry and Physics, vol. 9, p. 5751-5758.
- Frame, J.W., Petters, J.L., Markowski, P.M., Harrington, J.Y. (2009) An application of the tilted independent pixel approximation to cumulonimbus environments // Atmospheric Research, vol. 91, p. 127-136.
- Hamazaki, T. (2008) Overview of TANSO and GOSAT
- Herman, M. (1965) Developpements en fonctions generalisees de Legendre, des termes de la matrice de diffusion d'une particule spherique, deduits de la theorie de Mie // C. R. Acad. Sc., 260., p.468.
- <http://eospsso.gsfc.nasa.gov/>
- <http://oco.jpl.nasa.gov/>
- [http://smiswww.iki.rssi.ru/d33\\_conf/thesisshow.aspx?page=32&thesis=1671](http://smiswww.iki.rssi.ru/d33_conf/thesisshow.aspx?page=32&thesis=1671)
- [http://www.gosat.nies.go.jp/index\\_e.html](http://www.gosat.nies.go.jp/index_e.html)
- [http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4\\_syr\\_ru.pdf](http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4_syr_ru.pdf)
- <http://www-calipso.larc.nasa.gov/>
- Kaper, H.G., Kellogg, R.B. (1977) Continuity and Differentiability Properties of the Solution of the Linear Transport Equation // SIAM J. Appl. Math., 32. p. 201-214.
- Kassianov, E., Ovchinnikov, M., Berg, L.K., McFarlane, S.A., Flynn, C. (2009) Retrieval of aerosol optical depth in vicinity of broken clouds from reflectance ratios: Sensitivity study // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, vol. 110, p. 1677-1689.
- Kassianov, E., Ovchinnikov, M., Berg, L.K., McFarlane, S.A., Flynn, C., Ferrare, R., Hostetler, C., Alexandrov, M. (2010) Retrieval of aerosol optical depth in vicini-

ty of broken clouds from reflectance ratios: case study // Atmospheric Measurement Techniques, vol. 3, p. 1333-1349.

Kniffka, A., Trautmann, T. (2011) Combining the independent pixel and point-spread function approaches to simulate the actinic radiation field in moderately inhomogeneous 3D cloudy media // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, vol. 112, p. 1383-1393.

Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., Duan M., Emde C., Katsev I.L., Klyukov D.A., Korkin S.V., C-Labonnote L., Mayer B., Min Q., Nakajima T., Ota Y., Prikhach A.S., Rozanov V.V., Yokota T., Zege E.P. (2010) Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 2010. V. 111, N 12-13, p.1931-1946.

Kokhanovsky, A.A., Mayer, B., Rozanov, V.V., Wapler, K., Lamsal, L.N., Weber, M., Burrows, J.P., Schumann, U., (2007) Satellite Ozone Retrieval Under Broken Cloud Conditions: An Error Analysis Based on Monte Carlo Simulations // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 45, p. 187-194.

Kokhanovsky, A.A., Rozanov, V.V. (2008) The uncertainties of satellite DOAS total ozone retrieval for a cloudy sky // Atmospheric Research, vol. 87, p. 27-36.

Koren, I., L. A. Remer, Y. J. Kaufman, Y. Rudich, and J. V. Martins (2007) On the twilight zone between clouds and aerosols, Geophysical Research Letters, 34.

Kuščer, I., Ribarič, M. (1959) Matrix formalism in the theory of diffusion of light // Opt. Acta., V. 6, p. 42–51.

Marshak, A., Davis, A., Wiscombe, W., Titov, G., (1995) The Verisimilitude of the Independent Pixel Approximation Used in Cloud Remote Sensing // Remote Sens. Environ., vol. 52, p. 71-78.

Marshak, A., Wen, G., Coakley, J., Remer, L., Loeb, N., Cahala, R. (2008) A simple model for the cloud adjacency effect and the apparent bluing of aerosols near clouds // Journal of Geophysical Research, vol. 113.

Rayner, P. J., O'Brien, D. M. (2001) The utility of remotely sensed CO<sub>2</sub> concentration data in surface source inversions // Geophysical Research Letters, vol. 1, p. 175-178.

