

УДК 514
ББК
22.151.3
С794

МОИ



РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Группа _____

Студент _____

Преподаватель _____

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

Ю. В. СТЕПАНОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь для лекционных
и практических занятий по курсу
«Начертательная геометрия»
для студентов ЭИМИ

2-е издание, исправленное и дополненное

Москва
Издательство МЭИ
2016

УДК 514
ББК 22.151.3
С794

Утверждено учебным управлением МЭИ

Подготовлено на кафедре инженерной графики

Рецензент — И. В. Гордеева, канд. техн. наук, доц. каф. ИГ НИУ «МЭИ»

С794 Степанов, Ю. В. Начертательная геометрия: рабочая тетрадь / Ю. В. Степанов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство МЭИ, 2016. — 88 с.

Содержит условия графических задач и заданий, предназначенных для лекций и практических занятий в курсе начертательной геометрии. Кроме того, приведены краткие теоретические положения по каждой главе и примеры решения задач с алгоритмами. Снабжено списком условных обозначений и символов. Для студентов всех специальностей ЭнМИ.

УДК 514
ББК 22.151.3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рабочая тетрадь содержит условия графических заданий и упражнений для их выполнения на лекциях и практических занятиях по начертательной геометрии (проекционному черчению), а также для домашней подготовки к занятиям. В процессе выполнения заданий осваиваются методы начертательной геометрии, необходимые для анализа геометрических объектов — их формы и взаимного положения в пространстве. Предлагаются различные методы начертательной геометрии для решения задач.

Начертательная геометрия это один из разделов геометрии, в котором геометрические объекты изучаются с помощью их проекционных изображений — чертежей [1].

Наука «Начертательная геометрия» возникла во Франции. Ее основателем является французский ученый, инженер Гаспар Монж (1746–1818) [2].

Элементы начертательной геометрии являются теоретической основой черчения. В начертательной геометрии чертеж — основное средство изучения геометрических объектов. Чертеж должен быть наглядным, давая однозначное представление об изображаемом объекте. Одновременно он должен быть обратимым, чтобы можно было точно воспроизвести форму и размеры изображаемого объекта. Важно, чтобы чертеж был простым в графическом исполнении и давал точные решения.

Учебное издание содержит основные теоретические положения и определения начертательной геометрии, связанные с каждой темой. В каждой главе приведены примеры решения задач с алгоритмами.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Обозначение геометрических элементов и величин

1.1. Геометрические объекты

1. Точки: $A, B, C, \dots$ — прописные буквы латинского алфавита, $1, 2, 3, \dots$ — арабские цифры. Начало системы координат — O , а центры сфер и окружностей — O . Следы прямых линий — Hm, Fm, Pm .
2. Линии (в том числе прямые): $a, b, c, \dots$ — строчные буквы латинского алфавита, причем буквой h — обозначается горизонталь, буквой f — фронталь, p — профильная прямая линия; h_{0Q} — горизонтальный след плоскости Q ; f_{0Q} — фронтальный след плоскости Q ; p_{0Q} — профильный след плоскости Q . Оси системы координат: X, Y, Z .
3. Поверхности (в том числе плоскости): $Q, T, N, M, S, \dots$ — прописные буквы латинского алфавита; Π — поверхность, Φ — фигура, T — геометрическое тело. Плоскости проекций: F — фронтальная, H — горизонтальная, P — профильная.
4. Углы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — строчные буквы греческого алфавита.
5. Обозначение проекций геометрических элементов: на плоскость H — h', S' , на плоскость F — h'', S'' , на плоскость P — h''', S''' .

1.2. Геометрические элементы на чертеже

1. (AB) ; $a(AB)$ — прямая, проходящая через точки A и B .
2. $[AB]$; $a[AB]$ — луч, с началом в точке A и проходящий через точку B .
3. $[AB]$; $a[AB]$ — отрезок прямой, ограниченный точками A и B .
4. $\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B . (a^b) ; $\phi(a^b)$ — угол между прямыми a и b .
5. $\triangle ABC$ — треугольник ABC .
6. $[A^bV]$; $k[A^bV]$ — Дуга кривой, ограниченная точками A и B .
7. $[Q^T]$ — двугранный угол между плоскостями Q и T .
8. Проекции преобразованных геометрических элементов (повернутых, перемещенных): $\bar{A}', \bar{B}', \dots, \bar{a}', \bar{b}', \dots$.

1.3. Натуральные величины, длины, расстояния

1. $|AB|$ — длина отрезка $[AB]$, натуральная величина отрезка $[AB]$, расстояние от точки A до точки B .
2. $|Aa|$ — расстояние от точки A до прямой a .
3. $|a||b|$ — расстояние между параллельными прямыми a и b .

4. $|a||Q|$ — расстояние между прямой a и параллельной ей плоскостью Q .
5. $|\varphi|$; $|\angle ABD|$ — натуральная величина угла.
6. $|\Delta ABD|$ — натуральная величина треугольника ABD .

2. Зависимости, преобразования и операции

1. $\equiv$ — тождественно совпадают: $A'_1 \equiv a'_1$; $a'_2 \equiv Q'_2$.
2. $=$ — равны: $|AB|=|DE|$; результат действия: $A = a \cap b$.
3. $\sim$ — подобны.
4. $\parallel$ — параллельны.
5. $\perp$ — перпендикулярны.
6. $\parallel$ — проецирующие.
7. $\dot{\perp}$ — скрещивающиеся прямые.
8. $\supset$ — включает в себя, $Q \supset a$ — плоскость Q включает прямую a .
9. $\in$ — принадлежит, $a \in Q$ — прямая a принадлежит плоскости Q .
10. $\cap$ — пересечение, $a \cap Q = M$ — прямая a пересекает плоскость Q в точке M .
11. $\cup$ — объединение.
12. $\sqcup$ — касание: $t \sqcup k$ — линия t касается линии k .
13. $\neg$ — отрицание высказывания: $\nparallel$ — не параллельны; $\neq$ — не равны; $\nparallel$ — не являются проецирующими; $\nperp$ — не перпендикулярны.
13. $\Rightarrow$ — логическое следствие: «следовательно», $a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b'$ — если прямые параллельны, то их проекции тоже параллельны.
15. $\wedge$ — «и».
16. $\vee$ — «или».
17. $\forall$ — если, то.
18. $\rightarrow$ — отображение, проецирование.
19. $\curvearrowright$ — отображение вращением, поворотом (без указания оси вращения):
 $A \curvearrowright \bar{A}$ — точка A вращением (поворотом) отображается в точку $\bar{A}$.
20. Φ — вращение вокруг указанной оси.
21. Γ — построить.

1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

1.1. Свойства евклидова пространства

Согласно теории множества любой геометрический объект — это множество точек. Отображение геометрического объекта на плоскости можно выполнить с помощью проецирования точек объекта на эту плоскость (плоскость проекций) [1]. Основным методом построения технических изображений — метод проецирования.

...

1. Если точка **A** принадлежит прямой линии **b**, а прямая линия **b** принадлежит плоскости **Q**, то и точка **A** принадлежит плоскости **Q**.
2. Две различные точки **A** и **B** всегда принадлежат одной прямой линии **a** или через две несовпадающие точки **A** и **B** можно провести только одну прямую линию.
3. Три различные (несовпадающие) точки **A**, **B** и **C**, не принадлежащие одной прямой линии, принадлежат одной и только одной плоскости **Q**.
4. Если две точки **A** и **B**, принадлежащие прямой линии **a**, принадлежат плоскости **Q**, то и прямая линия **a** принадлежит плоскости **Q**.
5. Две прямые линии **a** и **b**, принадлежащие одной плоскости **Q**, либо пересекаются, либо не имеют общей точки (прямые линии **a** и **b** — параллельны).
6. Две плоскости **R** и **Q** либо пересекаются, либо они параллельны.
7. Прямая линия **a**, не принадлежащая плоскости **Q**, либо пересекает плоскость **Q**, либо они параллельны.

1.2. Центральное проецирование

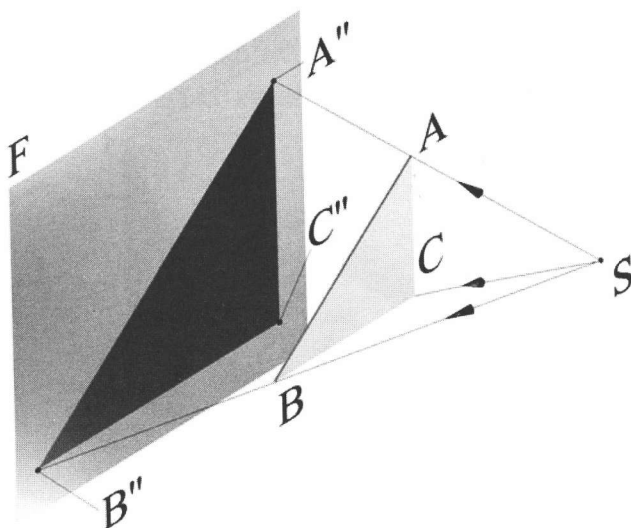


Рис. 1.1

S — центр проецирования (рис. 1.1). Следует строить проекции только характерных точек, которые однозначно определяют форму и размеры проецируемого объекта. В символьном виде:

$$A \rightarrow A''; B \rightarrow B''; C \rightarrow C''.$$

На рисунке 1.1...

1.3. Параллельное проецирование

Если $S \rightarrow \infty$ (рис. 1.2), то проецирующие лучи становятся параллельными. В этом случае необходимо задавать направление проецирования (вектор — $\mathbf{n}$). Если $\mathbf{n} \perp \mathbf{F}$ (плоскости проекций), то проецирование называется параллельным ортогональным. (Orthogonios — прямоугольный). Это основной способ построения технических изображений.

На рисунке 1.2 ...

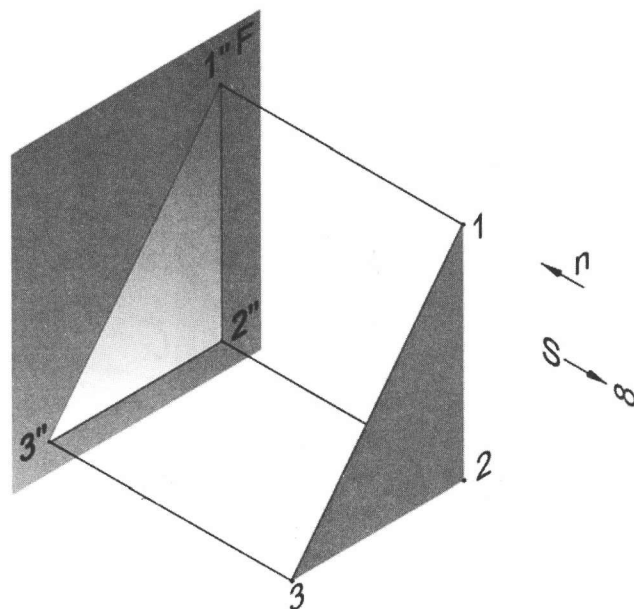


Рис. 1.2

Инвариантные свойства параллельного прямоугольного проецирования

1. Проекция точки есть единственная точка (рис. 1.3), но каждой проекции соответствует множество точек, лежащих на проецирующем луче (**конкурирующие точки**).

...

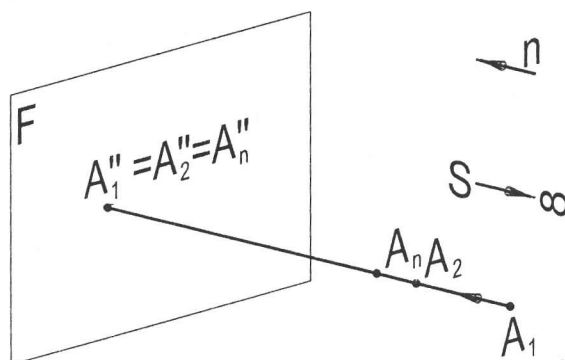


Рис. 1.3

2. Проекция прямой линии (рис. 1.4) в общем случае есть прямая линия (свойство сохранения прямолинейности):

или

3. Проекция точки, принадлежащей линии (рис. 1.4), принадлежит проекции этой линии (свойство сохранения принадлежности).

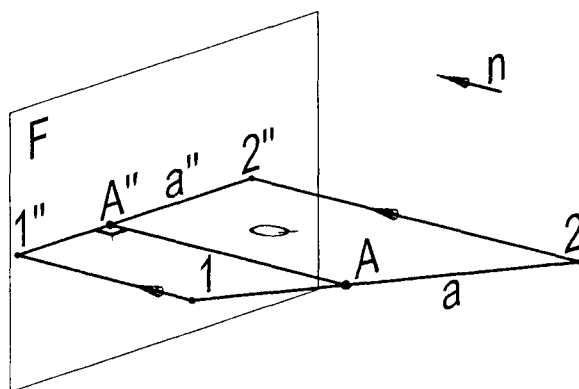


Рис. 1.4

4. Отношение, в котором точка делит отрезок прямой линии, одинаково для оригинала и его проекции (рис. 1.4). Следствие: середина отрезка прямой линии оригинала проецируется в середину его проекции.
5. Проекции параллельных прямых линий параллельны (рис. 1.5).

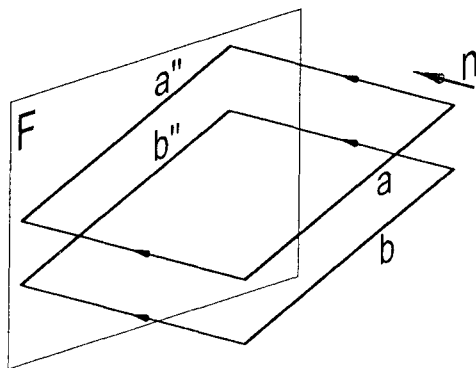


Рис. 1.5

6. Плоские фигуры, параллельные плоскости проекций, проецируются на эту плоскость в натуральную величину (см. рис. 1.2, 1.6).

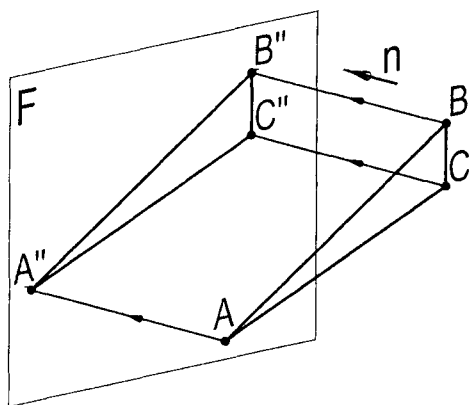


Рис. 1.6

7. Точка пересечения прямых линии проецируется в точку пересечения их проекций (рис. 1.7).

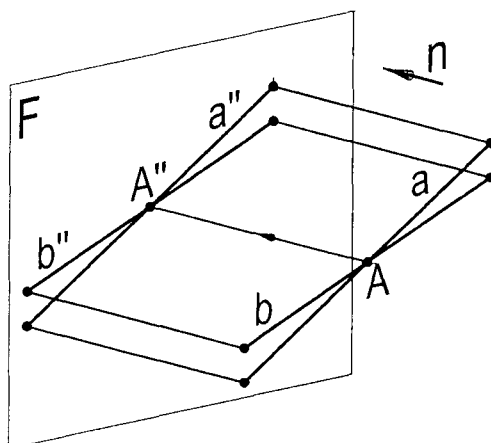


Рис. 1.7

8. Длина проекции отрезка прямой линии равна длине отрезка, умноженной на $\cos\alpha$, где α — угол наклона прямой линии к плоскости проекций. В частности: если отрезок прямой линии параллелен плоскости проекций ($\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$), то длина его проекции равна длине самого отрезка прямой линии (рис. 1.8):

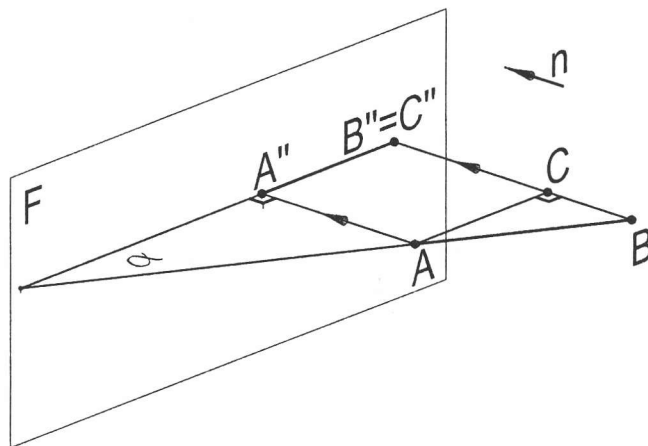


Рис. 1.8

Теорема о проецировании прямого угла. Прямой угол, одна сторона которого параллельна плоскости проекций, а другая к ней не перпендикулярна, проецируется на эту плоскость в натуральную величину (рис. 1.9). Эта теорема справедлива и для скрещивающихся прямых линий.

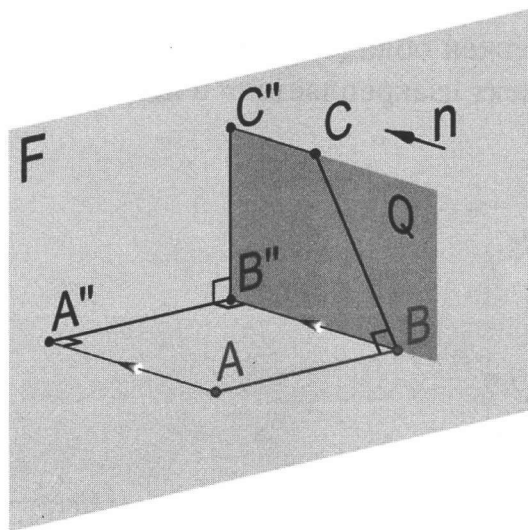


Рис. 1.9

2. ЭПЮР МОНЖА

2.1. Обратимость чертежа. Эпюр Монжа

Операция проецирования решает прямую задачу начертательной геометрии — построение изображений объекта на заданную плоскость проекций. Обратная задача требует реконструкцию объекта по его изображению.

Обратимость **чертежа** — это возможность определять положение и параметры любой точки объекта относительно плоскости проекций или относительно другой точки [1].

Чертеж, по которому можно реконструировать объект (оригинал), **называется обратимым**.

2.2. Абсолютная (АСК) и относительная (ОСК) системы координат

Любой чертеж должен обладать метрической определенностью. Для этого проецируемый объект «закрепляется» в некоторой системе координат.

АСК — ...

ОСК — ...

На рисунках 2.1, 2.2...

2.3. Построение третьей проекции объекта

Любые две проекции точки однозначно определяют ее положение в пространстве.

При необходимости вводят третью плоскость проекций (рис. 2.1, 2.3), на которой строят дополнительные изображения. Эта плоскость может располагаться:

дано: ...

определить:

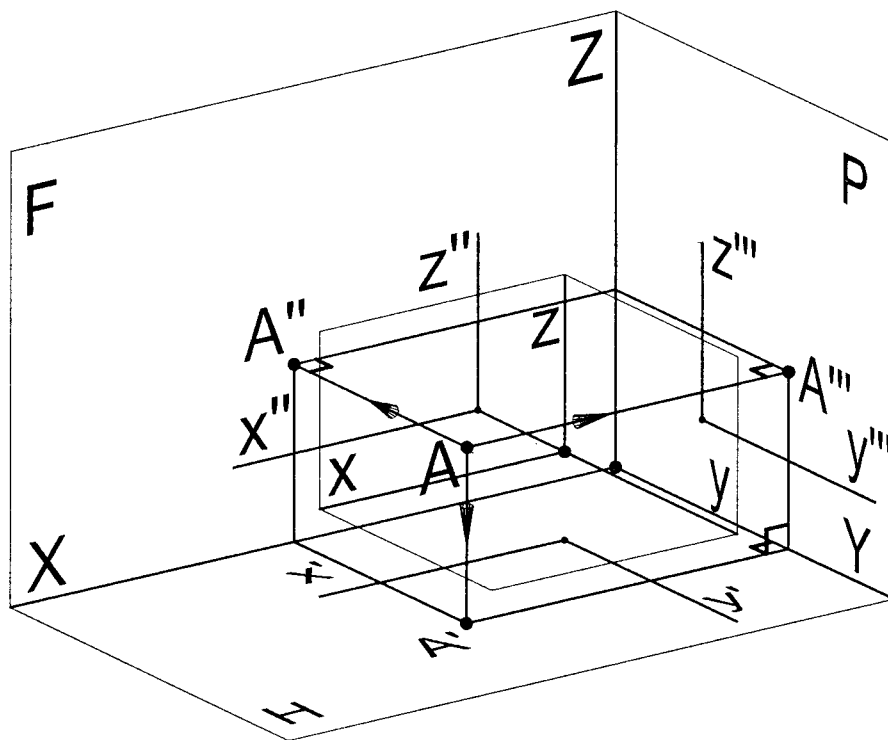


Рис. 2.1

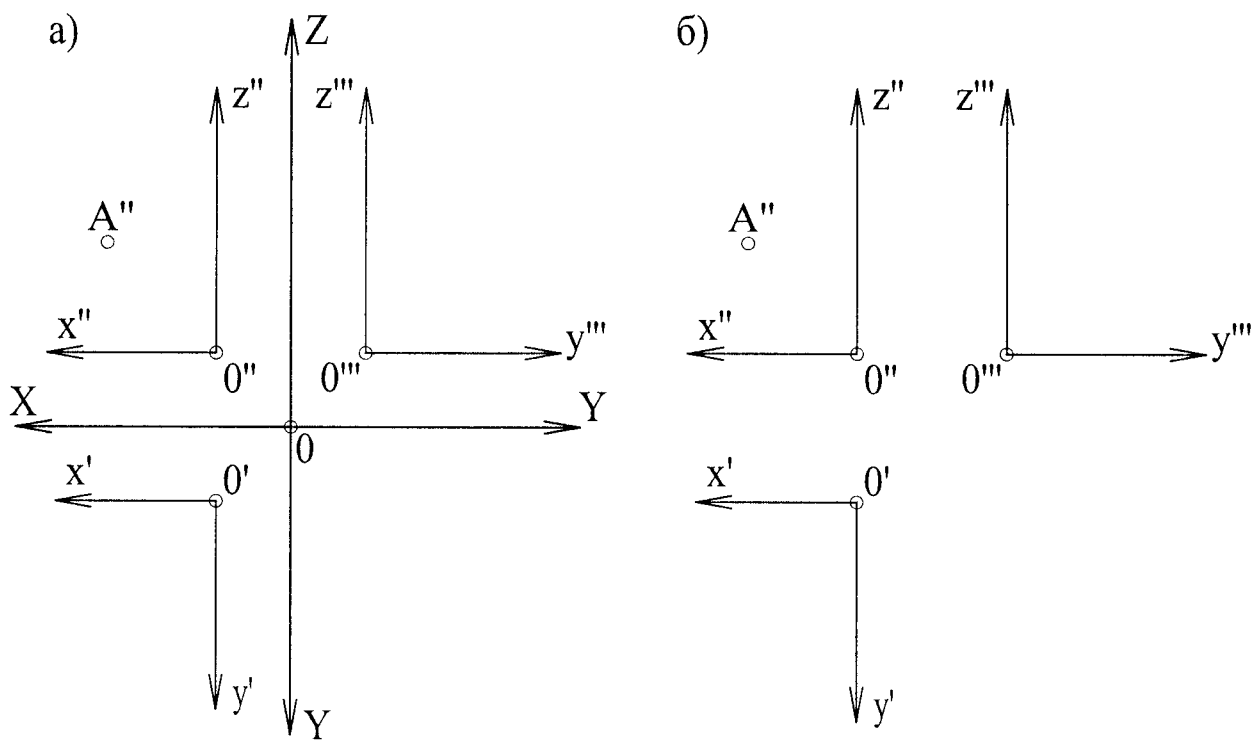


Рис. 2.2

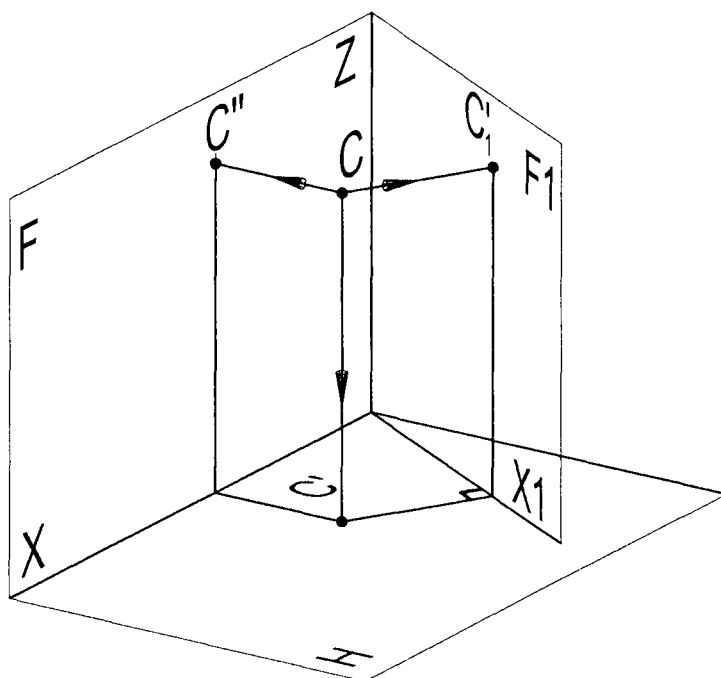


Рис. 2.3

2.4. Положение точек и прямых относительно плоскостей проекций

Точки могут занимать относительно плоскостей проекций общее и частные положения. На рисунках 2.4, 2.5 даны три проекции точек **A**, **B**, **C**. Точка **A** занимает общее положение относительно плоскостей проекций, а точки **B** и **C** соответственно — частное положение.

Дано:

Определить:

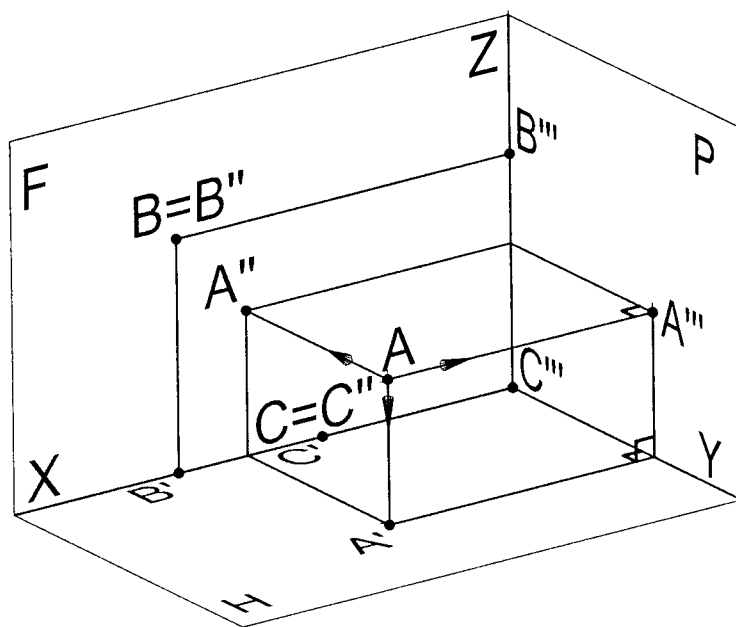
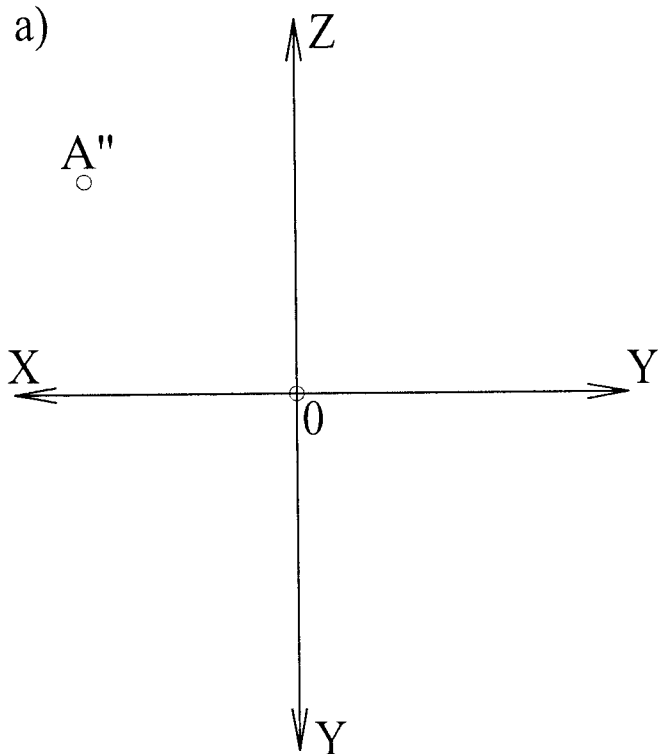


Рис. 2.4

а)



б)

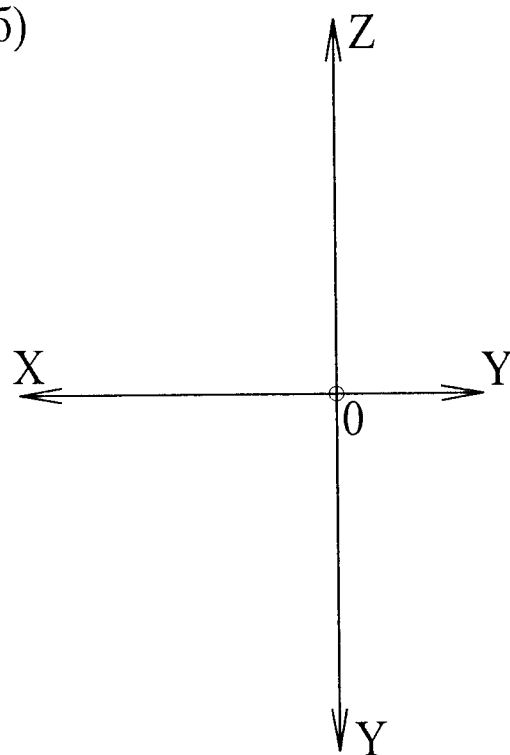


Рис. 2.5

Для построения проекций прямой линии необходимо построить проекции двух точек, принадлежащих этой прямой линии. На рисунке 2.6...

