

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

---

**И.В. КОРОГОДИН  
Е.В. ЗАХАРОВА**

**МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ**

**Лабораторный практикум**

по курсу «Математическое моделирование радиотехнических устройств и систем» для студентов, обучающихся по направлению 11.04.01 «Радиотехника»

Москва

Издательство МЭИ

2020

## Оборот титула

УДК 621.396

ББК 32.811

К 681

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»*

*в качестве учебного издания*

*Подготовлено на кафедре радиотехнических систем*

Рецензенты: канд. техн. наук, зав. каф. РТС Р.С. Куликов,  
канд. техн. наук, доцент кафедры РЛ-1 МГТУ им.  
Н.Э. Баумана А.В. Пельтин

**Корогодин, И.В.**

К 681 Методы моделирования радиотехнических устройств и систем: лабораторный практикум / И.В. Корогодин, Е.В. Захарова.— М.: Издательство МЭИ, 2020. – 79 с.

ISBN ...

Лабораторный практикум содержит описания и программы лабораторных работ, основные теоретические сведения, описание последовательности выполнения работы, пример оформления отчета, контрольные вопросы. Включены четыре лабораторные работы по изучению четырех основных методов построения математических моделей радиосистем в приложении моделирования радиотехнических устройств: метода несущей, метода комплексных амплитуд, метода статистических эквивалентов и метода информационного параметра.

Продолжительность каждого лабораторного занятия – 4 ч. для студентов, обучающихся по направлению «Радиотехника».

УДК 621.396

ББК 32.811

ISBN ...

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2020

**Концевая полоса**

---

*Учебное издание*

**Корогодин** Илья Владимирович

**Захарова** Елена Владимировна

**МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ**

**Лабораторный практикум**

по курсу «Математическое моделирование радиотехнических устройств и систем» для студентов, обучающихся по направлению «Радиотехника»

Редактор Д.Р. Чернова

Компьютерная верстка З.Х. Айнетдиновой

---

Подписано в печать ...

Печать офсетная

Формат 60x84/16

Физ. печ. л. 5

Тираж 50 экз.

Изд. №...

Заказ №...

---

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».

111250, Москва, ул. Красноказарменная, д.14.

Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».

111250, Москва, ул. Красноказарменная, д.13.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	5
1. Лабораторная работа №1 «Моделирование электрических цепей методом несущей».....	6
1.1. Краткие теоретические сведения.....	6
1.1.1. Метод несущей.....	6
1.1.2. Процедура моделирования.....	6
1.2. Лабораторное задание.....	8
1.3. Контрольные вопросы.....	9
1.4. Приложение 1. Пример оформления отчета.....	14
1.4.1. Пример оформления титульного листа.....	14
1.4.2. Постановка задачи.....	14
1.4.3. Математические модели.....	15
1.4.4. Псевдокод компьютерной модели.....	19
1.4.5. Тестовое воздействие.....	20
1.4.6. Проверка модели.....	20
1.4.7. Результаты моделирования.....	22
1.4.8. Анализ результатов моделирования.....	26
2. Лабораторная работа №2 «Диаграмма направленности антенной решетки».....	27
2.1. Краткие теоретические сведения.....	27
2.1.1. Метод комплексных амплитуд.....	27
2.1.2. Антенные решетки.....	28
2.2. Лабораторное задание.....	32
2.3. Контрольные вопросы.....	36
2.4. Приложение 1. Пример оформления отчета.....	36
2.4.1. Постановка задачи.....	36
2.4.2. Математические модели.....	37
2.4.3. Псевдокод компьютерной модели.....	38
2.4.4. Тестовые воздействия и условия.....	38
2.4.5. Проверка модели.....	39
2.4.6. Результаты моделирования.....	41
2.4.7. Анализ результатов моделирования.....	47
3. Лабораторная работа №3 «Модель обнаружителя сигнала».....	48
3.1. Краткие теоретические сведения.....	48
3.1.1. Метод статистических эквивалентов.....	48
3.1.2. Статистический эквивалент коррелятора.....	49
3.1.3. Обнаружитель сигнала.....	52
3.2. Лабораторное задание.....	54
3.3. Контрольные вопросы.....	57

3.4. Приложение 1. Пример оформления отчета.....	57
3.4.1. Постановка задачи.....	58
3.4.2. Математические модели.....	58
3.4.3. Псевдокод компьютерной модели.....	59
3.4.4. Тестовые воздействия.....	60
3.4.5. Проверка модели в тестовых условиях.....	61
3.4.6. Результаты моделирования.....	64
3.4.7. Анализ результатов моделирования.....	66
4. Лабораторная работа №4 «Моделирование следящей системы».....	66
4.1. Краткие теоретические сведения .....	66
4.1.1. Модель процесса частоты сигнала.....	66
4.1.2. Система слежения за частотой.....	67
4.1.3. Метод информационного параметра.....	69
4.2. Лабораторное задание.....	70
4.3. Контрольные вопросы.....	71
4.4. Приложение 1. Пример оформления отчета.....	72
4.4.1. Постановка задачи.....	72
4.4.2. Математические модели.....	73
4.4.3. Тестовое воздействие.....	74
4.4.4. Проверка модели в тестовых условиях.....	74
4.4.5. Результаты моделирования.....	77
4.4.6. Анализ результатов моделирования.....	78
Список рекомендованной литературы.....	79

## ***ПРЕДИСЛОВИЕ***

Данный лабораторный практикум включает в себя четыре лабораторных работы и предназначен для студентов, изучающих базовый курс: «Математическое моделирование радиотехнических устройств и систем».

В лабораторных работах изучаются и подробно исследуются четыре основных метода построения математических моделей радиосистем в приложении моделирования радиотехнических устройств, а именно: в лабораторной работе №1 – метод несущей на примере моделирования аналогового устройства; в лабораторной работе №2 – метод комплексных амплитуд на примере построения диаграммы направленности многоэлементной антенной системы; в лабораторной работе №3 – метод статистических эквивалентов при моделировании обнаружителя сигнала с неизвестной начальной фазой, частотой и задержкой; в лабораторной работе №4 – метод информационного параметра при моделировании следящей системы за частотой сигнала второго порядка. Также в лабораторных работах изучается методология компьютерного моделирования в целом.

Таким образом, освещены основные методы построения математических моделей радиосистем в приложении моделирования радиотехнических устройств, приведены математические модели радиоустройств и систем, описаны псевдокоды компьютерных моделей с учетом выбранных математических моделей и представлены примеры кодов компьютерных моделей в MATLAB.

# ***1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 «МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ НЕСУЩЕЙ»***

**Цель работы:** изучение метода несущей на примере моделирования аналогового устройства; получение опыта исследования радиотехнических устройств посредством компьютерного моделирования; развитие навыков моделирования в MATLAB/Octave.

## **1.1. Краткие теоретические сведения**

В лабораторной работе №1 изучается метод несущей в приложении моделирования радиотехнических устройств и методология компьютерного моделирования в целом. В качестве объекта моделирования используется электрическая цепь. Ставится задача поиска характеристик цепи и её реакции на различные входные воздействия.

### **1.1.1. Метод несущей**

По способу описания входных воздействий и переменных состояния методы построения математических моделей радиосистем можно разделить на [1]:

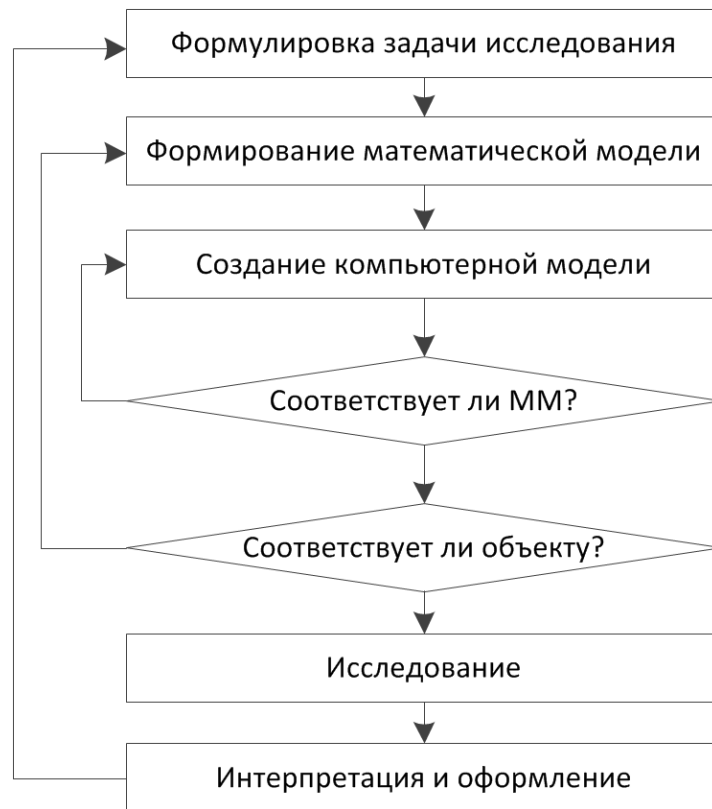
- метод несущей;
- метод комплексных амплитуд;
- метод статистических эквивалентов;
- метод информационного параметра.

При использовании метода несущей аналоговые сигналы описываются своими отсчетами, сформированными в соответствии с теоремой Котельникова. Цифровые сигналы воспроизводятся в темпе их поступления с АЦП или формирования цифровыми схемами.

При этом методе сигналы воспроизводятся в моделях в форме мгновенных значений напряжений, токов и т.п. параметров [1]. Для преобразования сигналов используются дифференциальные уравнения, функциональные (спектральные, временные) преобразования.

### **1.1.2. Процедура моделирования**

Последовательность действий, производимых при проведении компьютерного моделирования, представлена на рис. 1.1. Схема определяет как ход выполнения лабораторной работы, так и структуру итогового отчета.



**Рис. 1.1. Процедура компьютерного моделирования**

Проведение любого исследования начинается с постановки задачи. Это один из наиболее сложных и ответственных этапов. Определяется объект моделирования, после чего формулируется цель исследования – на какие вопросы должно ответить моделирование? Обладая априорными знаниями об объекте, с учетом поставленной цели определяются рамки объекта, в которых его должна воспроизводить модель. Формируется математическая модель объекта с необходимой степенью детализации и допущениями, влияние которых на результат, по мнению исследователя, пренебрежимо мало.

Математическая модель отображается в компьютерную. После чего производится проверка соответствия компьютерной модели математической в частных случаях, допускающих аналитическое решение. При необходимости вносятся правки в компьютерную модель.

Когда компьютерная модель приведена в соответствие математической, при моделировании сложных устройств и систем проверяют подобие поведения компьютерной модели объекту исследования в установленных рамках. Выявляют тем самым недостатки математической модели, при необходимости вносят коррективы. На этом же этапе выбирают параметры модели так, чтобы она максимально соответствовала объекту исследования.



После согласования объекта, математической и компьютерной модели планируют и проводят непосредственные исследования. Выбирают диапазоны и шаг варьируемых параметров, объем статистики. Выполняют компьютерную симуляцию.

После получения результатов моделирования проводят их интерпретацию. Если исследование ответило на поставленные вопросы, а принятые допущения не привели к противоречиям, то оформляется отчет о результатах моделирования. В противном случае корректируется постановка задачи и исследование повторяется [2, 3].

## 1.2. Лабораторное задание

Объектом исследования является электрическая цепь, описанная в виде принципиальной схемы (табл. 1.1, 1.2) и спецификации элементов.

В ходе лабораторной работы требуется:

1) для линейных цепей:

- построить график амплитудно-частотной характеристики, подавая в качестве входного воздействия гармонические колебания различной частоты и наблюдая амплитуду отклика;

- построить график отклика цепи на воздействие в виде белого шума.

2) для нелинейных цепей:

- построить серию осциллограмм выходного напряжения при синусоидальном входном воздействии с амплитудами от 0 до 3 В;

- построить график отклика цепи на воздействие в виде белого шума.

Из методических соображений необходимо использовать метод несущей для описания сигналов и элементов.

При подготовке к лабораторной работе студент выполняет первые этапы процедуры компьютерного моделирования и оформляет соответствующие разделы отчета. При выполнении домашней подготовки требуется разработать и занести в отчет (см. разделы 1.4.1-1.4.5 примера оформления отчета о лабораторной работе в Приложении 1):

- формулировку задачи, предлагаемые допущения;

- математическую модель электрической цепи и входного воздействия;

- математические модели тестовых воздействий и условий, с помощью которых предлагается проверять соответствие компьютерной модели математической, а также результаты аналитических расчетов предполагаемых откликов;

- алгоритм компьютерной модели, написанный на псевдокоде или в нотации MATLAB/Octave/Си [4].

### В лаборатории:

1. На основании подготовленного алгоритма составьте программу на языке используемой среды моделирования.

2. Проверьте программу на соответствие выбранной математической модели, сформировав тестовые воздействия и условия, предложенные в ходе домашней подготовки. При выявлении расхождения результатов моделирования и аналитических расчетов проведите отладку программы.

3. Последовательно выполните моделирование по плану:

- построение АЧХ (для линейных цепей);
- построение серии осциллограмм выходного напряжения (для нелинейных цепей);
- построение графика реакции на шумовое входное воздействие.

4. Оцените адекватность полученных результатов, их соответствие общетеоретическим соображениям.

5. Составьте отчет о проведенном моделировании. В состав отчета должны входить:

- постановка задачи;
- используемая математическая модель и обоснование её выбора;
- аналитический расчет результата тестовых воздействий, сопоставленный с соответствующими результатами проверки компьютерной модели;
- листинг используемых в процессе исследования программ;
- полученные результаты и их интерпретация, вывод о достижении или не достижении цели исследования.

### **1.3. Контрольные вопросы**

1. Составьте математическую модель для электрической цепи, заданной преподавателем.

2. Как составить алгоритм для численного интегрирования дифференциальных уравнений?

3. Что такое переходный процесс и установившийся режим?

4. Как задаются начальные условия для моделирования электрической цепи?

5. Поясните функционирование компьютерной модели и назначение используемых в ней команд.

6. Что есть метод несущей при моделировании радиотехнических устройств и цепей?

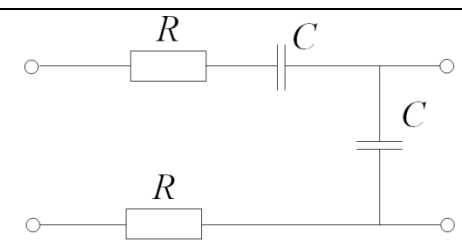
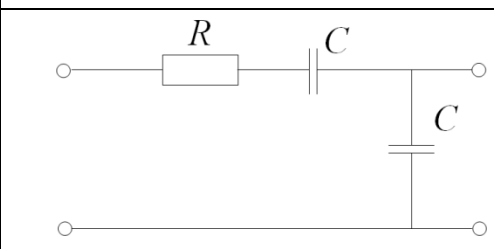
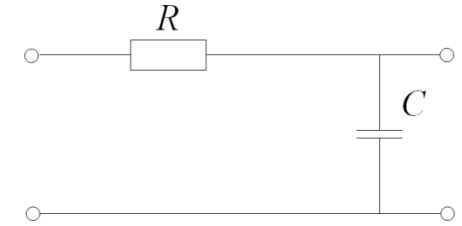
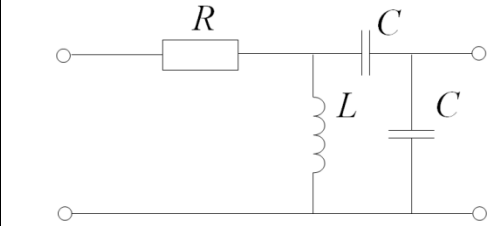
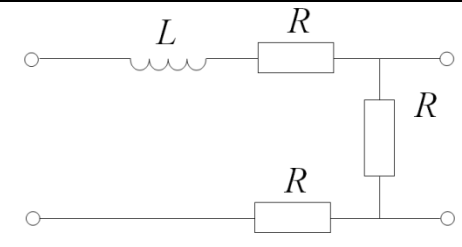
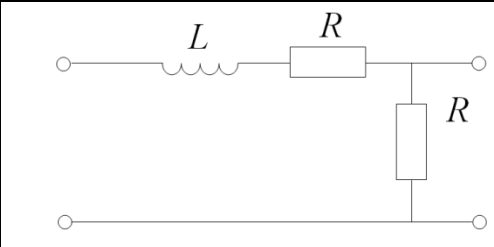
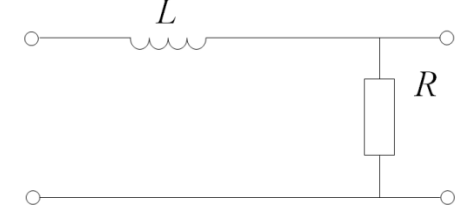
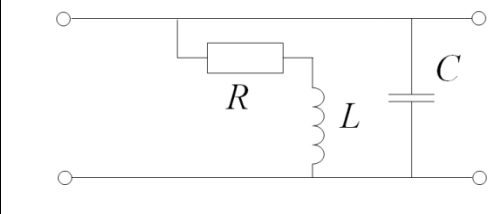
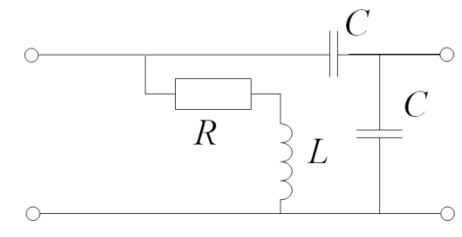
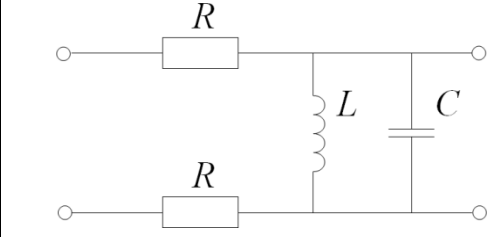
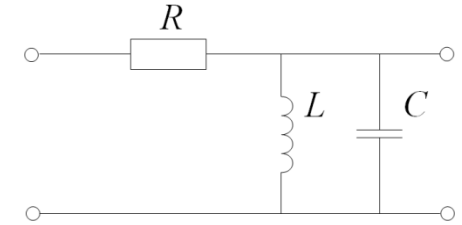
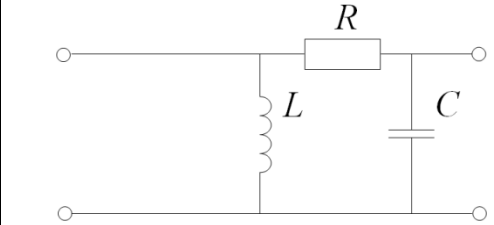
7. Из каких этапов состоит процедура компьютерного моделирования? В чем назначение каждого этапа?

## Варианты заданий

Вариант	Схема	Номиналы
1	10	$R = 47 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
2	6	$R = 120 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
3	22	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
4	21	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
5	3	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
6	17	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
7	2	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
8	2	$R = 47 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
9	4	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
10	13	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
11	3	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
12	15	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
13	20	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
14	8	$R = 47 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
15	1	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
16	14	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
17	19	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
18	15	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
19	7	$R = 220 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
20	25	$C = 33 \text{ пкФ}$
21	4	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
22	5	$R = 220 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
23	4	$R = 47 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
24	11	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
25	5	$R = 47 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
26	16	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
27	7	$R = 47 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
28	24	$C = 33 \text{ пкФ}$
29	13	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
30	23	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$

Вариант	Схема	Номиналы
31	17	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
32	12	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
33	2	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
34	10	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
35	18	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
36	16	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
37	21	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
38	9	$R = 47 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
39	19	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
40	5	$R = 120 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
41	6	$R = 47 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
42	1	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
43	8	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
44	6	$R = 220 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
45	11	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
46	7	$R = 120 \text{ Ом}, L = 100 \text{ мкГ}$
47	18	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
48	23	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
49	24	$C = 68 \text{ пкФ}$
50	12	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
51	9	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
52	14	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
53	1	$R = 47 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
54	8	$R = 120 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
55	22	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
56	10	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
57	20	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
58	9	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}, L = 100 \text{ мкГ}$
59	3	$R = 220 \text{ Ом}, C = 33 \text{ пкФ}$
60	25	$C = 68 \text{ пкФ}$

## Принципиальные схемы электрических цепей

№	Принципиальная схема	№	Принципиальная схема
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	

№	Принципиальная схема	№	Принципиальная схема
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	
21		22	
23		24	
25		26	

## 1.4. Приложение 1. Пример оформления отчета

### 1.4.1. Пример оформления титульного листа

<p>НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»</p> <p>Отчет</p> <p>о выполнении лабораторной работы №1 «Моделирование электрических цепей методом несущей»</p> <p>Студент гр. ЭР-77-15 Иванов Иван Иванович Вариант 60 Преподаватель Сидоров Сидр Сидорович</p> <p>Москва, 2020</p>
--

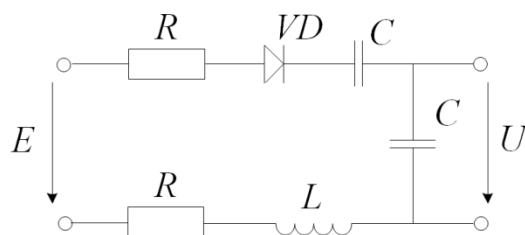
### 1.4.2. Постановка задачи

Участок электрической цепи описан принципиальной схемой 26, приведенной на рис. 1.2.

Согласно спецификации номиналы резисторов  $R$  составляют 120 Ом, ёмкость конденсаторов  $C$  – 33 пФ, индуктивность дросселя – 100 мкГ, что соответствует элементам, изображенным на рис. 1.3.