- Richtsmeier, S., Sundberg, R. (2010) Full Spectrum Broken Cloud Scene Simulation // Proc. SPIE, 7475.
- Sokoletsky L.G., Nikolaeva O.V., Budak V.P., Bass L.P., Lunetta R.S., Kuznetsov V.S., Kokhanovsky A.A. (2009) A comparison of numerical and analytical radiative-transfer solutions for plane albedo of natural waters // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, V. 110, P. 1132–1146.
- Varnai, T., Davies, R. (1999) Effects of cloud heterogeneities on shortwave radiation: comparison of cloud-top variability and internal heterogeneity // Journal of Atmospheric Science, vol. 56, p. 4206–4224.
- Zuidema, P., Xue, H., Feingold G. (2008) Shortwave Radiative Impacts from Aerosol Effects on Marine Shallow Cumuli // Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 65, p. 1979-1990.
- Адзериho, К.С. (1975) Лекции по теории переноса лучистой энергии // Издательство БГУ им. В.И. Ленина, Белоруссия, 192 с.
- Астахов, И.Е., Будак, В.П., Лисицын, Д.В, Селиванов, В.А. (1994) Решение векторного уравнения переноса в малоугловой модификации метода сферических гармоник // Оптика атмосферы и океана, Т.7, № 6. с.753-761.
- Будак В.П, Мельников, Г.А., Савенков, В.И., Федосов, В.П. (1984) Малоугловая модификация метода сферических гармоник // В кн.: Оптика моря и атм. Л.:ГОИ, с.119-120.
- Будак В.П., Козельский, А.В. (2005) О точности и границах применимости малоуглового приближения // Оптика атм. и океана, Т.18. № 1. с. 38-44.
- Будак, В.П. (1986) Малоугловая модификация метода сферических гармоник для расчета светового поля бесконечно широкого пучка в мутных средах // Сб. научн. труд. МЭИ, № 106. с. 20-25.
- Будак, В.П. (1998) Малоугловая теория диффузного светового поля // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук.
- Будак, В.П. (2007) Методы решения уравнения переноса излучения: учебное пособие // Издательский дом МЭИ, Москва, 52 с.

- Будак, В.П., Ефременко, Д.С., Шагалов, О.В. (2011) Сравнительный анализ алгоритмов решения векторного уравнения переноса излучения по эффективности для плоского слоя мутной среды // Оптика атмосферы и океана, 24, с. 1088-1097.
- Будак, В.П., Козельский А.В., Савицкий А.Н. (2004) Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии // Оптика атмосферы и океана, Т.17, № 1, с. 36-41.
- Будак, В.П., Коркин, С.В. (2008а) Моделирование пространственного распределения степени поляризации рассеянного атмосферой излучения на основании полного аналитического решения векторного уравнения переноса // Оптика атмосферы и океана, Т. 21, № 1, с.35-41.
- Будак, В.П., Мельников, Г.А., Савенков, В.И. (1983) Использование метода сферических гармоник для расчета световых полей в мутных средах с анизотропным рассеянием // Межвед. тем. сб. МЭИ, № 12, с. 9-16.
- Будак, В.П., Савенков, В.И. (1982) О новом решении уравнения переноса излучения в рамках малоуглового приближения // Тр. Моск. энерг. ин-т, № 591. с. 141-144.
- Будак, В.П., Сармин, С.Е. (1990) Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосферы, Т.3, № 9. с. 981-987.
- Будак, В.П., Федосов, В.П. (1985) О связи малоугловых форм приближенного решения уравнения переноса // В кн.: Круговорот вещества и энерг. в водоемах - Иркутск: ЛИ СО АН СССР, с.78-79.
- Марчук, Г.И., Лебедев, В.И. (1981) Численные методы в теории переноса нейтронов // М.: Атомиздат, 436с.
- Марчук, Г.И., Михайлов, Г.А., Назаралиев, М.А., Дарбинян, Р.А., Каргин, Б.А., Елепов, Б.С. (1976) Метод Монте-Карло в атмосферной оптике // Издательство «Наука», Сибирское отделение, Новосибирск, 283 с.

Романова, Л.М. (1962) Решение уравнения переноса излучения в случае индикатрисы рассеяния, сильно отличающейся от сферической // ЖОС, Т.13.-  
Часть I: N3. с.429-435; Часть II: N6. с.819-825.

Соболев, В.В. (1956) Перенос лучистой энергии в атмосферах звёзд и планет // М.: ГИТТЛ, 391 с.