Дано:

Определить:

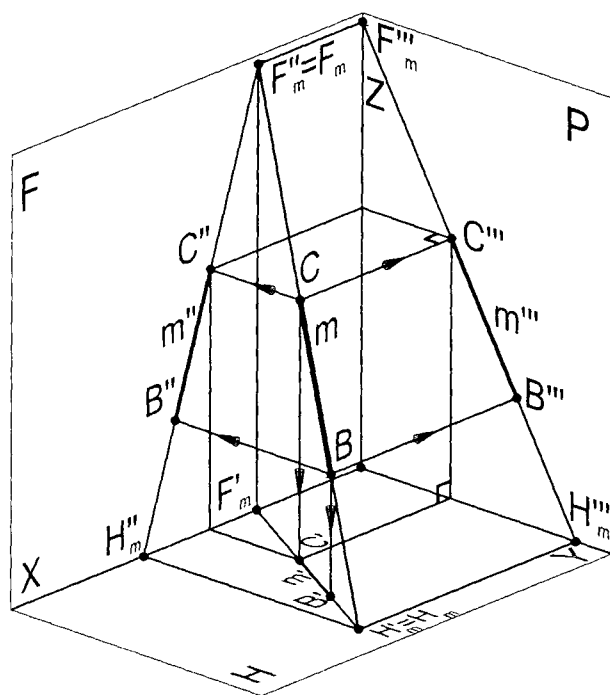


Рис. 2.6

Частные положения прямых линий (рис. 2.7, 2.8):

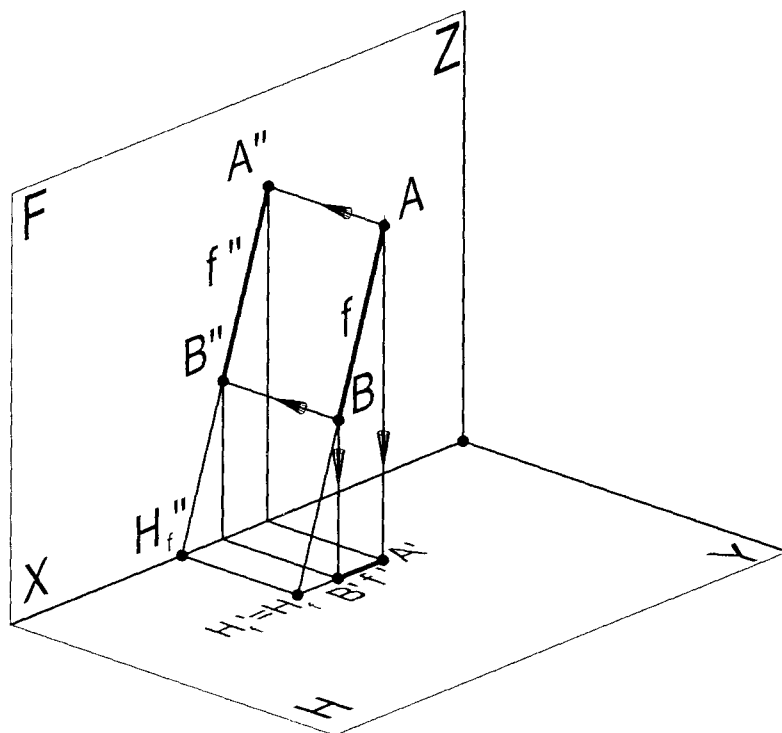


Рис. 2.7

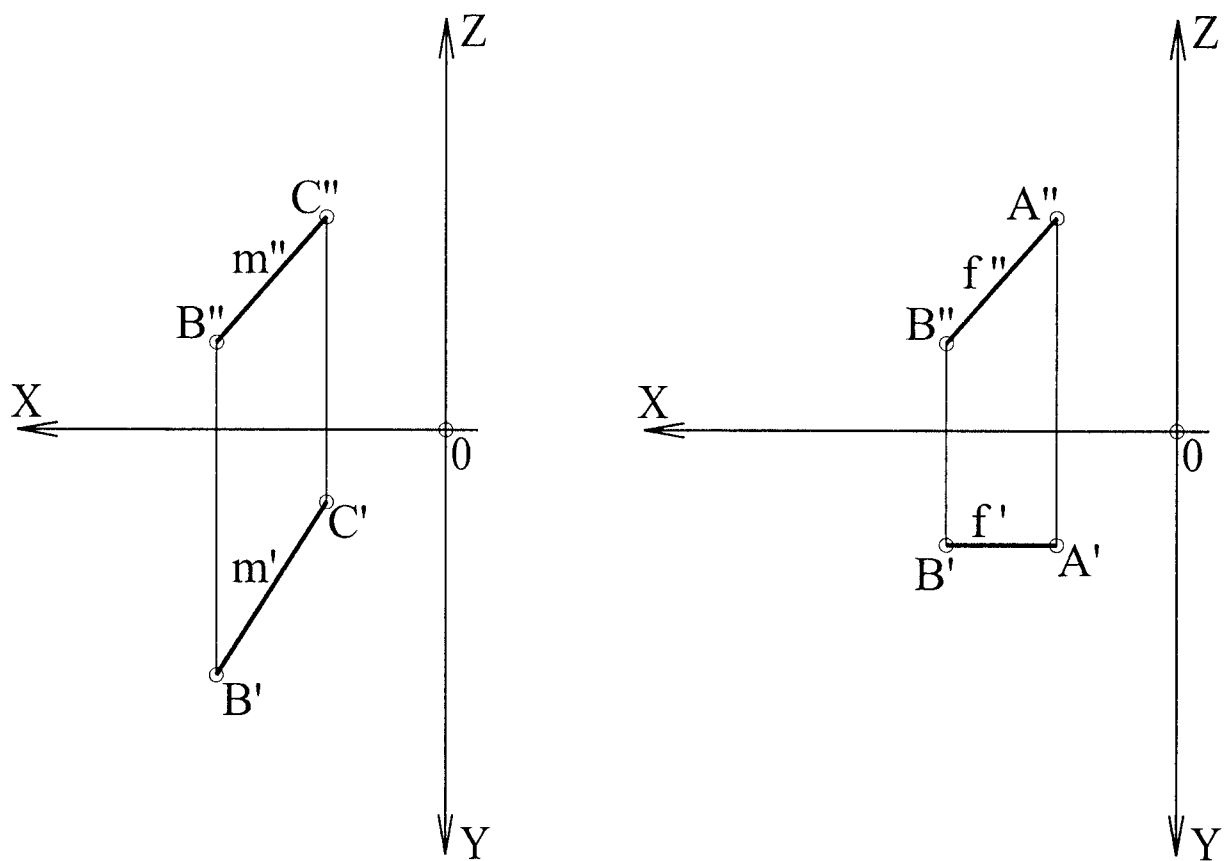


Рис. 2.8

2.5. Определение действительной величины отрезка

Определение действительной величины отрезка способом прямоугольного треугольника и способом (методом) замены плоскости проекций представлено на рисунках 2.9, 2.10.

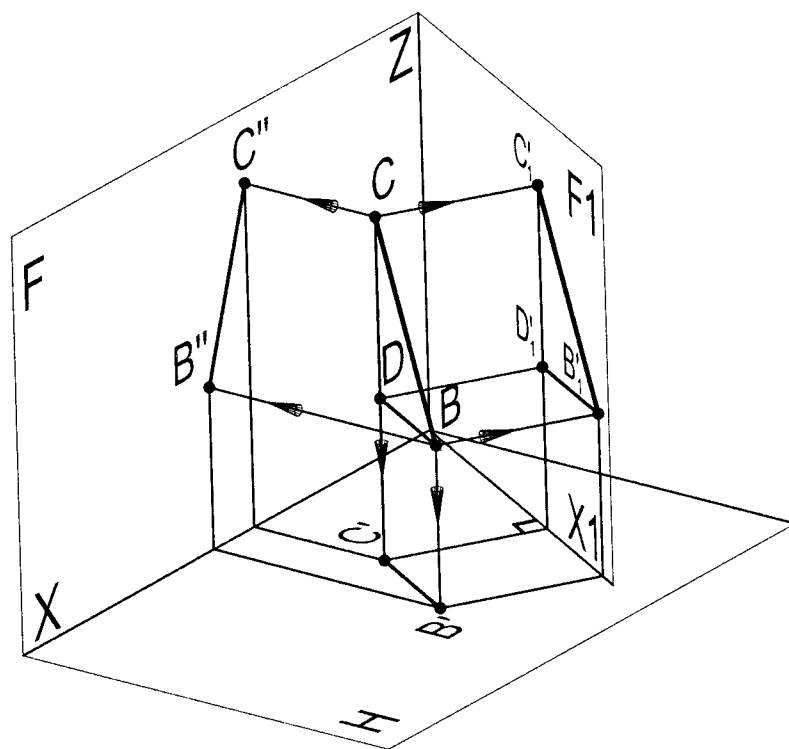


Рис. 2.9

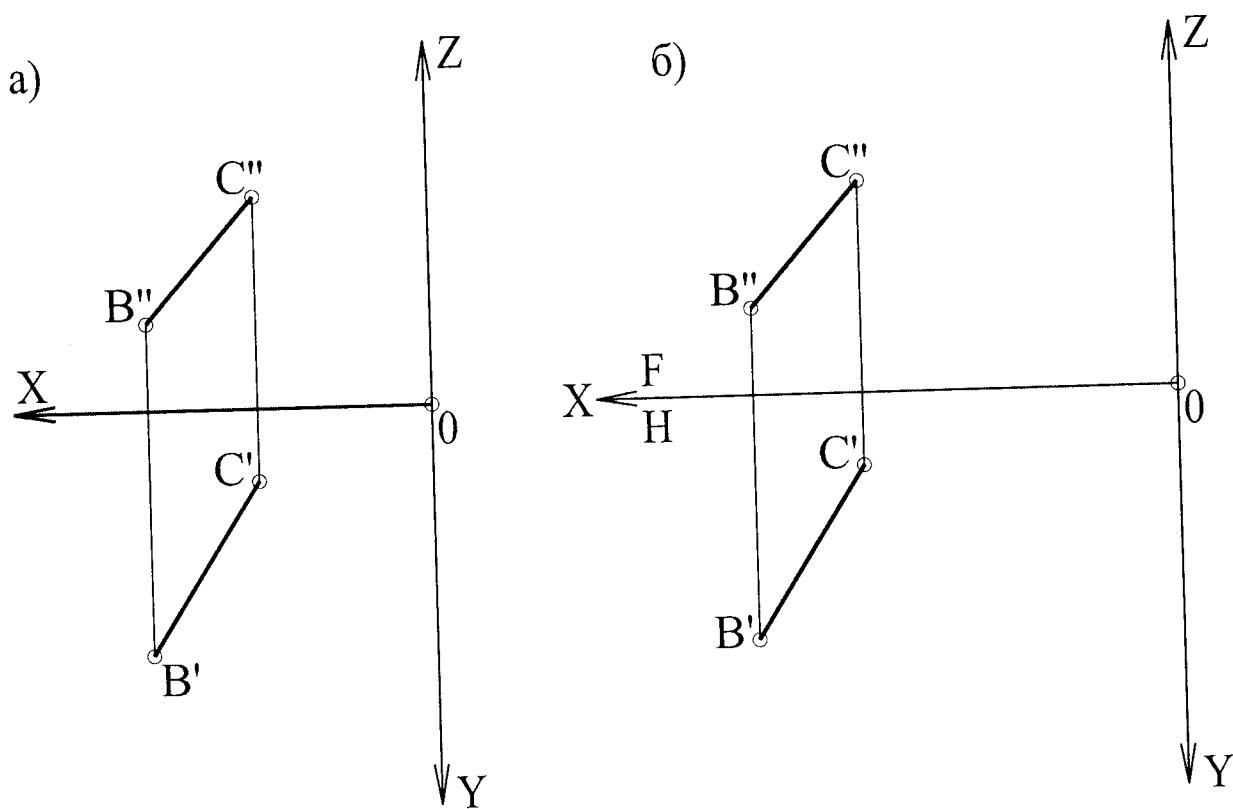


Рис. 2.10

На рисунке 2.10...

Дано:

Определить:

3. ЗАДАНИЕ И ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

3.1. Задание плоскости на чертеже

Определитель плоскости — совокупность условий, необходимых и достаточных, для задания этой плоскости (рис. 3.1, 3.2).

На рис. 3.1 ...

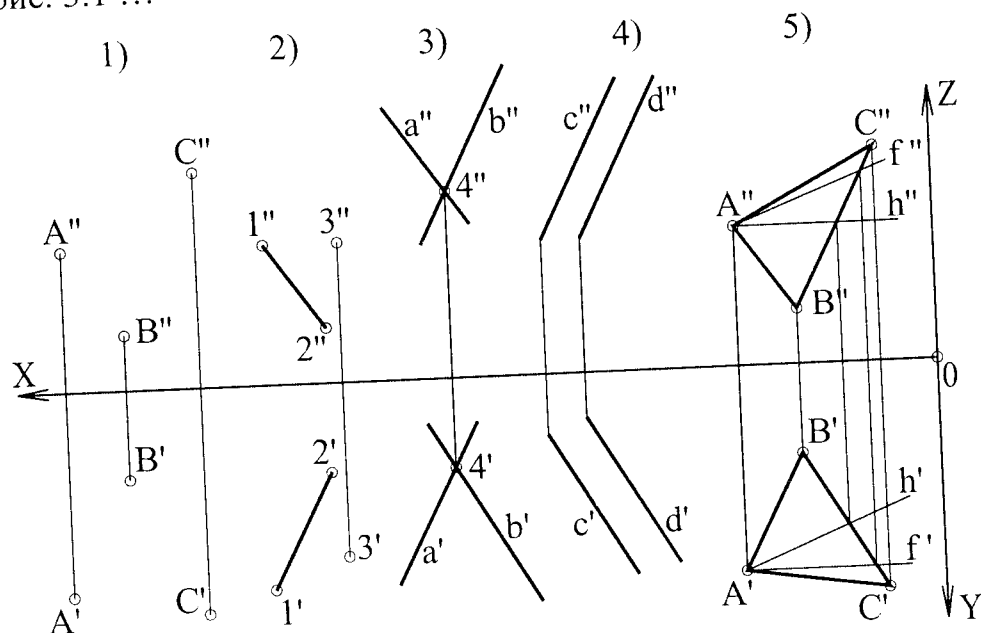


Рис. 3.1

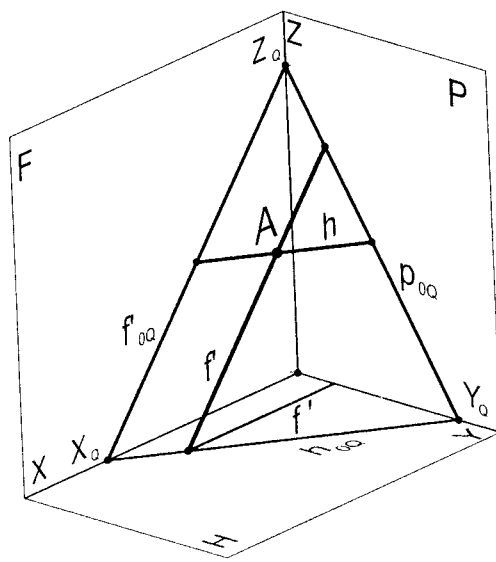


Рис. 3.2

3.2. Положение плоскостей относительно плоскостей проекций

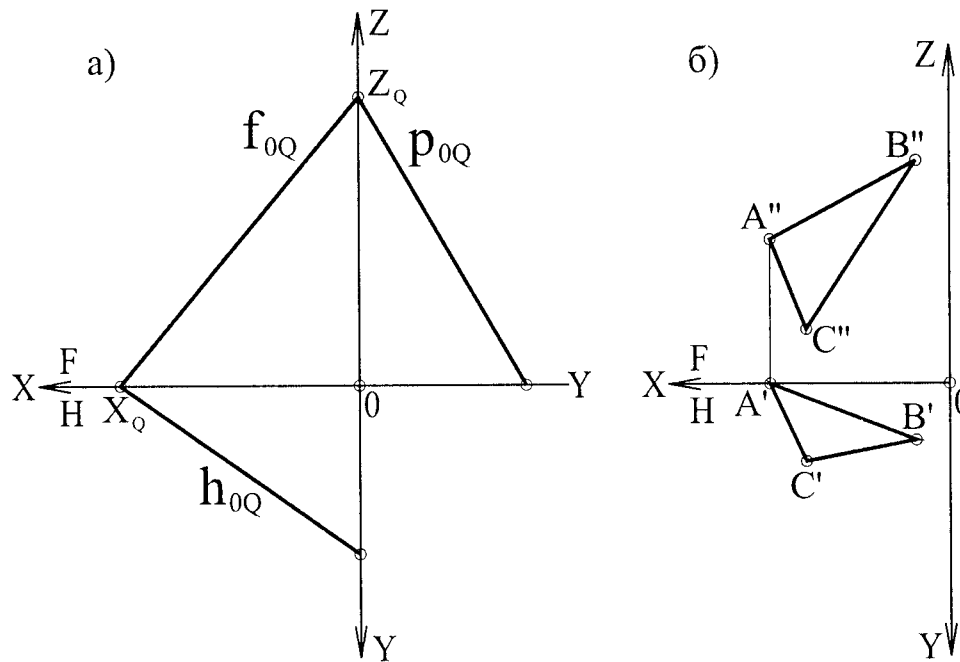


Рис. 3.3

На рисунке 3.3...

Дано:

Определить:

Плоскость (рис. 3.4)...

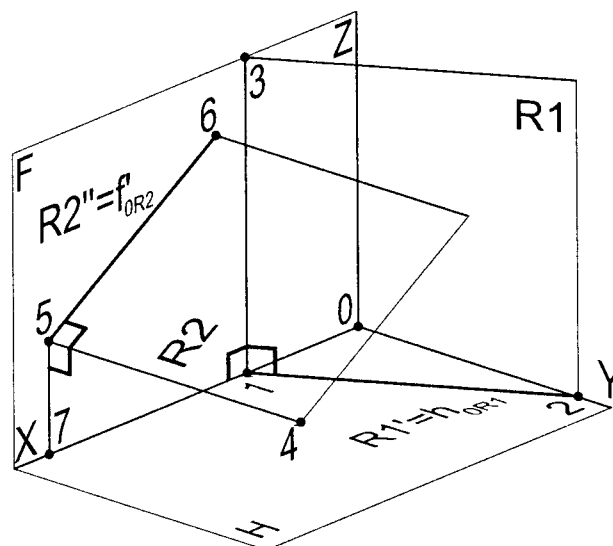


Рис. 3.4

Плоскость (рис. 3.5)...

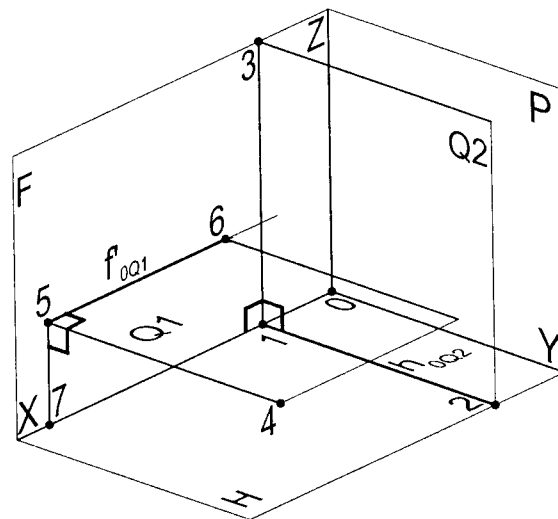


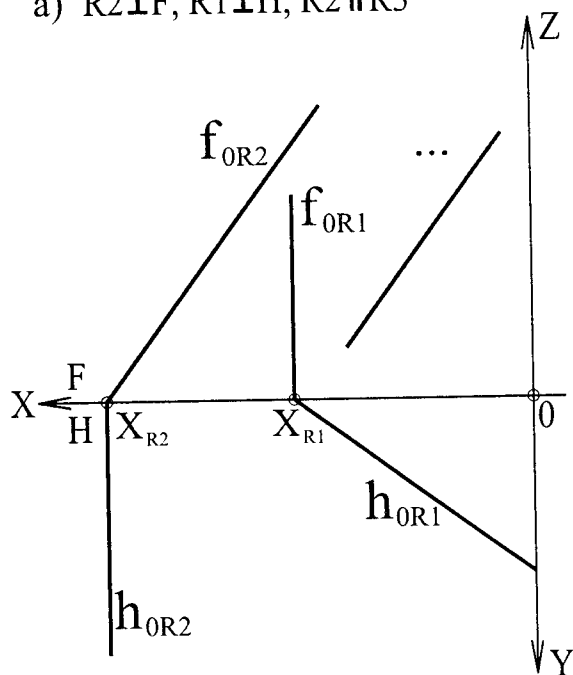
Рис. 3.5

На рисунке 3.6...

Дано:

Определить:

а) $R2 \perp F, R1 \perp H, R2 \parallel R3$



б) $Q1 \parallel H, Q2 \parallel P$

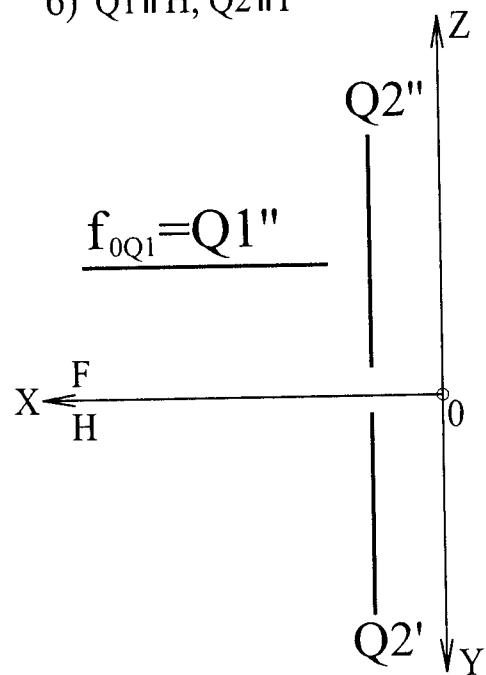


Рис. 3.6

3.3. Взаимное положение прямых линий

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, могут пересекаться или скрещиваться (рис. 3.7).

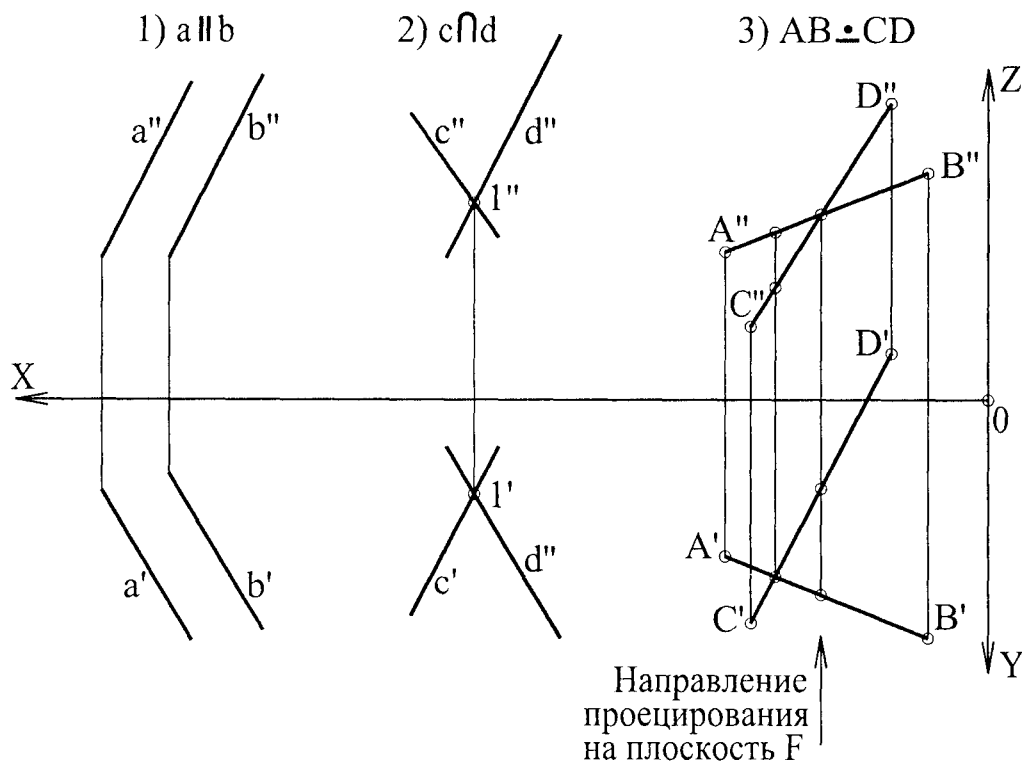


Рис. 3.7

Параллельные прямые линии — ...

Пересекающиеся прямые линии — ...

Скрещивающиеся прямые линии — ...

3.4. Взаимная принадлежность точки, прямой линии и плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит линии, лежащей в этой плоскости.

На рисунке 3.8...

Дано:

Определить:

Алгоритм, определяющий принадлежность точки **D** плоскости **Q**:

- ...
- ...
- ...

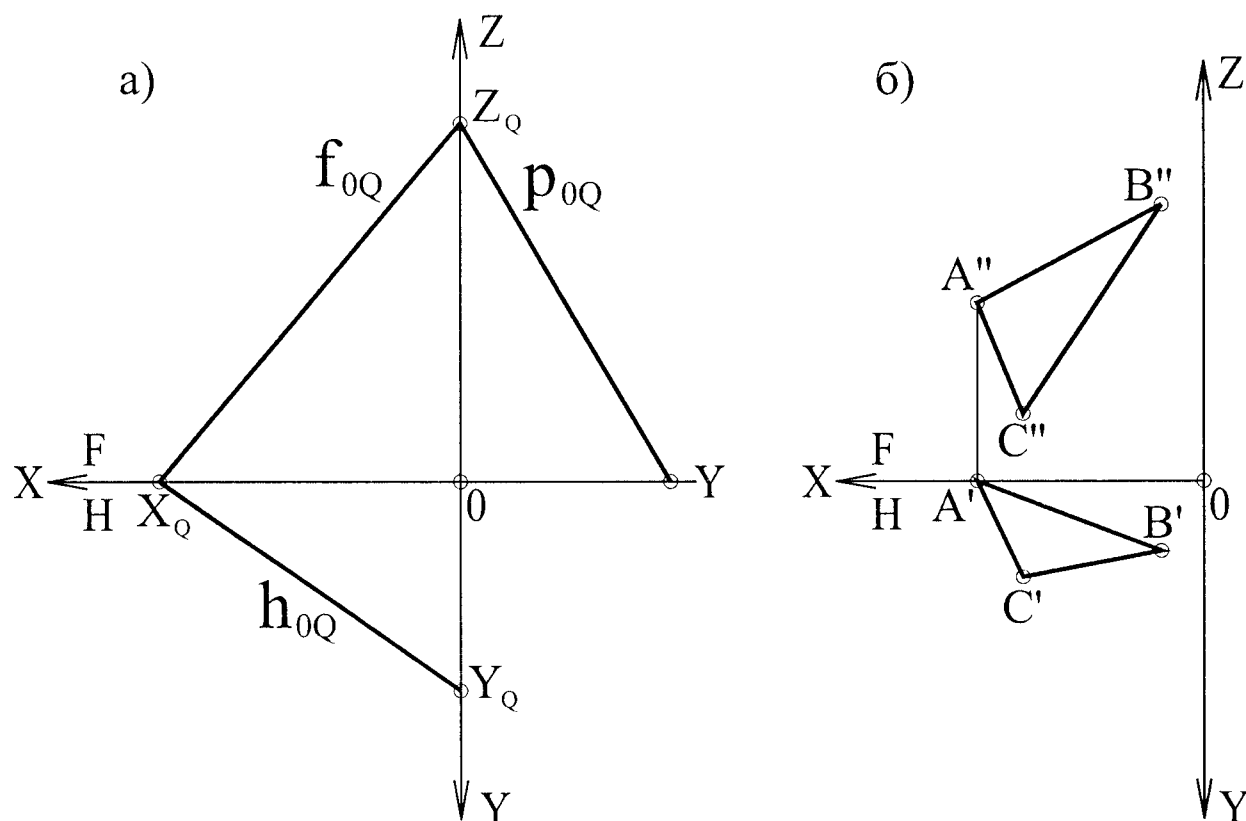


Рис. 3.8

Прямая линия принадлежит плоскости, если ...

На рисунке 3.9...

Дано: а) $Q = \{ABC\}$; $D (D'') \in Q$; б) $Q = \{ABC\}$; $E (E''; E')$; $E \in Q = ?$

Определить:

Алгоритм решения задачи, представленной на рисунке 3.9:

...