Тип диода не задан, будем считать его кремниевым с напряжением отпириания 0,6 В. При моделировании примем допущение о кусочно-

линейном виде вольтамперной характеристики (ВАХ) диода, вид которой определим в следующем разделе.



**Рис. 1.2.** Принципиальная схема изучаемого участка электрической цепи



**Рис. 1.3.** Резистор, конденсатор и катушка моделируемой цепи

Паразитными ёмкостями, индуктивностями, сопротивлениями элементов пренебрежем.

Требуется:

- построить серию осциллограмм выходного напряжения при синусоидальном входном воздействии с амплитудами от 0 до 3 В;
- построить график отклика цепи на воздействие в виде белого шума.

### 1.4.3. Математические модели

#### 1. Описание электрической цепи

Перед составлением математических моделей преобразуем принципиальную схему к эквивалентному виду (рис. 1.4).

На эквивалентной схеме  $C_1$  – эквивалентная емкость двух последовательно включенных конденсаторов  $C$ :

$$C_1 = \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \right)^{-1} = C/2,$$

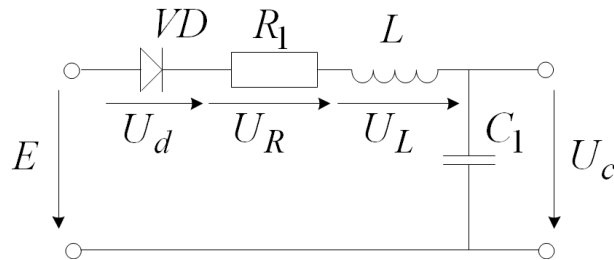


напряжение  $U_c$  – удвоенное искомое напряжение

$$U = \frac{U_c}{2},$$

сопротивление  $R_1$  соответствует двум последовательно включенным резисторам  $R$

$$R_1 = 2R.$$



**Рис. 1.4. Эквивалентная схема цепи**

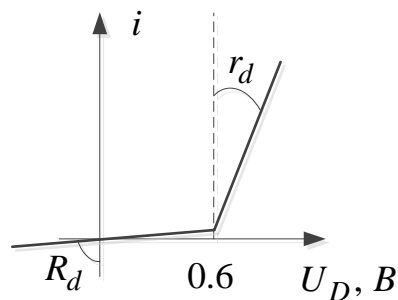
После преобразования схема соответствует хорошо знакомому студентам последовательному LC-контуре, к которому последовательно же подключен диод.

Согласно постановке задачи, допустимо использовать кусочно-линейную ВАХ (рис. 1.5). Наклон кривой в области проводимости соответствует кремниевому диоду 2Д103А:

$$r_d = 1.25 \text{ Ом},$$

а в при закрытом диоде

$$R_d = 40000 \text{ Ом}.$$

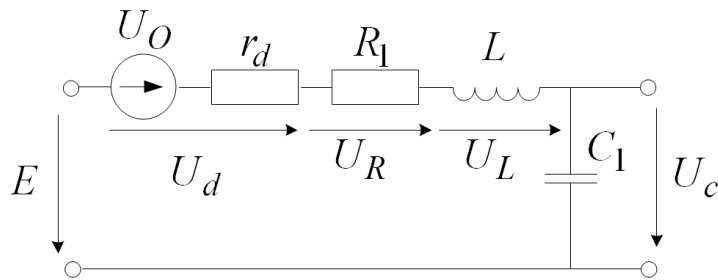


**Рис. 1.5. Вольтамперная характеристика диода**

Если диод открыт, то эквивалентная схема упрощается до вида, изображенного на рис. 1.6. Этому случаю соответствует условие:

$$E - U_L - U_c \geq U_o,$$

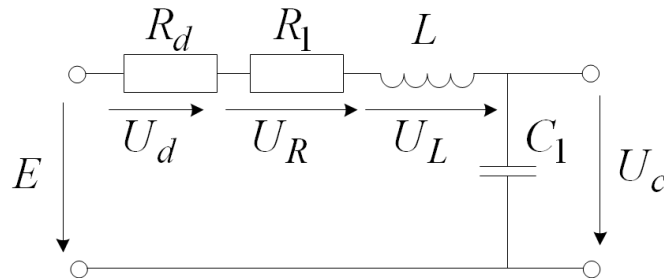
где  $U_o \approx 0,6$  В – напряжение отпираания кремниевого диода.



**Рис. 1.6.** Эквивалентная схема цепи при открытом диоде

Если диод закрыт, то эквивалентная схема упрощается до вида, изображенного на рис. 1.7. Этому случаю соответствует условие:

$$E - U_L - U_c < U_o.$$



**Рис. 1.7.** Эквивалентная схема цепи при закрытом диоде

Для моделирования цепи необходимо найти отображение  $E$  в  $U_c$ .

Математические модели элементов цепи:

- эквивалентный конденсатор:

$$i = C_1 \frac{dU_c}{dt},$$

- катушка индуктивности:

$$U_L = L \frac{di}{dt},$$

- резистор:

$$U_R = iR_1$$

- диод:

$$U_d = iR_d, \quad E - U_L - U_c < U_o,$$

$$U_d = ir_d + U_o, \quad E - U_L - U_c \geq U_o.$$

Связь входного напряжения с напряжением на элементах цепи задается вторым законом Кирхгофа:

$$E = U_d + U_R + U_L + U_C.$$

В рассматриваемой системе можно выделить ряд внутренних фазовых переменных:

- ток  $i$  и его производная  $\frac{di}{dt}$ ,

- напряжение на конденсаторе  $U_C$  и его производная  $\frac{dU_C}{dt}$

и т.д. Но согласно приведенным выражениям лишь три переменных оказываются независимыми.

Перейдем от дифференциальных к разностным уравнениям для момента  $t_k = kT$ , где  $T$  – шаг дискретизации.

Напряжение  $U_D$  определяется фактом открытия/закрытия диода:

$$U_{d,k} = i_k R_d, \quad E_k - U_{L,k} - U_{c,k} < U_o,$$

$$U_{d,k} = i_k r_d + U_o, \quad E_k - U_{L,k} - U_{c,k} \geq U_o.$$

Напряжение на эквивалентном резисторе определяется током в цепи:

$$U_{R,k} = i_k R_1.$$

Любое изменение входного напряжения приводит, в первую очередь, к изменению напряжения на катушке индуктивности:

$$U_{L,k} = E_k - U_{d,k-1} - U_{R,k-1} - U_{C,k-1},$$

что приводит к изменению производной тока:

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_k = \frac{U_{L,k}}{L},$$

$$i_k = i_{k-1} + \left( \frac{di}{dt} \right)_{k-1} T.$$

Конденсатор интегрирует этот ток, увеличивая своё напряжение:

$$\left( \frac{dU_C}{dt} \right)_k = \frac{i_k}{C_1},$$

$$U_{C,k} = U_{C,k-1} + \left( \frac{dU_C}{dt} \right)_{k-1} T.$$

Искомое напряжение на конденсаторе составляет половину от напряжения на эквивалентном конденсаторе:

$$U_k = U_{c,k} / 2.$$

Приведенные выражения задают отображение  $E_k$  в  $U_k$ .

В качестве входных воздействий на цепь предполагаются гармоническое колебание и белый шум. Математические модели процессов в этих случаях:

- гармоническое колебание:

$$E_k = A \cos(2\pi f t_k),$$

где  $A$  принимает значения 0, 1, 2, 3 В;  $f$ , для наглядности, выберем равной резонансной частоте:

$$f = f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{LC}}$$

- белый шум:

$$E_k = N(0, \sigma_n^2),$$

где  $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T}$  - дисперсия дискретного белого гауссовского шума с односторонней спектральной плотностью мощности  $N_0$ . Характеристики шума не заданы, возьмем  $\sigma_n^2 = 13$ .

В обоих случаях  $t_k = kT$ , где  $T$  – интервал дискретизации, выберем так, чтобы частота дискретизации была значительно больше удвоенной резонансной частоты:

$$T = \frac{1}{10000 f_0}.$$

## 2. Выбор начальных условий

Состояние цепи можно определить тремя независимыми фазовыми переменными. В качестве таких троек можно выбирать различные параметры, но при выбранной записи разностных уравнений удобно использовать ток, его производную и начальное напряжение на конденсаторе. Положим их равными нулю.

### 1.4.4. Псевдокод компьютерной модели

С учетом выбранных математических моделей получаем следующий псевдокод компьютерной модели:

*Подготовка среды*

*Ввод внутренних параметров (емкость, сопротивление, индуктивность, параметры модели диода)*

*Расчет резонансной частоты  $f_0$*

*Расчет интервала дискретизации  $T$*

*Создание вектора оси времени  $t$*

*Ввод внешних параметров (Амплитуды гармоник, СКО шума)*

Создание вектора входной фазовой переменной  $E$   
Выделение памяти для сохранения внутренних фазовых переменных  
Задание начальных условий  
Цикл по внешним параметрам  
    Цикл по времени  
        Отображение  $E$  в  $U$   
        Конец цикла по времени  
    Конец цикла по внешним параметрам  
Вывод результатов

### 1.4.5. Тестовое воздействие

**Условия:** Обнулیم сопротивления  $R_d$ ,  $r_d$  и напряжение  $U_o$ , подадим скачок уровнем 10 В.

**Ожидаемый результат:** При обнулении параметров диода мы приходим к последовательному LC-контуре. Реакция на скачок – колебательный процесс с резонансной частотой (3,9 МГц), постепенно затухающий к уровню входного напряжения (т.е. напряжение  $U$  к уровню 10 В). Скорость затухания колебаний определяется добротностью контура.

### 1.4.6. Проверка модели

Код компьютерной модели [4]:

#### LC1.m

```
clear all; close all; clc;
% Внутренние параметры
R = 120; % Ом
C = 33e-12; % Ф
L = 100e-6; % Гн
C1 = C/2;
R1 = 2*R;
Rd = 0; % Параметры диода
rd = 0;
Uo = 0;
omega0 = 1/sqrt(L*C1); % Резонансная частота
f0 = omega0 / 2 / pi;
fprintf('f0 = %f МГц\n', f0/1e6);
% Ось времени
T = 1 / (10000*f0);
t = 0:T:(15 * 1/f0);
lt = length(t);
```

```

% Выделение памяти
Uc = nan(1, lt);
Ul = nan(1, lt);
dUc = nan(1, lt);
Ud = nan(1, lt);
i = nan(1, lt);
di = nan(1, lt);
% Внешние параметры, внешние фазовые переменные
E = 10*ones(1, lt);
% Начальное состояние
Uc(1) = 0; % Начальное напряжение конденсатора
i(1) = 0; % В начальный момент ток в цепи отсутствует
di(1) = 0;
Ul(1) = di(1) * L; % Напряжение на катушке
for k = 2:lt
    % Напряжение на диоде
    if (E(k-1) - Ul(k-1) - Uc(k-1)) < Uo
        Ud(k-1) = Rd*i(k-1);
    else
        Ud(k-1) = rd*i(k-1) + Uo;
    end
    Ul(k) = E(k) - Uc(k-1) - i(k-1)*R1 - Ud(k-1); % Напряжение на катушке
    di(k) = Ul(k) / L; % вызывает приращение тока,
    i(k) = i(k-1) + di(k-1)*T;
    dUc(k) = i(k) / C1; % который определяет заряд конденсатора
    Uc(k) = Uc(k-1) + dUc(k)*T;
end
U = Uc / 2;
figure(1);
plot(t*1e9, [Uc; E; U]);
xlabel('t, нс')
ylabel('U_c, E, U, В')
legend('U(t)', 'E(t)', 'U(t)')
grid on

```

### **Вывод программы.**

Command Window:

f0 = 3.918124 МГц

График (figure(1)) представлен на рис. 1.8.

Средний период колебаний – 256 нс, что соответствует ожидаемой частоте 3,9 МГц. Уровень стремится к ожидаемому (5 В). Противоречий не выявлено.

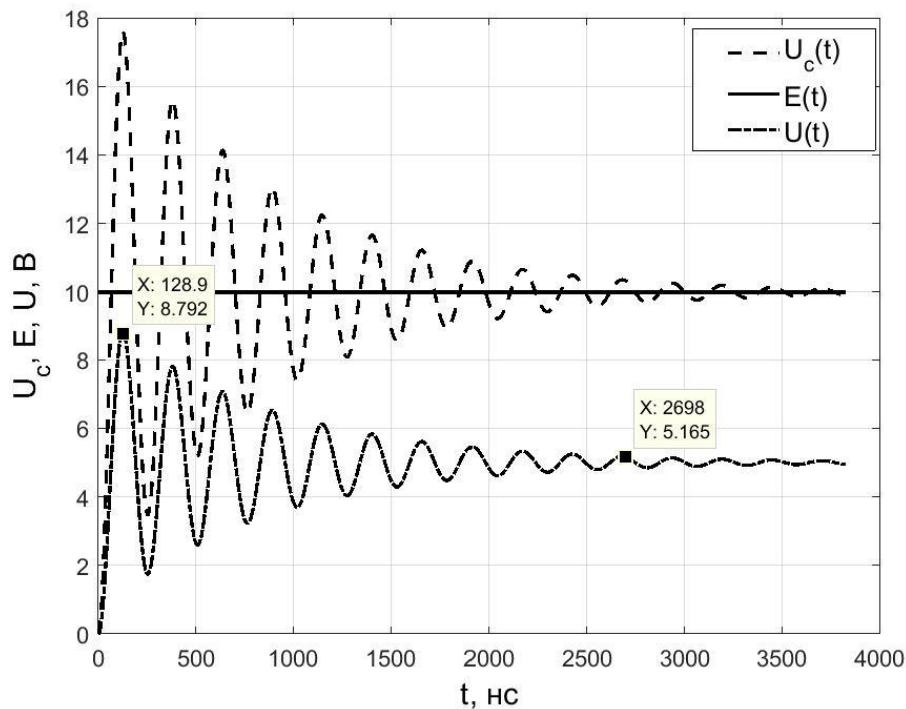


Рис. 1.8. Отклик на тестовое воздействие

### 1.4.7. Результаты моделирования

1. Рассмотрим отклик цепи на гармоническое воздействие.

Код компьютерной модели при синусоидальном входном воздействии:

#### LC2.m:

```
clear all; close all; clc;
```

```
% Внутренние параметры
```

```
R = 120; % Ом
```

```
C = 33e-12; % Ф
```

```
L = 100e-6; % Гн
```

```
C1 = C/2;
```

```
R1 = 2*R;
```

```
Rd = 40e3; % Параметры диода
```

```
rd = 1.25;
```

```
Uo = 0.6;
```

```
omega0 = 1/sqrt(L*C1); % Резонансная частота
```

```
f0 = omega0 / 2 / pi;
```

```
fprintf('f0 = %f МГц\n', f0/1e6);
```

```
% Ось времени
```

```
T = 1 / (10000*f0);
```

```
t = 0:T:(15 * 1/f0);
```

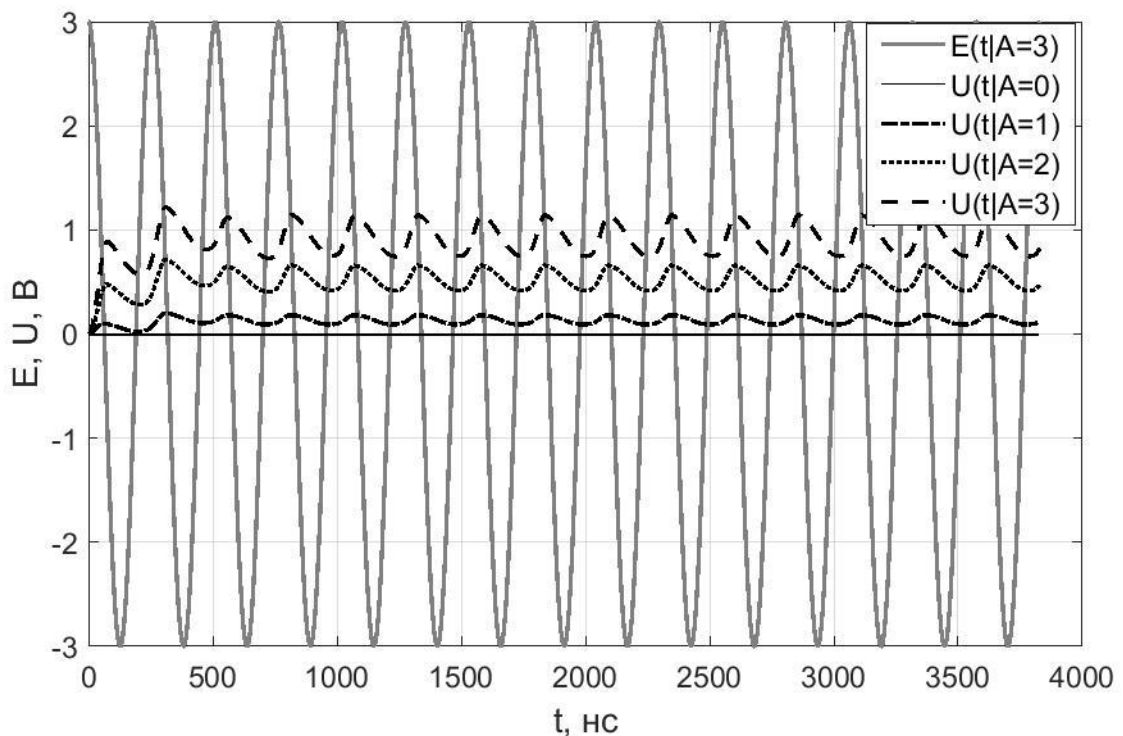
```

lt = length(t);
% Выделение памяти
Uc = nan(1, lt);
Ul = nan(1, lt);
dUc = nan(1, lt);
Ud = nan(1, lt);
i = nan(1, lt);
di = nan(1, lt);
% Внешние параметры, внешние фазовые переменные
f = f0;
A = [0; 1; 2; 3];
U = nan(length(A), lt);
for n = 1:length(A)
    E = A(n)*cos(2*pi*f*t);
    % Начальное состояние
    Uc(1) = 0; % Начальное напряжение конденсатора
    i(1) = 0; % В начальный момент ток в цепи отсутствует
    di(1) = 0;
    Ul(1) = di(1) * L; % Напряжение на катушке
    for k = 2:lt
        % Напряжение на диоде
        if (E(k-1) - Ul(k-1) - Uc(k-1)) < Uo
            Ud(k-1) = Rd*i(k-1);
        else
            Ud(k-1) = rd*i(k-1) + Uo;
        end
        Ul(k) = E(k) - Uc(k-1) - i(k-1)*R1 - Ud(k-1); % Напряжение на катушке
        di(k) = Ul(k) / L; % вызывает приращение тока,
        i(k) = i(k-1) + di(k-1)*T;
        dUc(k) = i(k) / C1;% который определяет заряд конденсатора
        Uc(k) = Uc(k-1) + dUc(k)*T;
    end
    U(n, :) = Uc / 2;
end
figure(1);
plot(t*1e9, [E; U]);
xlabel('t, нс')
ylabel('E, U, В')
legend('E(t|A=3)', 'U(t|A=0)', 'U(t|A=1)', 'U(t|A=2)', 'U(t|A=3)')
grid on
Вывод программы.
Command Window:
f0 = 3.918124 МГц

```



График (figure(1)) представлен на рис. 1.9.



**Рис. 1.9. Серия откликов на гармоническое воздействие разной амплитуды**

2. Теперь рассмотрим отклик цепи на шумовое воздействие.