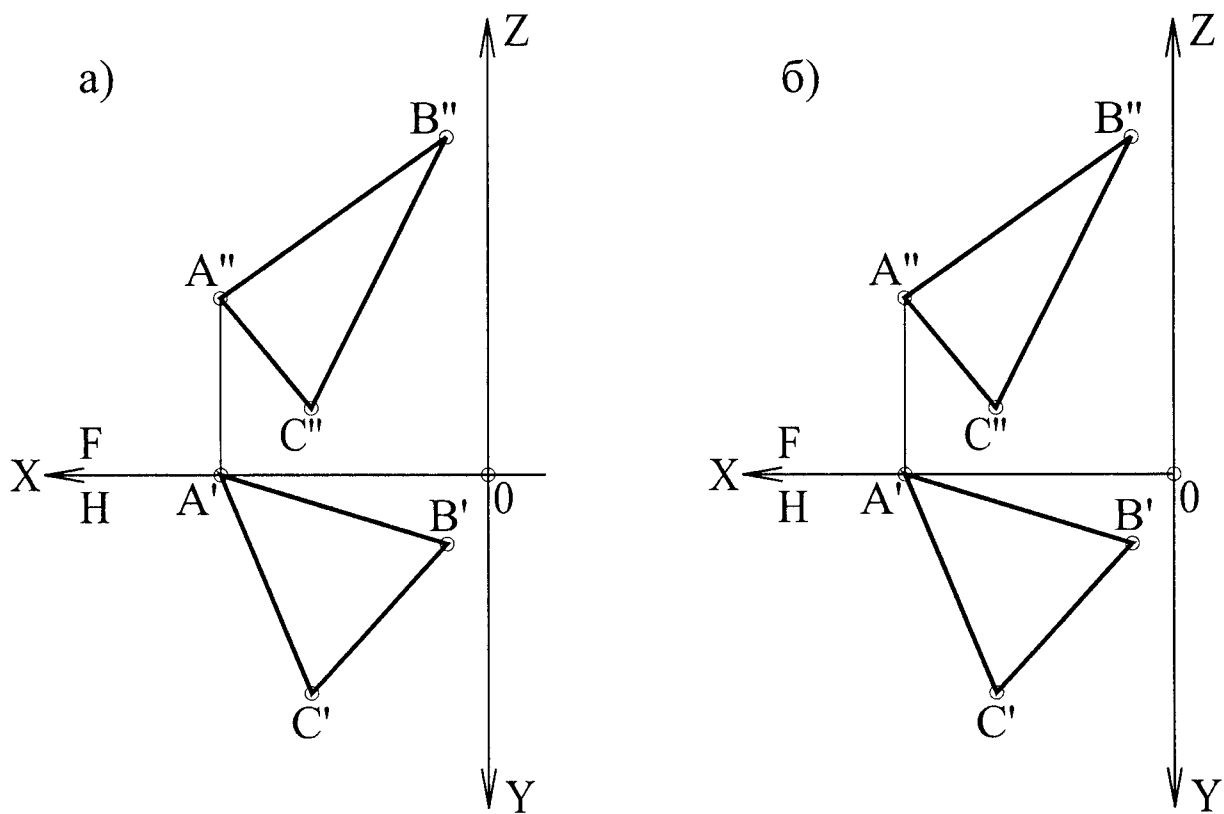


Рис. 3.9

4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

4.1. Главные линии плоскости (линии уровня, линии наибольшего наклона)

Главные линии плоскости позволяют точно выявить ориентацию плоскости относительно плоскостей проекций и упростить решение ряда задач начертательной геометрии (рис. 4.1).

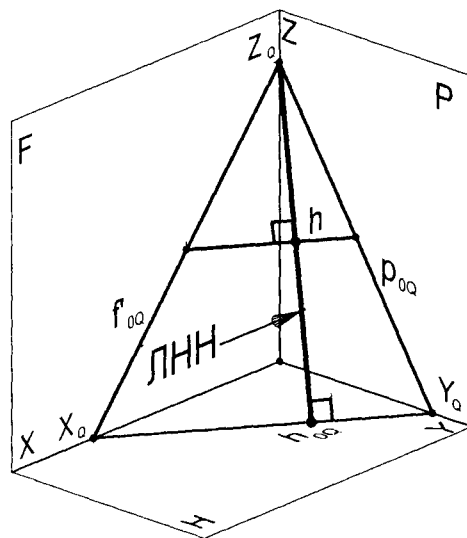


Рис. 4.1

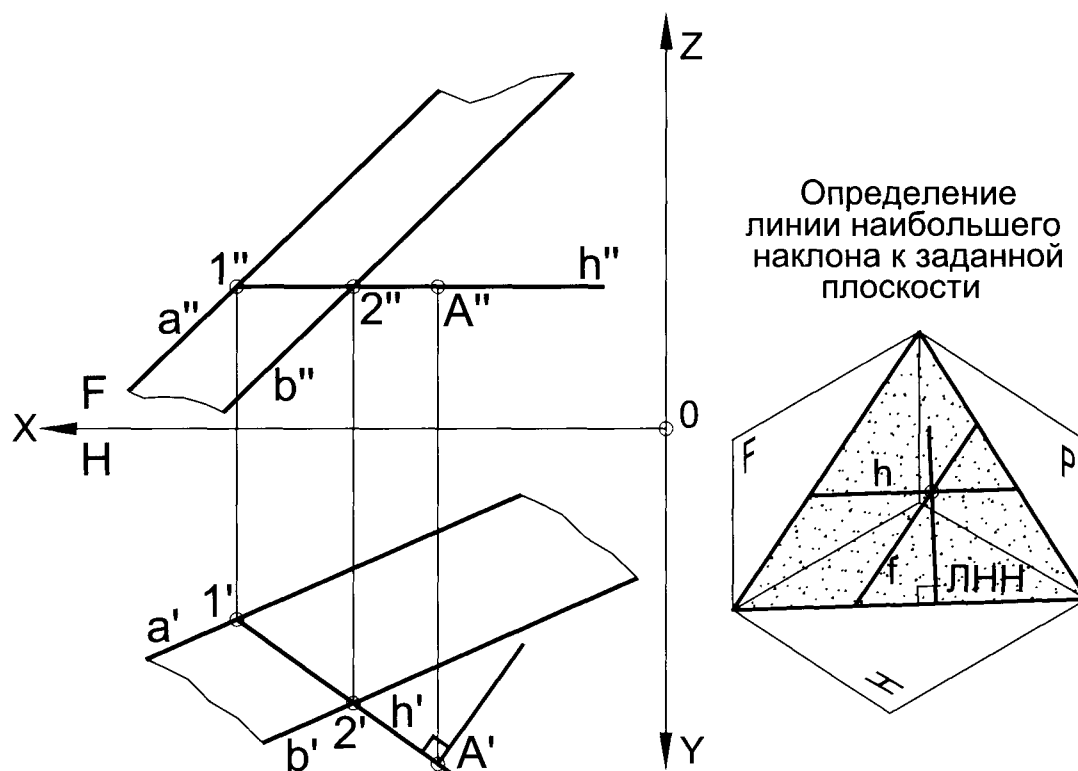


Рис. 4.2

Линии уровня — прямые линии f , h , p . Прямые линии наибольшего наклона — перпендикулярны линиям уровня (рис. 4.1, 4.2).

На рисунке 4.2...

Дано:

Определить:

4.2. Взаимное положение прямой линии и плоскости

Прямая линия может принадлежать плоскости, пересекать (быть перпендикулярной) или быть параллельной плоскости. Прямая линия...

Условия параллельности прямой линии и плоскости

Прямая линия параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой линии, принадлежащей этой плоскости.

Определение точки пересечения прямой линии и плоскости

Прямая линия и плоскость пересекаются в точке, но в этой точке пересекаются и две прямые линии. Поэтому задачу можно свести к более простой.

В частном случае две пересекающиеся прямые линии образуют проецирующую плоскость Q (рис. 4.3, 4.4, а).

В частном случае две пересекающиеся прямые образуют проецирующую плоскость Q (рис. 4.3, 4.4, а).

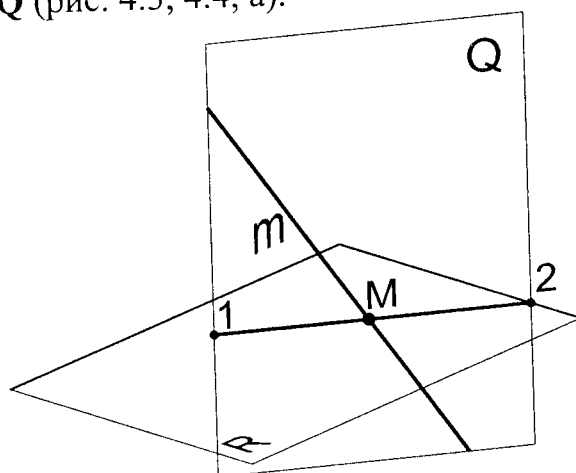


Рис. 4.3

На рисунке 4.3, 4.4...

Дано:

Определить:

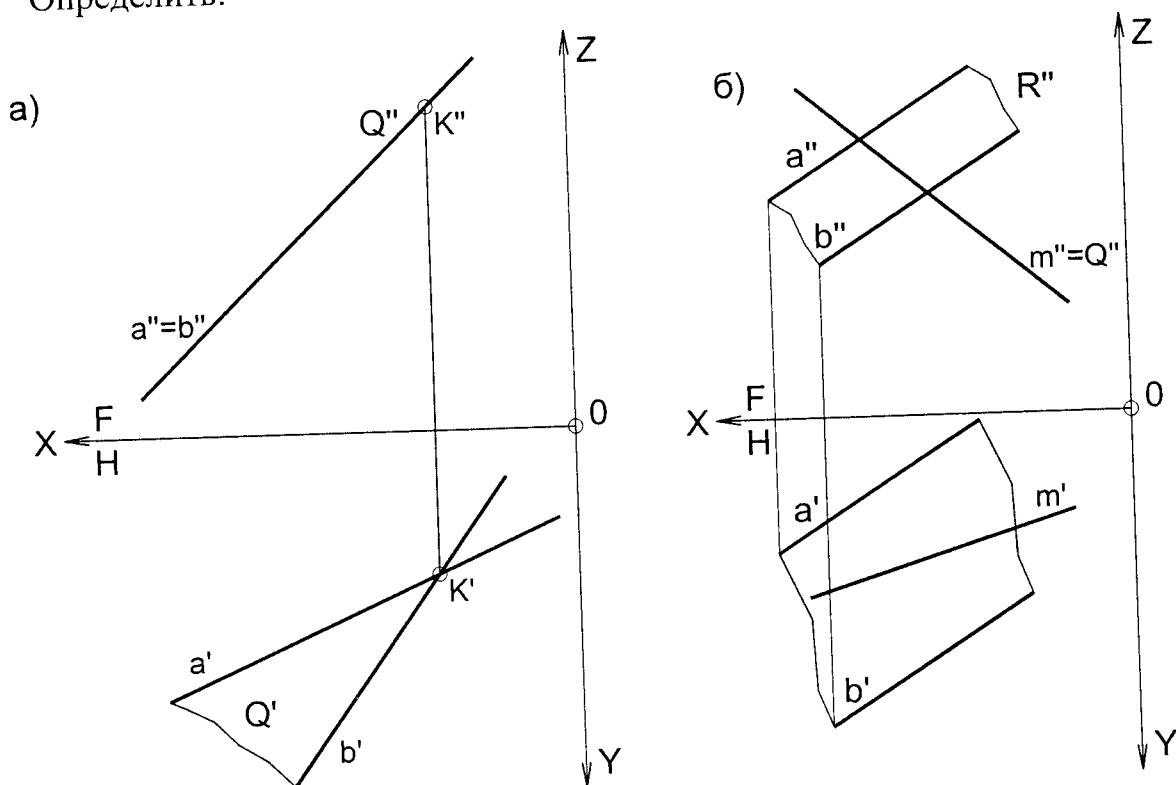


Рис. 4.4

Общий алгоритм определения точки пересечения прямой линии с плоскостью (рис. 4.4, 4.5):

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

На рисунке 4.5...

Дано:

Определить:

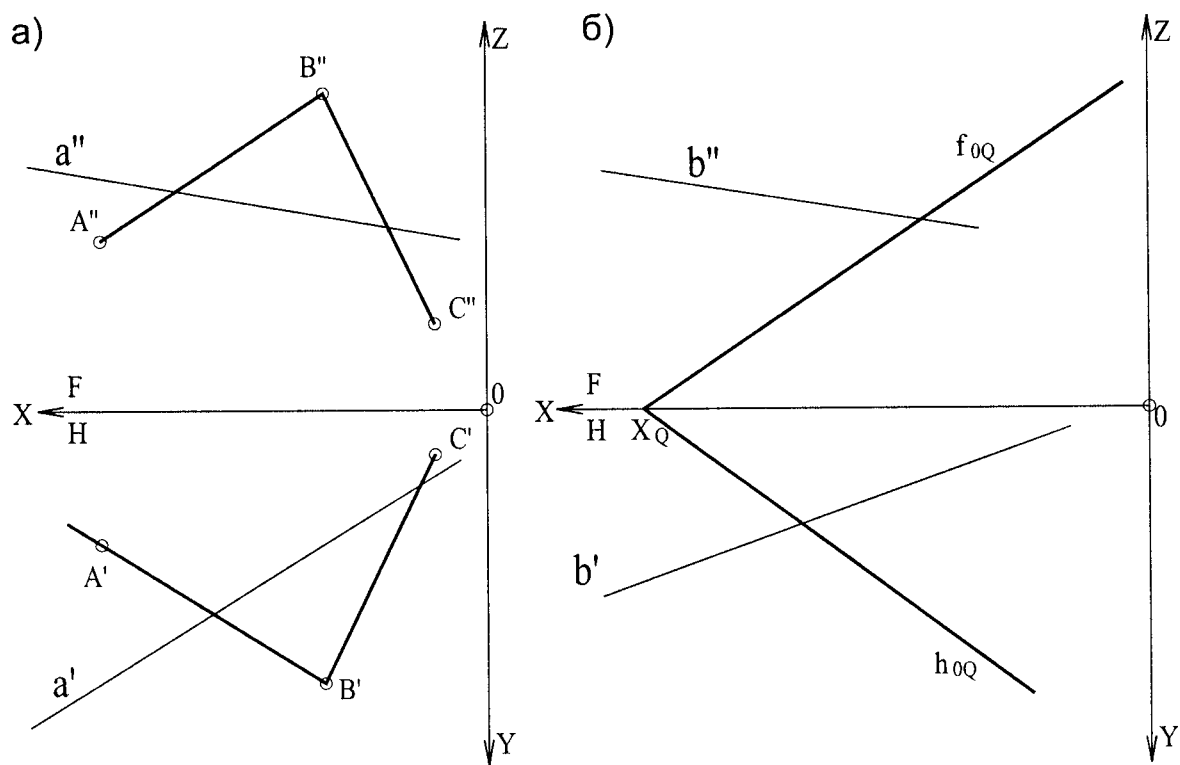


Рис. 4.5

Частный случай определения точки пересечения прямой линии и плоскости

Из элементарной геометрии известно: **прямая линия, перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым линиям, принадлежащим этой плоскости** (рис. 4.6).

На рисунке 4.6...

Дано:

Определить:

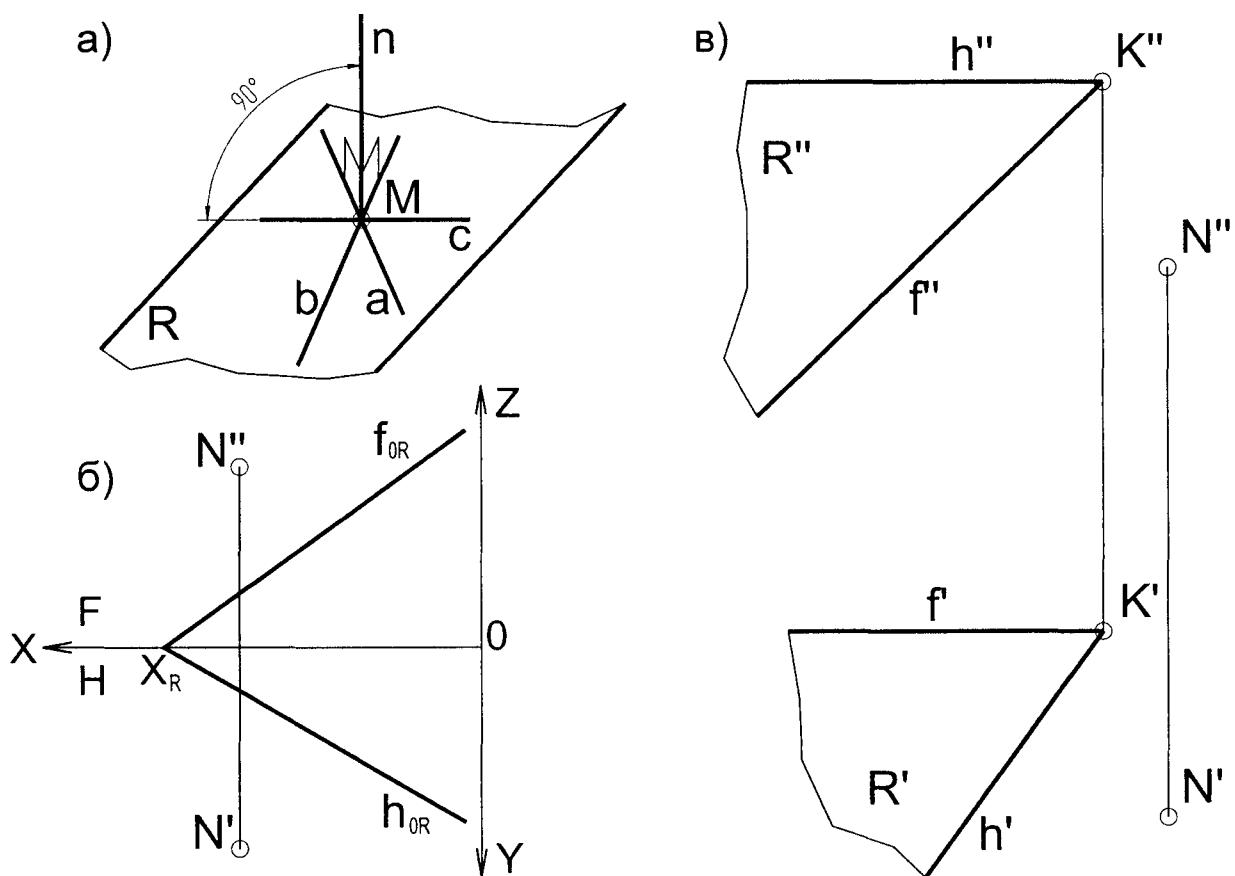


Рис. 4.6

Из всего множества прямых линий...

4.3. Взаимное положение плоскостей

Условия параллельности плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой линии — собственной или не-собственной. Во втором случае плоскости называют параллельными

Плоскости параллельны, если две произвольные пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

На рис. 4.7...

Дано:

Определить:

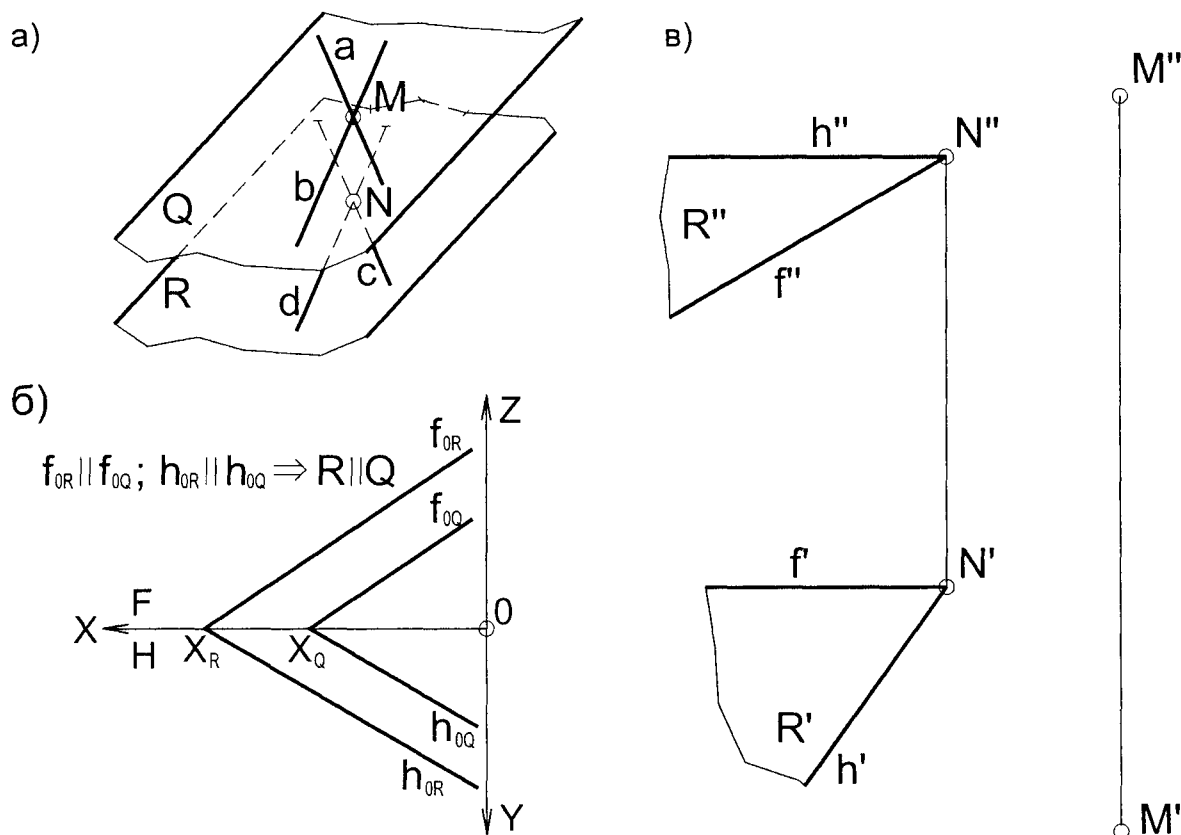


Рис. 4.7

4.4. Определение линии пересечения двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости: **Q** и **R** (рис. 4.8).

Определить:

алгоритм, определяющий построение линии пересечения двух плоскостей общего положения.

1. Для определения прямой линии пересечения двух плоскостей необходимо...
2. $M = (R1 \cap R) \cap (R1 \cap Q);$
 $N = (R2 \cap R) \cap (R2 \cap Q);$
 $m = (M, N).$
3. Определить видимость плоскостей (пластины не прозрачны).

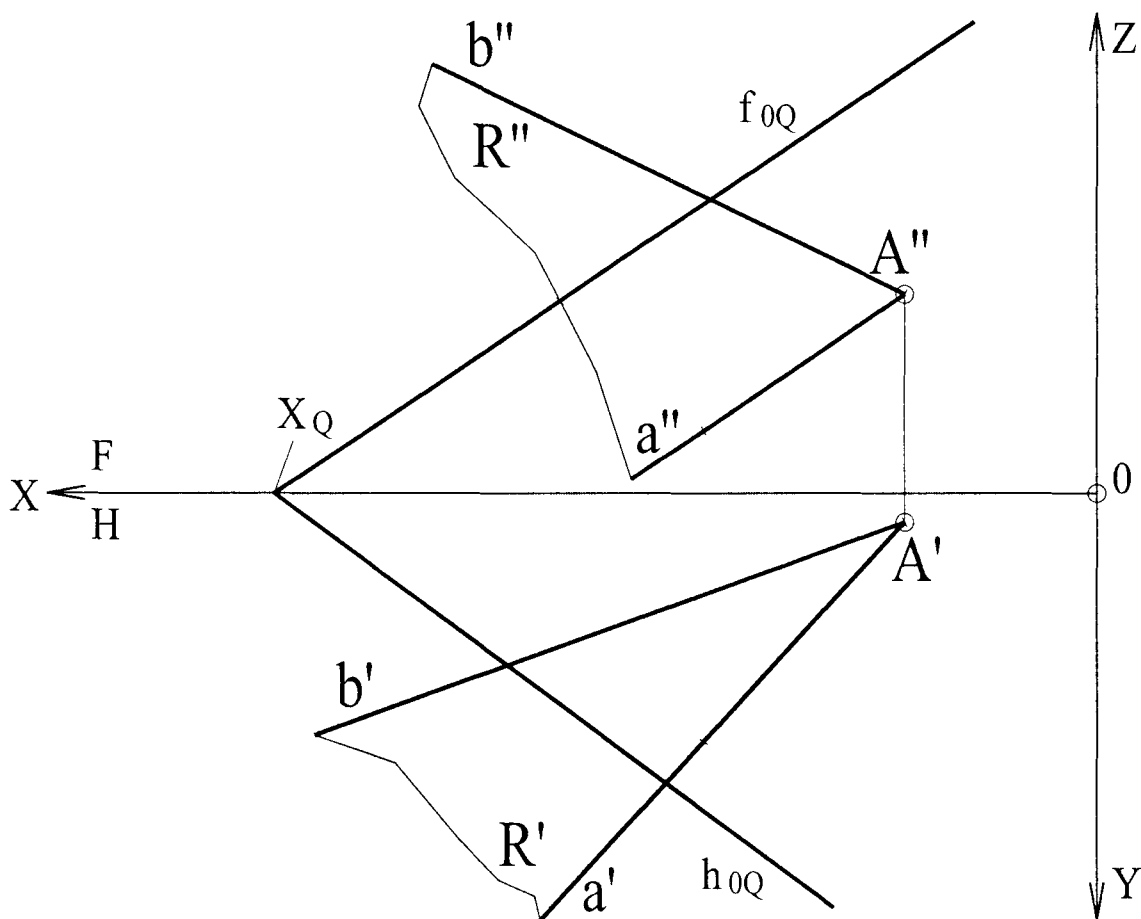


Рис. 4.8

**Построить линию пересечения двух непрозрачных пластин
(плоскостей)**

На рисунке 4.9...

Дано:

Определить:

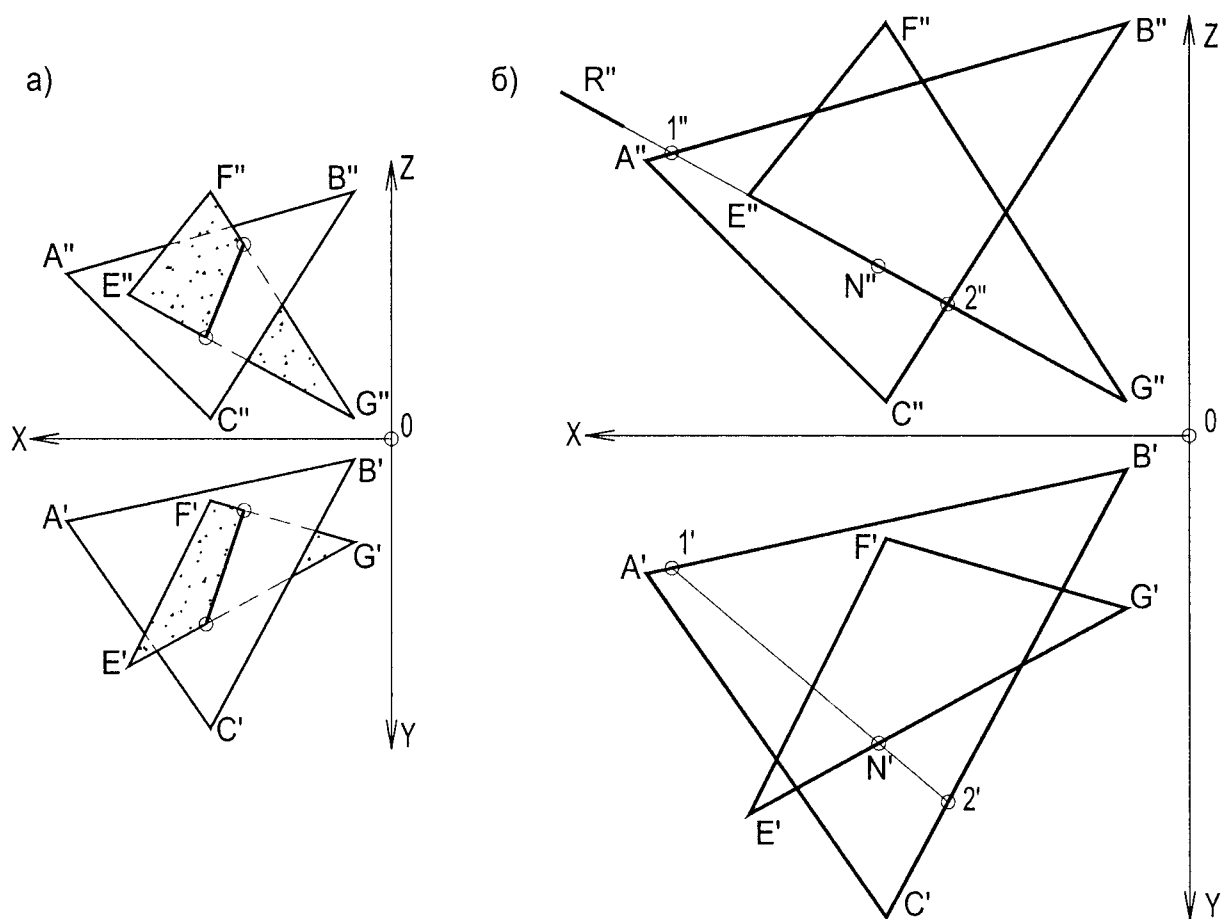


Рис. 4.9

4.5. Перпендикулярность прямых линий общего положения

Признак перпендикулярности прямых линий общего положения: ...

Алгоритм решения задачи (рис. 4.10):

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

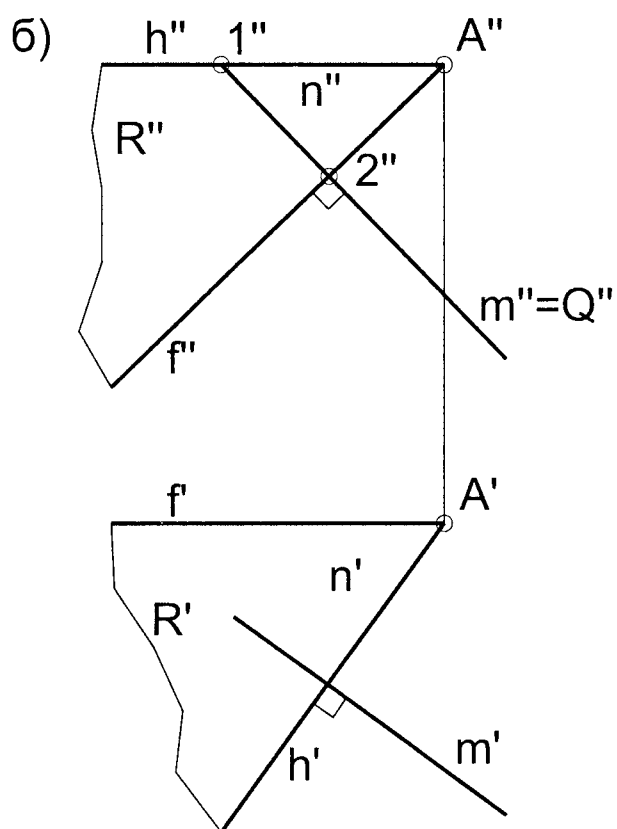
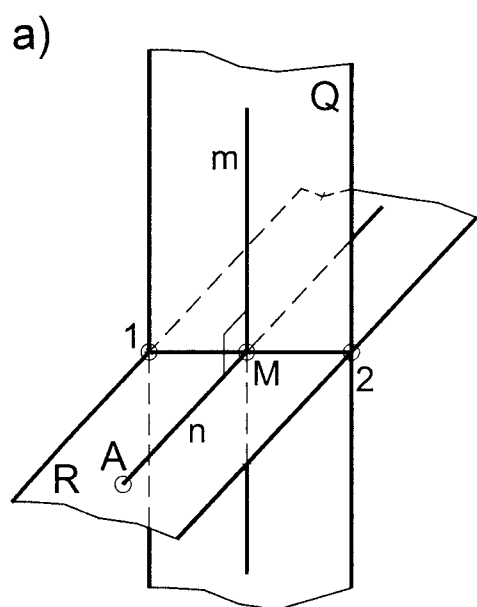


Рис. 4.10

4.6. Перпендикулярность плоскостей

Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то каждая из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Отсюда следует два способа построения взаимно перпендикулярных плоскостей:

1. ...

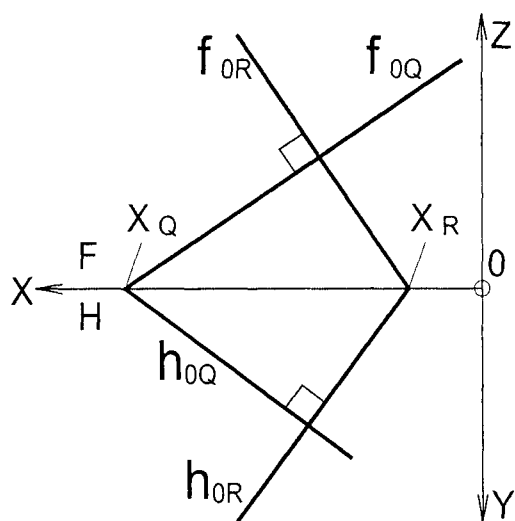
2. ...

На рисунке 4.11...

Дано:

Определить:

а)



б)

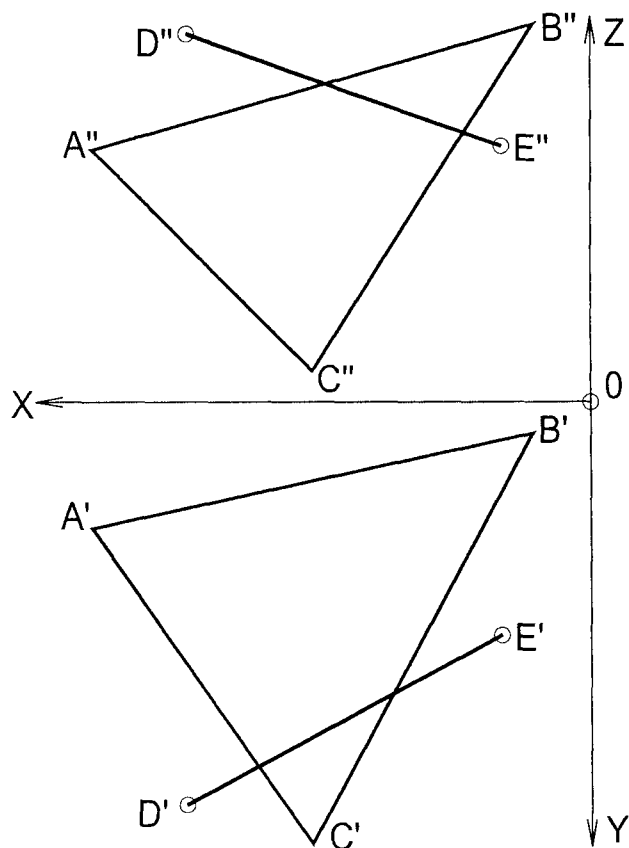


Рис. 4.11

5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

5.1. Метод замены плоскостей проекции

Плоскости общего положения необходимо уметь преобразовывать в проецирующие и плоскости уровня. Для этого используют дополнительные плоскости проекций (плоскости частного положения), перпендикулярные плоскостям общего положения

Следовательно, плоскость общего положения должна содержать прямую частного положения (**h**), перпендикулярную дополнительной плоскости проекций (**F1**) (рис. 5.1, а). Этими линиями могут быть прямые линии уровня: горизонталь **h** или фронталь **f**.

Для определения истинной величины отрезка прямой линии или плоской фигуры необходимо выполнить замену плоскостей проекций.

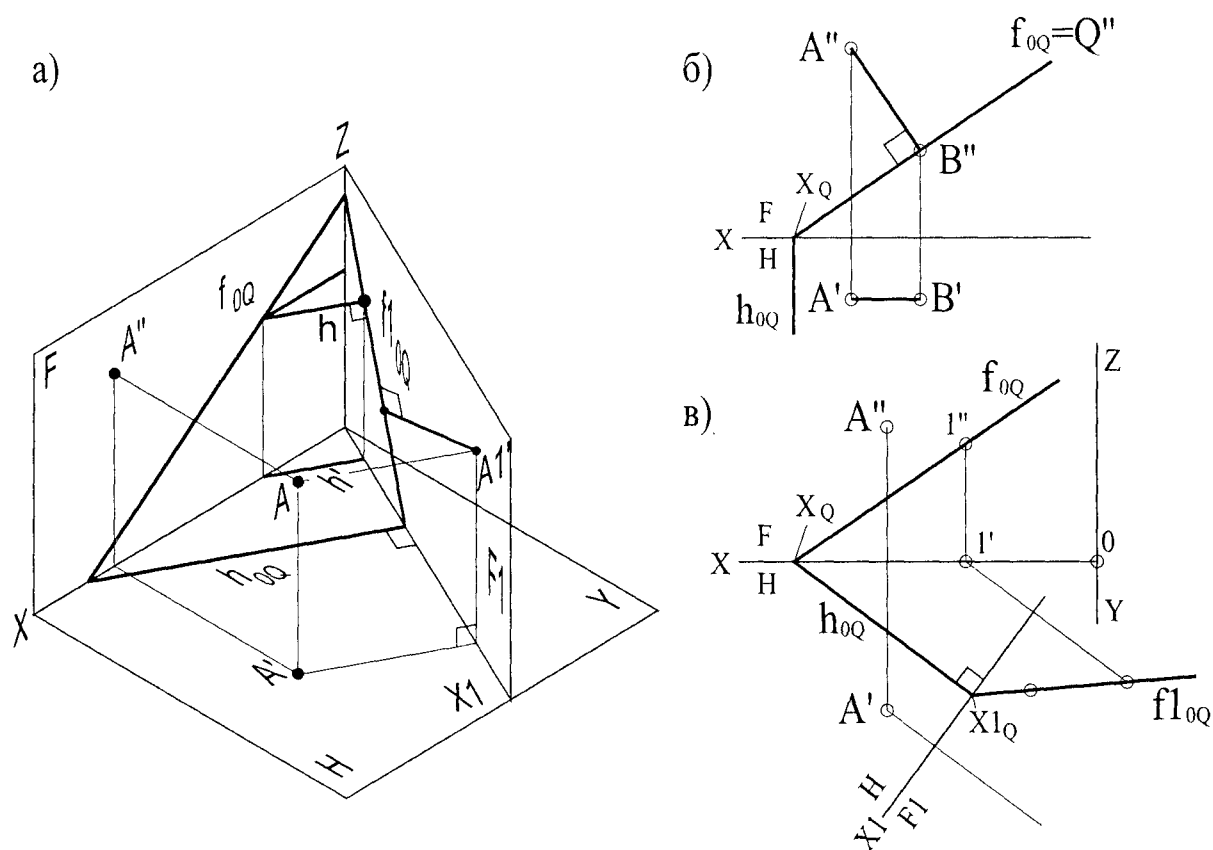


Рис. 5.1

Определение кратчайшего расстояния от точки до плоскости

На рисунке 5.1, б...

Дано:

Определить:

Чтобы определить кратчайшее расстояние от точки до плоскости общего положения (в общем случае, см. рис. 5.1, а, в), необходимо выполнить замену плоскостей проекций (имеются и другие методы решения данной задачи).

В некоторых случаях, например, для определения истинной величины плоской фигуры, необходимо дважды выполнить замену плоскостей проекций на эпюре Монжа (рис. 5.2, а).

Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой линии

На рисунке 5.2, б...

Дано:

Определить:

Чтобы определить кратчайшее расстояние от точки до прямой линии общего положения (в общем случае, см. рис. 5.2, б) необходимо дважды выполнить замену плоскостей проекций.

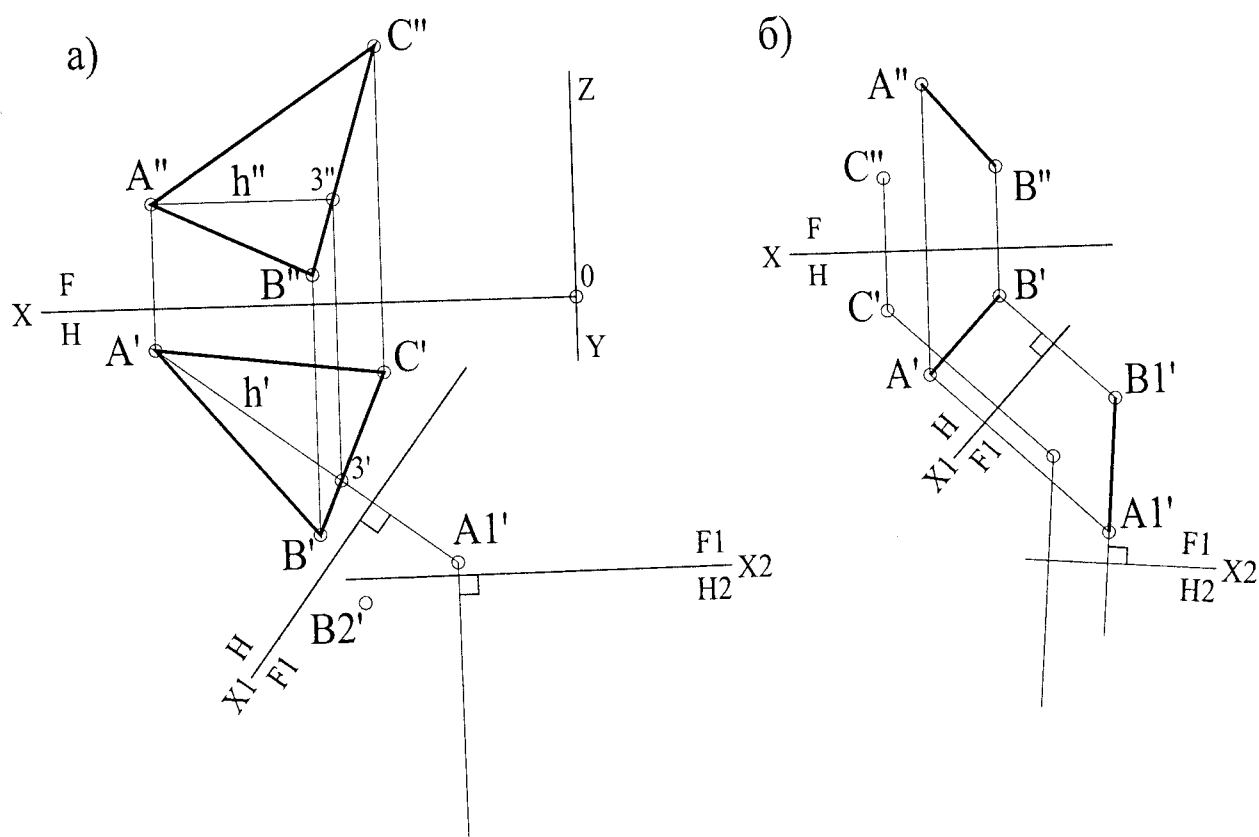


Рис. 5.2

5.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

На рисунке 5.3...

Дано:

Определить:

Точка A , при вращении ее вокруг оси i , перпендикулярной плоскости H , перемещается по дуге окружности (рис. 5.3, а) в плоскости Q ($Q \perp i, Q \parallel H$).

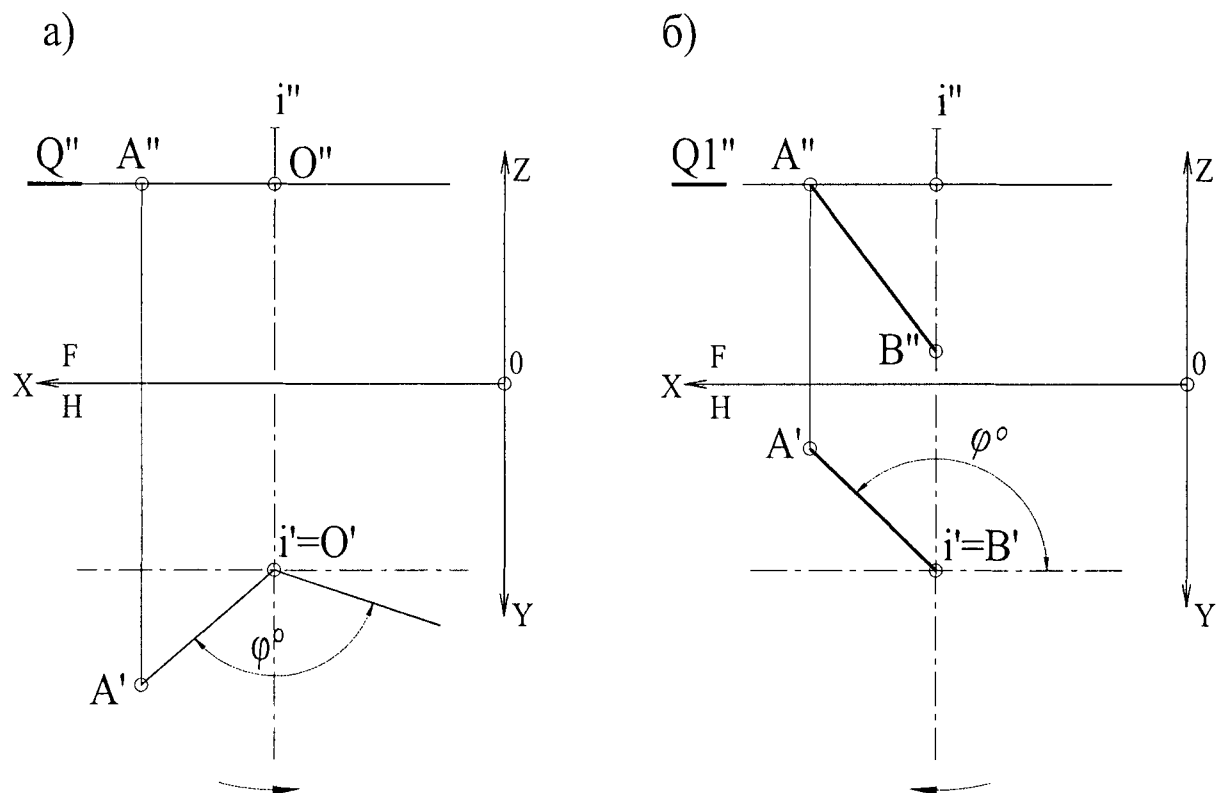


Рис. 5.3

5.3. Преобразование проекции способом плоскопараллельного перемещения

При параллельном переносе геометрической фигуры ...

На рисунке 5.4...

Дано:

Определить:

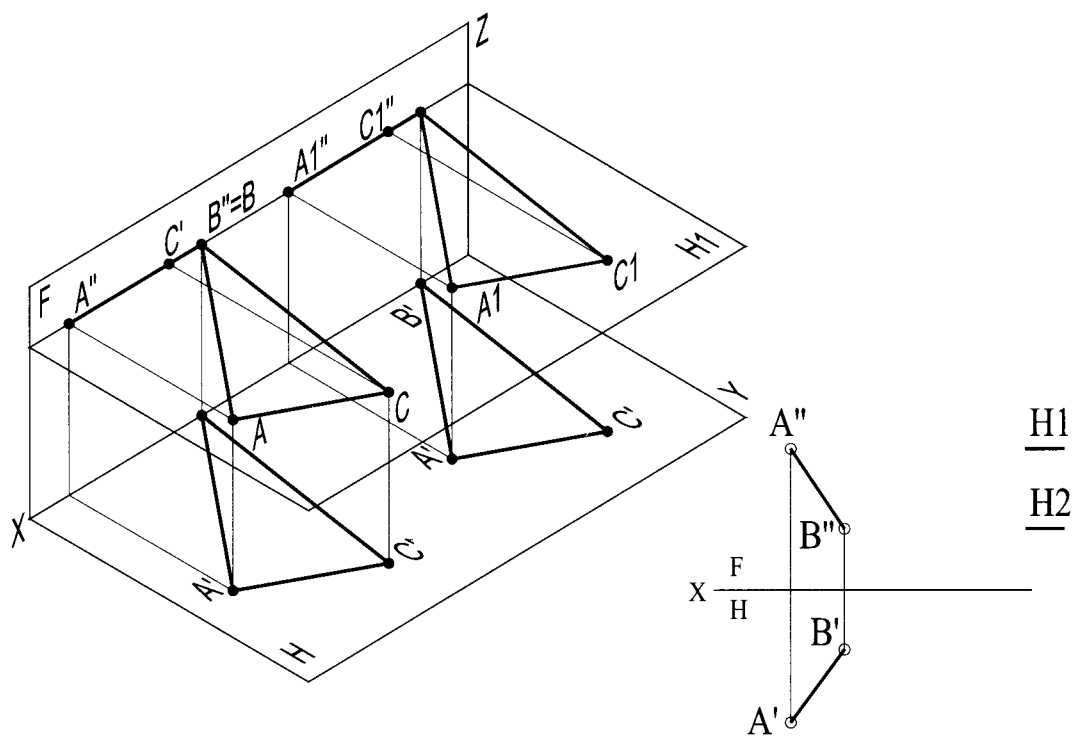


Рис. 5.4

На рисунке 5.5...

Дано:

Определить:

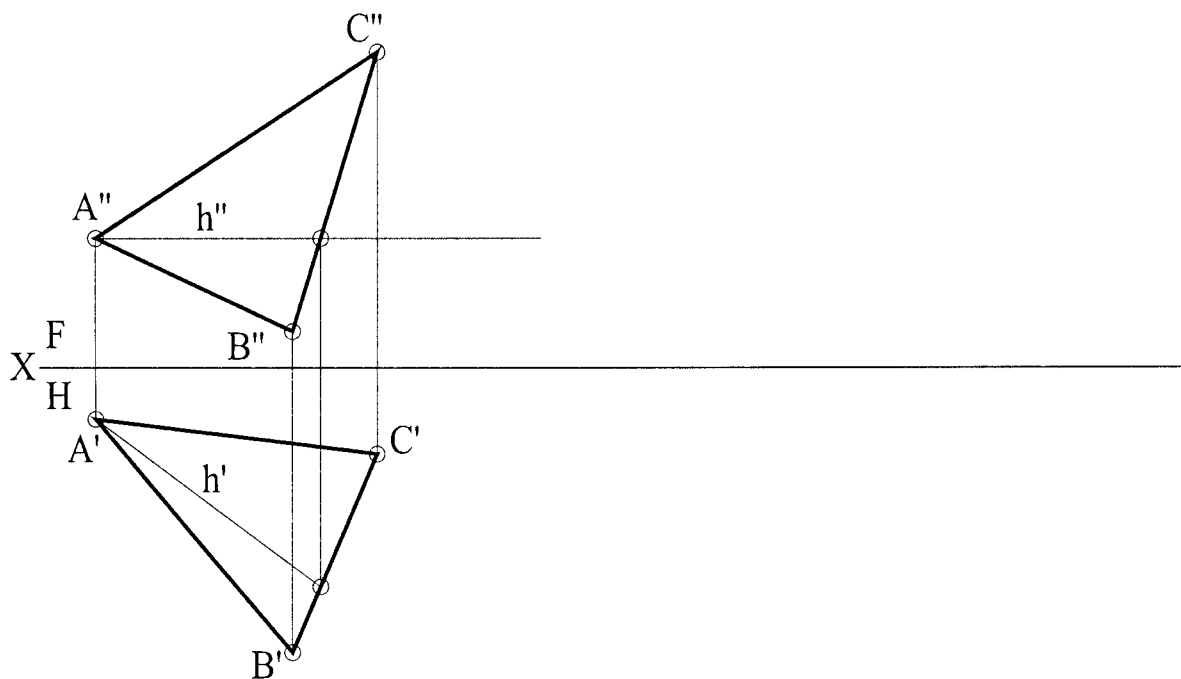


Рис. 5.5

5.4. Преобразование проекции способом совмещения.

Вращение вокруг линий уровня

Способ совмещения — частный случай вращения вокруг линии уровня (следа плоскости). Это преобразование переводит плоскость общего положения в плоскость уровня. Применяется для определения истинных величин отрезков, углов и плоских фигур, т.е. для решения метрических задач.

На рисунке 5.6...

Дано:

Определить:

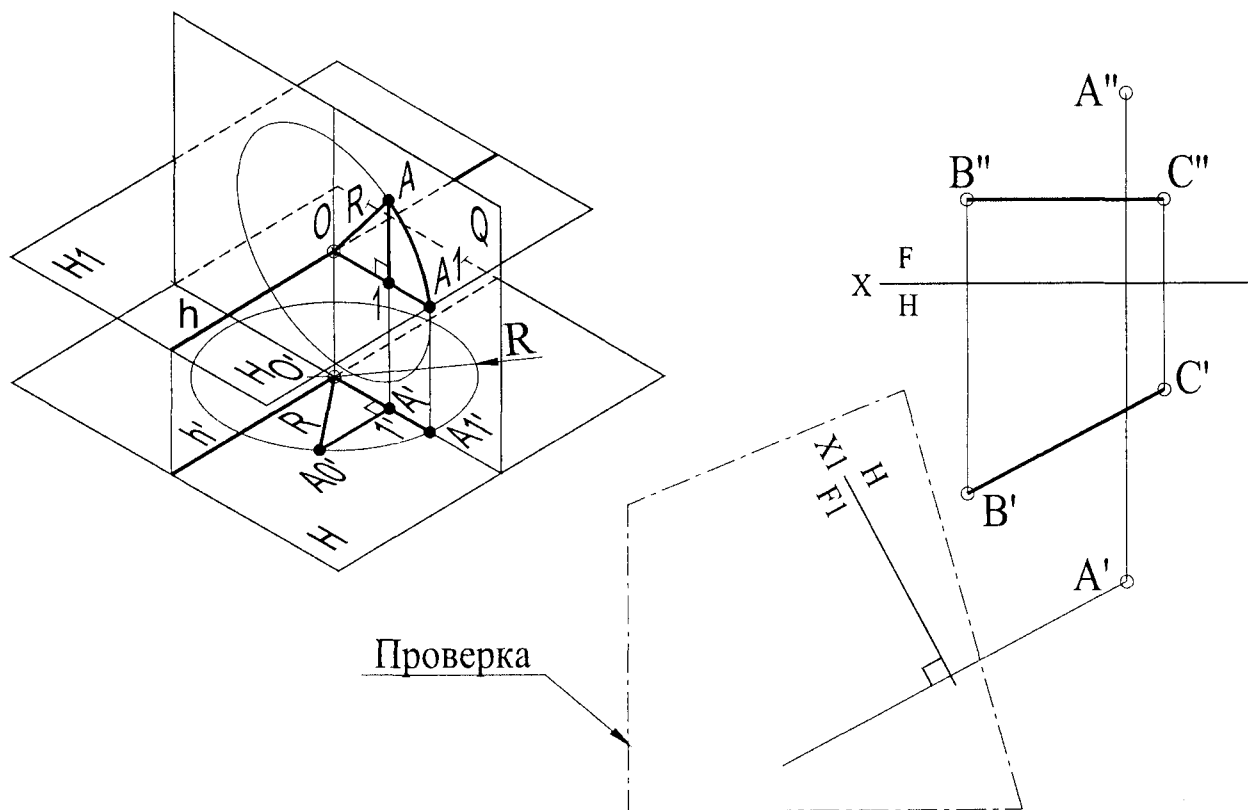


Рис. 5.6

На рисунке 5.7...

Дано:

Определить:

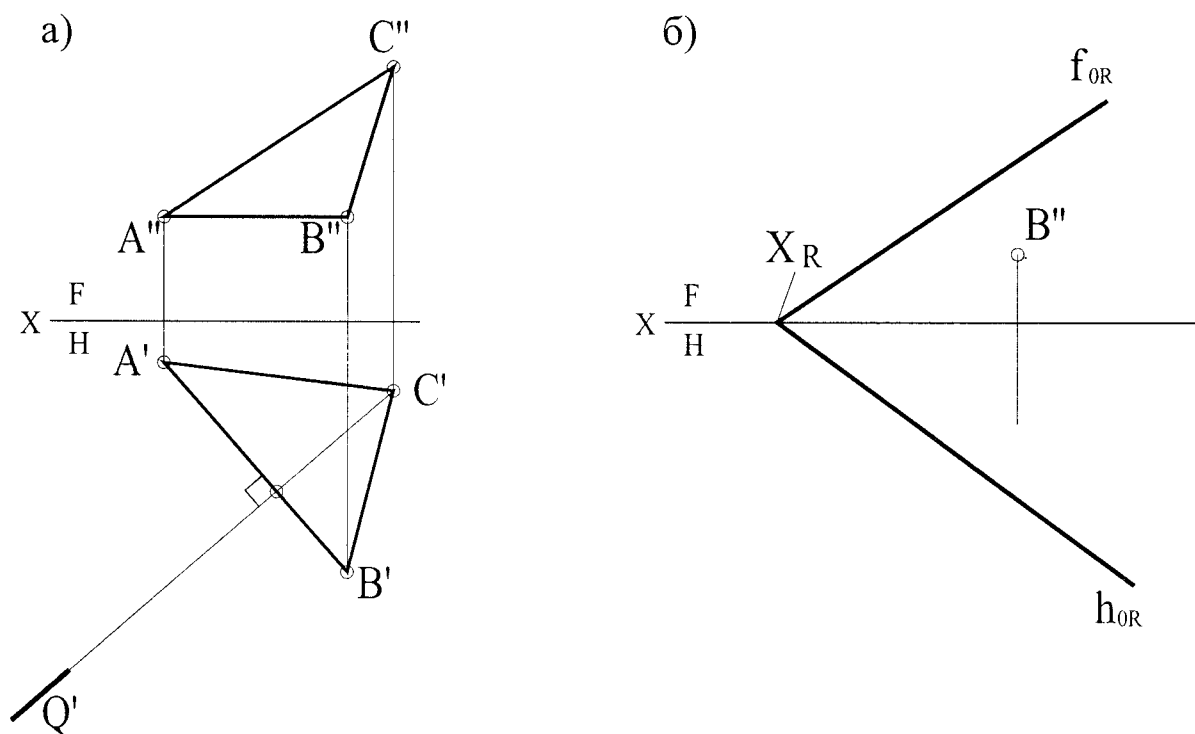


Рис. 5.7

На рисунке 5.8...

Дано:

Определить:

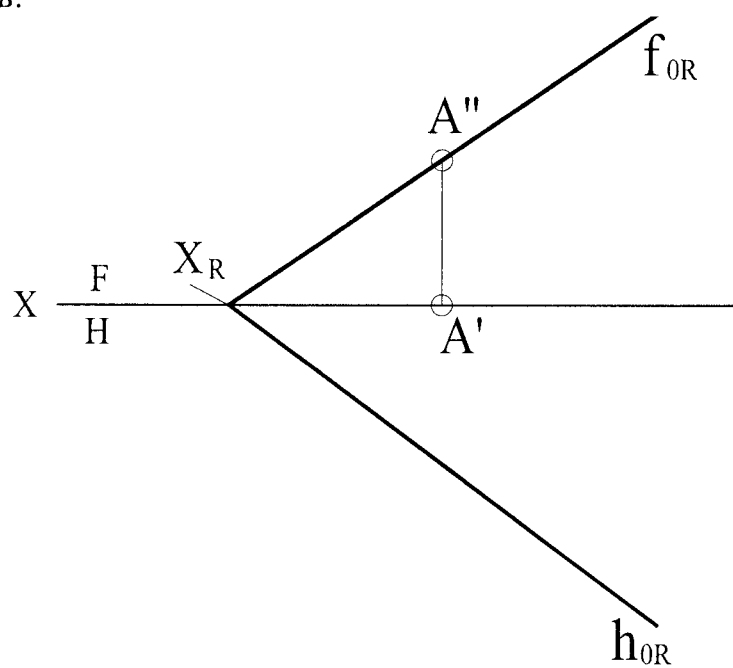


Рис. 5.8

6. МНОГОГРАННИКИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

6.1. Понятие многогранника

Многогранники — это тела, ограниченные рядом плоскостей, которые называют **гранями**. Наиболее распространенные многогранники — призма и пирамида. Определитель поверхности призмы и пирамиды — ...

На рисунке 6.1...