Код компьютерной модели при синусоидальном входном воздействии:

**LC3.m:**

```
clear all; close all; clc;
% Внутренние параметры
R = 120; % Ом
C = 33e-12; % Ф
L = 100e-6; % Гн
C1 = C/2;
R1 = 2*R;
Rd = 40e3; % Параметры диода
rd = 1.25;
Uo = 0.6;
omega0 = 1/sqrt(L*C1); % Резонансная частота
f0 = omega0 / 2 / pi;
fprintf('f0 = %f МГц\n', f0/1e6);
% Ось времени
T = 1 / (10000*f0);
t = 0:T:(15 * 1/f0);
```

```

lt = length(t);
% Выделение памяти
Uc = nan(1, lt);
Ul = nan(1, lt);
dUc = nan(1, lt);
Ud = nan(1, lt);
i = nan(1, lt);
di = nan(1, lt);
% Внешние параметры, внешние фазовые переменные
stdn = sqrt(13);
E = stdn*randn(1, lt);
% Начальное состояние
Uc(1) = 0; % Начальное напряжение конденсатора
i(1) = 0; % В начальный момент ток в цепи отсутствует
di(1) = 0;
Ul(1) = di(1) * L; % Напряжение на катушке
for k = 2:lt
    % Напряжение на диоде
    if (E(k-1) - Ul(k-1) - Uc(k-1)) < Uo
        Ud(k-1) = Rd*i(k-1);
    else
        Ud(k-1) = rd*i(k-1) + Uo;
    end
    Ul(k) = E(k) - Uc(k-1) - i(k-1)*R1 - Ud(k-1); % Напряжение на катушке
    di(k) = Ul(k) / L; % вызывает приращение тока,
    i(k) = i(k-1) + di(k-1)*T;
    dUc(k) = i(k) / C1; % который определяет заряд конденсатора
    Uc(k) = Uc(k-1) + dUc(k)*T;
end
U = Uc / 2;
figure(1);
plot(t*1e9, [Uc; E; U]);
xlabel('t, нс')
ylabel('U_c, E, U, В')
legend('U_c(t)', 'E(t)', 'U(t)')
grid on

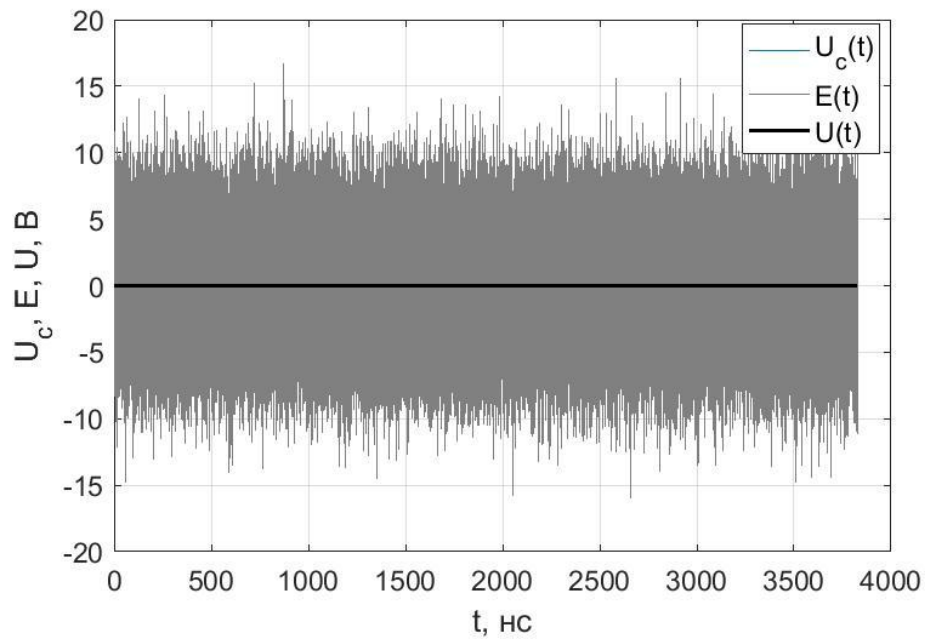
```

### **Вывод программы.**

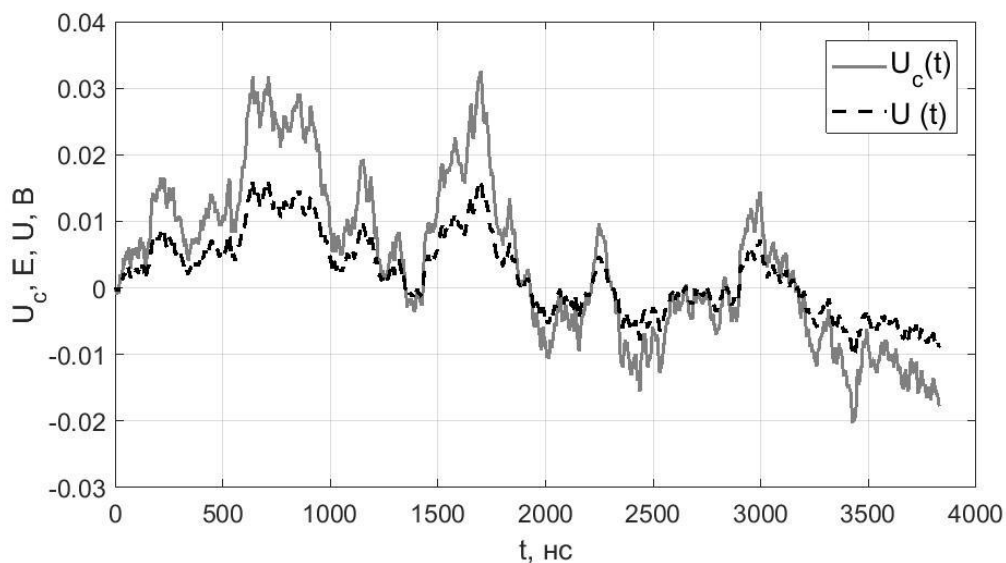
Command Window:

f0 = 3.918124 МГц

График (figure(1)) представлен на рис. 1.10, 1.11 (в разных масштабах). Графики  $U_c(t)$  и  $U(t)$  на рис.1.10 накладываются друг на друга в данном масштабе.



**Рис. 1.10. Отклик на воздействие белого шума (в масштабе входного процесса)**



**Рис. 1.11. Отклик на воздействие белого шума**

### 1.4.8. Анализ результатов моделирования

Формальные цели моделирования достигнуты – получены графики процессов в условии оговоренных в разделах 1.4.2 и 1.4.3 допущений.

Полученные результаты не противоречат ожиданиям. При гармоническом воздействии схема работает как выпрямитель благодаря схо-

жей структуре. Результат воздействия белого шума – сложный коррелированный процесс, результат прохождения линейного фильтра и нелинейного элемента.

## **2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 «ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ»**

**Цель работы:** применение описания сигналов в виде комплексных амплитуд при моделировании радиотехнического устройства; освоение создания и использования функций в MATLAB/Octave; освоение вывода графиков функций нескольких переменных.

### **2.1. Краткие теоретические сведения**

В лабораторной работе №2 изучается метод комплексных амплитуд в приложении моделирования радиотехнических устройств на примере построения диаграммы направленности многоэлементной антенной системы. В рамках лабораторной работы студенты осваивают создание и использование собственных функций, отображение поверхности функций нескольких переменных в среде MATLAB или Octave [4].

#### **2.1.1. Метод комплексных амплитуд**

Математическая модель радиосигнала может быть представлена в вещественной форме:

$$S(t) = Ah(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (2.1)$$

где  $A$  – амплитуда,  $h(t)$  – огибающая,  $\omega_0$  – несущая частота,  $\varphi(t)$  – фаза сигнала.

В соответствии с формулой Эйлера эквивалентной записью является

$$S(t) = \operatorname{Re} \left[ Ah(t)e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_0 t} \right] = \operatorname{Re} \left[ \dot{S}(t)e^{j\omega_0 t} \right], \quad (2.2)$$

где

$$\dot{S}(t) = Ah(t)e^{j\varphi(t)} \quad (2.3)$$

– комплексная амплитуда сигнала [1].

Описание сигналов с помощью комплексных амплитуд широко используется в алгоритмах радиотехнических устройств, при аналитических расчетах и моделировании. На это есть ряд причин:

- ослабление/усиление сигнала, сдвиг фазы, приводит к соответствующему изменению амплитуды и аргумента комплексной амплитуды; в общем случае, любые линейные операции над сигналом могут быть описаны как преобразования его комплексной амплитуды;

- в большинстве радиотехнических приложений условная верхняя частота спектра сигнала значительно больше верхней частоты спектра комплексной амплитуды, поэтому описание сигнала в форме комплексных амплитуд позволяет уменьшить частоту дискретизации в алгоритмах обработки сигналов и компьютерных моделях.

### 2.1.2. Антенные решетки

В радиотехнике широкое применение находят системы пространственно разнесенных антенн:

- антенные решетки в составе радиолокационных систем для селекции и сопровождения целей;

- радиоинтерферометры со сверхдлинными базами для решения задач радиоастрономии;

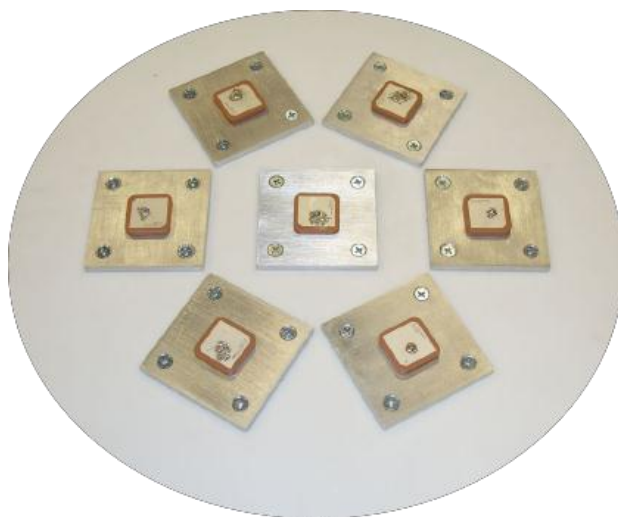
- компенсаторы помех в локации, навигации, связи;

- угломерная навигационная аппаратура для определения пространственной ориентации потребителя и т.д.

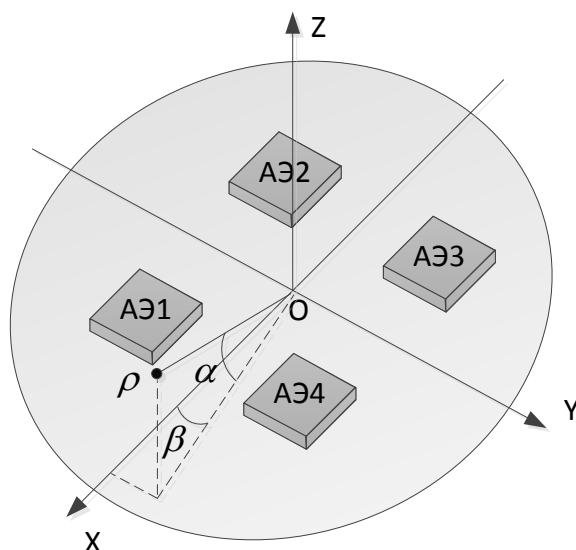
В рамках лабораторной работы рассматриваются антенные решетки, используемые в навигационных приложениях для пространственного подавления помех и фокусировки на навигационный сигнал (устоявшееся название – «*beamformer*», рис. 2.1). Применение антенных решеток позволяет существенно, на 40-60 дБ, повысить помехоустойчивость навигационной аппаратуры, а также подавлять мешающие переотраженные навигационные радиосигналы.

Навигационные антенные решетки имеют малые габариты (от 5 до 30 см) и небольшое число антенных элементов (2, 4, 6, 7, 8), поэтому эффективность их фокусировки, в смысле ширины луча и коэффициента усиления, невысока. Но даже при небольшом числе антенных элементов удается сформировать глубокие нули диаграммы направленности и с их помощью существенно ослабить помехи.

Рассмотрим четырехэлементную антенную решетку. Введем прямоугольную и сферическую антенную систему координат, расположив их начала в геометрическом центре антенны (рис. 2.2).



**Рис. 2.1. Макет семиэлементной антенной решетке**



**Рис. 2.2. Схема четырехэлементной антенной решетке**

В антенных решетках производится функциональное преобразование совокупности сигналов антенных элементов в единый комплексный выходной сигнал. *Характеристикой направленности* в теории пространственно-временной обработки сигналов называют зависимость комплексной амплитуды  $\dot{U}(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j)$  на выходе системы пространственной обработки от направления прихода  $\alpha, \beta$  пробного сигнала (гармонической плоской волны) при фиксированных направлениях прихода полезного  $\alpha_s, \beta_s$  сигнала и помехи  $\alpha_j, \beta_j$ . В рамках лабораторной работы решается задача построения *диаграммы направленности (ДН)*

антенной решетки, которая связана с характеристикой направленности соотношением:

$$F(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) = \left| \dot{U}(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) \right|^2 \quad (2.4)$$

Пусть с направления  $\alpha, \beta$  на антенную решетку приходит пробный гармонический сигнал. Комплексные амплитуды выходных сигналов антенных элементов принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(\alpha, \beta) &= \dot{U}_a(\alpha, \beta) e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_1(\alpha, \beta)}, \\ \dot{y}_2(\alpha, \beta) &= \dot{U}_a(\alpha, \beta) e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_2(\alpha, \beta)}, \\ \dot{y}_3(\alpha, \beta) &= \dot{U}_a(\alpha, \beta) e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_3(\alpha, \beta)}, \\ \dot{y}_4(\alpha, \beta) &= \dot{U}_a(\alpha, \beta) e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_4(\alpha, \beta)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\dot{U}_a(\alpha, \beta)$  – характеристика направленности одного антенного элемента,  $\varphi_0$  – фаза сигнала изотропной антенны, соответствующая началу системы координат (без потери общности при моделировании может быть принята равной нулю),  $\varphi_m(\alpha, \beta)$  – фазовый набег к  $m$ -ой антенне относительно фазы в начале системы координат  $\varphi_0$ .

Фазовый набег  $\varphi_m(\alpha, \beta)$  легко рассчитать, зная направление прихода сигнала и радиус-вектор  $m$ -го антенного элемента  $\mathbf{r}_m$ . Обозначим  $\mathbf{k}$  – орт в направлении на источник сигнала (рис. 2.3):

$$\mathbf{k}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

тогда разность хода сигнала  $\Delta r_m$  между  $m$ -м антенным элементом и центром антенны находится как скалярное произведение радиус-вектора антенны и орта на источник:

$$\Delta r_m = -\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k}(\alpha, \beta), \quad (2.7)$$

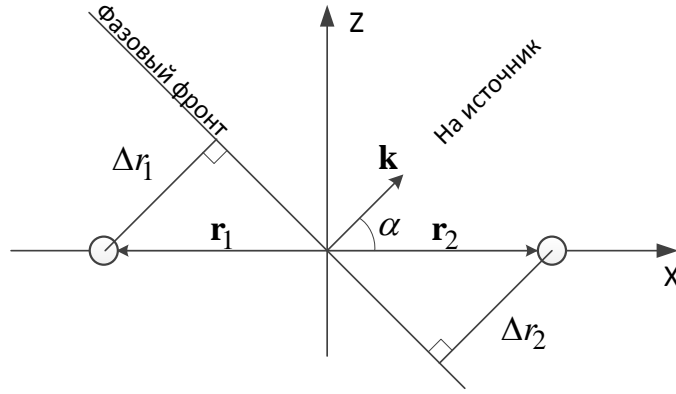
откуда фазовый набег:

$$\varphi_m(\alpha, \beta) = 2\pi \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k}(\alpha, \beta)}{\lambda}. \quad (2.8)$$

Выражение (2.5), с учетом принятых допущений, может быть представлено в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{y}}(\alpha, \beta) = \dot{U}_a(\alpha, \beta) \mathbf{H}(\alpha, \beta), \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{H}(\alpha, \beta) = \left[ e^{j\varphi_1(\alpha, \beta)} \quad e^{j\varphi_2(\alpha, \beta)} \quad e^{j\varphi_3(\alpha, \beta)} \quad e^{j\varphi_4(\alpha, \beta)} \right]^T$  называется *вектором фокусировки*.



**Рис. 2.3. Распространение фазового фронта**

Из теории оптимальной пространственно-временной фильтрации известен алгоритм формирования выходного сигнала  $\dot{U}(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j)$  антенной решетки при известных направлениях на источник полезного сигнала  $\alpha_s, \beta_s$  и помехи  $\alpha_j, \beta_j$ :

$$\dot{U}(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) = \mathbf{\beta}_w^{*T}(\alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) \dot{y}(\alpha, \beta), \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{\beta}_w$  – вектор комплексных *весовых коэффициентов* рассчитывается как:

$$\mathbf{\beta}_w(\alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) = \frac{\mathbf{D}^{-1}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{H}(\alpha_s, \beta_s)}{\mathbf{H}(\alpha_s, \beta_s)^{*T} \mathbf{D}^{-1}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{H}(\alpha_s, \beta_s)}, \quad (2.11)$$

здесь  $\mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j)$  – ковариационная матрица *шумов и помех*, определяемая для *отношения помеха/шум*  $q_{j/n}$  как:

$$\mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) = q_{j/n} \mathbf{H}(\alpha_j, \beta_j)^{*T} \mathbf{H}(\alpha_j, \beta_j) + \mathbf{I}, \quad (2.12)$$

здесь  $\mathbf{I}$  – диагональная единичная матрица размером, равным числу антенных модулей (4x4 для нашего примера).

Отношение помеха/шум определяет компромисс между фокусировкой на полезный сигнал и подавлением помехи. При уменьшении  $q_{j/n}$  вклад помехи на фоне шумов снижается, алгоритм вырождается в фокусировку максимума диаграммы направленности на полезный сигнал. При увеличении – возрастает приоритет подавления помехи путем направления на неё нуля диаграммы направленности.

С учетом (2.4), (2.9) и (2.10) выражение для формируемой диаграммы направленности антенной решетки принимает вид:

$$F(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) = F_a(\alpha, \beta) \left| \mathbf{\beta}_w^{*T}(\alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) \mathbf{H}(\alpha, \beta) \right|^2, \quad (2.13)$$

где  $F_a(\alpha, \beta)$  – диаграмма направленности одного антенного элемента.



## 2.2. Лабораторное задание

В рамках лабораторной работы требуется:

1. Варьируя направление на помеху построить серию диаграмм направленности антенной решетки  $F(\alpha, \beta)$ .

2. Варьируя направление на помеху построить серию графиков среза диаграммы направленности антенной решетки  $F(\alpha | \beta = 0)$ , на которые нанести линии направления на полезный сигнал и помеху.

3. Построить диаграмму направленности  $F_a(\alpha, \beta)$  одного антенного элемента.

При подготовке к лабораторной работе студент выполняет первые этапы процедуры компьютерного моделирования и оформляет соответствующие разделы отчета. При выполнении домашней подготовки требуется разработать и занести в отчет (см. разделы 2.4.1-2.4.4 примера оформления отчета о лабораторной работе в Приложении 1):

- формулировку задачи;
- математическую модель объекта исследования;
- тестовые воздействия и условия, с помощью которых предлагается проверять адекватность компьютерной модели и/или её компонентов;
- алгоритм компьютерной модели, написанный на псевдокоде или в нотации MATLAB/Octave/Си [4]; алгоритм должен содержать функцию для расчета вектора  $\mathbf{H}(\alpha, \beta)$ .

Варианты параметров задачи задаются табл. 2.1, 2.2. Азимут помехового воздействия и полезного сигнала равен нулю ( $\beta_j = 0, \beta_s = 0$ ). В четырехэлементной антенной решетке антенные модули располагаются в углах квадрата; в семиэлементной – шесть в углах правильного шестиугольника, одна – в центре.

Диаграмму направленности одного антенного элемента принять равной:

$$F_a(\alpha, \beta) = \left( 1 + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right)^2. \quad (2.14)$$

В лаборатории:

1. На основании подготовленного алгоритма составьте программу компьютерной модели.

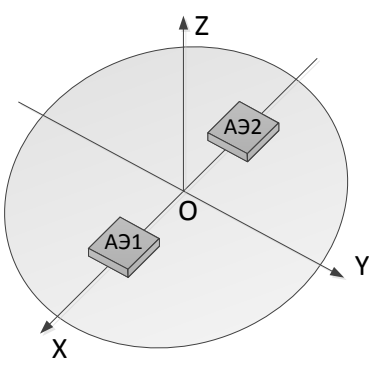
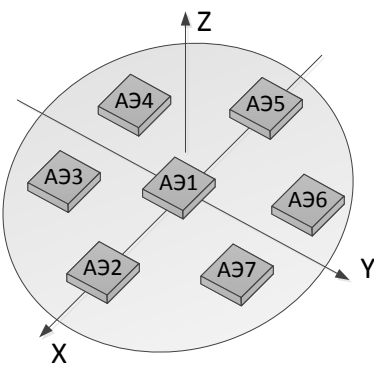
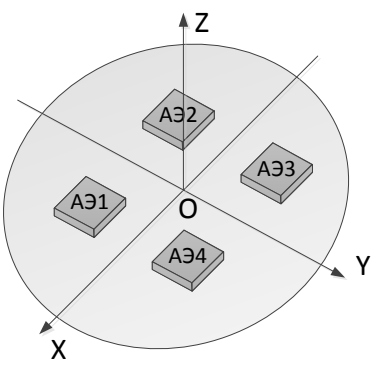
2. Проверьте программу и/или её компоненты, сформировав тестовые воздействия и условия, предложенные в ходе домашней подготовки. При выявлении расхождения результатов моделирования и ожидаемых результатов проведите отладку программы.

## Варианты заданий

Номер варианта	Тип антенной решетки	Расстояние между антенными элементами, $l$	Отношение помехи/шум $q_{j/n}$ , дБ	Угол места направления на полезный сигнал $\alpha_s$ , град
1	1	$\lambda/2$	3	45
2	2	$\lambda/2$	3	45
3	3	$\lambda/2$	3	45
4	1	$\lambda/4$	3	45
5	2	$\lambda/4$	3	45
6	3	$\lambda/4$	3	45
7	1	$\lambda$	3	45
8	2	$\lambda/2$	10	45
9	3	$\lambda/2$	10	45
10	1	$\lambda/2$	10	45
11	2	$\lambda/4$	10	45
12	3	$\lambda/4$	10	45
13	1	$\lambda/4$	10	45
14	2	$\lambda/2$	15	45
15	3	$\lambda/2$	15	45
16	1	$\lambda/2$	15	45
17	2	$\lambda/4$	15	45
18	3	$\lambda/4$	15	45
19	1	$\lambda/4$	15	45
20	2	$\lambda$	15	45
21	3	$\lambda/2$	3	30
22	1	$\lambda/2$	3	30
23	2	$\lambda/2$	3	30
24	3	$\lambda/4$	3	30
25	1	$\lambda/4$	3	30
26	2	$\lambda/4$	3	30
27	3	$\lambda$	3	30
28	1	$\lambda/2$	10	30
29	2	$\lambda/2$	10	30

Номер варианта	Тип антенной решетки	Расстояние между антенными элементами, $l$	Отношение помеха/шум $q_{j/n}$ , дБ	Угол места направления на полезный сигнал $\alpha_s$ , град
30	3	$\lambda/2$	10	30
31	1	$\lambda/4$	10	30
32	2	$\lambda/4$	10	30
33	3	$\lambda/4$	10	30
34	1	$\lambda/2$	15	30
35	2	$\lambda/2$	15	30
36	3	$\lambda/2$	15	30
37	1	$\lambda/4$	15	30
38	2	$\lambda/4$	15	30
39	3	$\lambda/4$	15	30
40	1	$\lambda$	15	30
41	2	$\lambda/2$	3	60
42	3	$\lambda/2$	3	60
43	1	$\lambda/2$	3	60
44	2	$\lambda/4$	3	60
45	3	$\lambda/4$	3	60
46	1	$\lambda/4$	3	60
47	2	$\lambda$	3	60
48	3	$\lambda/2$	10	60
49	1	$\lambda/2$	10	60
50	2	$\lambda/2$	10	60
51	3	$\lambda/4$	10	60
52	1	$\lambda/4$	10	60
53	2	$\lambda/4$	10	60
54	3	$\lambda/2$	15	60
55	1	$\lambda/2$	15	60
56	2	$\lambda/2$	15	60
57	3	$\lambda/4$	15	60
58	1	$\lambda/4$	15	60
59	2	$\lambda/4$	15	60
60	2	$\lambda/2$	12	80

## Тип антенной решетки

№	Тип	№	Тип
1		3	
2			

3. Последовательно выполните моделирование по плану:

- рассчитайте и постройте диаграмму направленности одного антенного элемента;

- варьируя направление на помеху, рассчитайте и постройте серию диаграмм направленности и их срезов.

4. Оцените адекватность полученных результатов, их соответствие общетеоретическим соображениям.

5. Составьте отчет о проведенном моделировании. В состав отчета должны входить:

- постановка задачи;

- используемая математическая модель и обоснование её выбора;

- обоснование и значения ожидаемых результатов тестовых воздействий, их сопоставление с соответствующими результатами проверки компьютерной модели;

- листинг используемых в процессе исследования программ;

- полученные результаты и их интерпретация, вывод о достижении или не достижении цели исследования.

## 2.3. Контрольные вопросы

1. Что такое комплексная амплитуда сигнала?
2. Как изменяется комплексная амплитуда сигнала при прохождении фазовращателя? Как реализовать фазовращатель в программе компьютерной модели?
3. Поясните функционирование компьютерной модели и назначение используемых в ней команд.
4. Из каких этапов состоит процедура компьютерного моделирования? В чем назначение каждого этапа?
5. Как в MATLAB или Octave построить график поверхности?
6. Как произвести преобразование координат из сферической системы координат в декартову и обратно?
7. Как в MATLAB или Octave создать собственную функцию? Как ею воспользоваться?

## 2.4. Приложение 1. Пример оформления отчета

Пример оформления титульного листа приведен в разделе 1.4.1.

### 2.4.1. Постановка задачи

В качестве моделируемого объекта выступает четырехэлементная антенная решетка (рис. 2.4) с алгоритмом формирователя лучей по известному направлению на полезный сигнал и помеху.

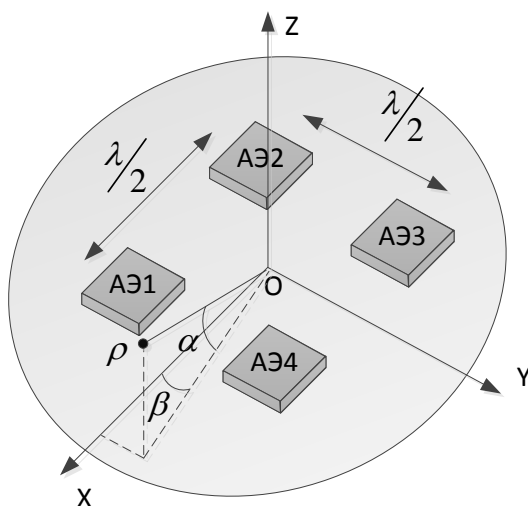


Рис. 2.4. Четырехэлементная антенная решетка

Расстояние между антенными элементами – половина длины волны. Антенные элементы расположены в углах квадрата.

Известно направление на полезный сигнал (угол места 80 градусов, азимут 0). Отношение помеха/шум составляет 12 дБ. Задано выражение для диаграммы направленности одного антенного элемента.

Требуется построить диаграмму направленности (полную и срез) антенной решетки при различных направлениях на помеху, а также диаграмму направленности одного антенного элемента.

## 2.4.2. Математические модели

Алгоритмы фокусировки приведены в описании к лабораторной работе. Уточним их для данного варианта задания.

Искомая диаграмма направленности задается выражением:

$$F(\alpha, \beta | \alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) = F_a(\alpha, \beta) \left| \mathbf{b}_w^{*T}(\alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) \mathbf{H}(\alpha, \beta) \right|^2,$$

$$\mathbf{b}_w(\alpha_s, \beta_s, \alpha_j, \beta_j) = \frac{\mathbf{D}^{-1}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{H}(\alpha_s, \beta_s)}{\mathbf{H}(\alpha_s, \beta_s)^{*T} \mathbf{D}^{-1}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{H}(\alpha_s, \beta_s)},$$

$$\mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) = q_{j/n} \mathbf{H}(\alpha_j, \beta_j)^{*T} \mathbf{H}(\alpha_j, \beta_j) + \mathbf{I},$$

где  $\mathbf{H}(\alpha, \beta) = \left| e^{j\varphi_1(\alpha, \beta)} \quad e^{j\varphi_2(\alpha, \beta)} \quad e^{j\varphi_3(\alpha, \beta)} \quad e^{j\varphi_4(\alpha, \beta)} \right|^T$ , а для фазовых набегов справедливо выражение  $\varphi_m(\alpha, \beta) = 2\pi \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k}(\alpha, \beta)}{\lambda}$ . Для заданной антенной решетки:

$$r_1 = \left| \lambda/4 \quad -\lambda/4 \quad 0 \right|^T, \quad r_2 = \left| -\lambda/4 \quad -\lambda/4 \quad 0 \right|^T,$$

$$r_3 = \left| -\lambda/4 \quad \lambda/4 \quad 0 \right|^T, \quad r_4 = \left| \lambda/4 \quad \lambda/4 \quad 0 \right|^T.$$

Орт в направлении  $\alpha, \beta$ :

$$\mathbf{k}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

По условию задачи диаграмма направленности одного антенного элемента описывается выражением:

$$F_a(\alpha, \beta) = \left( 1 + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right)^2.$$

Задание начальных условий и граничных значений не требуется.

### 2.4.3. Псевдокод компьютерной модели

С учетом выбранных математических моделей получаем следующий псевдокод компьютерной модели:

***main***

*Подготовка среды*

*Диапазон направлений пробного сигнала*

*Направление на полезный сигнал*

*Направление на помеху*

*Расчет ДН одного антенного элемента  $F_a$*

*Перевод  $F_a$  из сферической в декартову СК*

*Построение диаграммы направленности  $F_a$*

*Отношение помеха/шум*

*Цикл по углу места помехи*

*Вычисление вектора весовых коэффициентов (используя  $H(\alpha, \beta)$ )*

*Цикл по углу места*

*Цикл по азимуту*

*Расчет ДН (используя  $H(\alpha, \beta)$ )*

*Конец цикла по азимуту*

*Конец цикла по углу места*

*Коррекция ДН с помощью ДН одного антенного элемента*

*Преобразование из сферических в декартовы координаты*

*Построение графика поверхности*

*Построение графика среза*

*Сохранение файлов на диск*

*Конец цикла по углу места помехи*

***$H(\alpha, \beta)$***

*Расчет вектора  $k$*

*Координаты антенных элементов*

*Вычисление набега фаз*

*Вычисление вектора  $H$*

*Возврат  $H$*

### 2.4.4. Тестовые воздействия и условия

1. Условия:

Проверяем функцию  $H(\alpha, \beta)$ . Направим воздействие с горизонта  $\alpha = 0, \beta = 0$ .

Ожидаемый результат:

Вектор-столбец  $\begin{bmatrix} i & -i & -i & i \end{bmatrix}^T$ .

2. Условия:

Проверяем функцию  $H(\alpha, \beta)$ . Направим воздействие с зенита  
 $\alpha = \pi/2, \beta = 0$ .

Ожидаемый результат:

Вектор-столбец  $|1 \ 1 \ 1 \ 1|^T$ .

3. Условия:

Проверяем формирование ДН. Уменьшим отношение помеха/шум до -10 дБ.

Ожидаемый результат:

Приоритет фокусировки на полезный сигнал.

4. Условия:

Проверяем формирование ДН. Увеличим отношение помеха/шум до 50 дБ.

Ожидаемый результат:

Приоритет расположения нуля в направлении на помеху.

## 2.4.5. Проверка модели

1. Проверка функции  $H(\alpha, \beta)$ , воздействие с направления горизонта на встречу оси X:

```
>> H(0, 0)
```

```
ans =
```

```
0.0000 + 1.0000i  
0.0000 - 1.0000i  
0.0000 - 1.0000i  
0.0000 + 1.0000i
```

Результат совпадает с ожидаемым.

2. Воздействие с зенита:

```
>> H(pi/2, 0)
```

```
ans =
```

```
1.0000 + 0.0000i  
1.0000 - 0.0000i  
1.0000 - 0.0000i  
1.0000 + 0.0000i
```

Результат соответствует ожиданиям. Ошибок в функции  $H(\alpha, \beta)$  не выявлено.

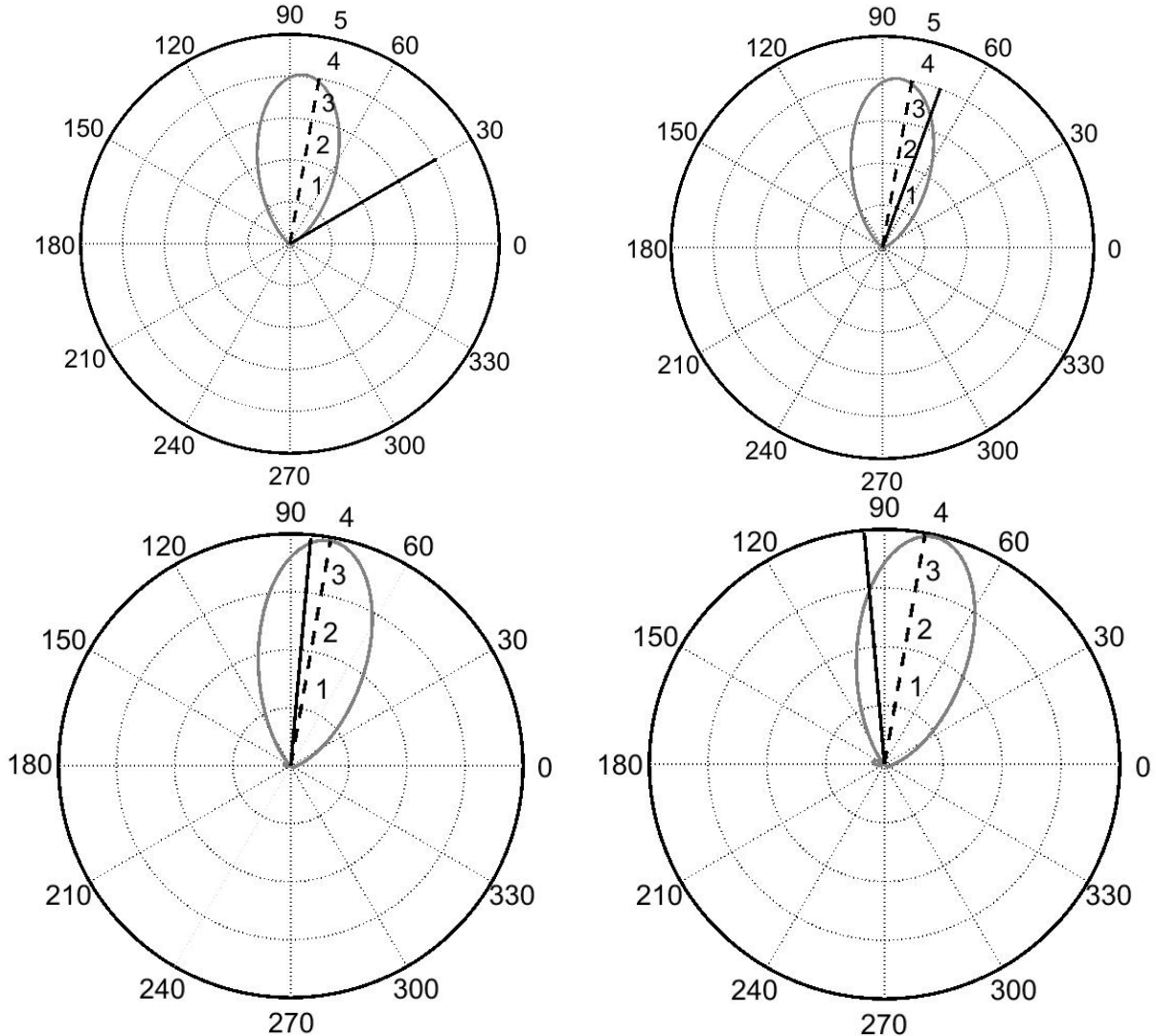
3. Проверка модели в целом. Уменьшим отношение помеха/шум до -10 дБ:

```
q_dB = -10; % помеха/шум, дБ
```

Результат представлен на рис. 2.5 (сплошная линия черного цвета – направление на помеху; сплошная линия серого цвета – ДН; пунктирная



линия черного цвета – направление на сигнал). Как и ожидалось, диаграмма направленности практически не зависит от направления на помеху. Приоритет (по сравнению с отношением помеха/шум по заданию) фокусировки на полезный сигнал.

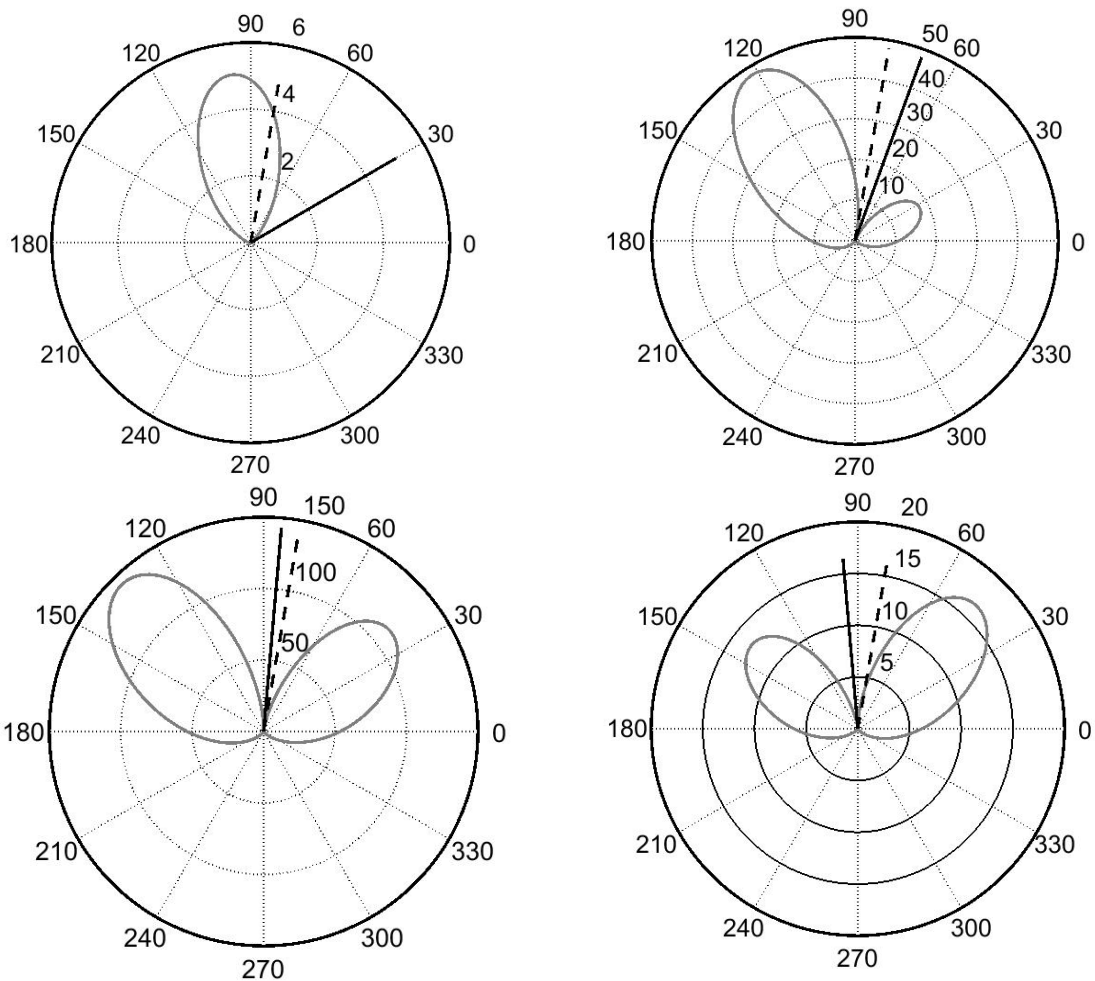


**Рис. 2.5. Срез ДН при угле места помехи 30, 70, 85, 95 градусов при низком отношении помеха/шум**

4. Увеличим отношение помеха/шум до 50 дБ

$q_{dB} = 50$ ; % помеха/шум, дБ

Результат представлен на рис. 2.6 (сплошная линия черного цвета – направление на помеху; сплошная линия серого цвета – ДН; пунктирная линия черного цвета – направление на сигнал). Приоритет приобретает ориентация нуля диаграммы направленности на помеху, что соответствует ожиданиям.



**Рис. 2.6. Срез ДН при угле места помехи 30, 70, 85, 95 градусов при высоком отношении помеха/шум**

### 2.4.6. Результаты моделирования

Код компьютерной модели [4]:

**Н.м:**

```

%/**
%Вычисление фокус-вектора
% @параметр alpha – угол места, скаляр, рад
% @параметр beta – азимут, скаляр, рад
% @return Н – фокус-вектор
% отношение к центру антенны, 4x1, рад
%*/
function Hv = H( alpha, beta )
    k = [cos(alpha)*cos(beta); % Единичный вектор
        cos(alpha)*sin(beta);
        sin(alpha)];

```

```

r{1} = [1/4 -1/4 0]; % Радиус-вектор антенны, в разм. длины волны  $\lambda$ 
r{2} = [-1/4 -1/4 0];
r{3} = [-1/4 1/4 0];
r{4} = [1/4 1/4 0];
phi = nan(4,1);
for i = 1:4
    phi(i) = 2*pi * r{i} * k;
end
Hv = exp( 1i * phi );
end

```

### **main lab2.m:**

```

clear all; clc; close all;
save_res = 0; % Хотите ли Вы сохранить результаты как рисунки/... ?
% Направление на сигнал
alpha_s = deg2rad(80);
beta_s = deg2rad(0);
% Направление на помеху
beta_j = deg2rad(0);
% Направление на пробный сигнал
alpha = deg2rad(-180:2:180);
beta = deg2rad(-90:3:90);
% ДН одного антенного элемента (АЭ)
Fa = ones(length(beta), 1) * (1 + cos(alpha - pi/2)).^2;
[alpha_mesh, beta_mesh] = meshgrid( alpha, beta );
[xa, ya, za] = sph2cart(beta_mesh, alpha_mesh, Fa);
% Построение ДН для одного АЭ
figure(1);
surf(xa, ya, za);
xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z');
title('ДН одного антенного элемента');
axis equal
% Выделение памяти
F = nan(length(beta), length(alpha));
q_dB = 12; % помеха/шум, дБ
q = 10^(q_dB/10); % ... в абсолютном значении
% Рисунок для общей диаграммы направленности
figure(2)
pos = get(gcf, 'Position'); pos(3) = 800; set(gcf, 'Position', pos);
for alpha_j = deg2rad(30:5:95)
    C = H(alpha_j, beta_j);
    Dn = q * C * C' + eye(4);
end

```

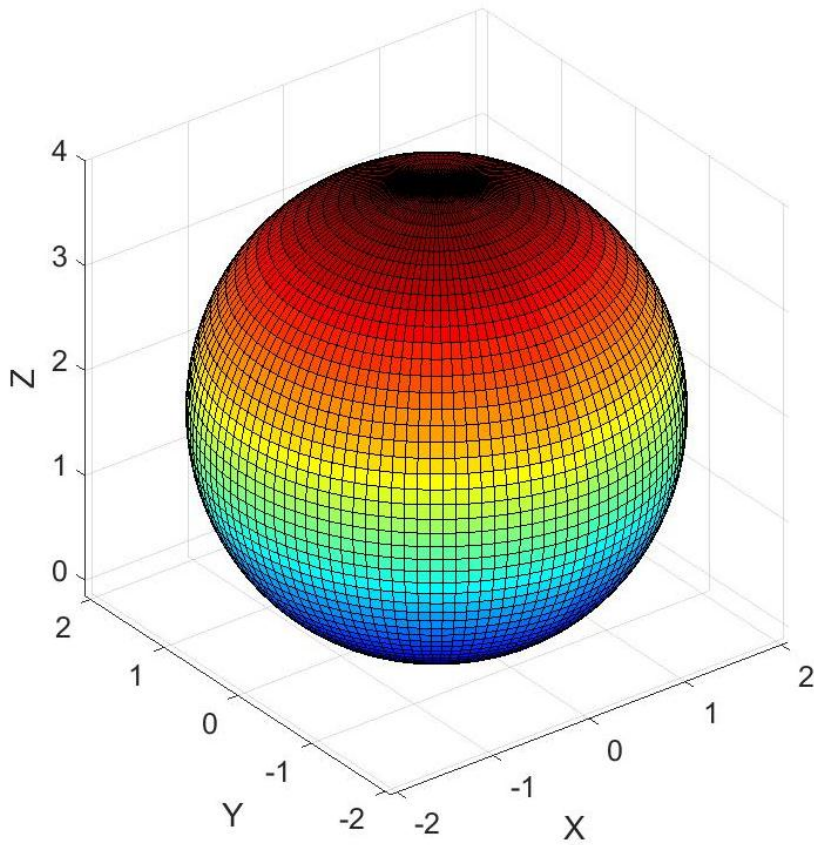
```

Hf = H(alpha_s, beta_s);
beta_w = Dn \ Hf / (Hf' * (Dn \ Hf));
for a = 1:length(alpha)
    for b = 1:length(beta)
        U = beta_w' * H( alpha(a), beta(b) );
        F(b, a) = abs(U)^2;
    end
end
F = Fa .* F;
[x, y, z] = sph2cart(beta_mesh, alpha_mesh, F);
b0 = ceil(length(beta)/2); % индекс для beta = 0
Fb0 = F(b0, :);
subplot(1,2,1)
surf(x, y, z)
xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z');
axis equal
subplot(1,2,2)
polar(alpha, Fb0); % Диаграмма направленности
hold on
polar( [alpha_s alpha_s], [0 max(Fb0)], 'g'); % Линия для сигнала
polar( [alpha_j alpha_j], [0 max(Fb0)], 'r'); % Линия для помехи
hold off
drawnow
if save_res % Сохранить рисунок figure(2) в формате .png
    s = sprintf('pic/DN_alpha_j_%03.0f.png', round(rad2deg(alpha_j)));
    saveas(gcf, s, 'png');
    fprintf('Рисунок сохраняется в%s\n', s)
end
end

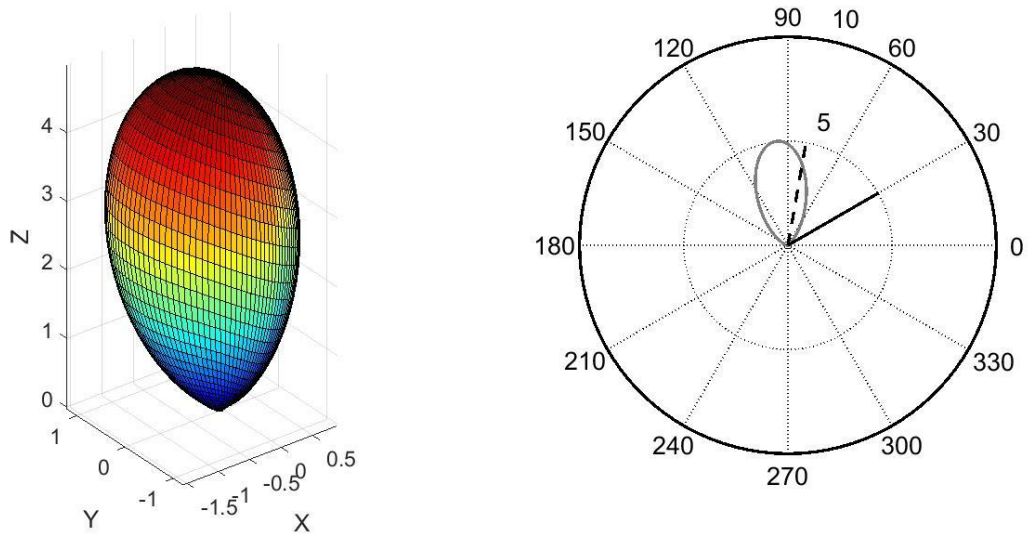
```

На рис. 2.7 представлена диаграмма направленности одного антенного элемента.