Дано:

Определить:

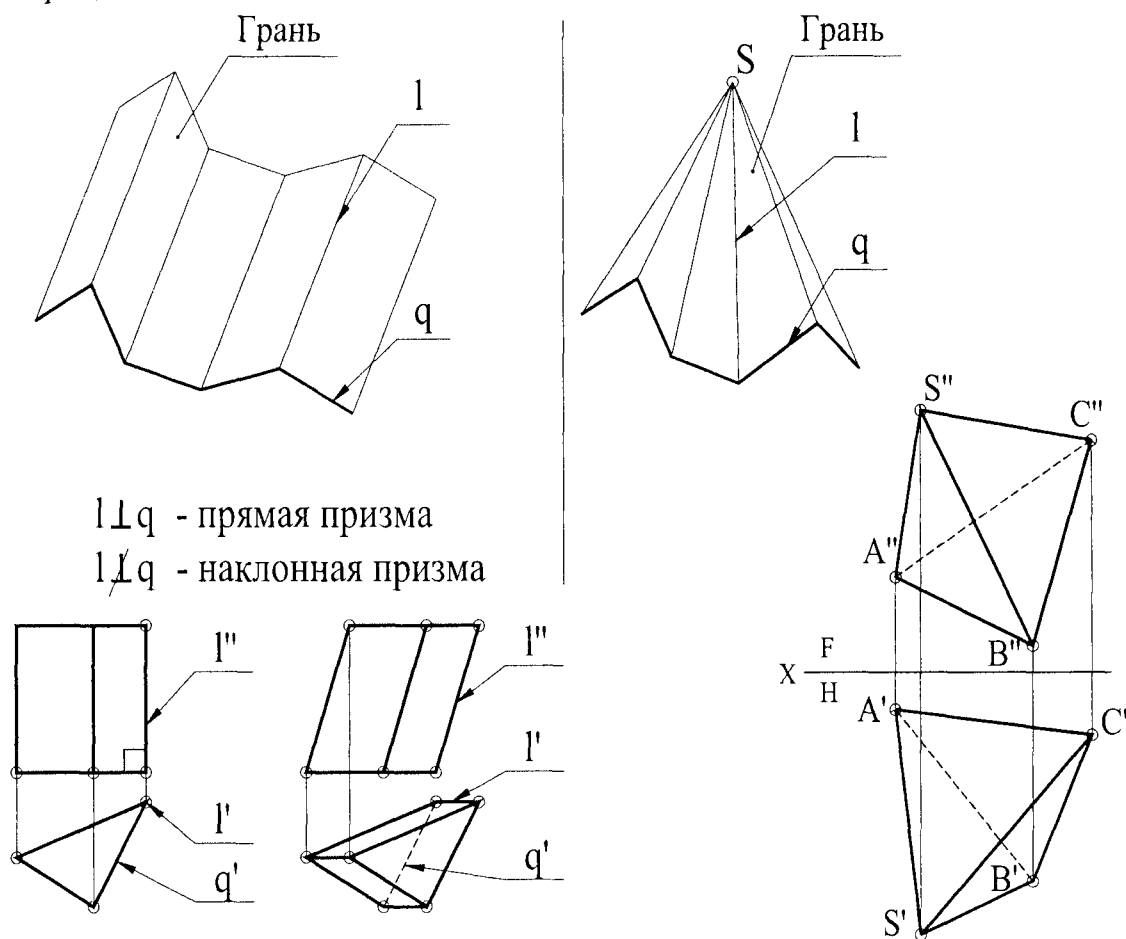


Рис. 6.1

На рисунке 6.2...

Дано:

Определить:

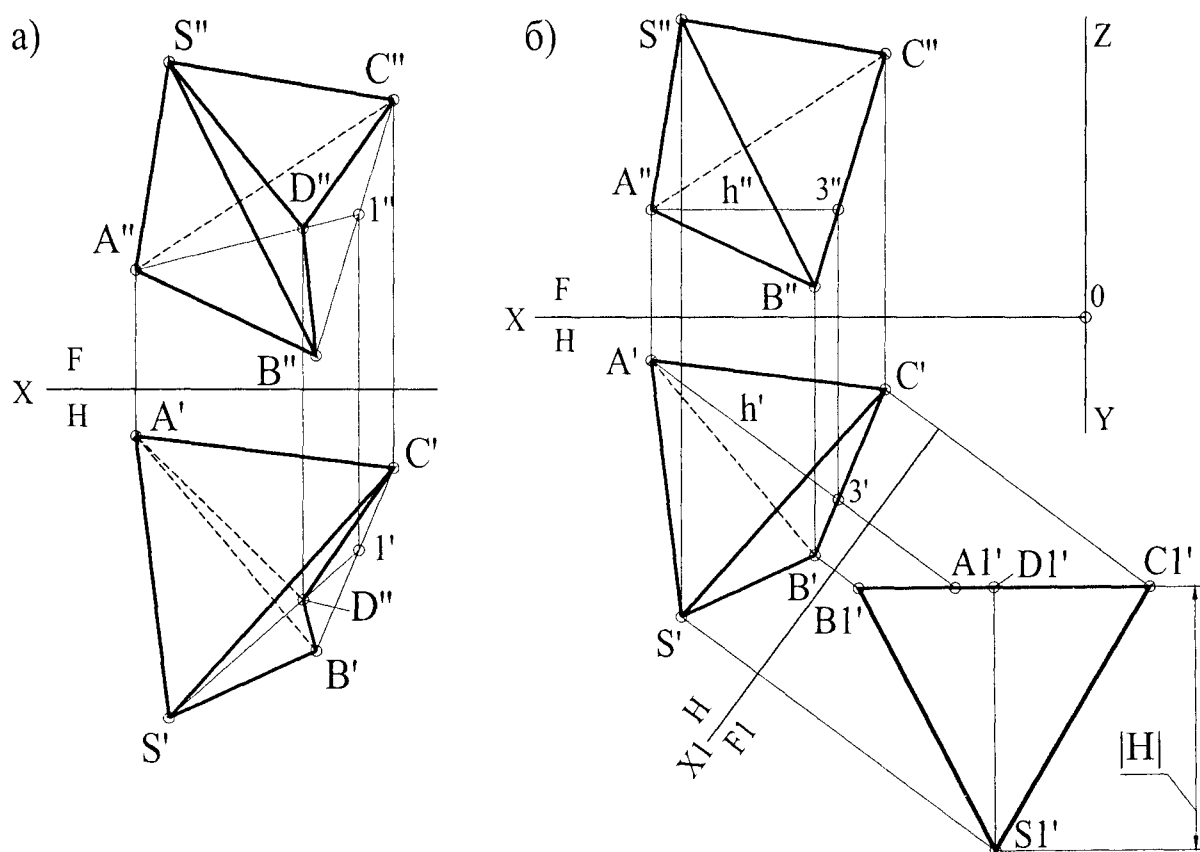


Рис. 6.2

6.2. Линии пересечения поверхности многогранника плоскостью частного положения

При пересечении поверхности многогранника плоскостью получается плоская фигура — многоугольник, ...

На рисунке 6.3, а...

Дано:

Определить:

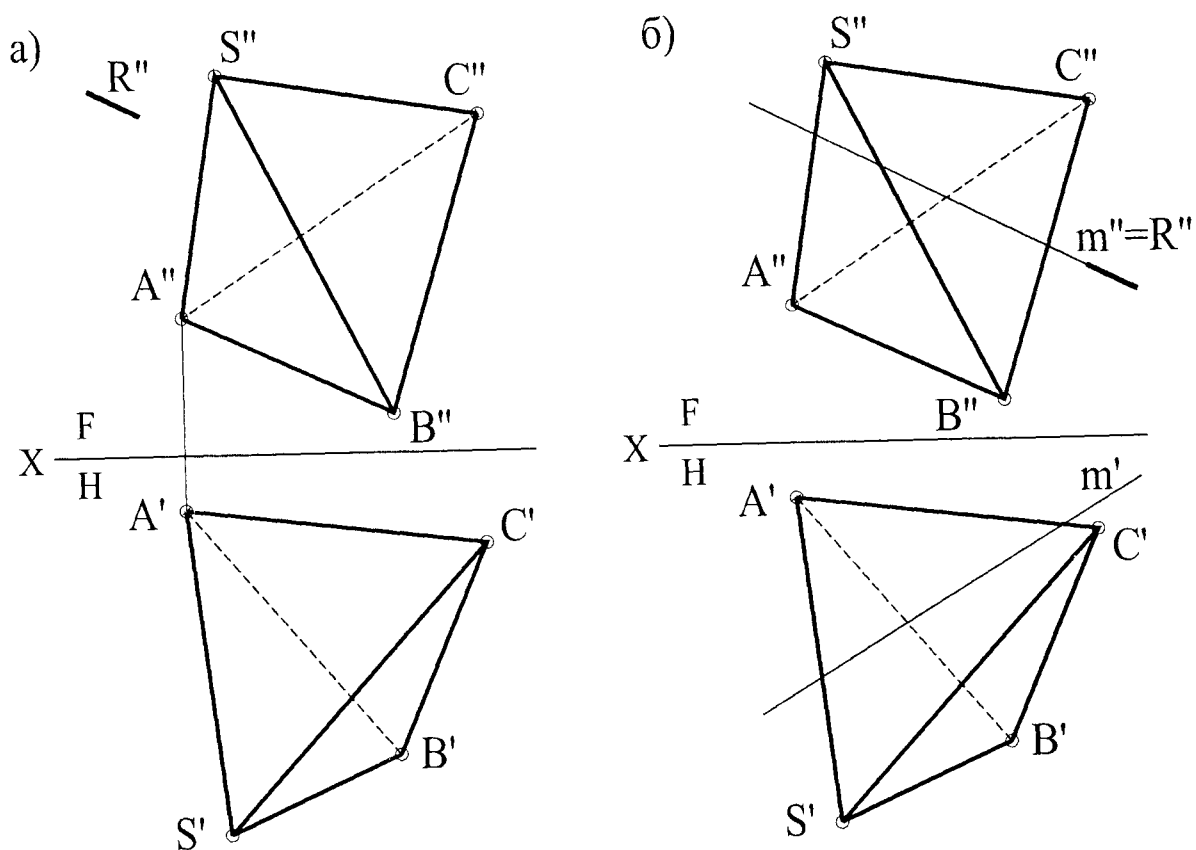


Рис. 6.3

6.3. Определение точек пересечения поверхности многогранника с прямой линией

На рисунке 6.3, б...

Дано:

Определить:

6.4. Определение линий пересечения поверхности многогранника с плоскостью общего положения

При пересечении многогранника плоскостью получается плоская фигура — многоугольник, который называют сечением (рис. 6.3, а, рис. 6.4, а, б). Вершины многоугольника принадлежат ребрам, стороны — граням. Многоугольник может быть построен двумя способами, называемыми:

- метод ребер — ...
- метод граней — ...

На рисунке 6.4...

Дано:

Определить:

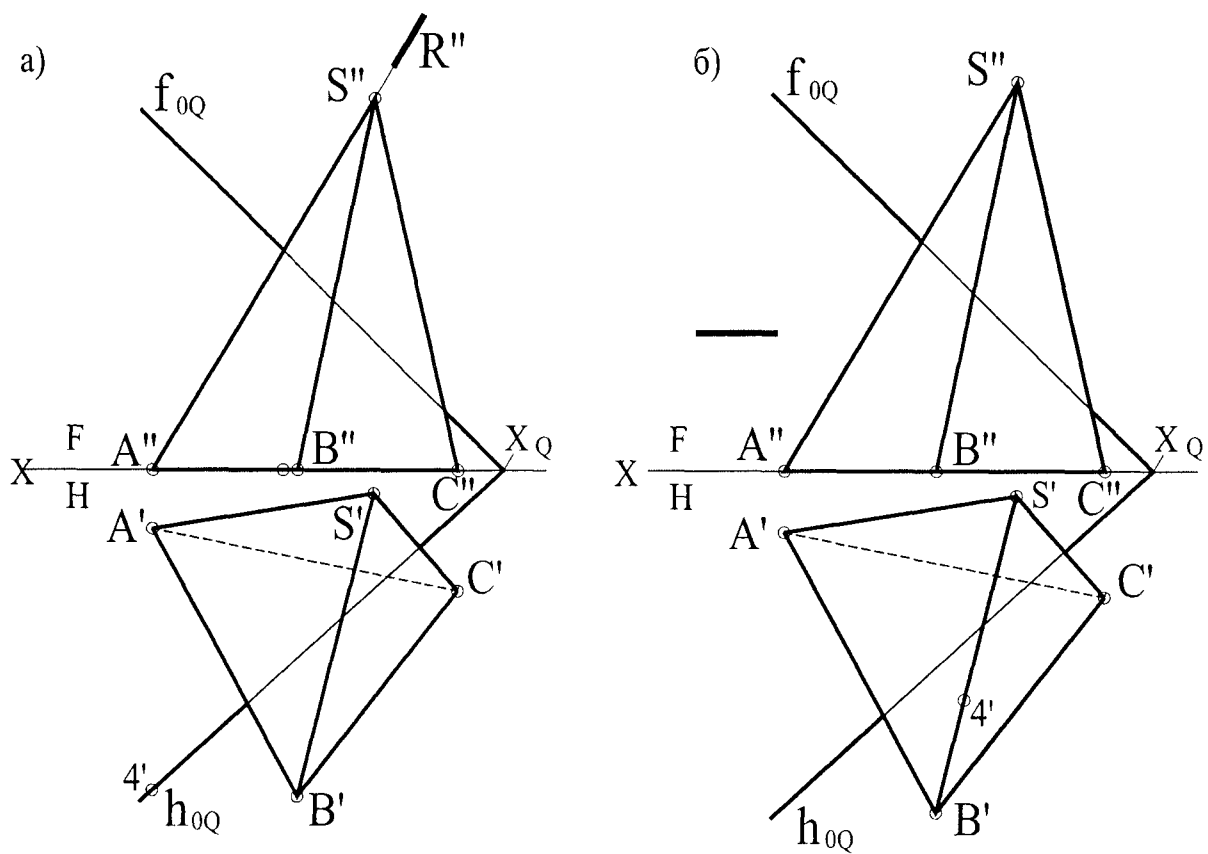


Рис. 6.4

6.5. Определение линий пересечения поверхностей двух многогранников

Из Булевой алгебры известно, что два многогранника могут быть подвергнуты следующим операциям: **объединение**, **пересечение**, **вычитание** (рис. 6.5).

При пересечении двух многогранников можно получить **многогранник** (рис. 6.5). Линии пересечения во всех рассмотренных случаях будут одинаковые (рис. 6.5, а, б, в, г). Их можно определить двумя способами:

- **способом граней** — ...
- **способом ребер** — ...

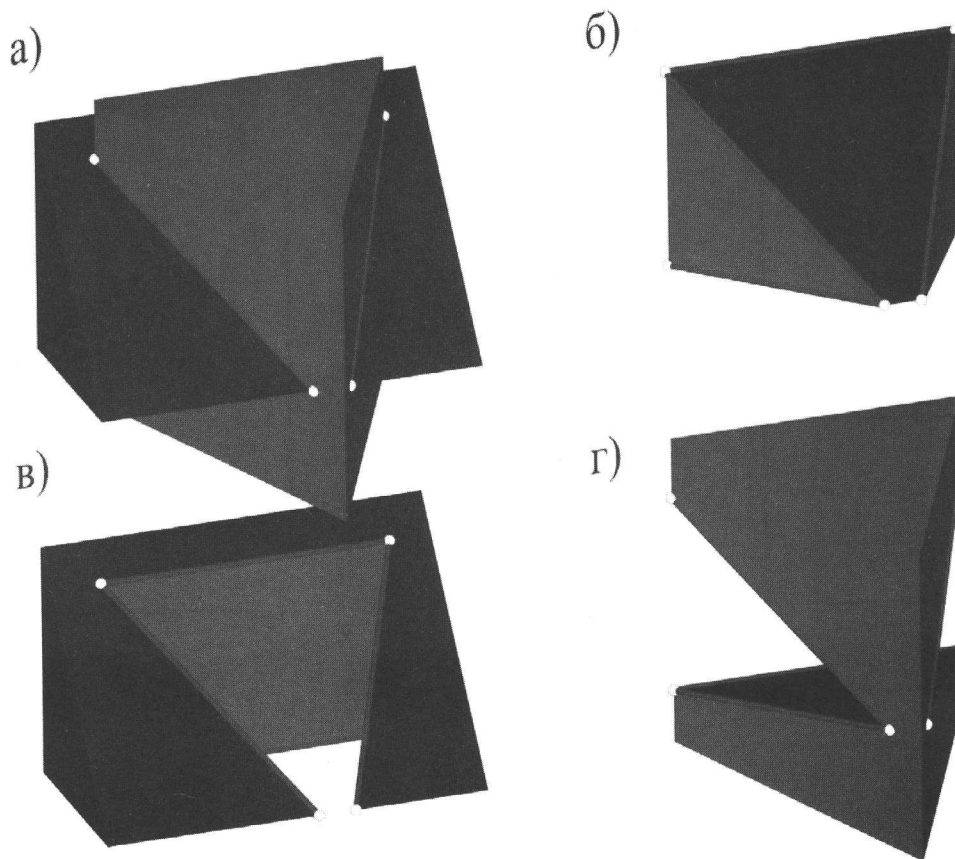


Рис. 6.5

На рисунке 6.6 ...

Дано:

Определить:

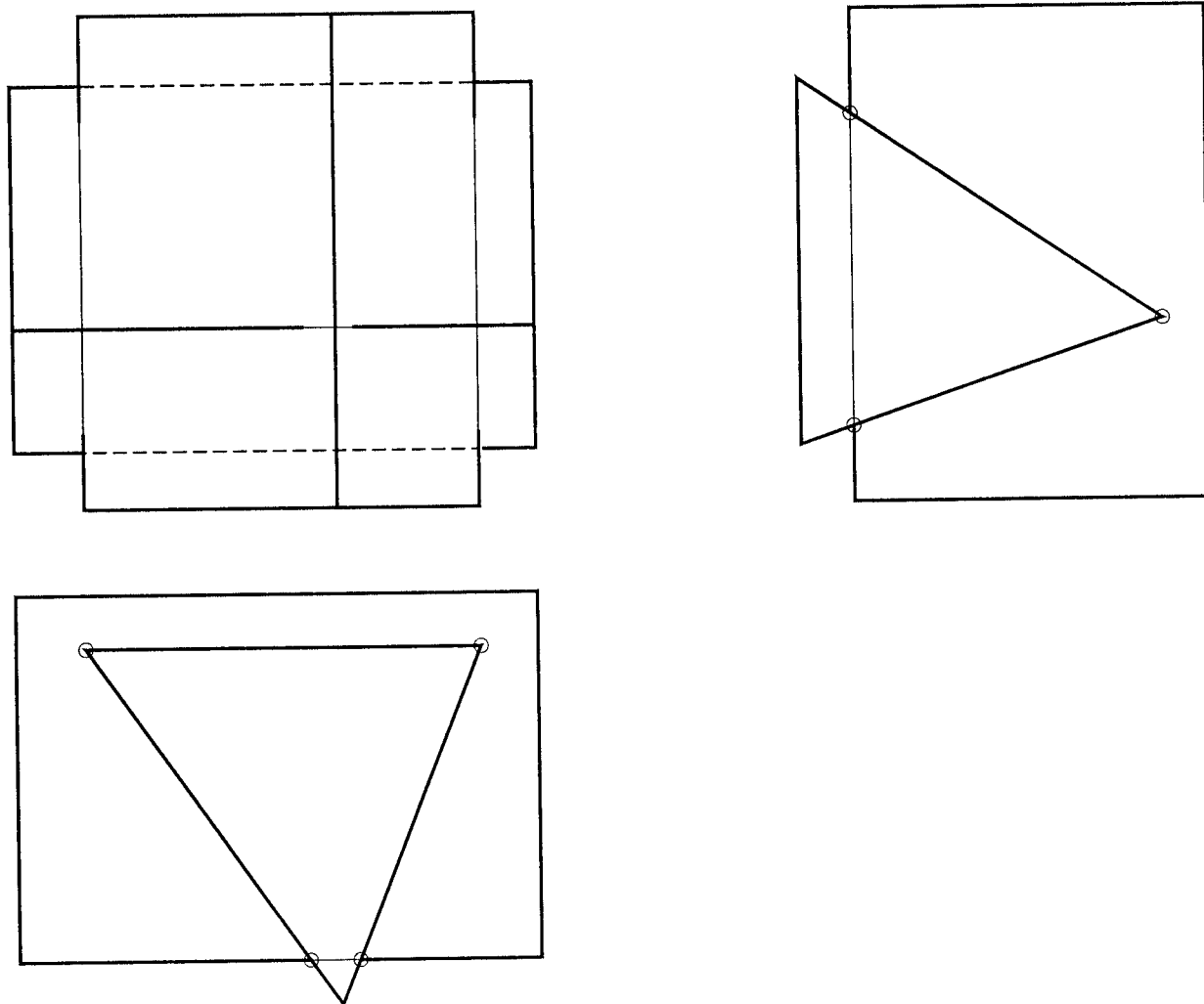


Рис. 6.6

7. ПОВЕРХНОСТИ

7.1. Образование и задание поверхности на чертеже

В математике считают, что **поверхность** — это непрерывное множество точек, между координатами которых установлена зависимость, определяемая уравнением вида $F(x, y, z)$. $F(x, y, z)$ — многочлен n -й степени или в форме трансцендентной функции. В первом случае поверхности называют **алгебраическими** (n -го порядка), во втором — **трансцендентными** [1].

Поверхностью называется непрерывное двухпараметрическое множество точек.

На рисунке 7.1 представлен процесс образования поверхности при перемещении подвижной линии **l** (образующей) вдоль неподвижных линий **q1** и **q2** (направляющих). Такой способ образования поверхности называют **кинематическим**.

Множество точек или линий, определяющих поверхность, называют **каркасом поверхности**. Каркас бывает точечным и линейным.

Линейным каркасом называют множество линий, имеющих единый закон образования и связанных между собой определенной зависимостью.

Определитель поверхности — совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

В состав определителя входят:

- геометрические объекты ...
- алгоритм формирования поверхности ...

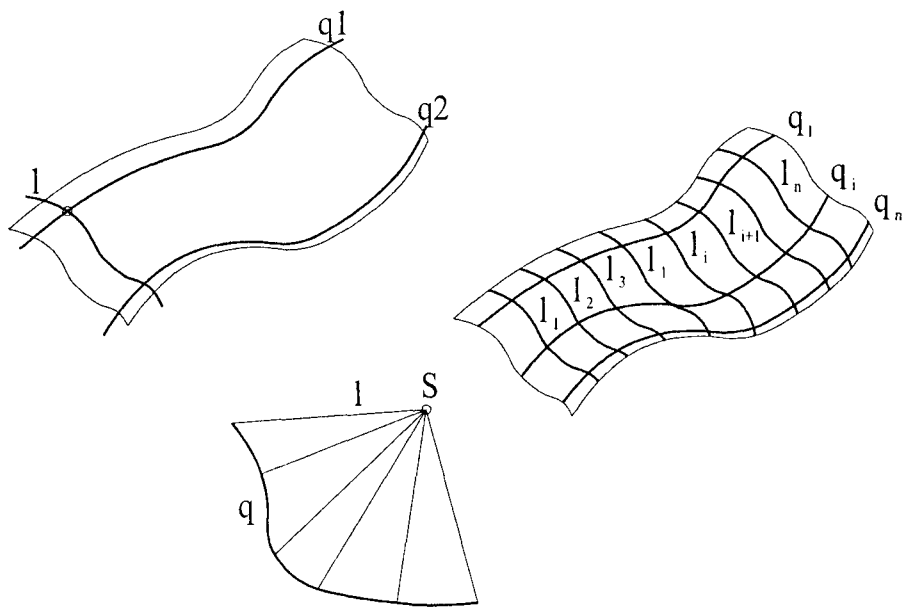


Рис. 7.1

Одна и та же поверхность может иметь различные определители (рис. 7.2).

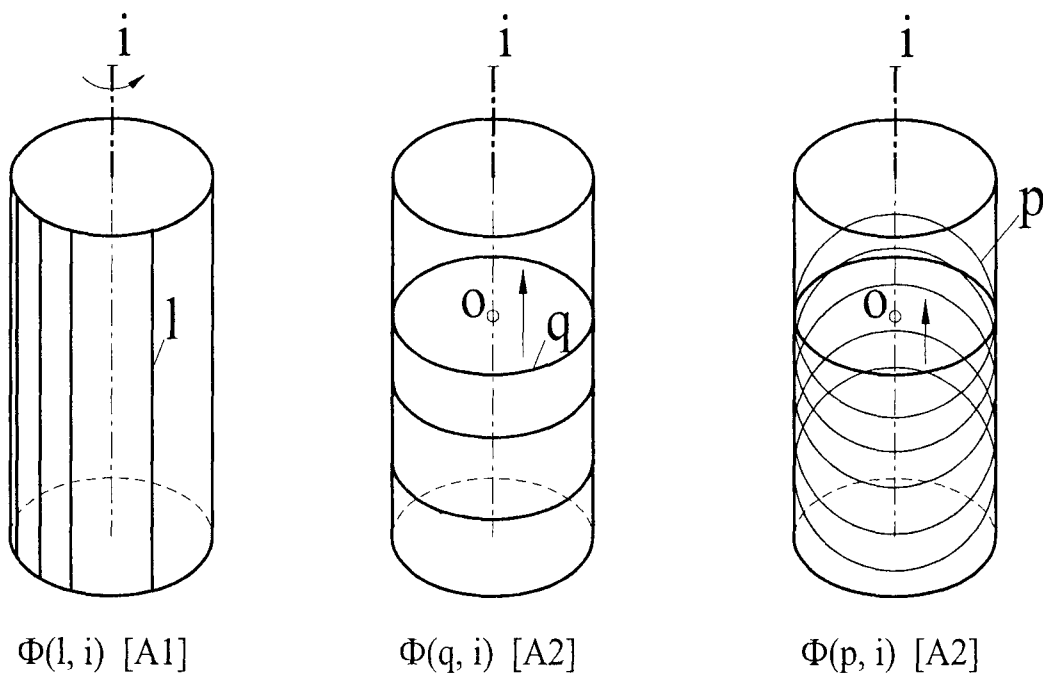


Рис. 7.2

Линии каркаса поверхностей

На рисунке 7.1 поверхность задана каркасом (семейство линий l и q).

Поверхности можно разделить на два класса: **нелинейчатые** (образующая — кривая линия) и **линейчатые** (образующая — прямая линия).

Построение проекций (очерка) поверхностей

На рисунке 7.3 заданы...

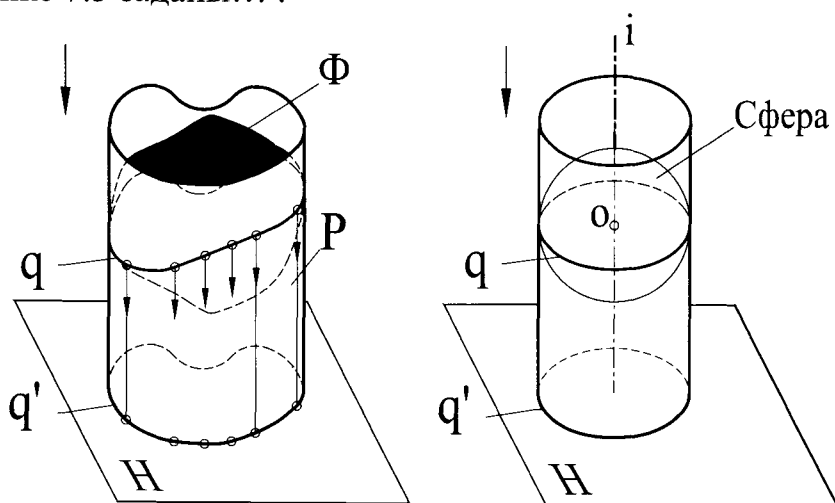


Рис. 7.3

Линии каркаса поверхностей вращения

Поверхностью вращения называют поверхность, которая образуется линией при ее вращении вокруг неподвижной оси. Определитель поверхности: образующая линия — l , ось вращения i и условие $[A]$ о том, что линия l вращается вокруг оси i .

$$\Phi(l, i) [A]$$

На рисунке 7.4...

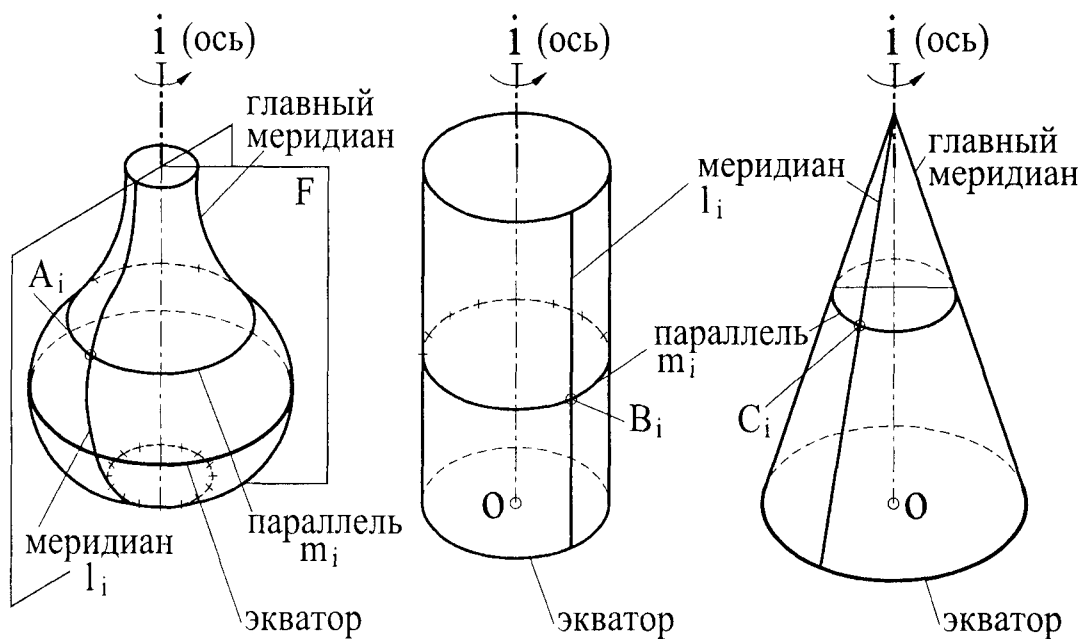


Рис. 7.4

7.2. Точки и линии на поверхностях

Следует иметь ввиду, что точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии, принадлежащей этой поверхности (l_i или m_i).