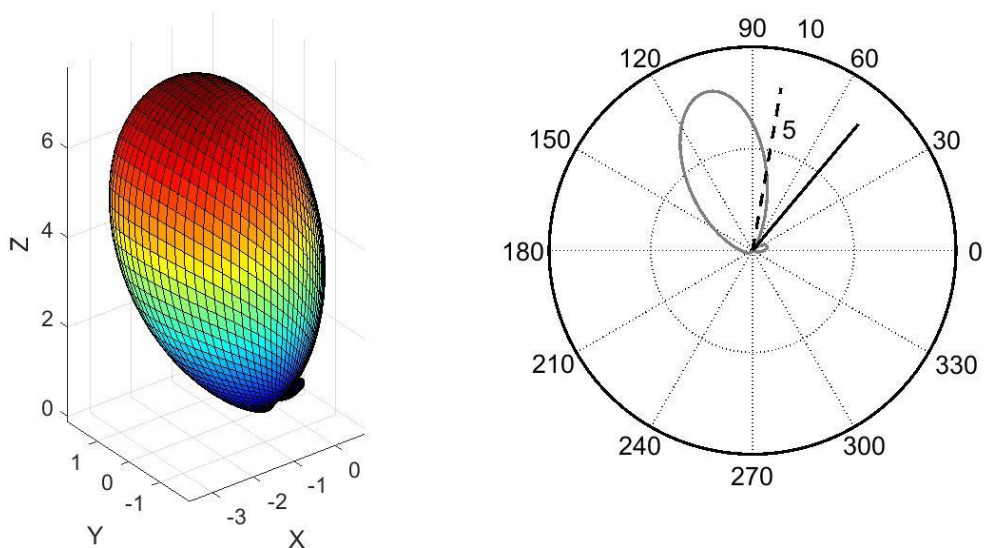
На рис. 2.8 – 2.14 представлена серия диаграмм направленности и их срезов при варьировании направления на помеху (на рисунках справа: сплошная линия черного цвета – направление на помеху; сплошная линия серого цвета – ДН; пунктирная линия черного цвета – направление на сигнал).



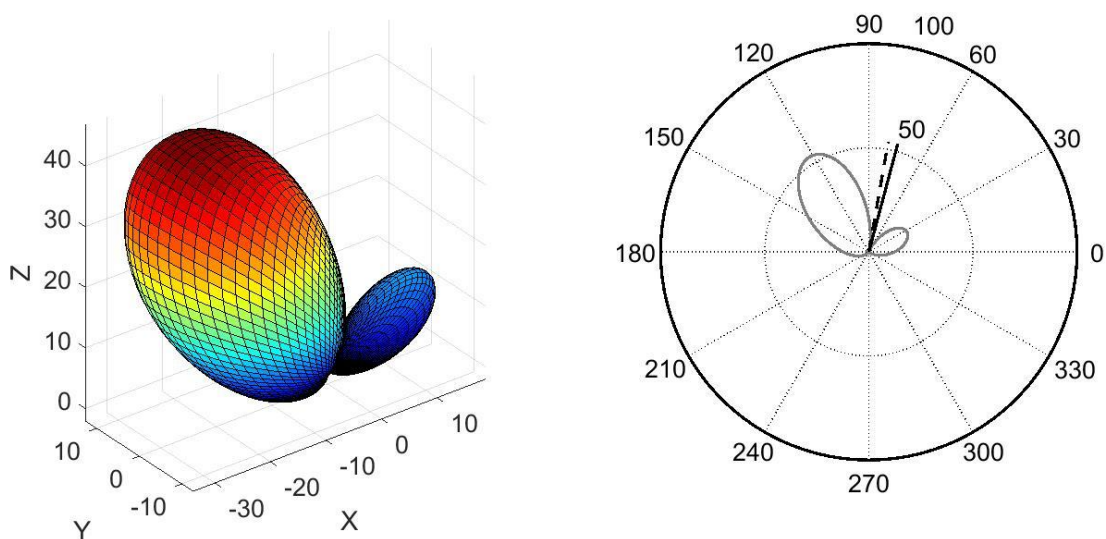
**Рис. 2.7. ДН одного антенного элемента**



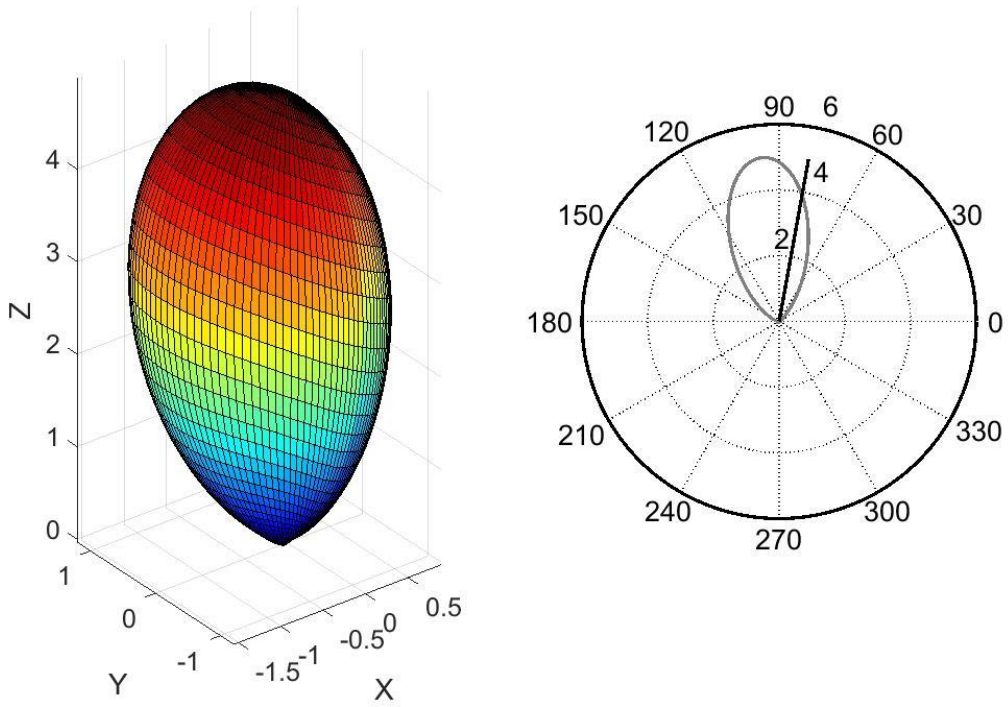
**Рис. 2.8. ДН при угле места помехи 30 градусов**



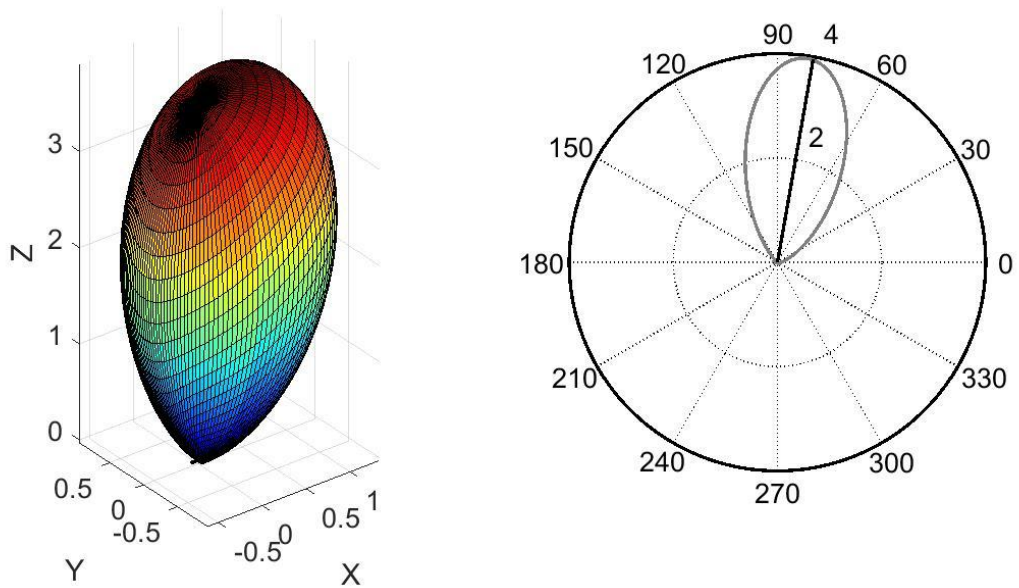
**Рис. 2.9.** ДН при угле места помехи 50 градусов



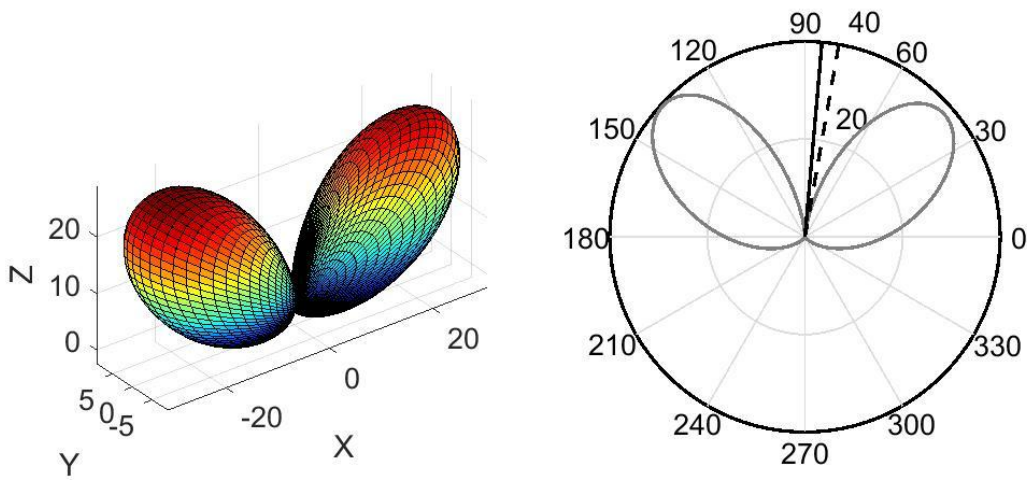
**Рис. 2.10.** ДН при угле места помехи 75 градусов



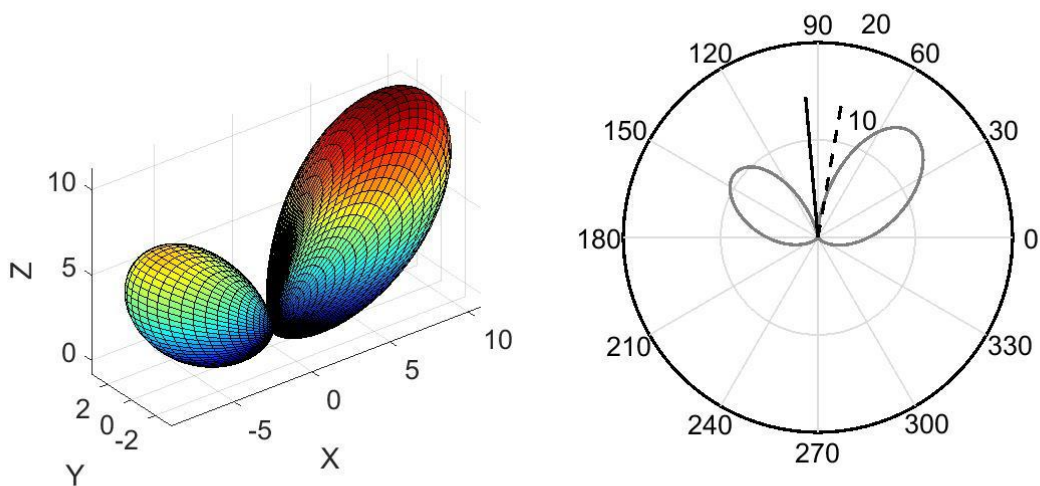
**Рис. 2.11. ДН при угле места помехи 79.7 градусов**



**Рис. 2.12. ДН при совпадении направлений на помеху и полезный сигнал**



**Рис. 2.13. ДН при угле места помехи 85 градусов**



**Рис. 2.14. ДН при угле места помехи 95 градусов**

### **2.4.7. Анализ результатов моделирования**

Поставленные цели моделирования достигнуты – получены требуемые диаграммы направленности. Результаты моделирования не противоречат ожиданиям и общетеоретическим соображениям. Отношение помеха/шум относительно велико, на помеху направляется ноль даже в ущерб усилению полезного сигнала, за исключением случаев совпадения направления на помеху и сигнал. Проведение новых итераций моделирования и уточнение модели не требуется.



### 3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 «МОДЕЛЬ ОБНАРУЖИТЕЛЯ СИГНАЛА»

**Цель работы:** применение метода статистических эквивалентов при моделировании радиотехнического устройства; развитие навыков обработки данных статистических экспериментов; освоение использования inline-функций в MATLAB.

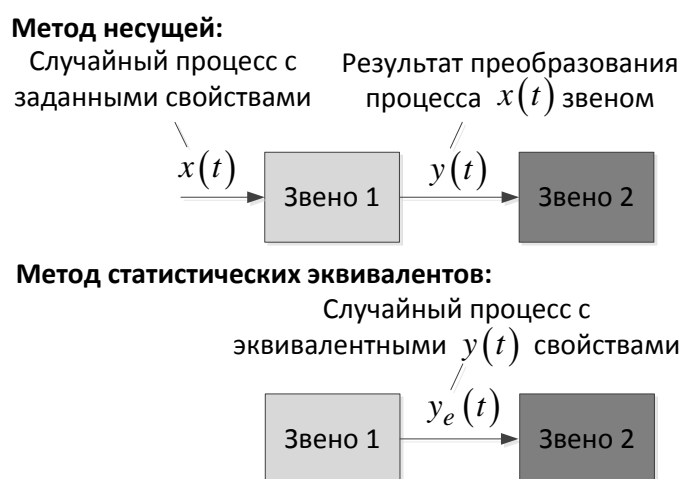
#### 3.1 Краткие теоретические сведения

В лабораторной работе №3 изучается метод статистических эквивалентов в приложении моделирования радиотехнических устройств. Даны выражения для статистического эквивалента коррелятора. В рамках работы он используется при моделировании обнаружителя сигнала с неизвестной начальной фазой, частотой и задержкой.

##### 3.1.1. Метод статистических эквивалентов

Радиоприемные устройства вынуждены работать в условиях действия случайных процессов: шумов, помех, сообщений. Случайный характер этих воздействий имеет принципиальное значение для функционирования аппаратуры, поэтому в большинстве случаев должен быть учтен при моделировании.

Моделирование радиотехнических звеньев по методу несущей предполагает формирование входных воздействий в виде реализаций случайных процессов  $x(t)$  и поиск отклика звена  $y(t)$  (рис. 3.1).



**Рис. 3.1. Моделирование звена ('Звено 1') по методу несущей и методу статистических эквивалентов**

В общем случае выходной сигнал  $y(t)$  является случайным процессом, он действует на последующие блоки и определяет их функционирование.

### 3.1.2. Статистический эквивалент коррелятора

Современные алгоритмы приема сигналов базируются на корреляционной обработке. Коррелятор осуществляет операцию скалярного произведения принятой реализации  $y(t_i)$  и опорного сигнала  $\tilde{S}(t_i)$  на:

$$r = \sum_{i=1}^L y(t_i) \tilde{S}(t_i), \quad (3.1)$$

где

$$y(t_i) = y_i = S_i + n_i, \quad (3.2)$$

$$S_i = A \cdot h(t_i - \tau) \cdot \cos(\omega_0 t + \omega t + \varphi) \quad (3.3)$$

– полезный сигнал,  $n_i$  – аддитивный дискретный белый гауссовский шум с дисперсией  $\sigma_y^2$  и нулевым математическим ожиданием,  $A$  – амплитуда сигнала,  $h(t_i - \tau)$ ,  $\tau$  – огибающая сигнала и её задержка,  $\omega_0$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  – промежуточная частота, доплеровская частота и фаза несущей. Если интервал дискретизации  $T_d$ , то при суммировании  $L$  отсчетов интервал накопления составит  $T = T_d L$ . При корреляционной обработке интервал накопления выбирают значительно превосходящим период несущей частоты.

Особый интерес представляют результаты вычисления (3.1) при использовании в качестве опорных сигналов (рис. 3.2):

$$\tilde{S}_{c,i} = h(t_i - \tilde{\tau}) \cdot \cos(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}), \quad (3.4)$$

$$\tilde{S}_{s,i} = h(t_i - \tilde{\tau}) \cdot \sin(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}),$$

они носят название *синфазной* и *квадратурной* корреляционной суммы:

$$I = \sum_{i=1}^L y_i \tilde{S}_{c,i} = \sum_{i=1}^L y_i h(t_i - \tilde{\tau}) \cos(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}), \quad (3.5)$$

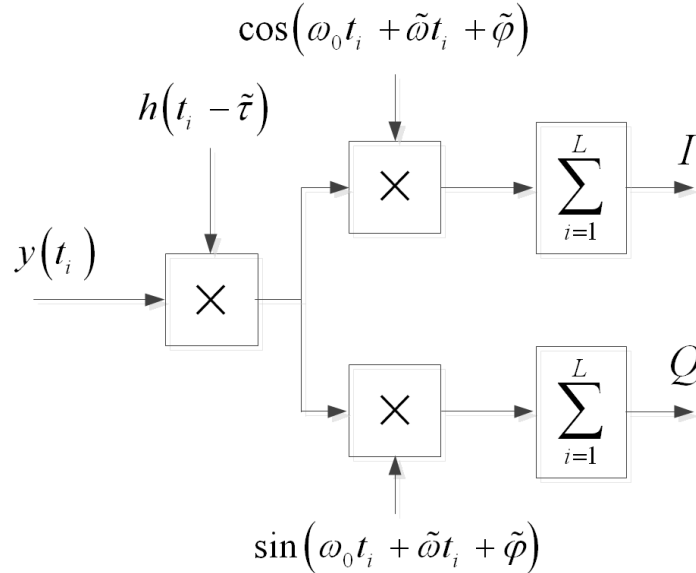
$$Q = \sum_{i=1}^L y_i \tilde{S}_{s,i} = \sum_{i=1}^L y_i h(t_i - \tilde{\tau}) \sin(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}).$$

Алгоритмы поиска сигнала, слежения, выделения сообщения используют корреляционные суммы в той или иной форме.

Представим синфазную корреляционную сумму в виде двух слагаемых – детерминированного  $\bar{I}$  и случайного  $n_I$ :

$$I = \bar{I} + n_I, \quad \bar{I} = \sum_{i=1}^L S_i h(t_i - \tilde{\tau}) \cos(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}),$$

$$n_I = \sum_{i=1}^L n_i h(t_i - \tilde{\tau}) \cos(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}).$$
(3.6)



**Рис. 3.2. Структурная схема расчета корреляционных сумм**

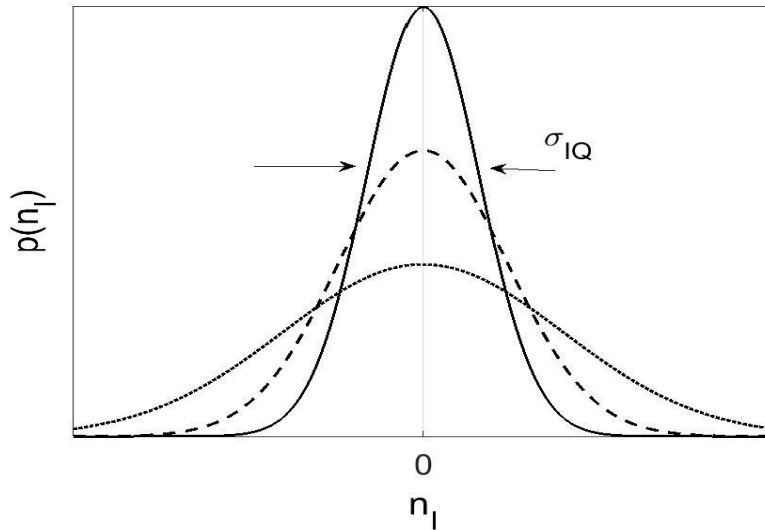
Ограничимся рассмотрением сигналов с постоянной огибающей. Для таких сигналов функция  $h(t)$  может принимать только два значения – плюс или минус единица. Величина  $n_I$  образуется суммированием  $L$  независимых нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_y^2 \cos^2(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi})$ . Её дисперсия

$$\sigma_{IQ}^2 = \sum_{i=1}^L \sigma_y^2 \cos^2(\omega_0 t_i + \tilde{\omega} t_i + \tilde{\varphi}) = \frac{\sigma_y^2 L}{2}. \quad (3.7)$$

Таким образом,  $n_I$  – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_{IQ}^2$  (рис. 3.3).

$$n_I \sim N(0, \sigma_{IQ}^2). \quad (3.8)$$

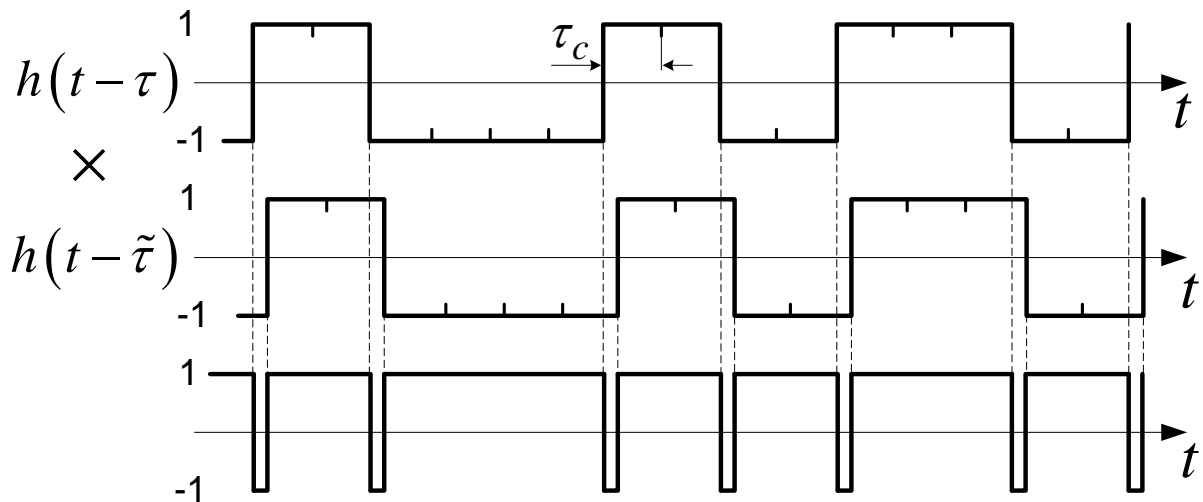
В системах связи, радионавигации, локации и т.д. в качестве  $h(t)$  часто используется псевдослучайная последовательность (рис. 3.4). В этом случае функция  $\rho(\delta\tau)$  принимает вид, изображенный на рис. 3.5, где  $\tau_c$  – длительность одного символа последовательности.



**Рис. 3.3. Плотность вероятности для случайной составляющей корреляционной суммы**

Аналогичные выкладки можно повторить для квадратурной суммы  $Q = \bar{Q} + n_Q$ ,  $n_Q \sim N(0, \sigma_{IQ}^2)$ ,

$$\bar{Q} \approx -\frac{AL}{2} \rho(\delta\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta\omega T}{2} + \delta\varphi\right). \quad (3.11)$$



**Рис. 3.4. Результат умножения огибающих опорного и полезного сигналов**

Взаимная дисперсия между  $n_I$  и  $n_Q$  пренебрежимо мала, в первом приближении эти случайные величины можно считать независимыми.

Выражения (3.8), (3.9) и (3.11) задают статистический эквивалент коррелятора.

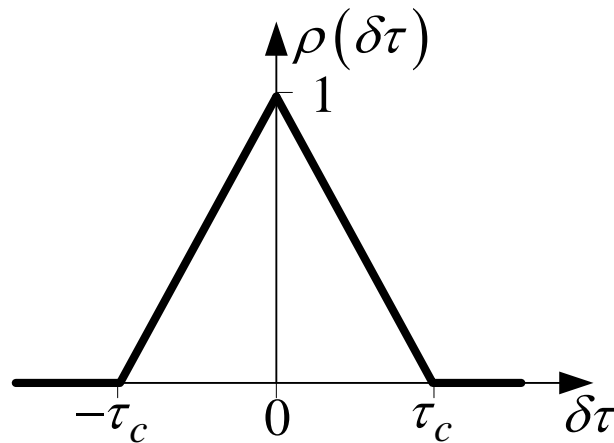


Рис. 3.5. Функция  $\rho(\delta\tau)$

### 3.1.3. Обнаружитель сигнала

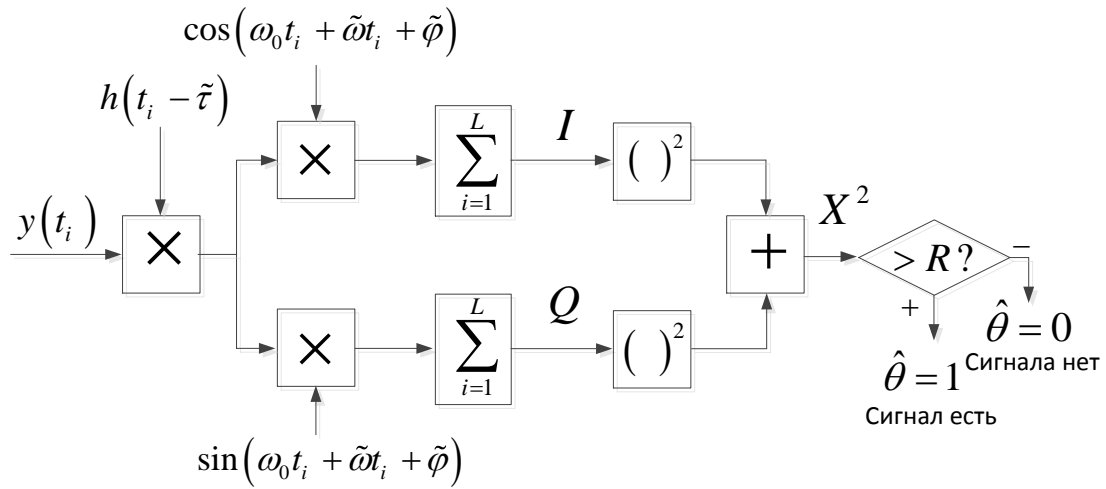
Под обнаружением сигнала понимают анализ принятой реализации  $y(t_i)$  на интервале времени  $[0, T]$  с целью принятия решения о наличии или отсутствии в ней полезной составляющей  $S(t_i)$ :

$$y(t_i) = \theta \cdot S(t_i) + n(t_i) = \begin{cases} S(t_i) + n(t_i), & \text{если сигнал присутствует,} \\ n(t_i), & \text{если сигнал отсутствует.} \end{cases} \quad (3.12)$$

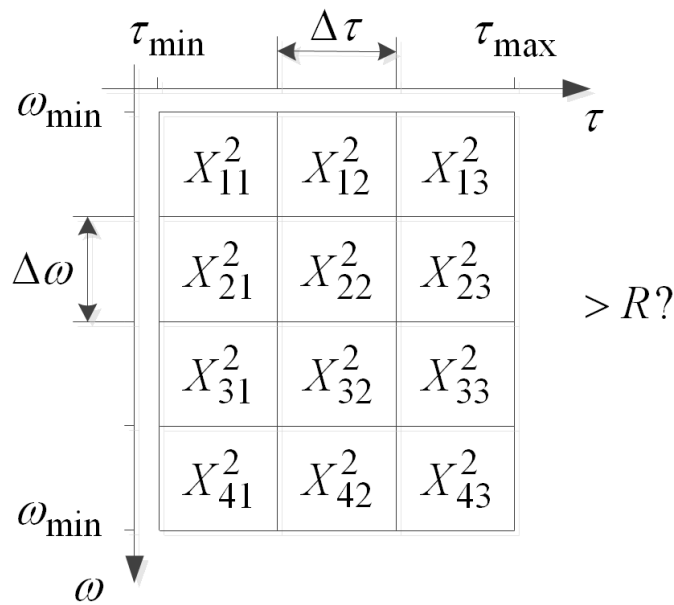
При известной частоте и задержке сигнала и неизвестной начальной фазе используют обнаружитель, схема которого приведена на рис. 3.6. В нем вычисляются синфазная и квадратурная корреляционные суммы, после чего сумма их квадратов  $X^2 = I^2 + Q^2$  сравнивается с порогом  $R$ . Если порог превышен, то принимается решение  $\hat{\theta} = 1$  о наличии сигнала, иначе – решение  $\hat{\theta} = 0$  об отсутствии сигнала.

Во многих приложениях частота и задержка точно неизвестны, но их возможные значения ограничены интервалами  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  и  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  соответственно. В этом случае всё поле возможных значений разбивается на ячейки с шагом  $\Delta\omega$  и  $\Delta\tau$  по частоте и задержке соответ-

ственно, а в каждой ячейке реализуется всё тот же канал обнаружителя (рис. 3.7).



**Рис. 3.6. Канал обнаружителя**



**Рис. 3.7. Разбиение поля возможных значений частоты и задержки на ячейки**

После расчета суммы квадратов корреляционных сумм в каждой ячейке ищется их максимум  $X_{\max}^2$ , который уже сравнивается с порогом. В рамках выполнения лабораторной работы предлагается пренебречь корреляционной связью между шумами  $n_I$ ,  $n_Q$  для различных ячеек, считать эти случайные величины независимыми.

Есть несколько подходов к выбору порога сравнения  $R$ . Один из возможных вариантов – воспользоваться критерием Неймана-Пирсона. В этом случае порог выбирается исходя из заданной вероятности ложной тревоги  $P_f$  (вероятности превышения порога в отсутствии сигнала).

Фиксированной вероятности ложной тревоги соответствует своя *характеристика обнаружения* – кривая зависимости вероятности правильного обнаружения  $P_d$  (принятия решения о наличии сигнала в его присутствии) от отношения сигнал/шум. В рамках лабораторной работы под отношением сигнал/шум будем понимать отношение мощности полезного сигнала к спектральной плотности мощности шума

$$q_{c/n0} = \frac{P}{N_0} = \frac{A^2}{4\sigma_y^2 T_d}. \quad (3.13)$$

### 3.2. Лабораторное задание

В рамках лабораторной работы требуется:

1. Определить порог сравнения для заданной вероятности ложной тревоги.

2. Построить характеристику обнаружения для диапазона отношений сигнал/шум 25..45 дБГц.

3. Построить гистограммы  $X_{\max}^2$  в отсутствии и присутствии полезного сигнала для 10 000 экспериментов для отношения сигнал/шум, при котором достигается вероятность правильного обнаружения 0.9.

При подготовке к лабораторной работе студент выполняет первые этапы процедуры компьютерного моделирования и оформляет соответствующие разделы отчета. При выполнении домашней подготовки требуется разработать и занести в отчет (см. разделы 3.4.1-3.4.4 примера оформления отчета о лабораторной работе в Приложении 1):

- формулировку задачи;
- математическую модель объекта исследования;
- тестовые воздействия и условия, с помощью которых предлагается проверять адекватность компьютерной модели и/или её компонентов;
- алгоритм компьютерной модели, написанный на псевдокоде или в нотации MATLAB/Octave/Си [4].

Варианты параметров задачи задаются таблицей 1. Начало поля обнаружения –  $f_{\min} = 0$  Гц по частоте и  $\tau_{\min} = 0$  с по задержке. Шаг по частоте  $\Delta f = \frac{2}{3T}$ , шаг по задержке  $\Delta \tau = \frac{\tau_c}{2}$ .

## Варианты заданий

Номер варианта	Вероятность ложной тревоги $P_f$	Интервал накопления $T$ , мс	Число ячеек по частоте	Число ячеек по задержке
1	$10^{-2}$	2	8	12
2	$10^{-3}$	2	8	12
3	$5 \cdot 10^{-3}$	2	8	12
4	$10^{-2}$	5	8	12
5	$10^{-3}$	5	8	12
6	$5 \cdot 10^{-3}$	5	8	12
7	$10^{-2}$	10	8	12
8	$10^{-3}$	2	12	12
9	$5 \cdot 10^{-3}$	2	12	12
10	$10^{-2}$	2	12	12
11	$10^{-3}$	5	12	12
12	$5 \cdot 10^{-3}$	5	12	12
13	$10^{-2}$	5	12	12
14	$10^{-3}$	2	16	12
15	$5 \cdot 10^{-3}$	2	16	12
16	$10^{-2}$	2	16	12
17	$10^{-3}$	5	16	12
18	$5 \cdot 10^{-3}$	5	16	12
19	$10^{-2}$	5	16	12
20	$10^{-3}$	10	16	12
21	$5 \cdot 10^{-3}$	2	8	10
22	$10^{-2}$	2	8	10
23	$10^{-3}$	2	8	10
24	$5 \cdot 10^{-3}$	5	8	10
25	$10^{-2}$	5	8	10
26	$10^{-3}$	5	8	10
27	$5 \cdot 10^{-3}$	10	8	10
28	$10^{-2}$	2	12	10
29	$10^{-3}$	2	12	10



Номер варианта	Вероятность ложной тревоги $P_f$	Интервал накопления $T$ , мс	Число ячеек по частоте	Число ячеек по задержке
30	$5 \cdot 10^{-3}$	2	12	10
31	$10^{-2}$	5	12	10
32	$10^{-3}$	5	12	10
33	$5 \cdot 10^{-3}$	5	12	10
34	$10^{-2}$	2	16	10
35	$10^{-3}$	2	16	10
36	$10^{-4}$	2	16	10
37	$10^{-2}$	5	16	10
38	$10^{-3}$	5	16	10
39	$5 \cdot 10^{-3}$	5	16	10
40	$10^{-2}$	10	16	10
41	$10^{-3}$	2	8	9
42	$5 \cdot 10^{-3}$	2	8	9
43	$10^{-2}$	2	8	9
44	$10^{-3}$	5	8	9
45	$10^{-4}$	5	8	9
46	$10^{-2}$	5	8	9
47	$10^{-3}$	10	8	9
48	$5 \cdot 10^{-3}$	2	12	9
49	$10^{-2}$	2	12	9
50	$10^{-3}$	2	12	9
51	$5 \cdot 10^{-3}$	5	12	9
52	$10^{-2}$	5	12	9
53	$10^{-3}$	5	12	9
54	$5 \cdot 10^{-3}$	2	16	9
55	$10^{-2}$	2	16	9
56	$10^{-3}$	2	16	9
57	$5 \cdot 10^{-3}$	5	16	9
58	$10^{-2}$	5	16	9
59	$10^{-3}$	5	16	9
60	$10^{-3}$	5	10	12

В лаборатории:

1. На основании подготовленного алгоритма составьте программу компьютерной модели.
2. Проверьте программу и/или её компоненты, сформировав тестовые воздействия и условия, предложенные в ходе домашней подготовки. При выявлении расхождения результатов моделирования и ожидаемых результатов проведите отладку программы.
3. Последовательно выполните моделирование по плану:
  - определите порог сравнения для заданной вероятности ложной тревоги;
  - постройте характеристику обнаружения для диапазона отношений сигнал/шум 25..45 дБГц;
  - постройте гистограммы  $X_{\max}^2$ .
4. Оцените адекватность полученных результатов, их соответствие общетеоретическим соображениям.
5. Составьте отчет о проведенном моделировании. В состав отчета должны входить:
  - постановка задачи;
  - используемая математическая модель и обоснование её выбора;
  - обоснование и значения ожидаемых результатов тестовых воздействий и условий, их сопоставление с соответствующими результатами проверки компьютерной модели;
  - листинг используемых в процессе исследования программ;
  - полученные результаты и их интерпретация, вывод о достижении или не достижении цели исследования.

### **3.3. Контрольные вопросы**

1. Что такое статистический эквивалент звена?
2. Опишите статистический эквивалент коррелятора.
3. Какому распределению подчиняются выходные отсчеты коррелятора?
4. Из каких этапов состоит процедура компьютерного моделирования? В чем назначение каждого этапа?
5. Опишите структуру обнаружителя сигнала.
6. Как выбрать порог сравнения для обнаружителя?
7. Что такое характеристика обнаружения?

### **3.4. Приложение 1. Пример оформления отчета**

Пример оформления титульного листа приведен в разделе 1.4.1.

### 3.4.1. Постановка задачи

Моделируется обнаружитель сигнала с неизвестной начальной фазой, частотой и задержкой.

Область возможных значений частоты ограничена интервалом  $[0; M\Delta f]$ , где  $M = 10$ ,  $\Delta f = \frac{2}{3T}$  Гц,  $T = 5$  мс.

Область возможных значений задержки ограничена интервалом  $[0; N\Delta\tau]$ , где  $N = 12$ ,  $\Delta\tau = \frac{\tau_c}{2}$ ,  $\tau_c$  – длительность символа псевдослучайной последовательности в огибающей.

Задана вероятность ложной тревоги в целом по полю  $P_f = 10^{-3}$ .

Алгоритм обнаружителя состоит в расчете синфазных и квадратурных сумм в поле ячеек  $M \times N$ , вычислении суммы их квадратов и сравнения результатов с порогом  $R$ . Если хотя бы в одной из ячеек произошло превышение порога сравнения, то принимается решение о наличии сигнала. Иначе принимается решение об отсутствии сигнала.

Требуется:

1) Определить величину порога сравнения, позволяющую реализовать заданную вероятность ложной тревоги.

2) Найти характеристику обнаружения в диапазоне значений отношения сигнал/шум 25..45 дБГц.

3) Построить гистограммы  $X_{\max}^2$ .

Допущения:

1) При моделировании воспользуемся статистическими эквивалентами синфазной и квадратурной сумм коррелятора.

2) Случайные слагаемые статистических эквивалентов будем считать независимыми как для одной, так и для разных ячеек.

3) Допустимая погрешность определения порога составляет 0.02 дБ.

### 3.4.2. Математические модели

Математическая модель статистического эквивалентна коррелятора для ячейки  $m, n$ :

$$I_{m,n} = \bar{I}_{m,n} + n_{I,m,n}, \quad Q_{m,n} = \bar{Q}_{m,n} + n_{Q,m,n},$$

$$n_{I,m,n} \sim N(0, \sigma_{IQ}^2), \quad n_{Q,m,n} \sim N(0, \sigma_{IQ}^2), \quad \sigma_{IQ}^2 = \frac{\sigma_y^2 L}{2},$$

$$\bar{I}_{m,n} = \frac{AL}{2} \rho(\delta\tau_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega_m T}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta\omega_m T}{2} + \delta\varphi_{m,n}\right),$$

$$\bar{Q}_{m,n} = -\frac{AL}{2} \rho(\delta\tau_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega_m T}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta\omega_m T}{2} + \delta\varphi_{m,n}\right),$$

где

$$\delta\omega_m = \omega - 2\pi\left((m-1)\Delta f + \frac{\Delta f}{2}\right),$$

$$\delta\tau_n = \tau - (n-1)\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2},$$

$$\delta\varphi_{m,n} \sim U(0, 2\pi),$$

истинные значения доплеровского сдвига частоты и задержки сигнала являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на допустимых интервалах:

$$\omega \sim U(0, M\Delta f), \tau \sim U(0, N\Delta\tau).$$

Зададимся дисперсией шумов равной  $\sigma_y^2 = 64$ , частотой дискретизации  $F_d = \frac{1}{T_d} = 44.2$  МГц. Амплитуда сигнала определяется отношением сигнал/шум как:

$$A = 2\sigma_y \sqrt{q_{c/n0} T_d}$$

Функцию  $\rho(\delta\tau)$  определим как:

$$\rho(\delta\tau) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{\delta\tau}{\tau_c}\right|, & |\delta\tau| < \tau_c, \\ 0, & |\delta\tau| \geq \tau_c. \end{cases}$$

Алгоритм принятия решения:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & \exists m, n: X_{m,n}^2 = I_{m,n}^2 + Q_{m,n}^2 > R, \\ 0, & \nexists m, n: X_{m,n}^2 = I_{m,n}^2 + Q_{m,n}^2 > R. \end{cases}$$

### 3.4.3. Псевдокод компьютерной модели

С учетом выбранных математических моделей получаем следующий псевдокод компьютерной модели:

*Подготовка среды;*

*Задание параметров согласно варианту*

*Расчет СКО квадратур*

*Задание числа статистических экспериментов*

*Цикл по статистическим экспериментам*

*Расчет стат. эквивалентов шумов корреляционных сумм*

*Расчет  $X_{m,n}^2$*

*Поиск и сохранение максимума*

*Конец цикла по статистическим экспериментам*

*Градиентное увеличение порога до тех пор, пока число среднее число превышений порога не сравняется с заданной вероятностью ЛТ*

*Определение inline-функции расчета  $\rho(\delta\tau)$*

*Расчет амплитуды*

*Цикл по отношению сигнал/шум*

*Формирование параметров стат. эквивалента*

*Цикл по статистическим экспериментам*

*Расчет стат. эквивалентов корреляционных сумм*

*Поиск и сохранение максимума*

*Конец цикла по статистическим экспериментам*

*Расчет выборочного математического ожидания превышения порога*

*Конец цикла по отношению сигнал/шум*

*Вывод графика характеристики обнаружения*

*Поиск ближайшего отношения сигнал/шум для  $P_d = 0.9$*

*Формирование параметров стат. эквивалента для найденного с/ш*

*Цикл по статистическим экспериментам*

*Расчет стат. эквивалентов корреляционных сумм*

*Поиск и сохранение максимума*

*Конец цикла по статистическим экспериментам*

*Вывод результатов*

### **3.4.4. Тестовое воздействие**

Условия:

Сократим поле поиска до 1 ячейки. Вероятность ложной тревоги выберем на уровне 0.5.