Точки на поверхностях

На рисунке 7.5...

Дано:

Определить:

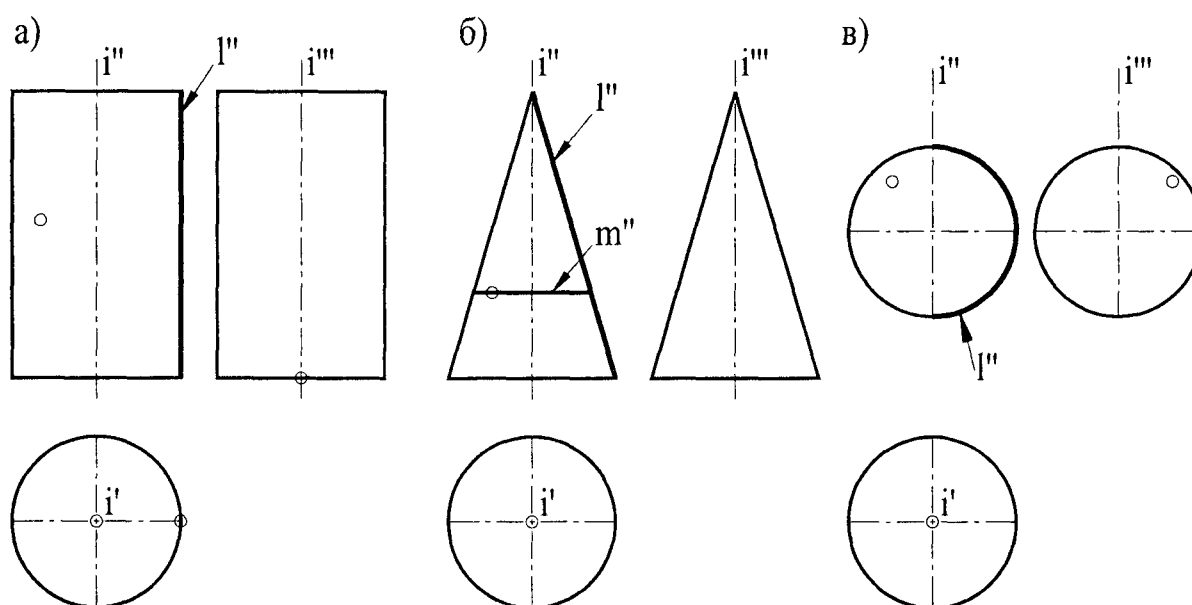


Рис. 7.5

На рисунке 7.6...

Дано:

Определить:

Открытый тор (кольцо) при $R < t$ — окружность не пересекает ось вращения поверхности (рис. 7.6, а).

Закрытый тор при $R = t$ — окружность касается оси вращения поверхности;

Самопересекающийся тор при $R > t$ — окружность пересекает ось вращения поверхности (рис. 7.6, б).

Поверхность тора, представленного на рисунке 7.6 — поверхность четвертого порядка (пересекается прямой линией в общем случае в четырех точках (рис. 7.7)).

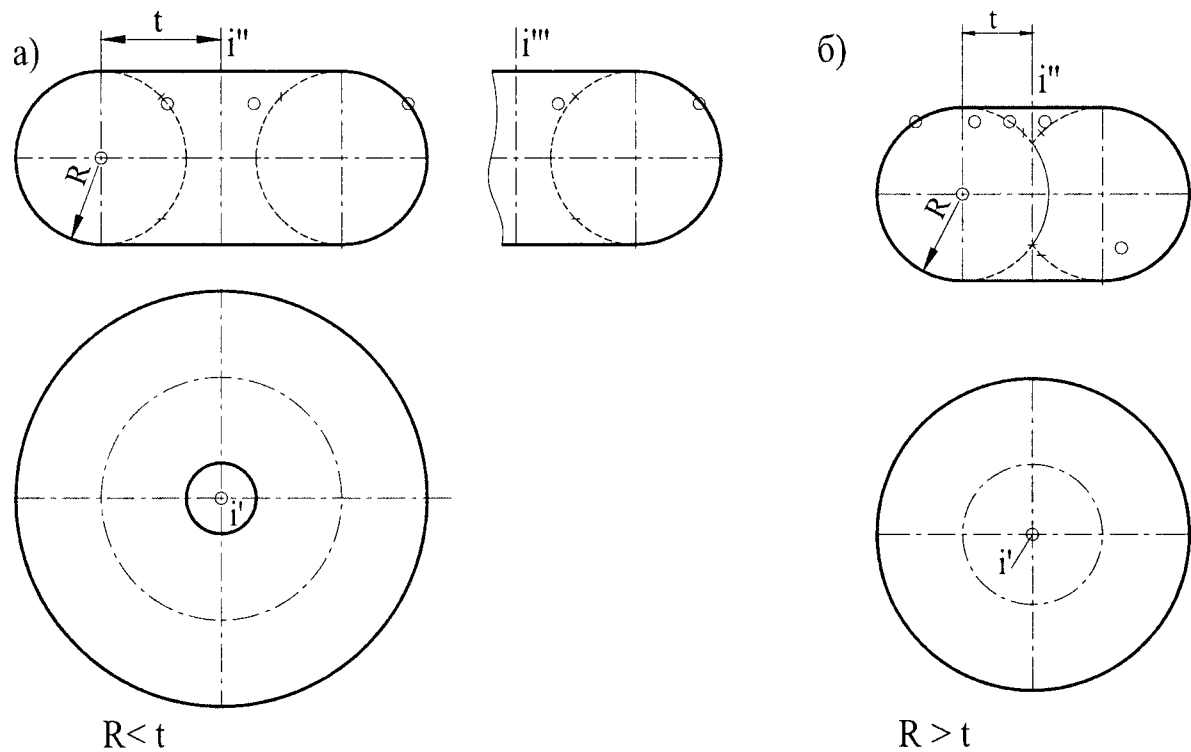


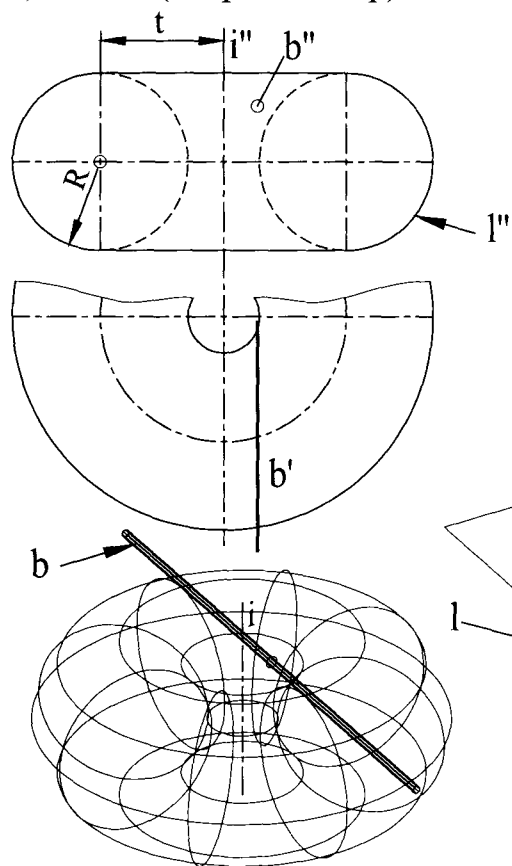
Рис. 7.6

На рисунке 7.7...

Дано:

Определить:

а) $R < t$ (открытый тор)



б) $R = t$ (закрытый тор)

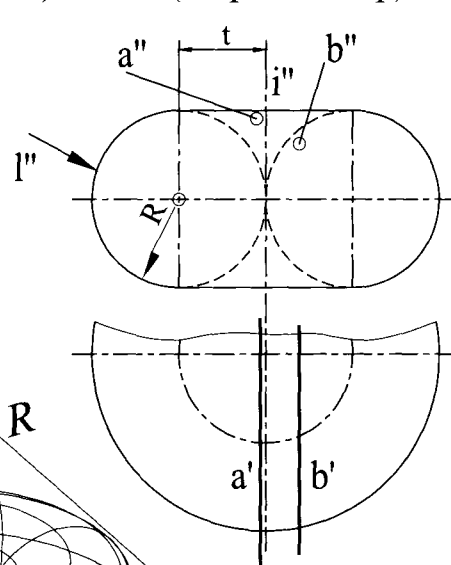


Рис. 7.7

Линии на поверхностях

На рисунке 7.8 заданы:...

а)

б)

в)

г)

Определить:

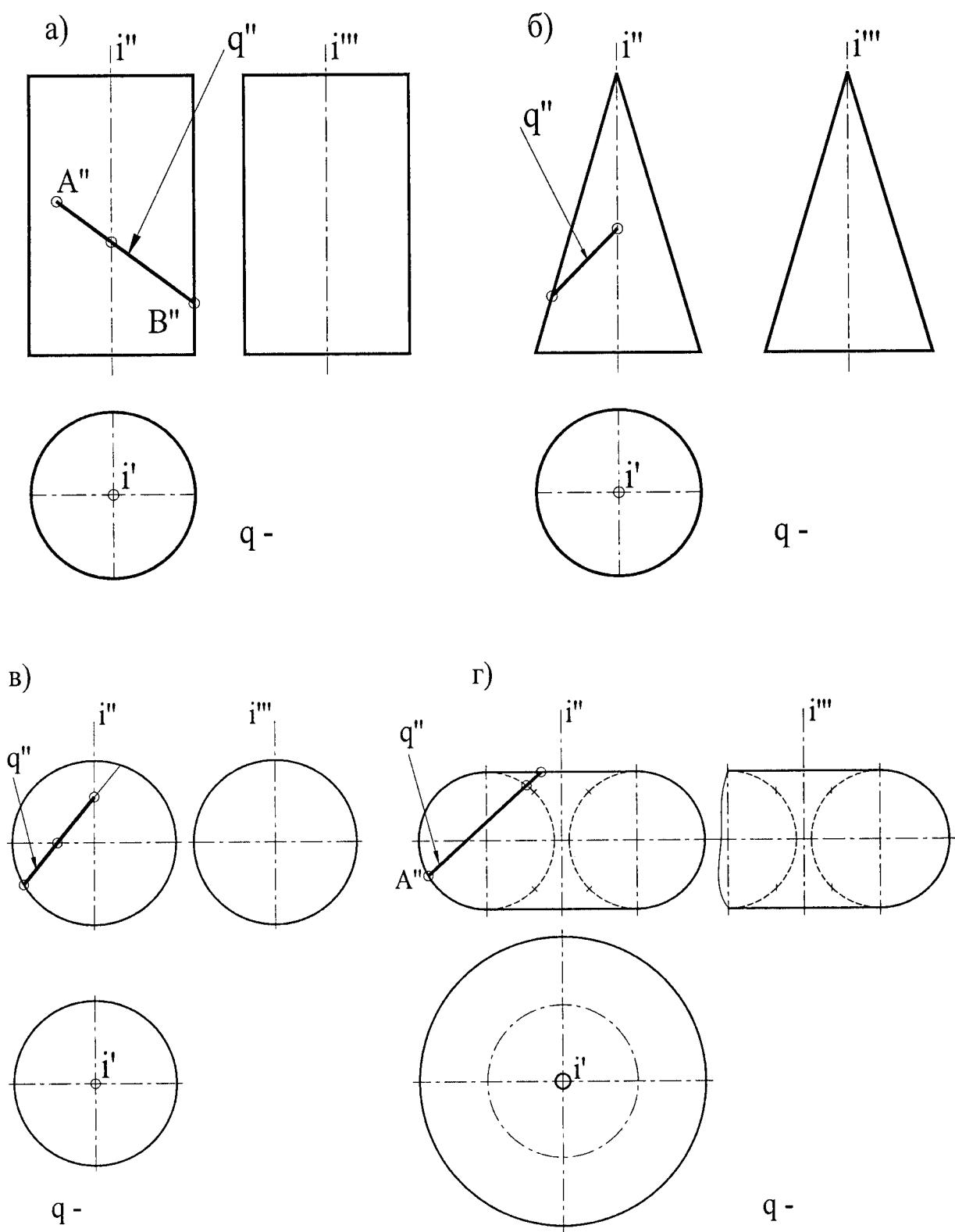


Рис. 7.8

7.3. Линии пересечения поверхности с плоскостью

На рисунке 7.9 задана поверхность прямого кругового цилиндра. Плоскость может пересекать эту **поверхность** по таким линиям:

- две прямые линии — ...
- окружность — ...
- эллипс — ...

Определить:

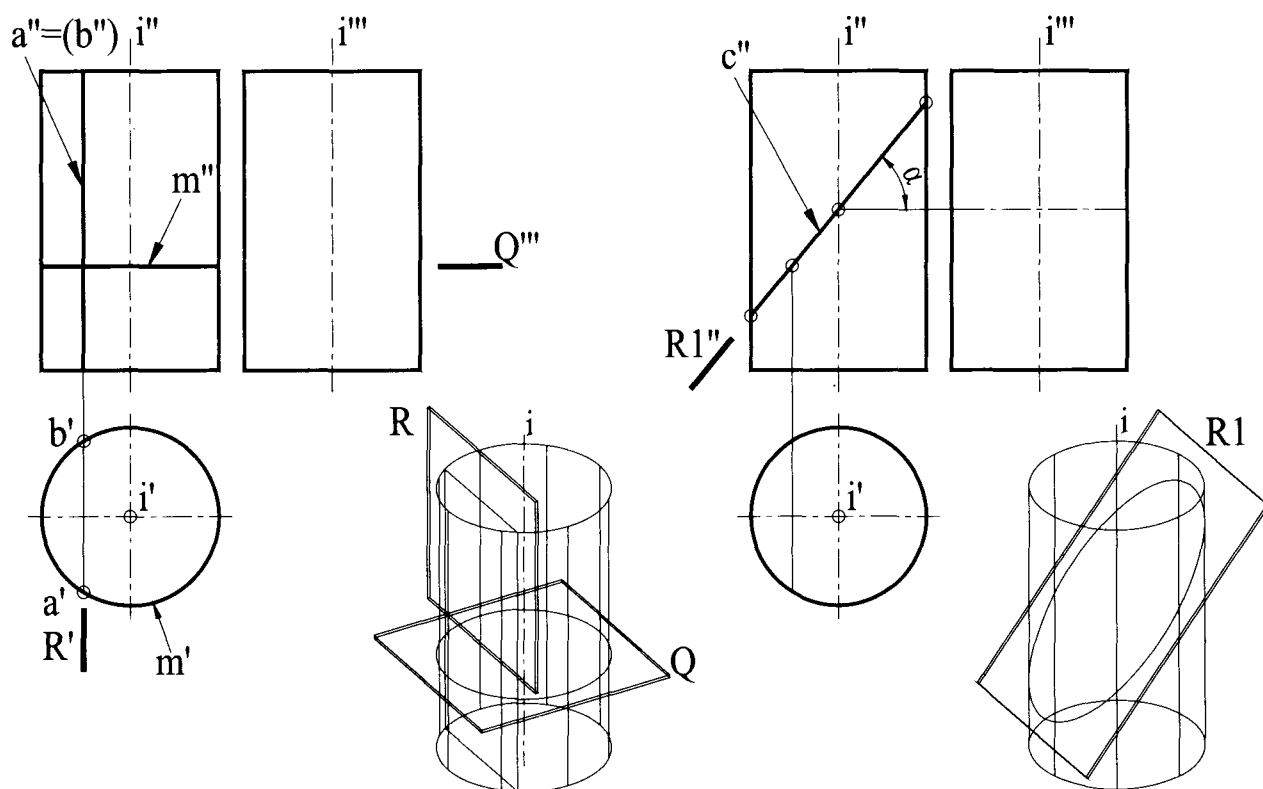


Рис. 7.9

На рисунках 7.10, 7.11 заданы поверхности прямого кругового конуса. Секущие плоскости могут пересекать эти **поверхности** по таким линиям:

- две распадающиеся прямые линии ...
- окружность ...
- эллипс ...
- парабола ...
- две ветви гиперболы ...

Определить:

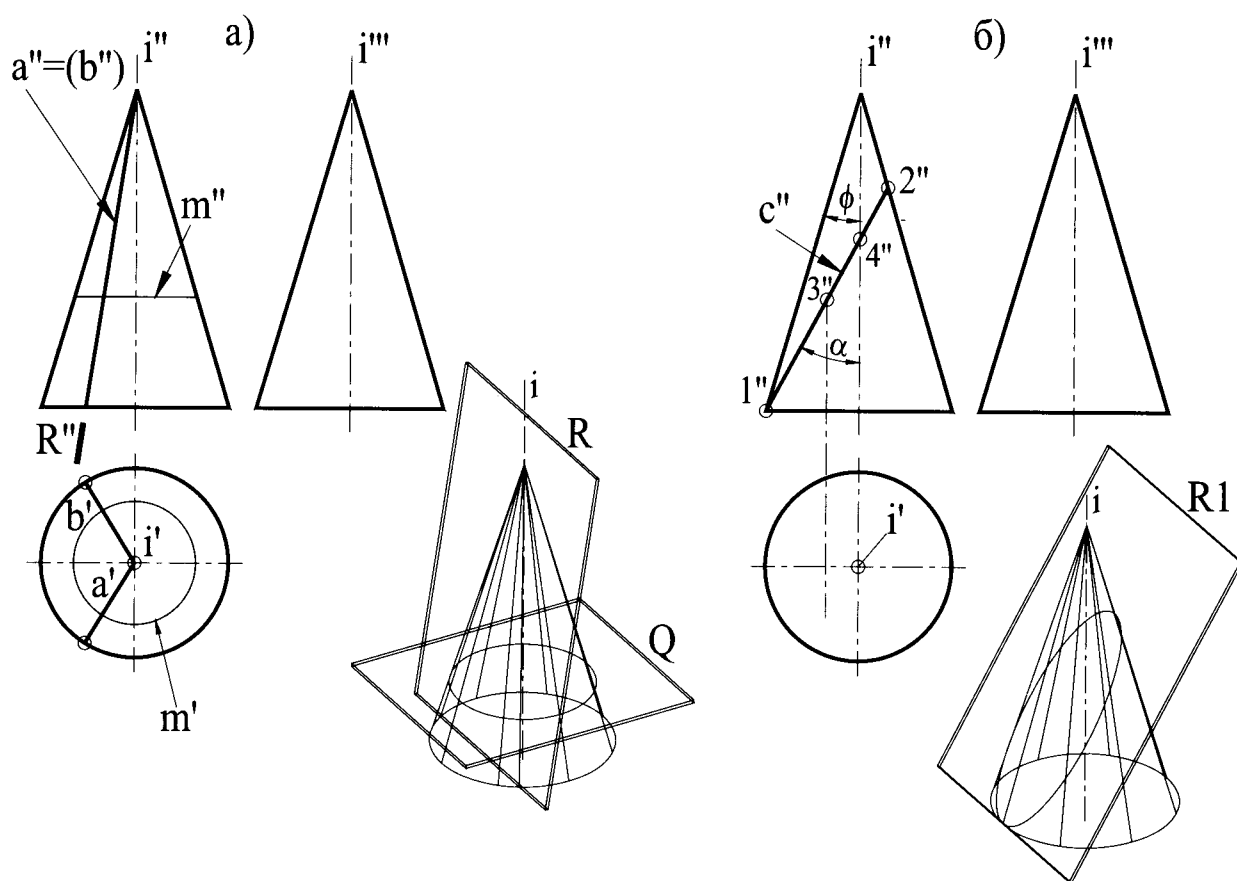


Рис. 7.10

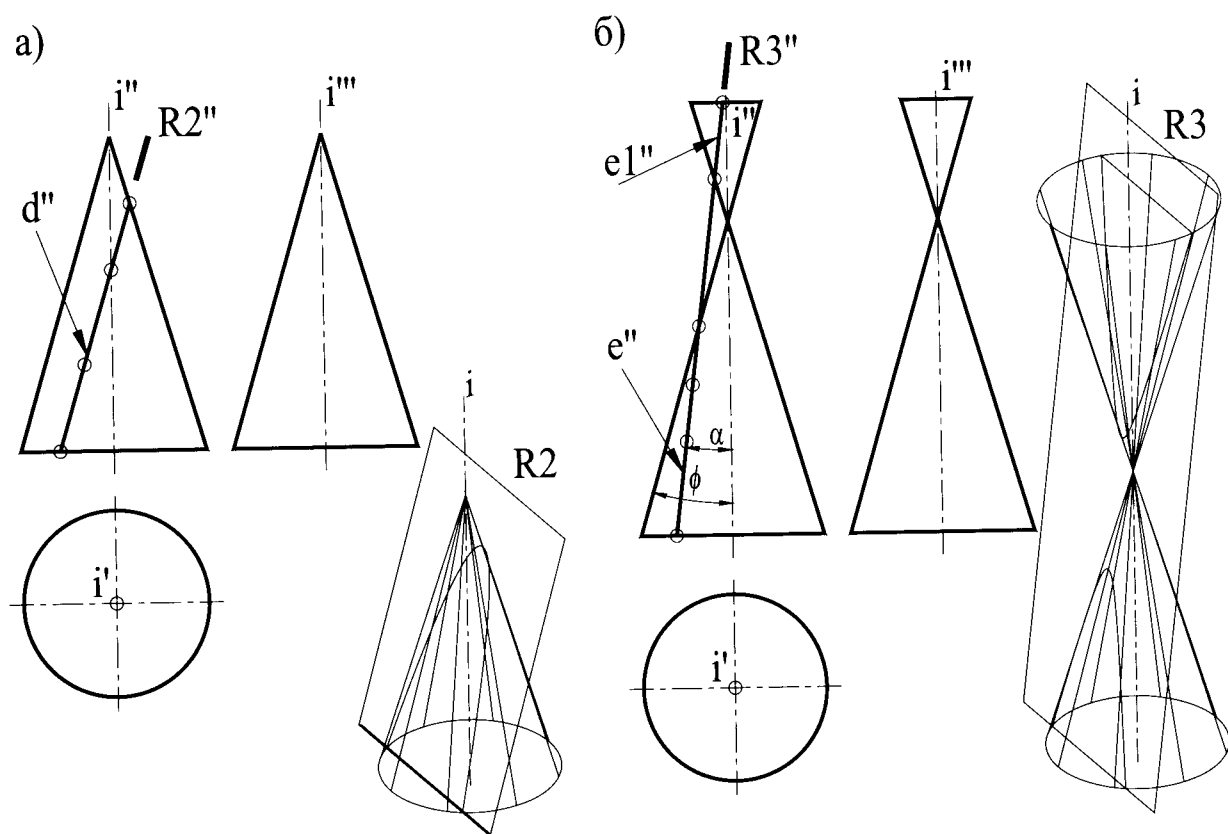


Рис. 7.11

На рисунке 7.12...

Дано:

Определить:

Порядок построения линии.

1.

2.

3.

4.

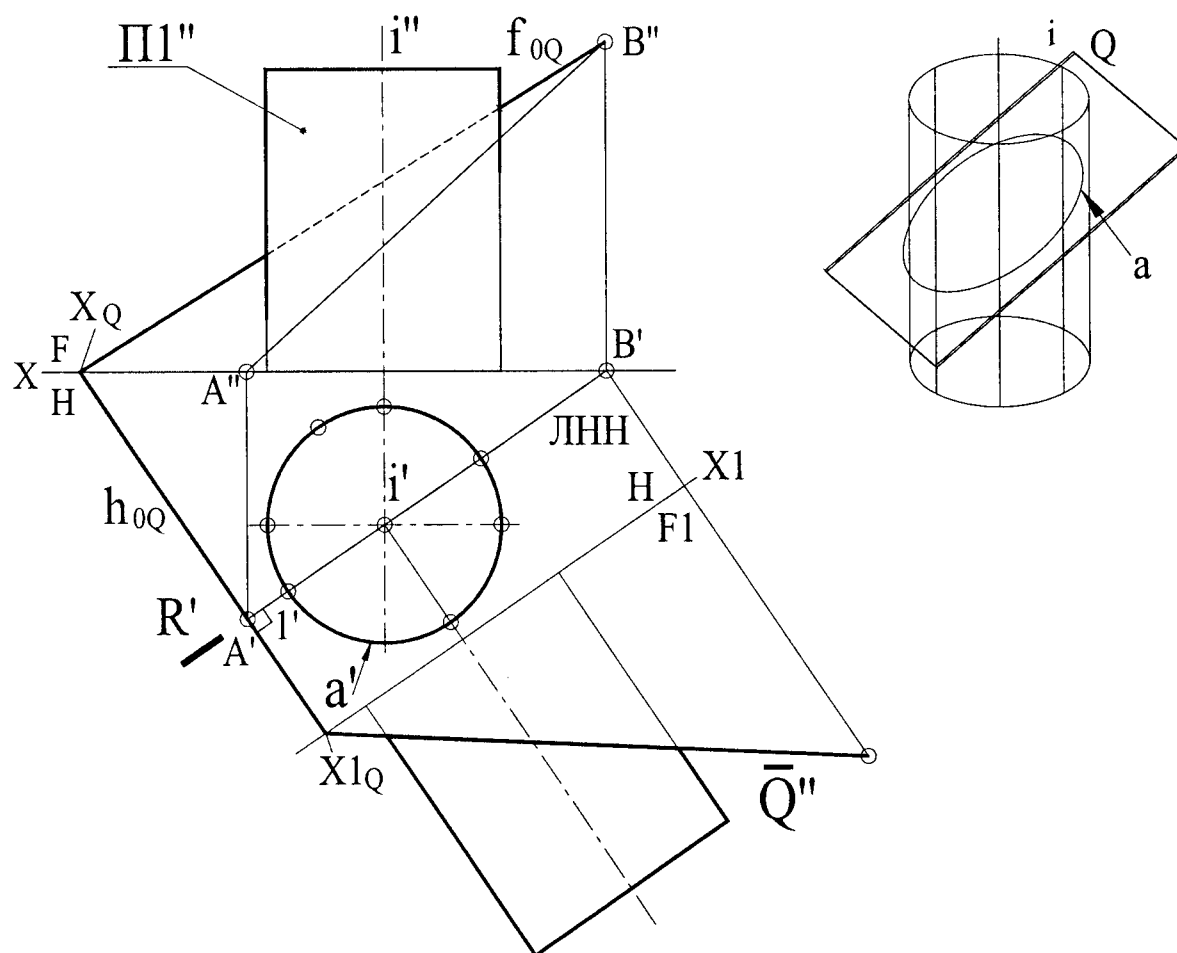


Рис. 7.12

На рисунке 7.13...

Дано:

Определить:

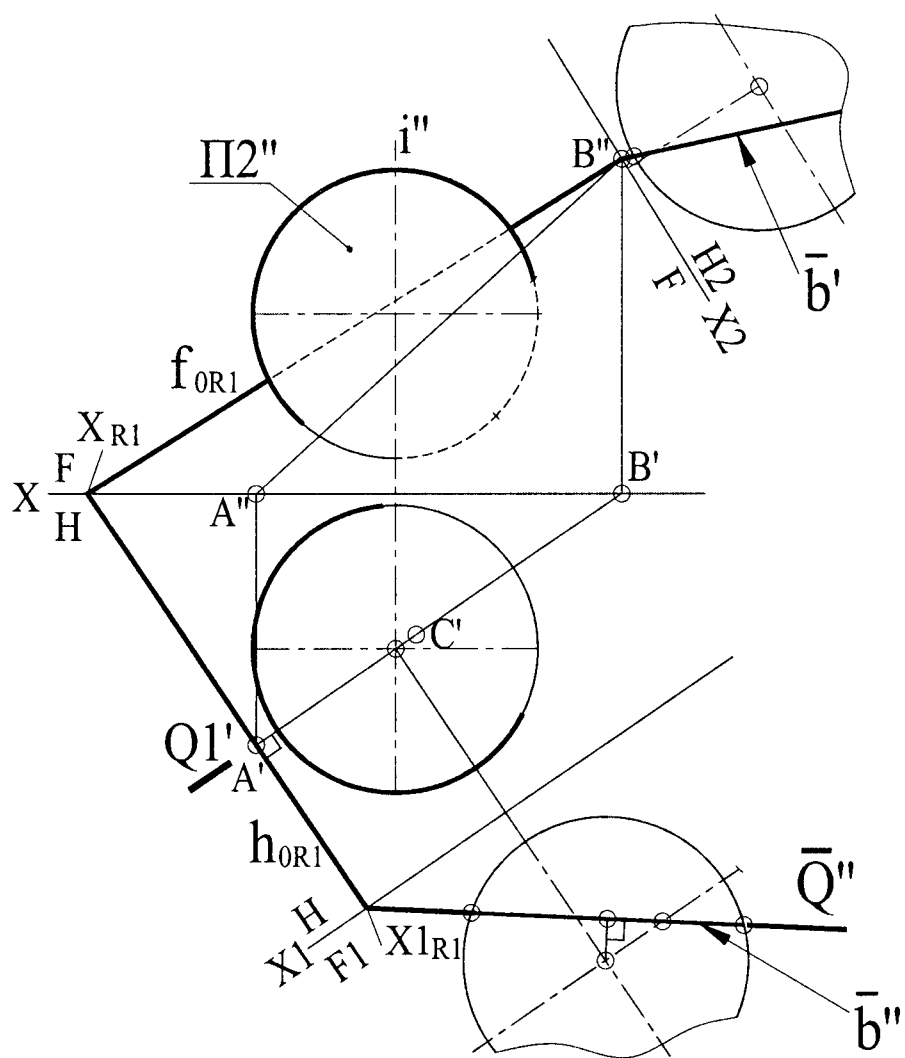


Рис. 7.13

На рисунках 7.14, 7.15 ...