Ожидаемый результат:

Для одной ячейки  $\max(X_{m,n}^2)$  имеет распределение Хи-квадрат.

При вероятности ложной тревоги 0.5 порог совпадает с медианой распределения, которая для заданных параметров аналитически рассчитывается как

$$R = 2 \left(1 - \frac{2}{9.2}\right)^3 \sigma_{IQ}^2 = 2 \left(1 - \frac{2}{9.2}\right)^3 \frac{\sigma_y^2 TF_d}{2} \approx 9.9 \cdot 10^6.$$

### 3.4.5. Проверка модели в тестовых условиях

Составлена программа компьютерной модели [4]:

#### main.m:

```
clear all; close all; clc
std_y = 8; % СКО шума выборки
Fd = 44.2e6; % Частота дискретизации, МГц
Td = 1/Fd;
T = 5e-3; % Интервал накопления, мс
L = T / Td; % Число суммирований
Pf = 0.001; % Вероятность ЛТ
stage = 1; % 1 - Выйти после: поиска R,
           % 2 - после построения характеристики обнаружения,
           % 3 - завершения всех этапов
M = 10; % Ячеек по частоте
N = 12; % Ячеек по задержке
delta_tau = 1/2; % Шаг ячеек по задержке, символов
tau_tilda = (0:N-1)*delta_tau + delta_tau/2; % Опорные задержки
tau_max = N*delta_tau;
delta_f = 2/3 / T; % Шаг ячеек по частоте, Гц
omega_tilda = 2*pi*((0:M-1)*delta_f + delta_f/2); % Опорные частоты
omega_max = 2*pi*M*delta_f;
% Сетка, задающая центры ячеек
[tau_tilda_m, omega_tilda_m] = meshgrid(tau_tilda, omega_tilda);
std_IQ = std_y * sqrt(L/2); % СКО шума корреляционных сумм
% Число экспериментов для поиска порога и построения гистограмм
J1 = 100000;
% Число экспериментов для расчета характеристик обнаружения
J2 = 10000;
X2max = nan(1, J1); % Инициализация памяти
signal = 'off';
for j = 1:J1
    experiment;
    if ~mod(100*j/J1, 10)
        fprintf('Задание 1: Выполнение %.0f%%\n', 100*j/J1);
    end
end
R = std_IQ^2; % Очень низкий порог
while sum(X2max > R) / J1 > Pf
    R = R * 1.0005; % Увеличиваем на 0.002 дБ
end
figure(1); d = max(X2max) - min(X2max);
[h1, x] = hist(X2max, min(X2max):d/20:max(X2max));
```

```

bar(x, h1); % Строим гистограмму X2max в отсутствии сигнала
% Красная линия, изображающая порог
hold on; plot( [R R], get(gca, 'YLim'), 'r'); hold off
xlabel('X^2_{max}');
if stage == 1
    clc; fprintf('Threshold is %f\n', R);
    return;
end
% Определение inline-функции ro(dtau)
ro = inline('(1 - abs(dtau)) .* (abs(dtau)<1)', 'dtau');
qсно_dB = 25:1:45;
X2max = nan(1, J2); % Стирание прошлых результатов
Pd = nan(1, length(qсно_dB));
signal = 'on';
for q = 1:length(qсно_dB)
    qсно = 10^(qсно_dB(q)/10); % Перевод из дБ в разы
    A = 2*std_y * sqrt(qсно*Td); % Расчет амплитуды для данного с/ш
    % Истинная задержка для каждого эксперимента
    tau = tau_max * rand(1, J2);
    % Истинная частота для каждого эксперимента
    omega = omega_max * rand(1, J2);
    % Начальная фаза в каждом эксперименте случайна
    dphi = 2*pi*rand(1, J2);
    for j = 1:J2
        experiment;
        if ~mod(100*j/J2, 10)
            fprintf('Задание 2: ОСШ=%0.0f дБГц Выполнение %0.0f%%\n', ...
                qсно_dB(q), 100*j/J2);
        end
    end
    Pd(q) = sum(X2max > R) / J2; % Среднее превышение порога в выборке
end
figure(2); plot(qсно_dB, Pd);
xlabel('q_{с/ш}, дБГц'); ylabel('P_d'); grid on;
% Ищем с/ш, при котором достигается Pd=0.9
[nul, q_09] = min(abs(Pd - 0.9));
qсно_dB_09 = qсно_dB(q_09); % Отношение сигнал/шум (ОСШ)
qсно = 10^(qсно_dB_09/10);
% Отообразим границу на графике
figure(2); hold on; stem(qсно_dB_09, 0.9, 'r'); hold off;
if stage == 2
    clc; fprintf('ОСШ для Pd=0.9 - %0.0f дБГц\n', qсно_dB_09);
    return;
end

```

```

end
X2max = nan(1, J1);
A = 2*std_y * sqrt(qcno*Td);
% Истинная задержка для каждого эксперимента
tau = tau_max * rand(1, J1);
% Истинная частота для каждого эксперимента
omega = omega_max * rand(1, J1);
% Начальная фаза в каждом эксперименте случайна
dphi = 2*pi*rand(1, J1);
for j = 1:J1
    experiment;
    if ~mod(100*j/J1, 10)
        fprintf('Задание 3: Выполнение %.0f%%\n', 100*j/J1);
    end
end
figure(1);
hold on
[h2, x] = hist(X2max, min(X2max):d/20:max(X2max));
bar(x, h2, 'g'); % Дополняем новой гистограммой при наличии сигнала
legend('\theta = 0', 'Порог', '\theta = 1');
hold off
figure(3);
surf(omega_tilda_m/2/pi, tau_tilda_m, X2);
xlabel('f, Гц'); ylabel('\tau, чипы'); zlabel('X^2');
clc;
fprintf('Порог равен %f\n', R)
fprintf('ОСШ для Pd=0.9 is %.0f дБГц\n', qcno_dB_09);

```

### **experiment.m:**

```

if strcmp(signal, 'off')
    I = std_IQ*randn(M, N) ;
    Q = std_IQ*randn(M, N) ;
    X2 = I.^2 + Q.^2;
    X2max(j) = max(max(X2));
elseif strcmp(signal, 'on')
    dtau = tau(j) - tau_tilda_m;
    domega = omega(j) - omega_tilda_m;
    I = A*L/2 * ro(dtau) .* sinc(domega*T/2 /pi) .* cos(domega*T/2 ...
+ dphi(j)) + std_IQ*randn(M, N) ;
    Q =- A*L/2 * ro(dtau) .* sinc(domega*T/2 /pi) .* sin(domega*T/2 ...
+ dphi(j)) + std_IQ*randn(M, N) ;
    X2 = I.^2 + Q.^2;
    X2max(j) = max(max(X2));

```



End

В качестве тестовых условий сократили размер поля до одной ячейки:

$M = 1$ ;

$N = 1$ ;

а вероятность ложной тревоги изменили на 0,5:

$P_f = 0.5$ ;

В результате выполнения программы получен порог сравнения

Порог равен 9875528.745069

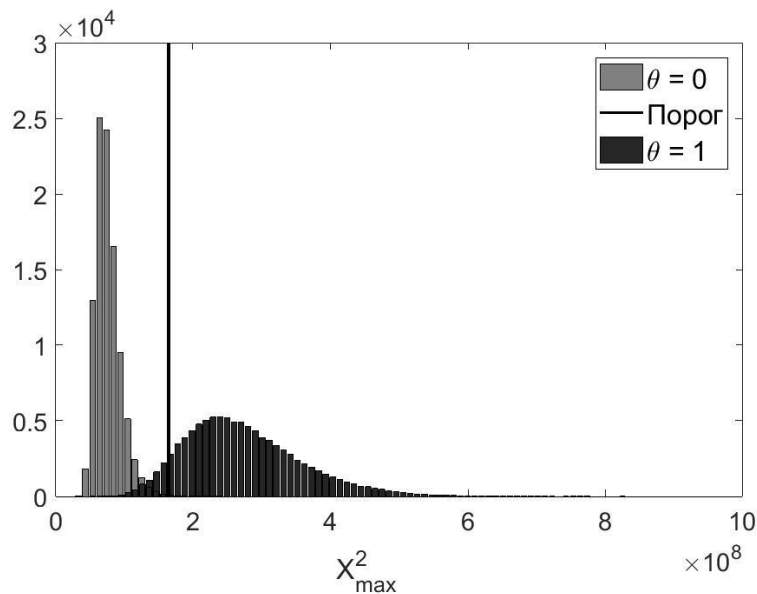
что соответствует ожиданиям.

### 3.4.6. Результаты моделирования

Найден порог сравнения для заданной конфигурации поля поиска и вероятности ложной тревоги:

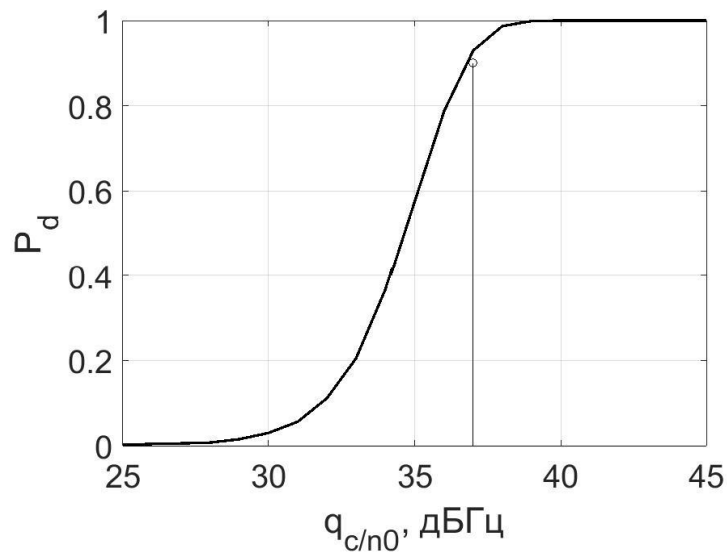
Порог равен 166976479.933732

Гистограммы  $X_{\max}^2$  при наличии и в отсутствии полезного сигнала приведены на рис. 3.8.



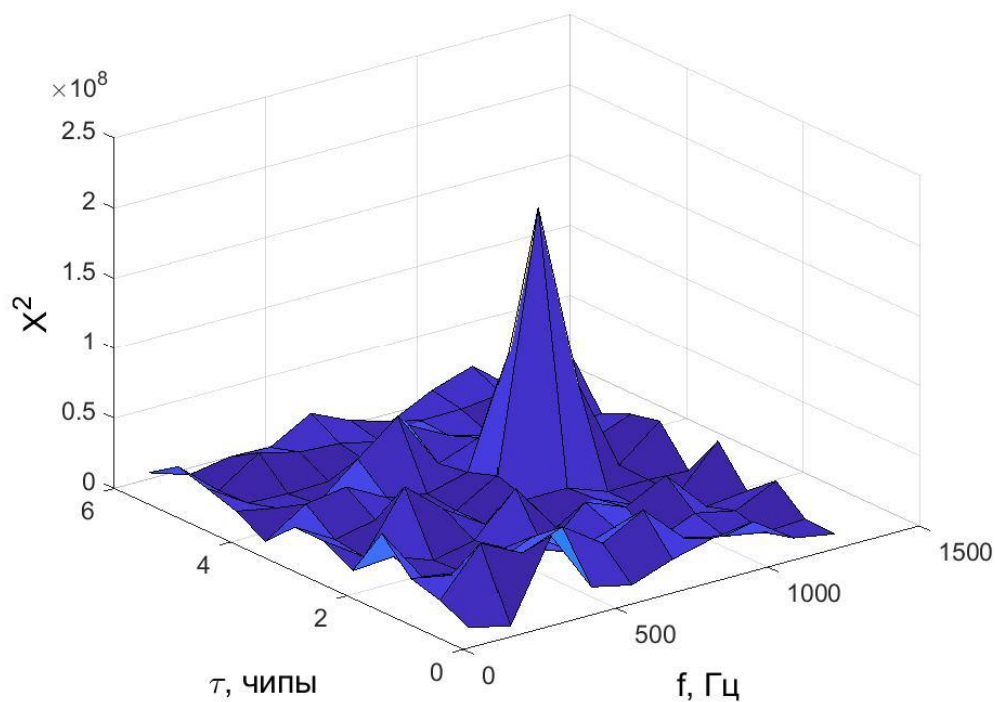
**Рис. 3.8. Гистограммы значений  $X_{\max}^2$  при наличии ( $\theta = 1$ ) и отсутствии ( $\theta = 0$ ) полезного сигнала**

Характеристика обнаружения представлена на рис. 3.9. Уровень вероятности правильного обнаружения 0.9 достигается при отношении сигнал/шум 37 дБГц.



**Рис. 3.9. Характеристика обнаружения**

На рис. 3.10 представлена одна из реализаций поверхности вычисленных значений  $X_{m,n}^2$  для отношения сигнал/шум 37 дБГц. Изображению соответствует доплеровский сдвиг полезного сигнала 943 Гц и задержке 3,56 символа.



**Рис. 3.10. Поверхность значений  $X_{m,n}^2$  для одной из реализаций при отношении сигнал/шум 37 дБГц**

### 3.4.7. Анализ результатов моделирования

Поставленные цели моделирования достигнуты:

- найден порог для заданной вероятности ложной тревоги, который составил;

- получена характеристика обнаружения.

Результаты моделирования не противоречат ожиданиям и общетеоретическим соображениям. Проведение новых итераций моделирования и уточнение модели не требуется.

## 4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 «МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ»

**Цель работы:** применение метода информационного параметра при моделировании радиотехнического устройства; получение опыта моделирования следящей системы (СС); развитие навыков обработки данных статистических экспериментов.

### 4.1. Краткие теоретические сведения

В лабораторной работе №4 изучается метод информационного параметра в приложении моделирования радиотехнических устройств. Описывается следящая система за частотой сигнала второго порядка, приводятся её функциональные и структурные схемы.

#### 4.1.1. Модель процесса частоты сигнала

Алгоритмы обработки сигналов радиоприемных устройств существенным образом зависят от применяемых моделей самих сигналов и их параметров.

Изменение частота сигнала, наблюдаемого на выходе АЦП приемника, обусловлено действием множества факторов: взаимным движением приемника и передатчика, что вызывает эффект Доплера, нестабильность частоты гетеродинных колебаний приемника и т.д. Во многом это изменение носит случайный характер. Широкое распространение получила модель изменения частоты сигнала в виде двух интеграторов белого шума (рис. 4.1):

$$\omega_k = \omega_{k-1} + v_{k-1}T,$$

$$v_k = v_{k-1} + \xi_k T,$$

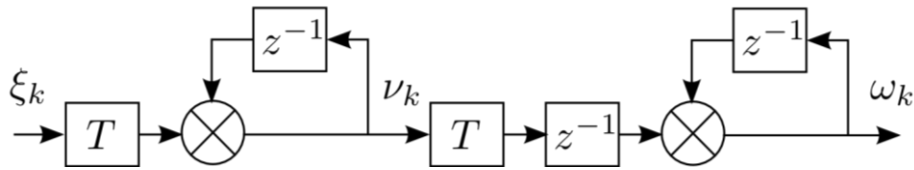
$$\begin{aligned}\xi_k &\sim N(0, D_\xi), \\ M[\xi_i \xi_j] &= D_\xi \delta_{ij},\end{aligned}\tag{4.1}$$

где  $\xi_k$  – формирующий шум, являющийся дискретным белым гауссовым шумом с дисперсией  $D_\xi$ ,  $\omega_k$  – частота в момент  $t_k$ ,  $T = t_k - t_{k-1}$ .

Пример использования  $\omega_k$  в модели сигнала

$$S(t_{k,l}) = Ah(t_{k,l}) \cos(\omega_0 t_{k,l} + \omega_k t_{k,l} + \varphi_k),\tag{4.2}$$

где  $\varphi_k = \varphi_{k-1} + \omega_{k-1}T$  – фаза,  $\omega_0$  – промежуточная частота.



**Рис. 4.1. Структурная схема модели частоты**

Выражения (4.1) можно записать в векторном виде

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_k, \\ \mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} \omega_k \\ \nu_k \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}, \xi_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_k \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{4.3}$$

где вектор  $\mathbf{x}_k$  называют вектором состояния процесса, который в соответствии с выражениями (4.3) относится к классу диффузионных марковских дискретных случайных процессов.

#### 4.1.2. Система слежения за частотой

При динамической модели (4.3) для оценки частоты сигнала  $\omega_k$  используется следящая система [5], описываемая схемами на рис. 4.2, 4.3 и выражениями:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_k &= \tilde{\omega}_k + K_1 \frac{u_{d,k}}{S_d}, \\ \hat{\nu}_k &= \tilde{\nu}_k + K_2 \frac{u_{d,k}}{S_d}, \\ \tilde{\omega}_k &= \hat{\omega}_{k-1} + \hat{\nu}_{k-1}T, \tilde{\nu}_k = \hat{\nu}_{k-1},\end{aligned}\tag{4.4}$$

или в векторном виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K} \frac{u_{d,k}}{S_d}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{k-1},$$

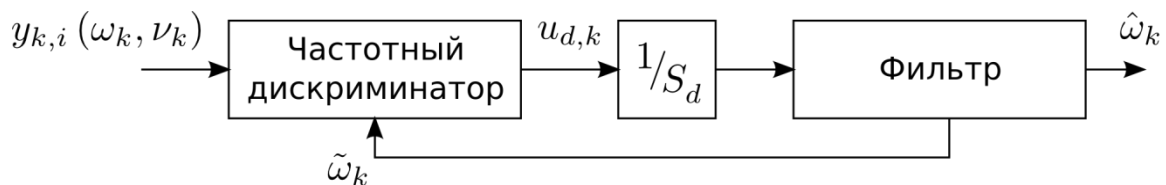
где  $\hat{\omega}_k$  – оценка частоты на момент  $t_k$ ,  $u_{d,k}$  – выходной сигнал частотного дискриминатора,  $S_d$  – крутизна дискриминационной характеристики [6], коэффициенты усиления связаны между собой и шумовой полосой СС  $\Delta f$  соотношениями:

$$K_1 = \frac{8}{3} \cdot \Delta f \cdot T, \quad K_2 = \frac{32}{9} \cdot \Delta f^2 \cdot T, \quad (4.6)$$

приняты обозначения:

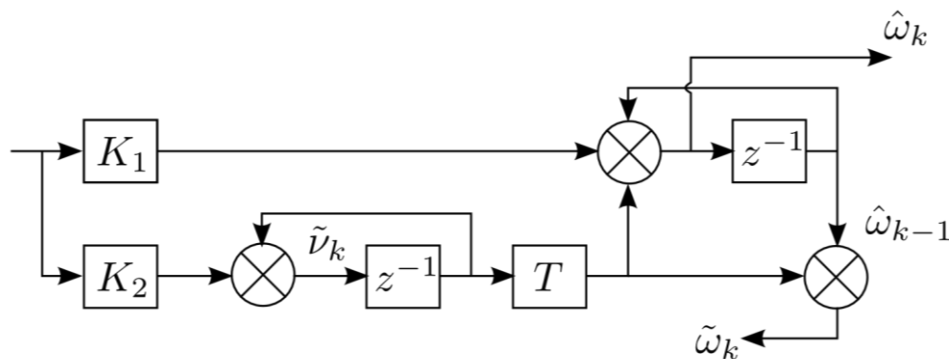
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_k \\ \hat{\nu}_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k \\ \tilde{\nu}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Вектор  $\hat{\mathbf{x}}_k$  называется оценкой вектора состояния, а  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  – экстраполяцией вектора состояния.



**Рис. 4.2. Функциональная схема следящей системы за частотой**

Для расчета коэффициентов (4.6) используется значение полосы СС. Полоса выбирается на основании измерений отношения сигнал/шум и информации о взаимном движении передатчик-приемник и характеристиках опорных генераторов. Для расчета крутизны дискриминационной характеристики используются измерения отношения сигнал/шум.



**Рис. 4.3. Структурная схема фильтра следящей системы за частотой**

Частотный дискриминатор – сложное устройство, преобразующее выборку входного сигнала с учетом  $\tilde{\omega}_k$  в выходной сигнал рассогласования. Его подробная модель требует значительных вычислительных ресурсов для моделирования. Кроме того, потребуется моделирование входного сигнала.

### 4.1.3. Метод информационного параметра

Сигнал  $S(t, \lambda)$  в радиотехнических системах является носителем информационного процесса  $\lambda(t)$ . Метод информационного параметра предлагает отказаться от описания сигнала с помощью его мгновенных значений  $S(t_i, \lambda_i)$ , комплексных амплитуд  $\dot{S}(t_i, \lambda_i)$  и т.п. Предполагается использовать сам информационный процесс  $\lambda(t)$  и относительно него записывать процессы в различных участках схемы.

Метод информационного параметра удобно использовать при описании различных систем с обратной связью, таких как следящие системы и автогенераторы [1].

Для составления эквивалентной структурной схемы СС по методу информационного параметра воспользуемся линеаризованной моделью частотного дискриминатора вида:

$$u_{d,k} = S_d (\omega_k - \tilde{\omega}_k) + n_{d,k}, \quad (4.8)$$

где  $n_{d,k}$  – дискретный белый гуссовский шум с дисперсией  $D_n$ .

Преобразуем выражение (4.8)

$$\frac{u_{d,k}}{S_d} = (\omega_k - \tilde{\omega}_k) + \frac{n_{d,k}}{S_d} = \omega_{meas,k} - \tilde{\omega}_k, \quad (4.9)$$

где  $\omega_{meas,k}$  – эквивалентные измерения частоты

$$\omega_{meas,k} = \omega_k + \eta_k, \quad \eta_k = \frac{n_{d,k}}{S_d}, \quad (4.10)$$

здесь  $\eta_k$  – шум эквивалентных наблюдений, являющийся белым дискретным гауссовым с дисперсией  $D_\eta = \frac{D_n}{S_d^2}$ .

С учетом (4.9), (4.10) выражения (4.5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K} (\omega_{meas,k} - \tilde{\omega}_k), \\ \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

чему соответствует эквивалентная структурная схема системы, приведенная на рис. 4.4.

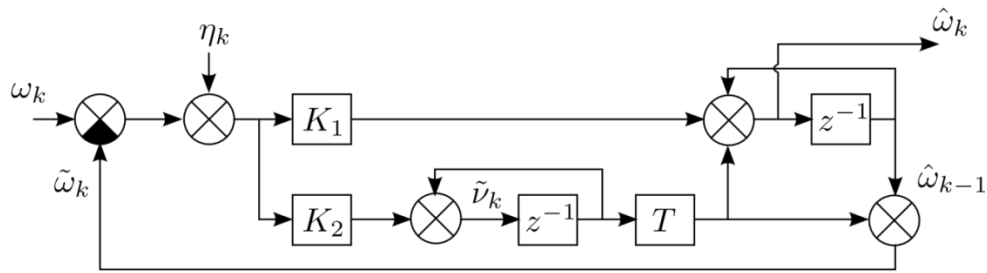


Рис. 4.4. Эквивалентная структурная схема СС

## 4.2. Лабораторное задание

В рамках лабораторной работы требуется:

1. Построить график зависимости динамической ошибки от полосы следящей системы.
2. Построить график зависимости флуктуационной ошибки от полосы следящей системы.
3. Построить график зависимости среднеквадратической ошибки оценивания частоты от полосы следящей системы.
4. Определить значение полосы следящей системы, при котором достигается минимум среднеквадратической ошибки оценивания.

При подготовке к лабораторной работе студент выполняет первые этапы процедуры компьютерного моделирования и оформляет соответствующие разделы отчета. При выполнении домашней подготовки требуется разработать и занести в отчет (см. разделы 4.4.1-4.4.3 примера оформления отчета о лабораторной работе в Приложении 1):

- формулировку задачи;
- математическую модель объекта исследования;
- тестовые воздействия и условия, с помощью которых предлагается проверять адекватность компьютерной модели и/или её компонентов.

Варианты параметров задачи задаются в табл. 4.1.

В лаборатории:

1. Составьте программу компьютерной модели.
2. Проверьте программу и/или её компоненты, сформировав тестовые воздействия и условия, предложенные в ходе домашней подготовки. При выявлении расхождения результатов моделирования и ожидаемых результатов проведите отладку программы.
3. Последовательно выполните моделирование по плану:
  - установите дисперсию шумов наблюдений равной нулю; варьируя полосу следящей системы, постройте график динамической ошибки;

- установите дисперсию формирующих шумов равной нулю; варьируя полосу следящей системы, постройте график флуктуационной ошибки;

- постройте график общей ошибки оценивания частоты;

- определите значения полосы следящей системы, при которой достигается минимум среднеквадратической ошибки оценивания.

Таблица 4.1

### Варианты заданий

( $D_\xi$  – дисперсия формирующего шума,  $D_\eta$  – дисперсия эквивалентных наблюдений)

№ варианта	$D_\xi$	$D_\eta$	№ варианта	$D_\xi$	$D_\eta$
1	6	7	31	12	7
2	6	8	32	12	8
3	6	9	33	12	9
4	6	10	34	12	10
5	6	11	35	12	11
6	7	8	36	13	8
7	7	9	37	13	9
8	7	10	38	13	11
9	7	11	39	13	12
10	7	12	40	13	13
11	8	9	41	14	9
12	8	10	42	14	10
13	8	11	43	14	11
14	8	12	44	14	12
15	8	13	45	14	13
16	9	7	46	15	12
17	9	8	47	15	13
18	9	9	48	15	14
19	9	10	49	15	15
20	9	11	50	15	16
21	10	8	51	16	11
22	10	9	52	16	12
23	10	10	53	16	13
24	10	11	54	16	14
25	10	12	55	16	15
26	11	9	56	17	9
27	11	10	57	17	10
28	11	11	58	17	11
29	11	12	59	17	12
30	11	13	60	13	10



4. Оцените адекватность полученных результатов, их соответствие общетеоретическим соображениям.

5. Составьте отчет о проведенном моделировании. В состав отчета должны входить:

- постановка задачи;
- используемая математическая модель и обоснование её выбора;
- обоснование и значения ожидаемых результатов тестовых воздействий и условий, их сопоставление с соответствующими результатами проверки компьютерной модели;
- листинг используемых в процессе исследования программ;
- полученные результаты и их интерпретация, вывод о достижении или не достижении цели исследования.

### **4.3. Контрольные вопросы**

1. Чем отличается формирующий шум и шум эквивалентных наблюдений?

2. Что такое динамическая ошибка оценивания в следящей системе?

3. Что такое флуктуационная ошибка оценивания в следящей системе?

4. Из каких этапов состоит процедура компьютерного моделирования? В чем назначение каждого этапа?

5. В чем заключается метод информационного параметра?

### **4.4. Приложение 1. Пример оформления отчета**

Пример оформления титульного листа приведен в разделе 1.4.1.

#### **4.4.1. Постановка задачи**

Моделируется следящая система за частотой.

Требуется:

1) Построить график зависимости динамической ошибки оценивания от полосы следящей системы.

2) Построить график зависимости флуктуационной ошибки оценивания от полосы следящей системы.

3) Построить график общей среднеквадратической ошибки оценивания частоты от полосы следящей системы.

4) Определить шумовую полосу следящей системы, при которой достигается минимум среднеквадратической ошибки оценивания частоты.

Допущения:

1) Моделирование будем производить в линейном приближении работы следящей системы по методу информационного параметра.

2) Процесс частоты развивается в соответствии с моделью второго порядка как интеграл от винеровского случайного процесса.

#### 4.4.2. Математические модели

Математическая модель процесса частоты:

$$\omega_k = \omega_{k-1} + v_{k-1}T$$

$$v_k = v_{k-1} + \xi_k T$$

$$\xi_k \sim N(0, D_\xi)$$

$$M[\xi_i \xi_j] = D_\xi \delta_{ij},$$

где в соответствии с вариантом задания  $D_\xi = 13$ .

Начальные значения:

$$\omega_0 = 0, v_0 = 0.$$

Выражения можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_k,$$

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \omega_k \\ v_k \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}, \xi_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_k \end{bmatrix}.$$

Алгоритм работы следящей системы относительно информационного параметра:

$$\hat{\omega}_k = \tilde{\omega}_k + K_1 (\omega_{meas,k} - \tilde{\omega}_k),$$

$$\hat{v}_k = \tilde{v}_k + K_2 (\omega_{meas,k} - \tilde{\omega}_k),$$

$$\tilde{\omega}_k = \hat{\omega}_{k-1} + \hat{v}_{k-1}T, \tilde{v}_k = \hat{v}_{k-1},$$

инициализационные значения:

$$\hat{\omega}_0 = 0, \hat{v}_0 = 0,$$

$\omega_{meas,k}$  – поступившие на k-м шаге измерения частоты;

коэффициенты определяются шумовой полосой системы  $\Delta f$  :

$$K_1 = \frac{8}{3} \cdot \Delta f \cdot T,$$

$$K_2 = \frac{32}{9} \cdot \Delta f^2 \cdot T,$$

Алгоритм может быть представлен в векторном виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_k \\ \hat{\nu}_k \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K} (\omega_{meas,k} - \tilde{\omega}_k),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_k \\ \tilde{\nu}_k \end{bmatrix} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.$$

### 4.4.3. Тестовое воздействие

Условия:

Исключим формирующий шум и шум наблюдений. Установим полосу СС равной 2 Гц. Установим начальную ошибку слежения на уровне нескольких Гц.

Ожидаемый результат:

Следящая система произведет подстройку частоты, ошибка в установленном режиме будет равняться нулю (ввиду величины астатизма). Характерное время переходного процесса – несколько обратных значений полосы, т.е. для 2 Гц около 1-2 секунд.

### 4.4.4. Проверка модели в тестовых условиях

Составлена программа компьютерной модели [4]:

**main.m**:

```
clear all; clc;
T = 0.05;
Tmax = 3600;
t = T:T:Tmax;
N = length(t);
G = [0 0;
     0 T];
F = [1 T;
     0 1];
Dksi = 13*1; % Дисперсия формирующего шума
Deta = 10*1; % Дисперсия шумов наблюдений
Band = 0.1:0.1:3; % Полоса СС
Band_for_plot = 2; % Полоса, при которой вывести графики
RMS_Omega = nan(1, length(Band));
```

```

for i = 1:length(Band)
    K = nan(2, 1);
    K(1) = 8/3 * Band(i) * T; % Коэффициенты СС
    K(2) = 32/9 * Band(i)^2 * T;
    ksi = sqrt(Dksi) * randn(1, N); % Реализация формирующего шума
    eta = sqrt(Deta) * randn(1, N); % Реализация шумов наблюдений
    Xest = [0; 0]; % Начальные условия
    Hextr = F*Xest;
    Xist = [0; 0];
    ErrOmega = nan(1, N); Omega = nan(1, N);
    for k = 1:N
        Xist = F*Xist + G*[0; ksi(k)]; % Развитие оцениваемого процесса
        omega_meas = Xist(1) + eta(k); % Наблюдения
        Xest = Hextr + K*(omega_meas - Hextr(1)); % Этап оценивания
        Hextr = F*Hextr; % Этап экстраполяции
        ErrOmega(k) = Xest(1) - Xist(1); % Ошибка оценивания
        Omega(k) = Xist(1); % Истинное значения
    end
    end
    if Band(i) == Band_for_plot
        figure(1);
        plot(t, ErrOmega/2/pi);
        xlabel('t, сек'); ylabel('\Delta \omega, Гц');
        title(['Полоса СС = ' num2str(Band(i)) 'Hz']);
        figure(2);
        plot(t, [Omega; Omega + ErrOmega]/2/pi);
        xlabel('t, сек'); ylabel('\omega, Гц');
        title(['Полоса СС = ' num2str(Band(i)) 'Hz']);
    end
    RMS_Omega(i) = sqrt(mean(ErrOmega.^2));
end
if Dksi == 0
    Col = [1 0 0];
elseif Deta == 0
    Col = [0 0.5 0];
else
    Col = [0 0 1];
end
figure(3)
hold on
plot(Band, RMS_Omega, 'Color', Col);
hold off
xlabel('Полоса СС, Гц'); ylabel('СКО \omega, Гц');

```

В качестве тестовых условий сократили время моделирования до 5 секунд:

$T_{\max} = 5$ ;

приравняли нулю дисперсии формирующего шума и шума наблюдений:

$D_{kxi} = 13 \cdot 0$ ; % Дисперсия формирующего шума

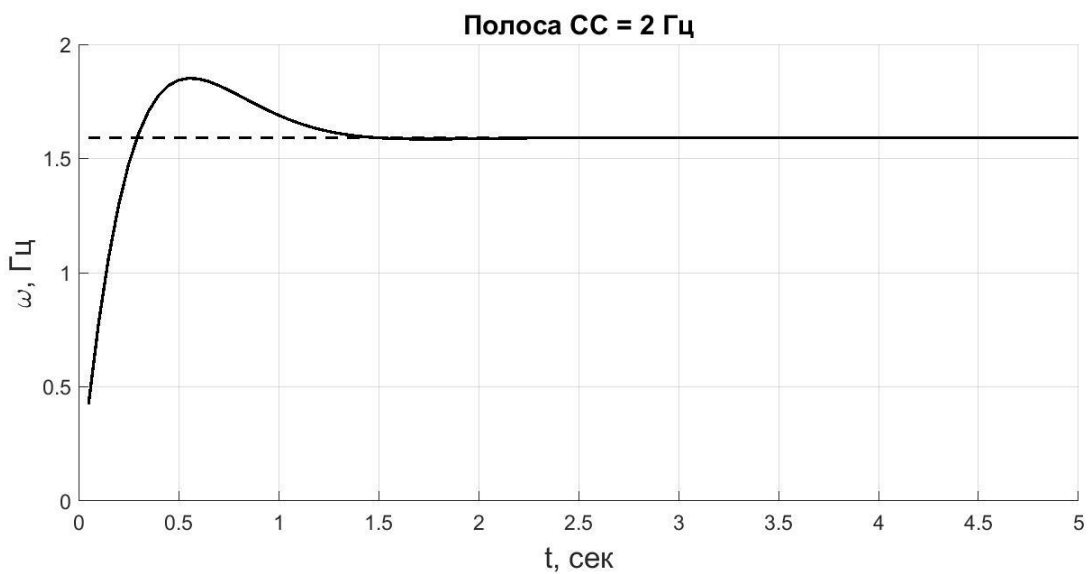
$D_{eta} = 10 \cdot 0$ ; % Дисперсия шумов наблюдений

начальное значение оцениваемого процесса частоты установили на 10 рад/с больше, чем начальное значение частоты в оценке вектора состояния:

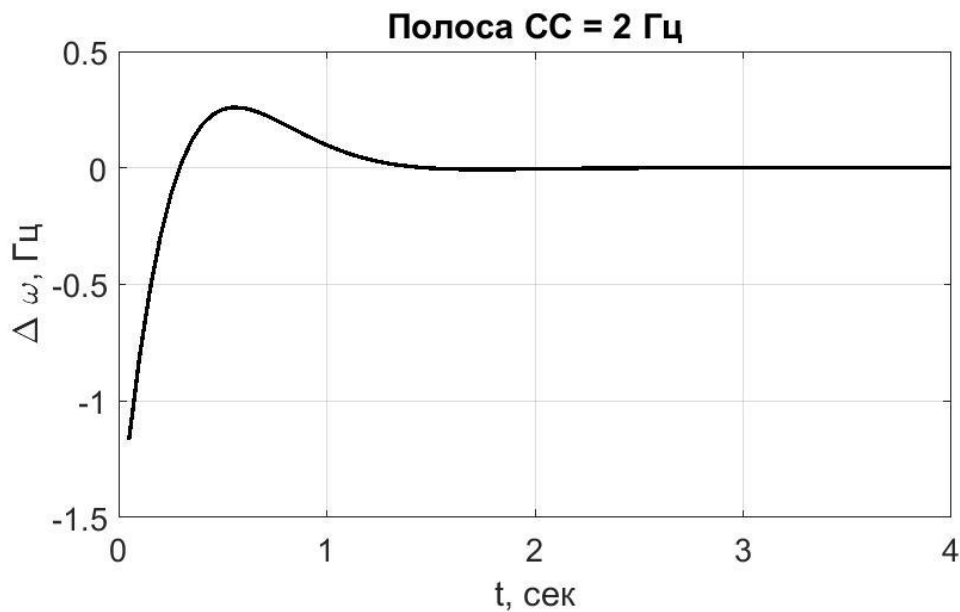
$X_{est} = [0; 0]$ ; % Начальные условия

$X_{ist} = [10; 0]$ ;

Графики истинного процесса частоты и оценки частоты приведены на рис. 4.5, график ошибки оценивания частоты – на рис. 4.6.



**Рис. 4.5. Процесс частоты (пунктирная линия) и его оценка (сплошная линия)**



**Рис. 4.6. Ошибка оценивания частоты**

Из графиков можно сделать вывод о том, что система слежения успешно обрабатывает начальную ошибку. Характерное время переходного процесса – около 1 с, что соответствует ожидаемому при полосе СС 2 Гц.

#### 4.4.5. Результаты моделирования

После завершения тестирования была выполнена основная программа моделирования.

Для увеличения объема статистики время одного эксперимента увеличено до 60 минут:

`Tmax = 3600;`

начальные значения векторов состояния оцениваемого процесса и фильтра приравнены друг другу:

`Xest = [0; 0]; % Начальные условия`

`Xist = [0; 0];`

На первом этапе построен график динамической ошибки в зависимости от полосы СС (см. рис. 4.7, штрихпунктирная линия серого цвета). Для этого дисперсия флуктуационных шумов приравнена нулю, а дисперсия формирующего шума установлена номинальной

`Dksi = 13*1; % Дисперсия формирующего шума`

`Deta = 10*0; % Дисперсия шумов наблюдений`

На втором этапе построен график флуктуационной ошибки. Для этого дисперсия формирующих шумов уменьшена до нуля (частота по-

стоянна), а дисперсия шумов наблюдений выставлена в соответствии с вариантом задания:

$D_{ksi} = 13 \cdot 0$ ; % Дисперсия формирующего шума

$D_{eta} = 10 \cdot 1$ ; % Дисперсия шумов наблюдений

Результат представлен на рис. 4.7 (пунктирная линия черного цвета).

График зависимости общей среднеквадратической ошибки (СКО) оценивания построен при значениях дисперсий шумов

$D_{ksi} = 13 \cdot 1$ ; % Дисперсия формирующего шума

$D_{eta} = 10 \cdot 1$ ; % Дисперсия шумов наблюдений

На рис.4.7 он изображен сплошной линией черного цвета.

Минимум среднеквадратической ошибки слежения при заданных условиях достигается при полосе СС 0.6 Гц.

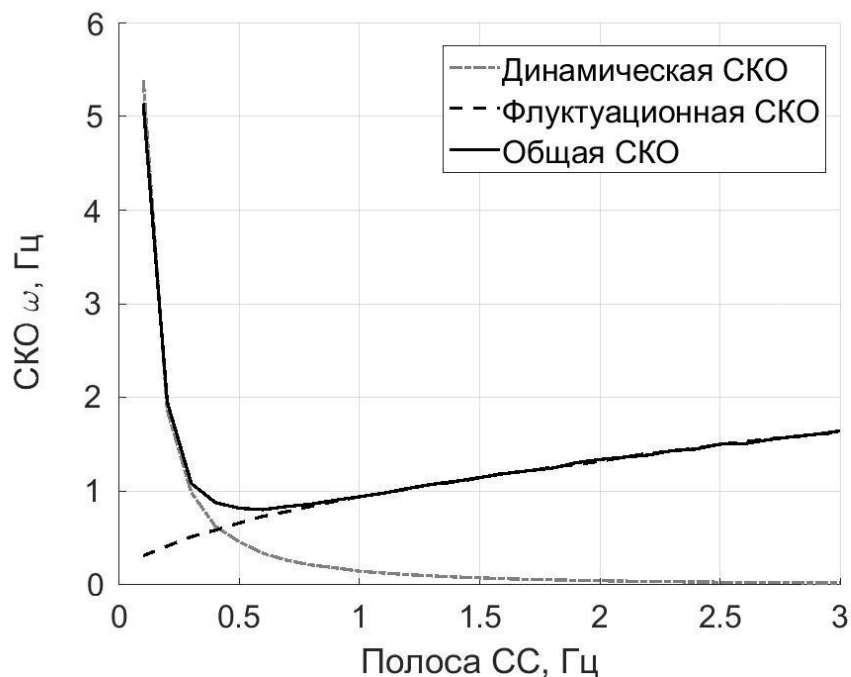


Рис.4.7. Среднеквадратические ошибки оценивания

#### 4.4.6. Анализ результатов моделирования

Поставленные цели моделирования достигнуты:

- найдены графики динамической, флуктуационной и общей среднеквадратической ошибки слежения в зависимости от полосы СС;

- определена полоса СС, при которой достигается минимум среднеквадратической ошибки слежения; она составила 0,6 Гц.

Результаты моделирования не противоречат ожиданиям и общетеоретическим соображениям. Проведение новых итераций моделирования и уточнение модели не требуется.

# СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## Основной

1. **Борисов, Ю. П.** Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств / Ю. П. Борисов, В. В. Цветнов. – М.: Радио и связь, 1985. – 176 с.

2. **Герасимов, А.Б.** Полунатурное моделирование радиотехнических систем: учебное пособие / А. Б. Герасимов, А. Н. Кренёв, Е. А. Селянская; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2014. – 128 с.

3. **Самарский, А.А.** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

4. **Дьяконов, В.** MATLAB: Учебный курс / В. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2001. – 560 с.

## Дополнительный

5. **Перов, А. И.** Радиоавтоматика: учебник для вузов / А.И. Перов, В. Н. Замолодчиков, В. М. Чиликин.– М.: Радиотехника, 2014. —320 с.

6. **ГЛОНАСС.** Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. — Изд. 4-е, перераб. и доп. — М.: Радиотехника, 2010.—800 с.