Дано:

Определить

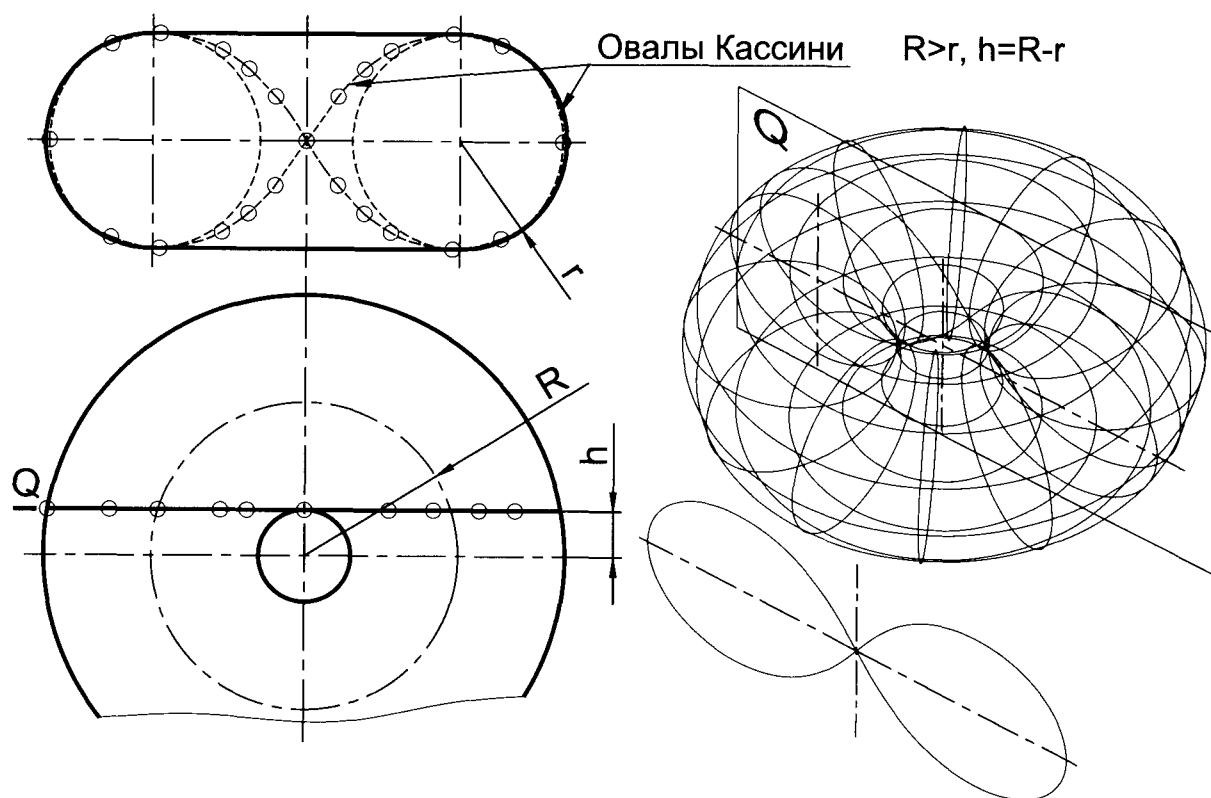


Рис. 7.14

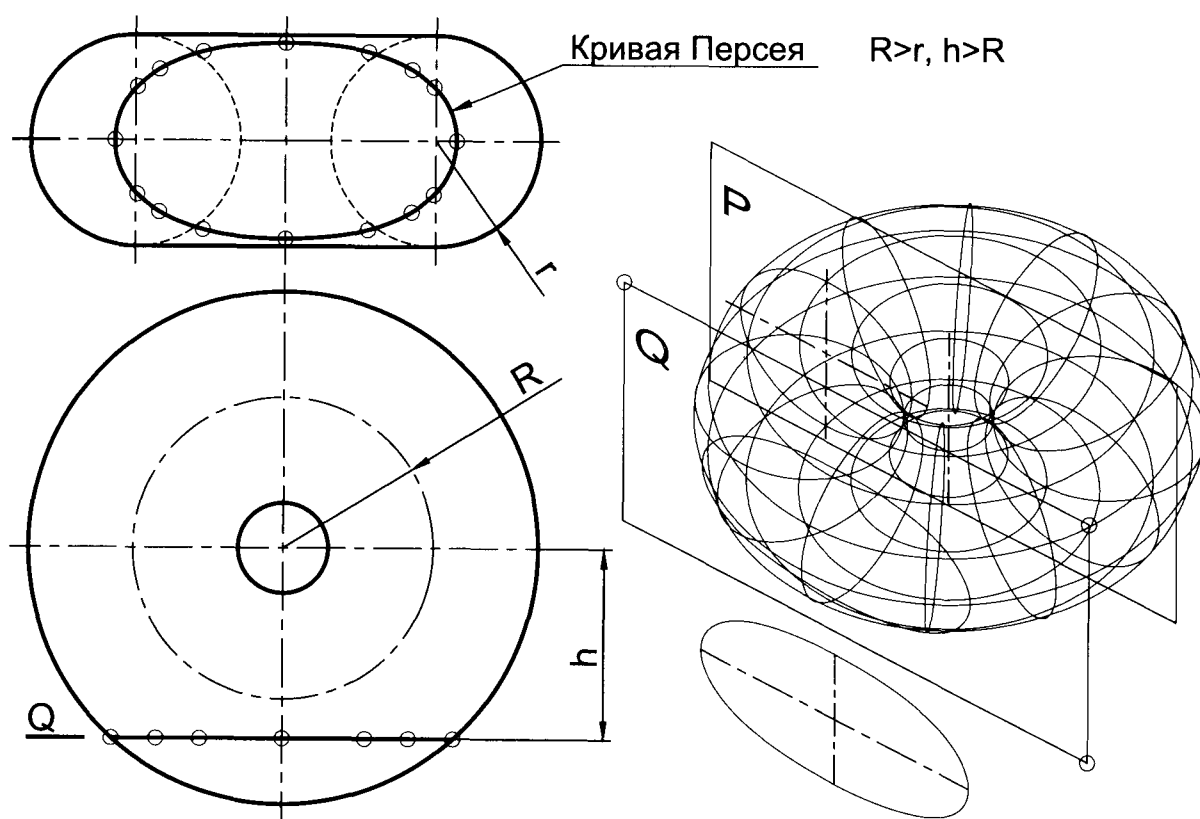


Рис. 7.15

7.4. Точки пересечения прямой линии с поверхностью вращения

На рисунке 7.16, а задана ...

Определить

На рисунке 7.16, б задана ...

Определить

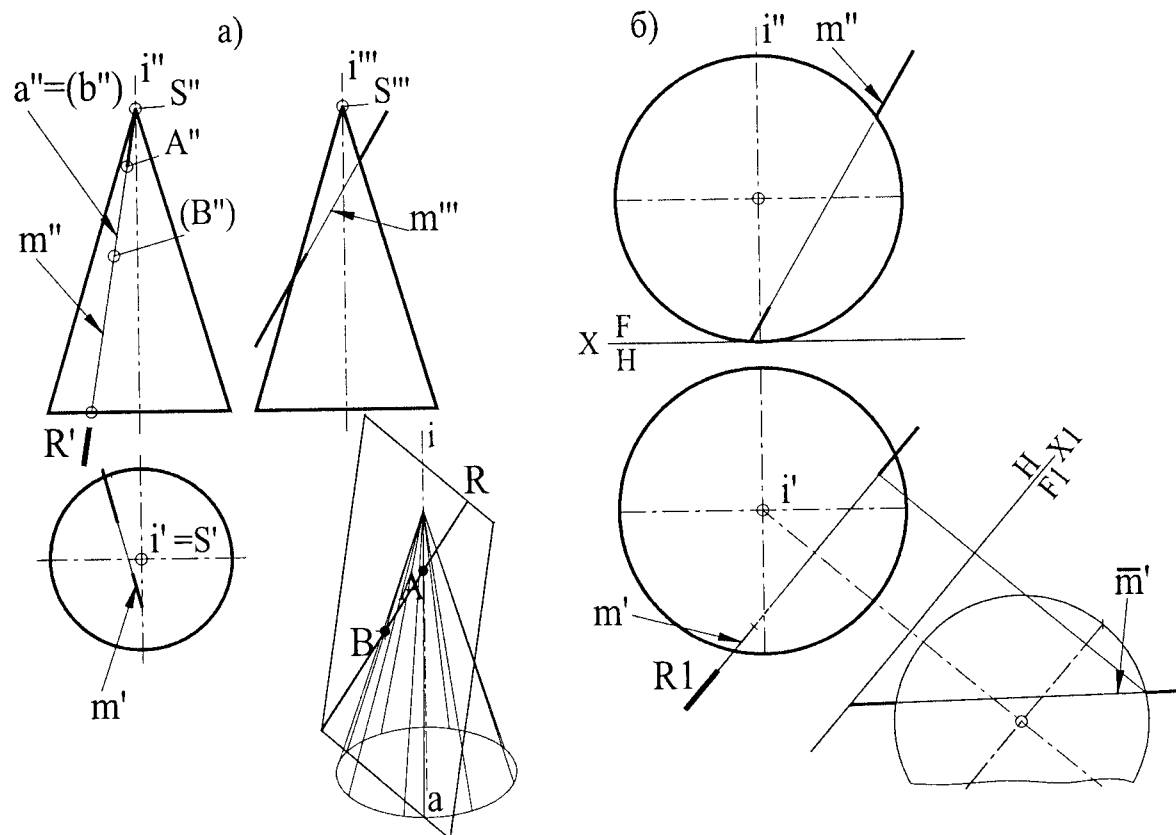
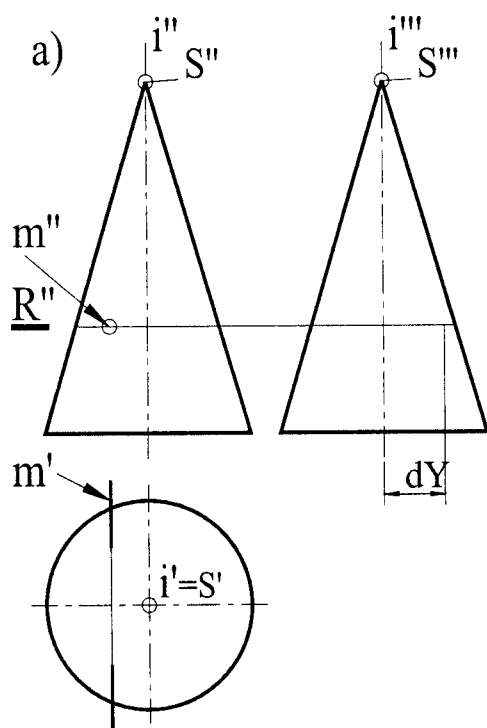


Рис. 7.16

На рисунке 7.17 задана...

Определить:



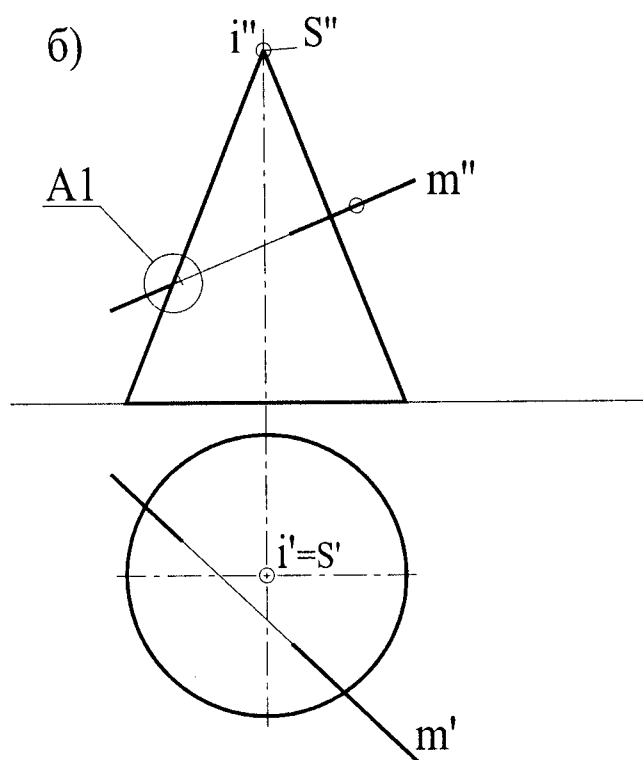
Алгоритм построения точек:

1) ...

2) ...

3) ...

4) ...



A1(увеличено)

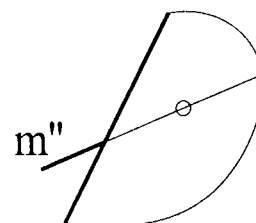


Рис. 7.17

На рисунке 7.18...

Дано:

Определить

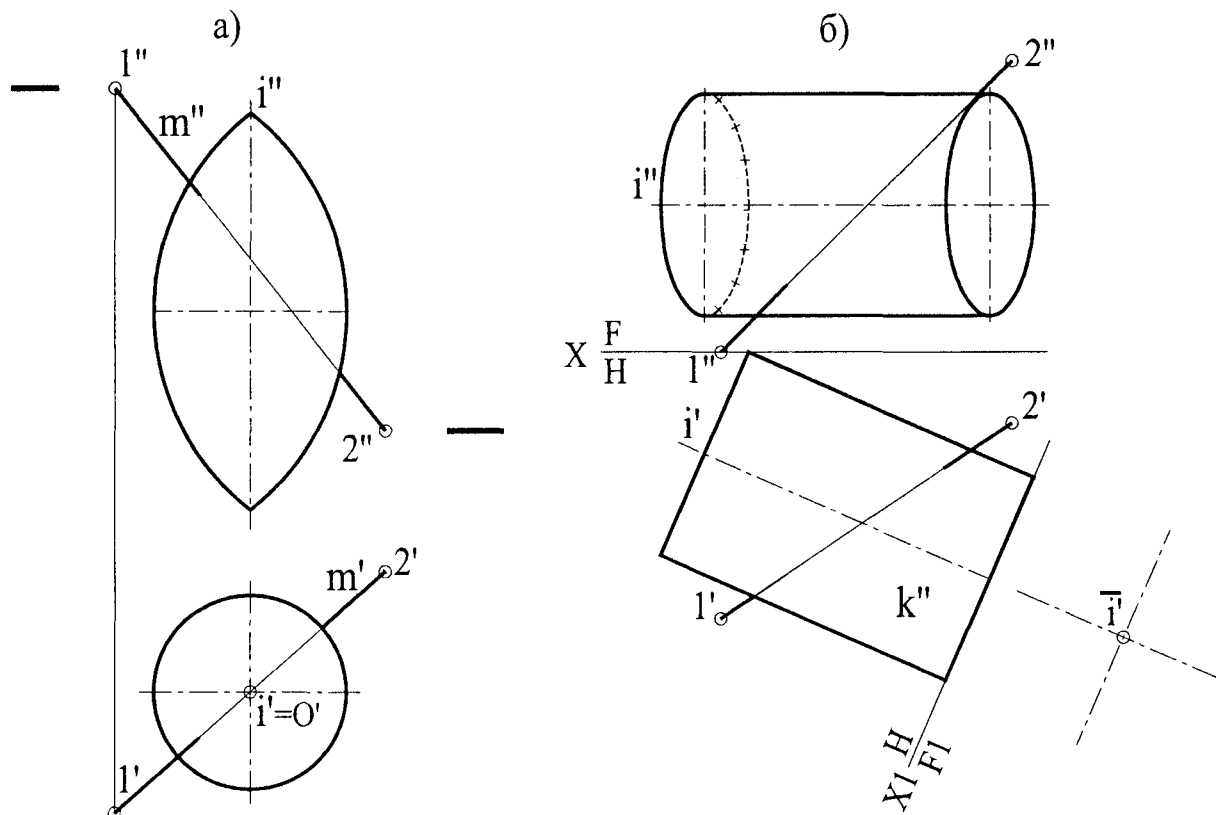


Рис. 7.18

7.5. Нормаль и касательная прямая к поверхности.

Плоскость, касательная к поверхности

Нормаль к поверхности в данной точке — прямая линия, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания (поверхности и плоскости)

Плоскость, касательная к поверхности

Плоскостью, касательной к поверхности в заданной точке, называют плоскость, образованную касательными, проведенными к любому кривым, принадлежащим поверхности и проходящим через эту точку.

На рисунке 7.19 а...

Дано:

Определить

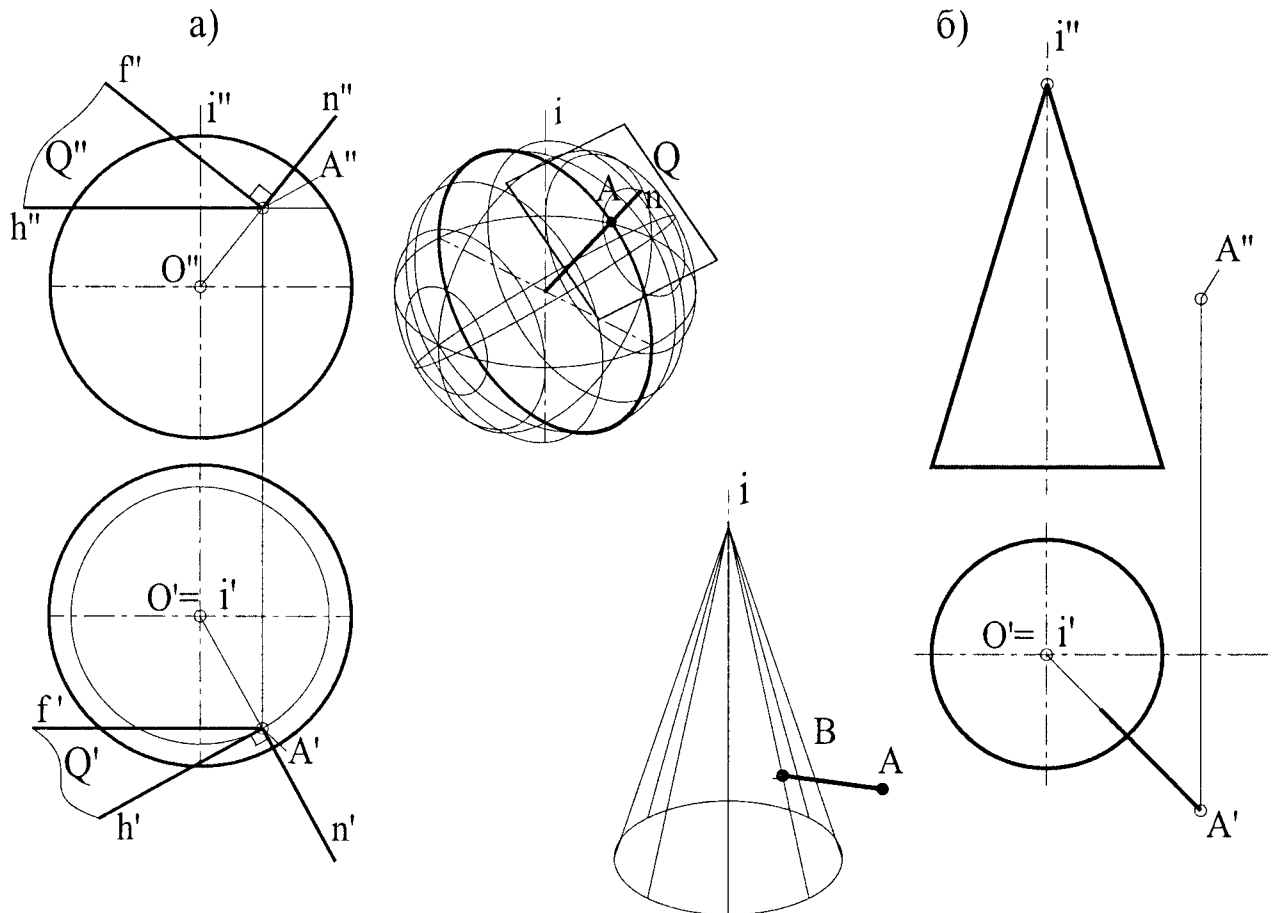


Рис. 7.19

Нормаль и касательная прямая к поверхности

Касательной прямой линией к поверхности называют прямую линию, касательную к какой-либо кривой, принадлежащей поверхности.

На рисунке 7.19 б...

Дано:

Определить:

Расстояние от заданной точки до поверхности вращения

На рисунке 7.20...

Дано:

Определить:

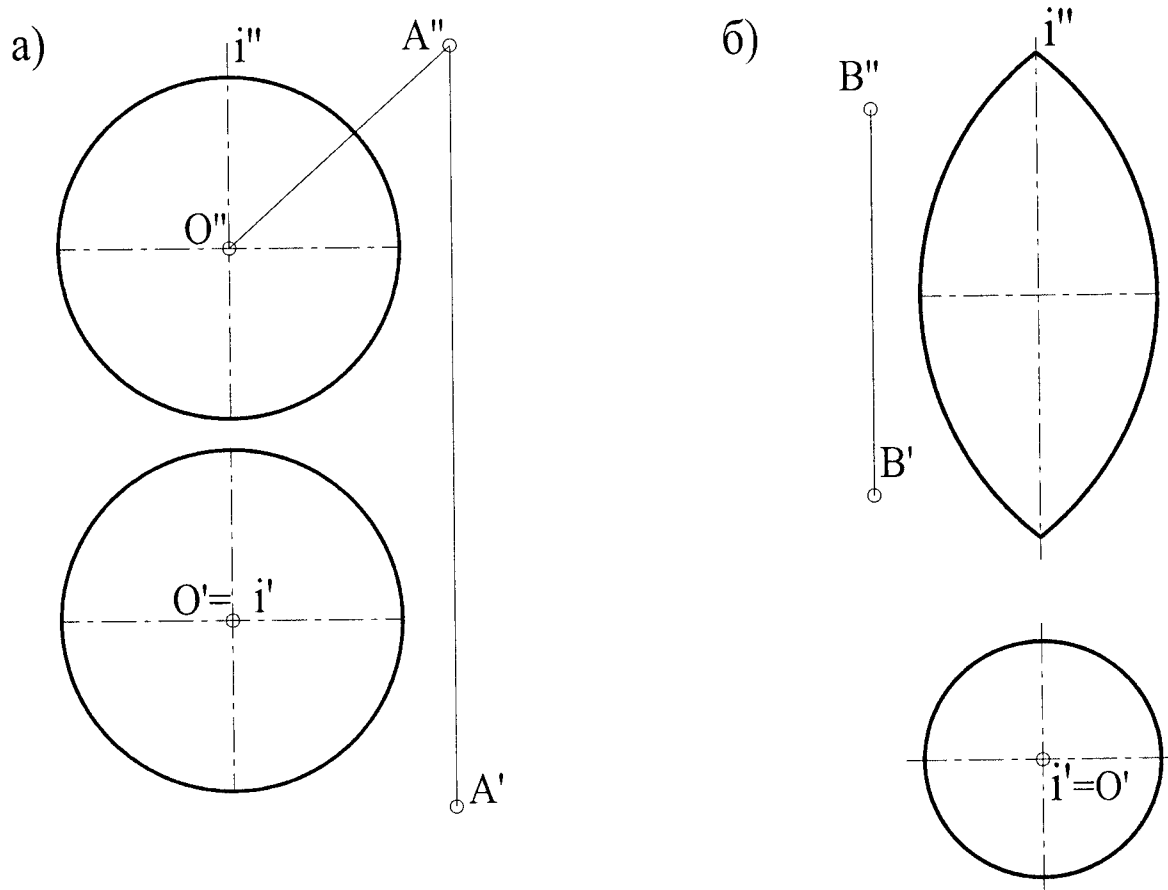


Рис. 7.20

8. ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ

Результатом пересечения двух поверхностей является линия (линии), точки которой принадлежат каждой из пересекающихся поверхностей. Поэтому построение линии пересечения двух поверхностей **П1** и **П2** сводится к нахождению общих точек, принадлежащих как множеству, составляющему поверхность **П1**, так и другому множеству точек, входящих в состав поверхности **П2**.

Порядок (общий алгоритм) построения линии пересечения двух поверхностей:

1.

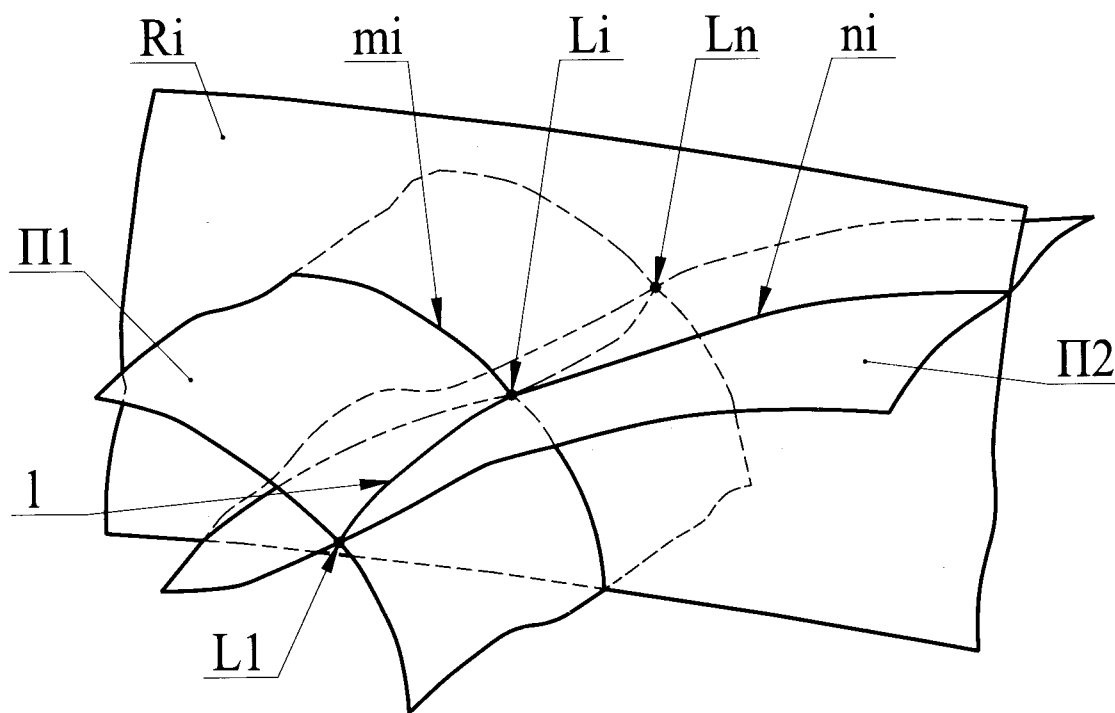
2.

3.

4.

Общий алгоритм построения линии пересечения I поверхностей двух геометрических тел $\Pi 1$ и $\Pi 2$ в символьном виде можно записать так (рис. 8.1):

$$I = (L1 \cup L2 \cup L3 \dots \cup Ln); [Li = (Ri \cap \Pi 1) \cap (Ri \cap \Pi 2)]$$



$$I = (L1 \cup L2 \cup L3 \dots \cup Ln); Li = (Ri \cap \Pi 1) \cap (Ri \cap \Pi 2);$$

Рис. 8.1

Линии пересечения поверхностей геометрических тел. Частный случай (рис. 8.2)

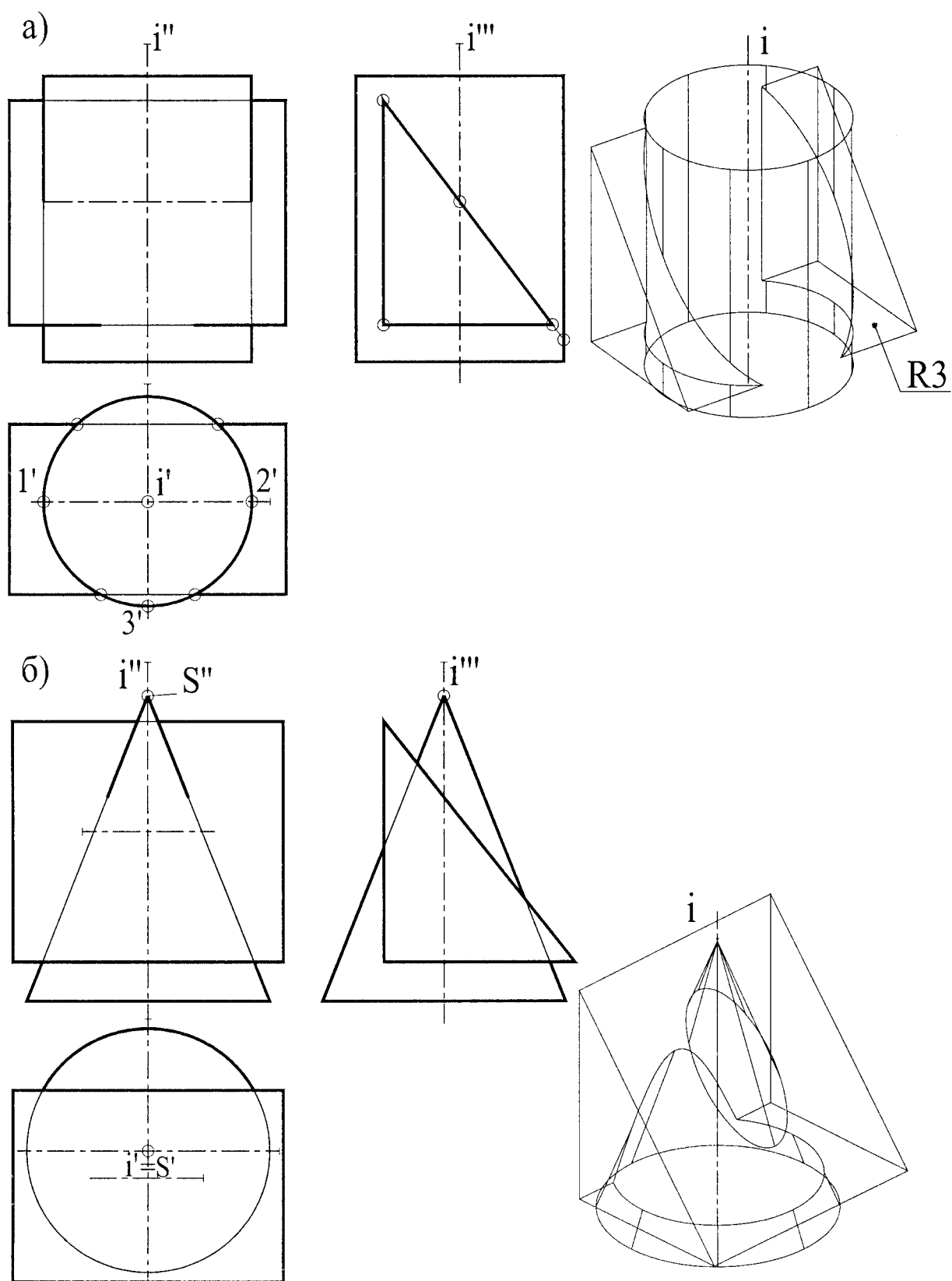


Рис. 8.2

Линии пересечения поверхностей геометрических тел. Общий случай. Метод вспомогательных «секущих» поверхностей

На рисунке 8.3 а...

Дано:

Определить:

На рисунке 8.3 б...

Дано:

Определить:

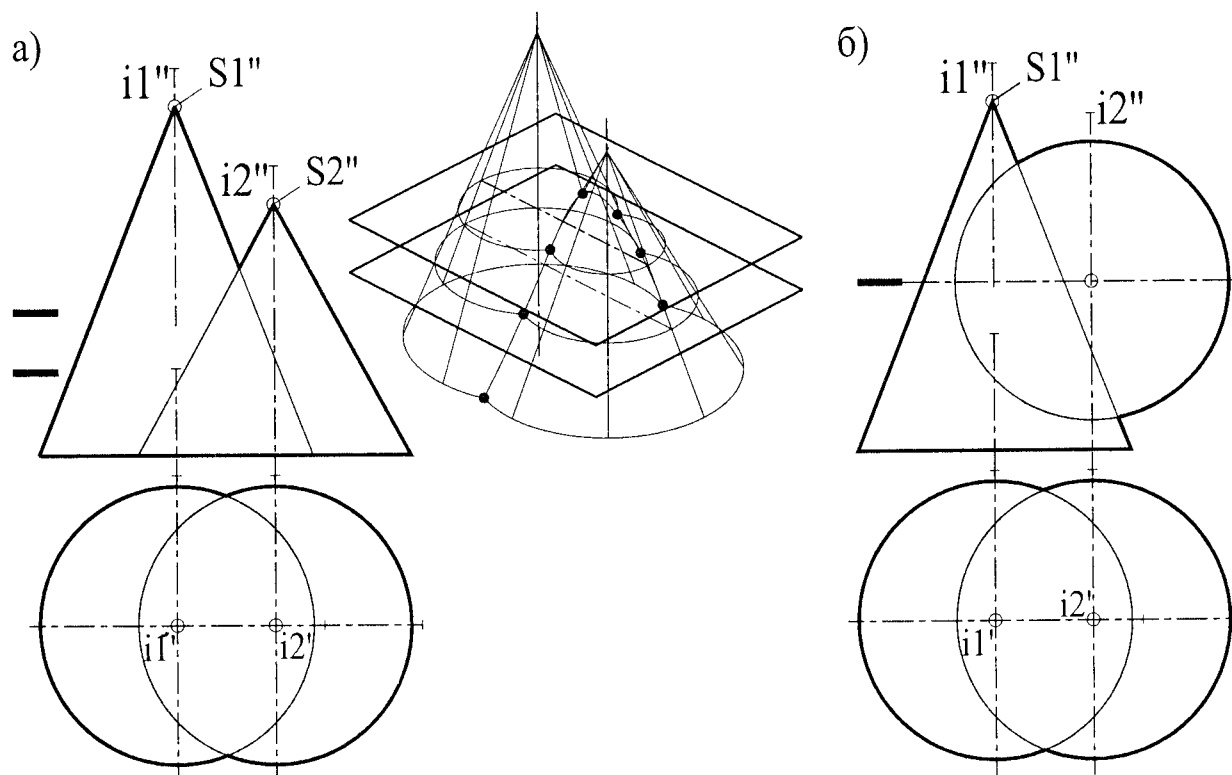


Рис. 8.3

Линии пересечения соосных поверхностей вращения

На рисунке 8.4 (а) заданы соосные (оси, которых совпадают) поверхности вращения. Такие поверхности пересекаются по окружности.

На рисунке 8.4 б...

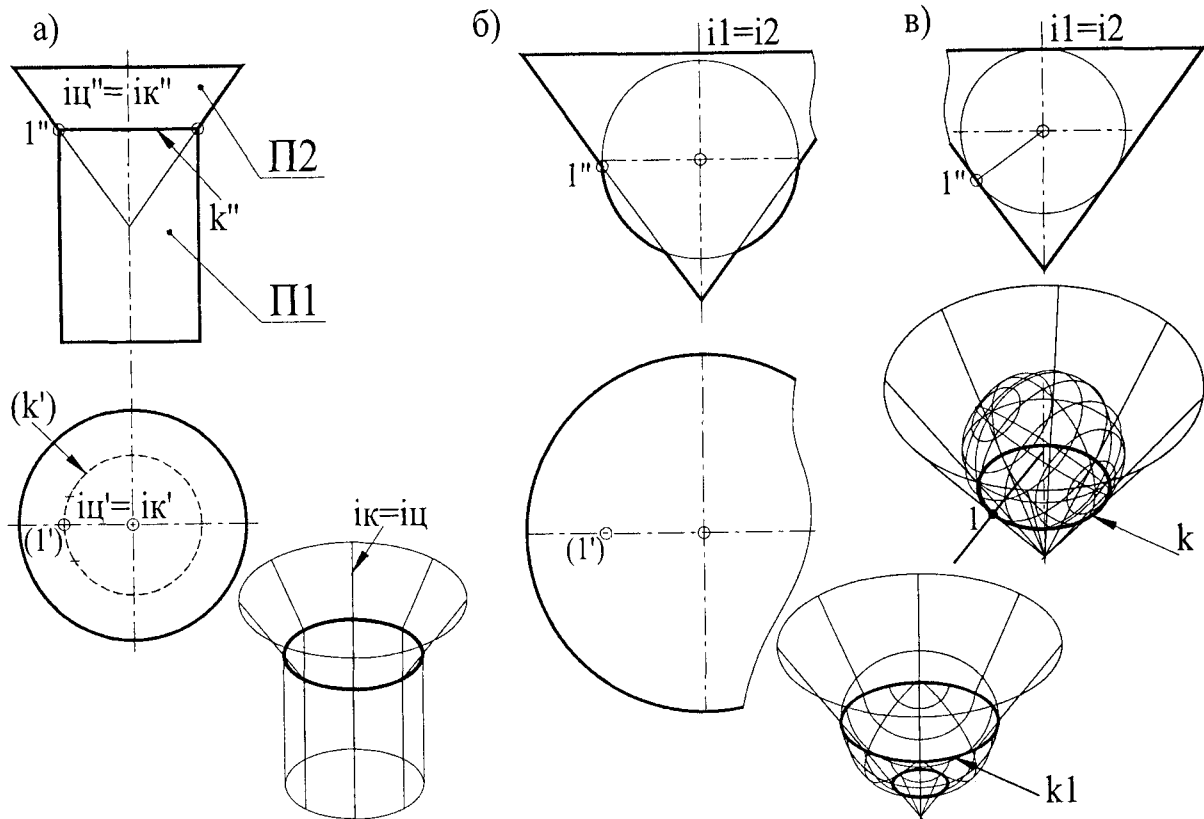


Рис. 8.4

Линии пересечения поверхностей геометрических тел. Метод вспомогательных «секущих» сфер (с постоянным центром)

Задачу, заданную на рисунке 8.3 (б) и рисунке 8.5, можно решить и другим методом — методом вспомогательных «секущих» сфер.

Поверхность сферы в качестве «посредника» можно применить при выполнении трех условий:

- 1.
- 2.
- 3.

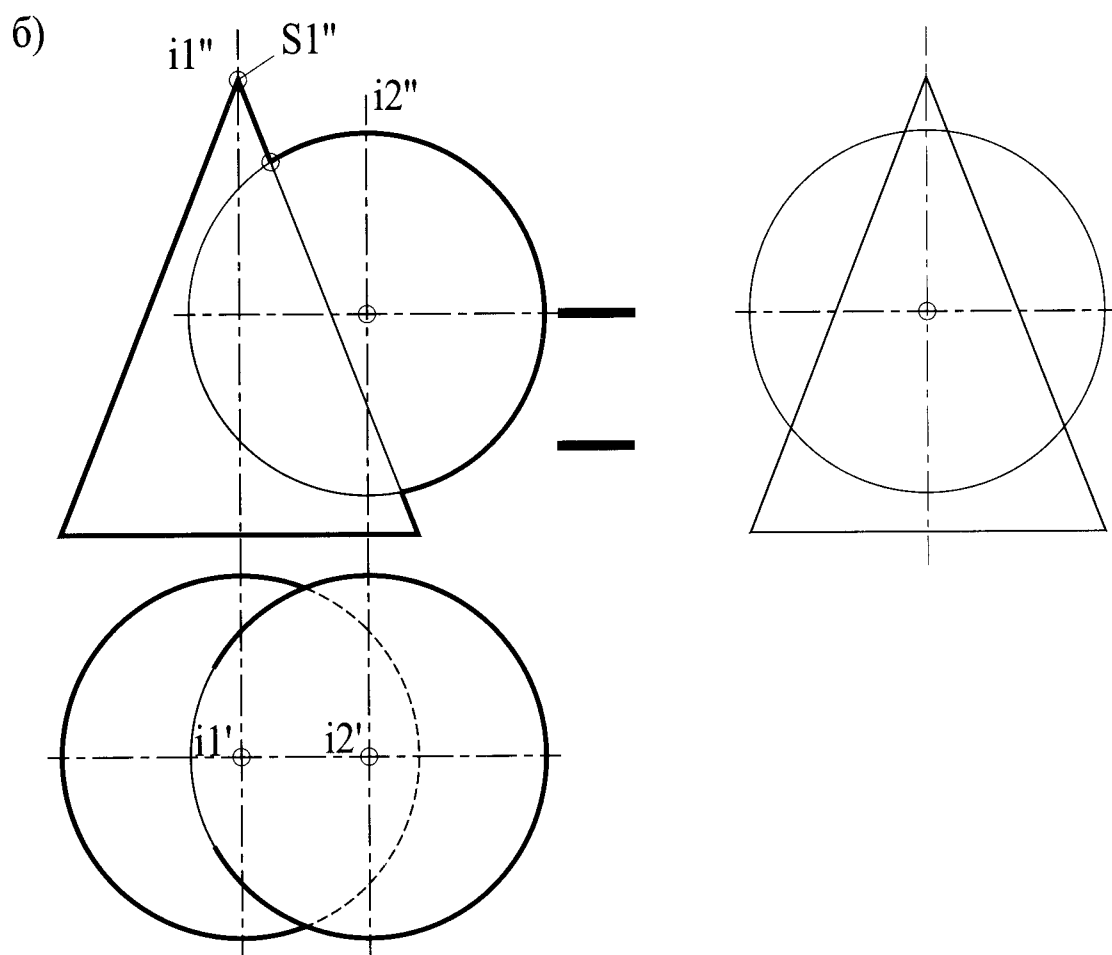
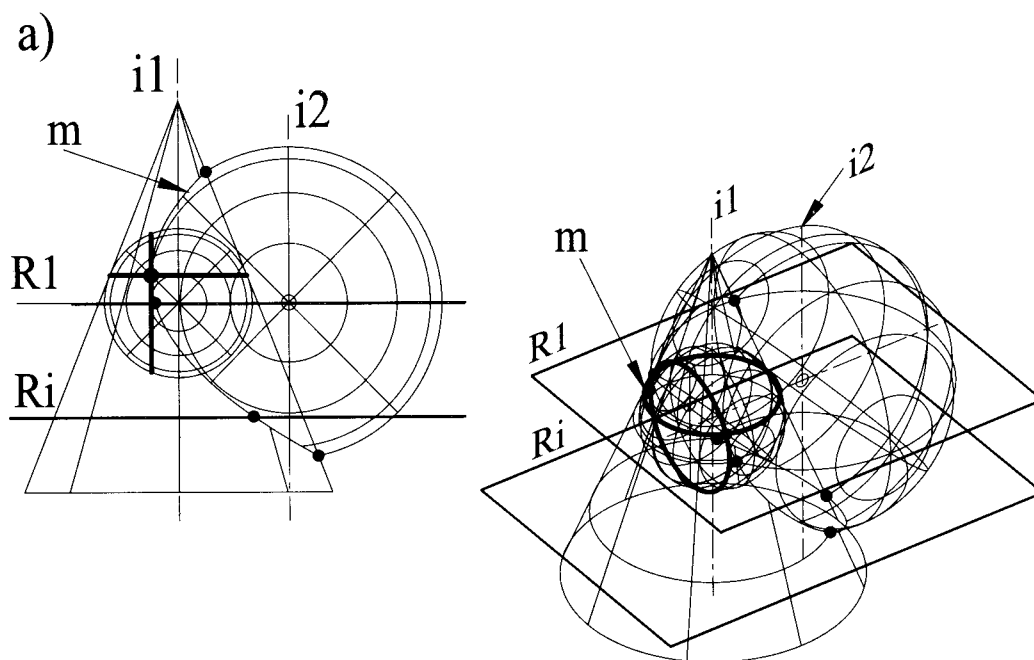


Рис. 8.5

На рисунке 8.5...

Дано:

Определить:

Для решения задачи, данной на рисунке 8.6, можно применить только метод вспомогательных «секущих» сфер (с постоянным центром).

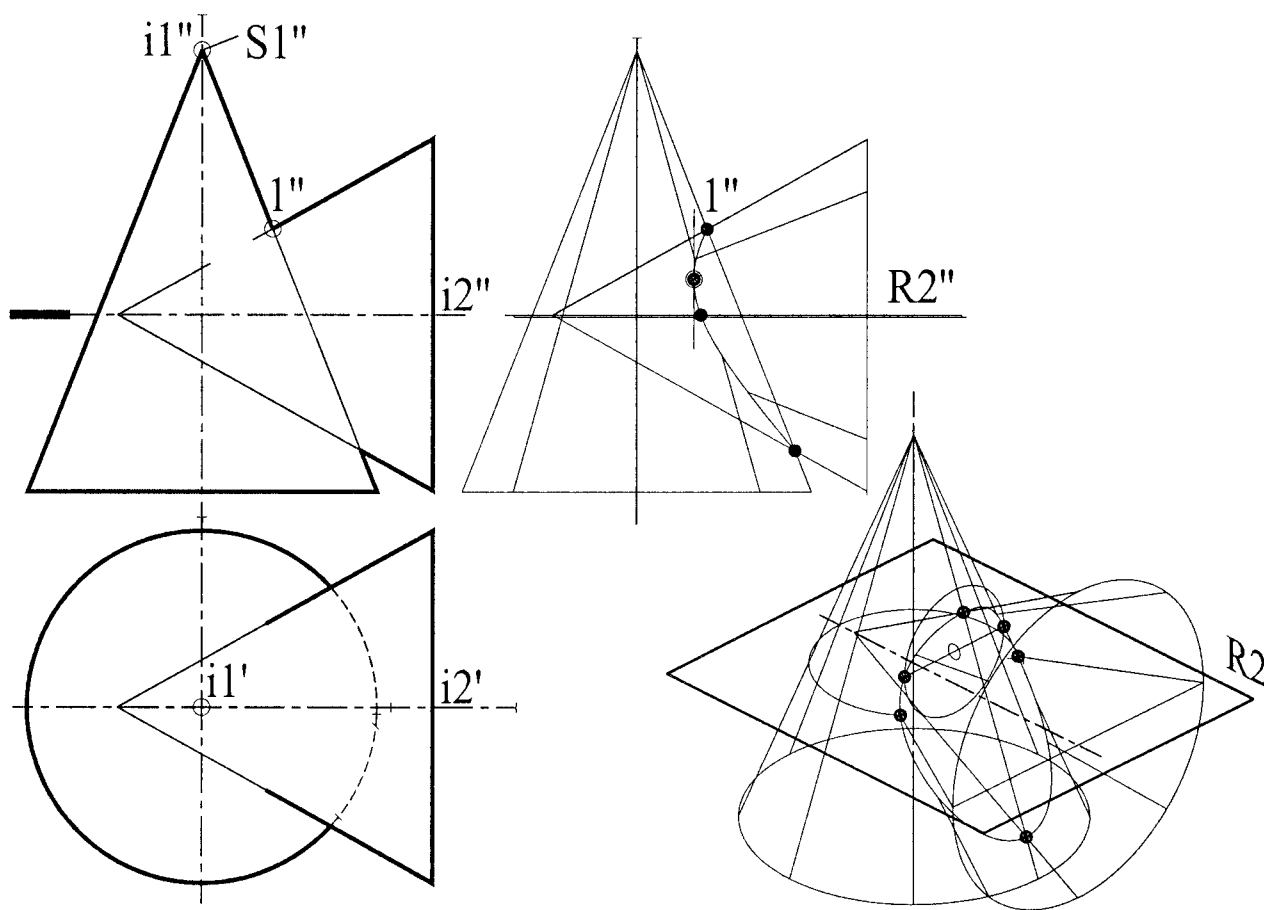


Рис. 8.6

На рисунке 8.6...

Дано:

Определить:

Линии пересечения двух поверхностей вращения, описанных (вписанных) около одной сферы

Теорема о двойном прикосновении

Если две поверхности второго порядка имеют две точки касания, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания (рис. 8.7).

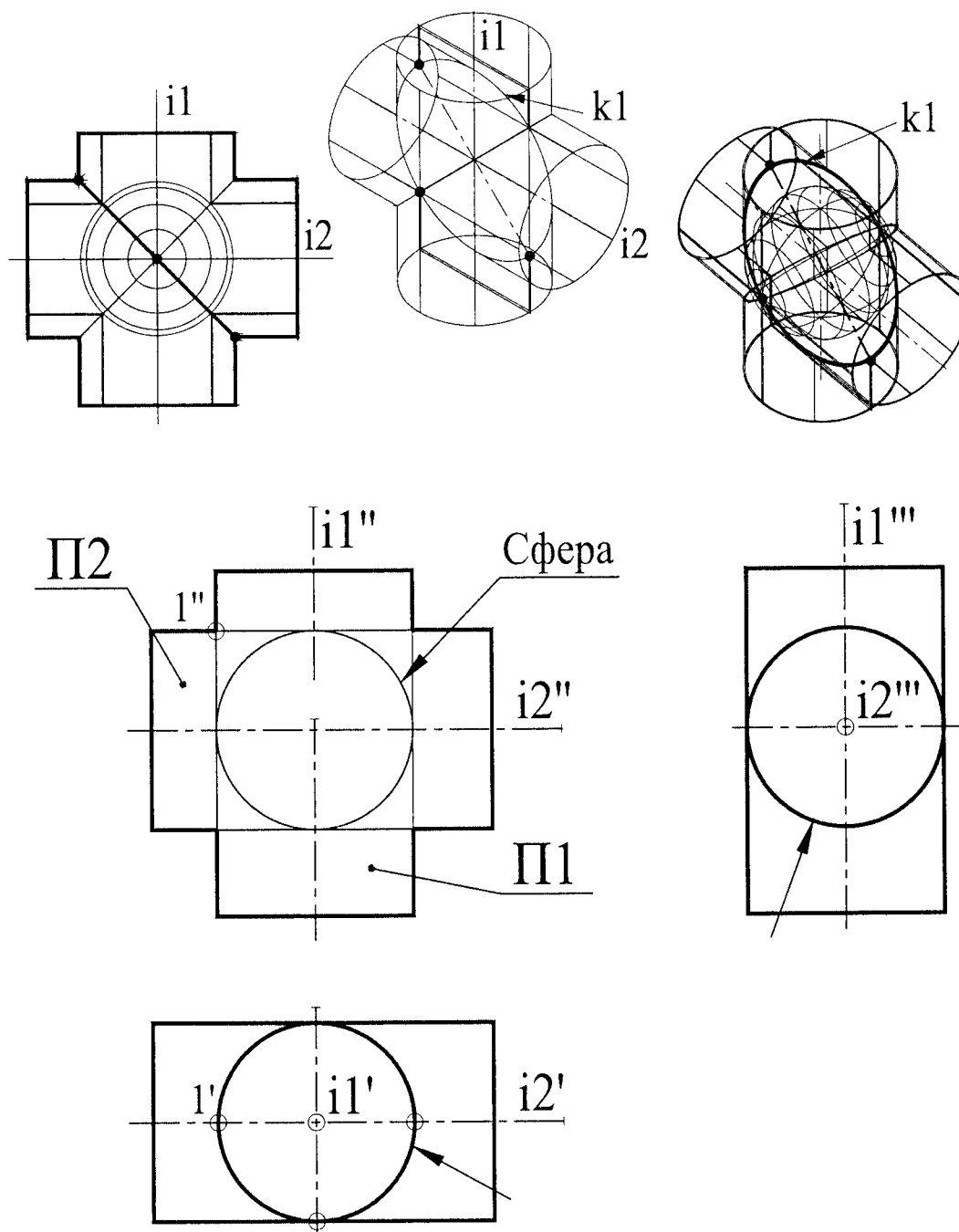


Рис. 8.7

Определить:

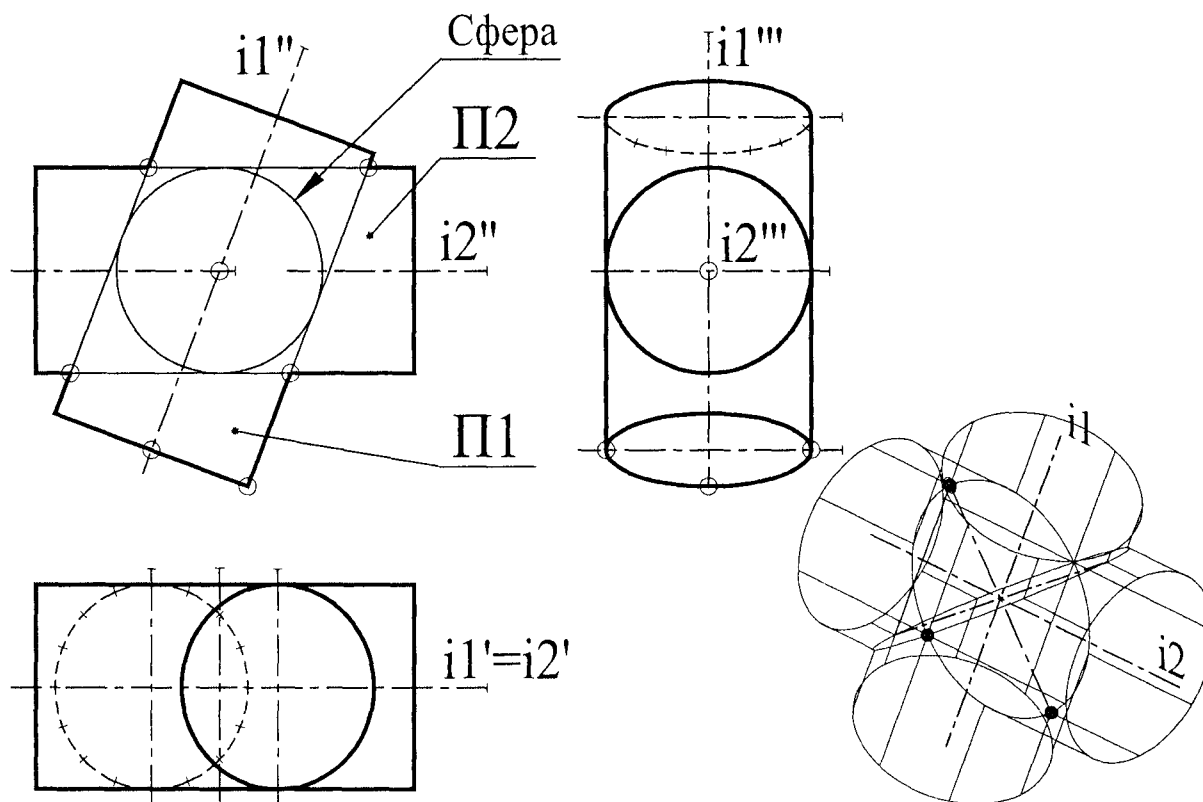


Рис. 8.8

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две линии второго порядка. Плоскости полученных линий проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

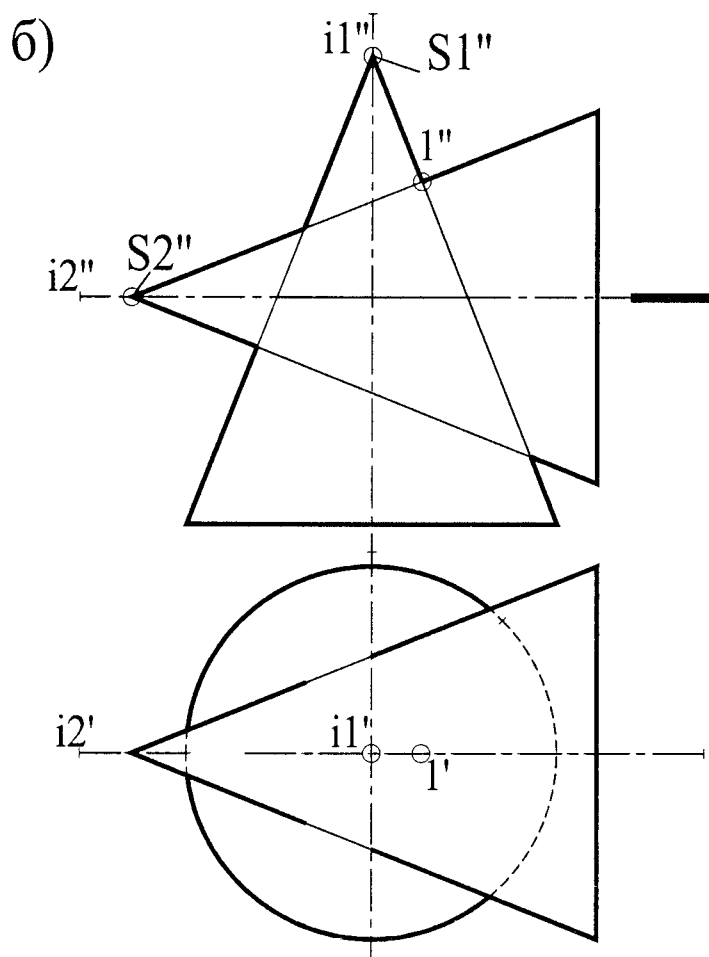
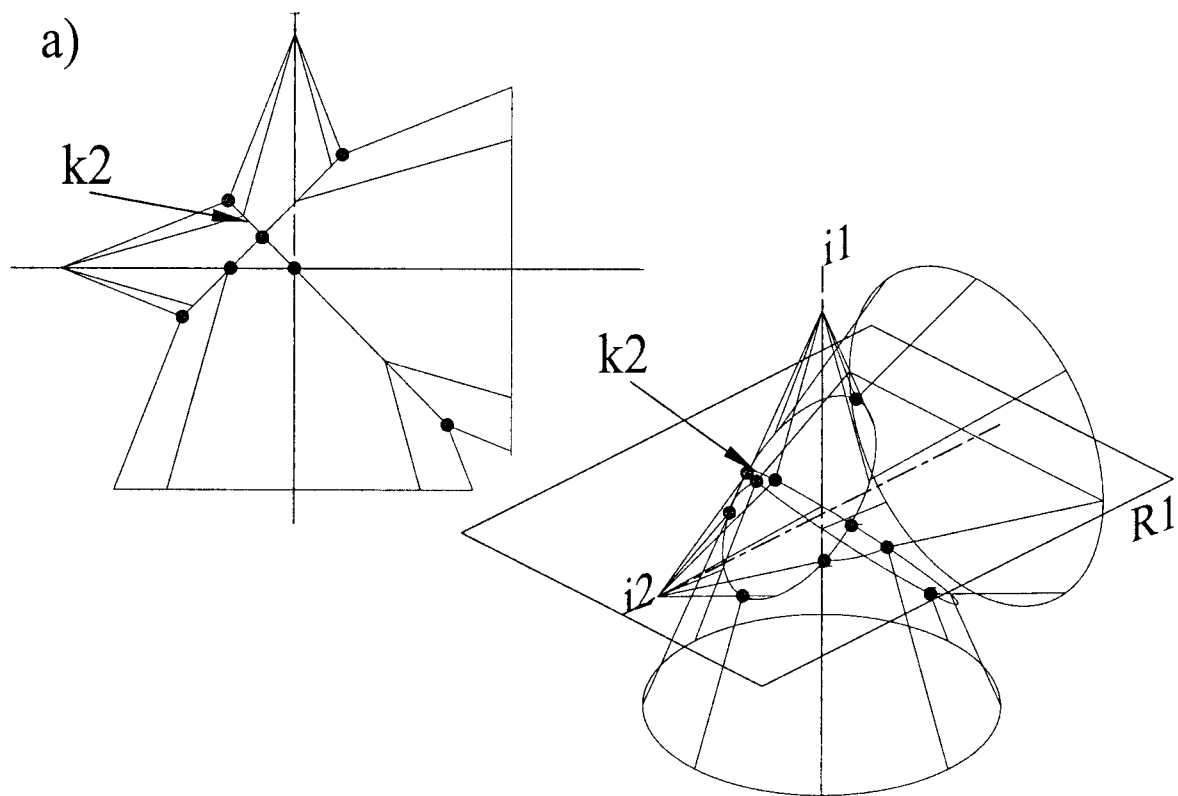


Рис. 8.9

На рисунках 8.8, 8.9...

Дано:

Определить:

Линии пересечения поверхностей геометрических тел. Метод вспомогательных «секущих» сфер (с переменным центром)

Любую окружность можно считать линией пересечения сферы и плоскости. Окружность можно также получить при пересечении сферы и кольцевого тора при условии: центр сферы расположен на перпендикуляре n к плоскости R_j ($i2 \subset R_j$), который касается криволинейной оси тора m в точке O (рис.8.10).

На рисунках 8.10, 8.11 ...

Дано:

Определить:

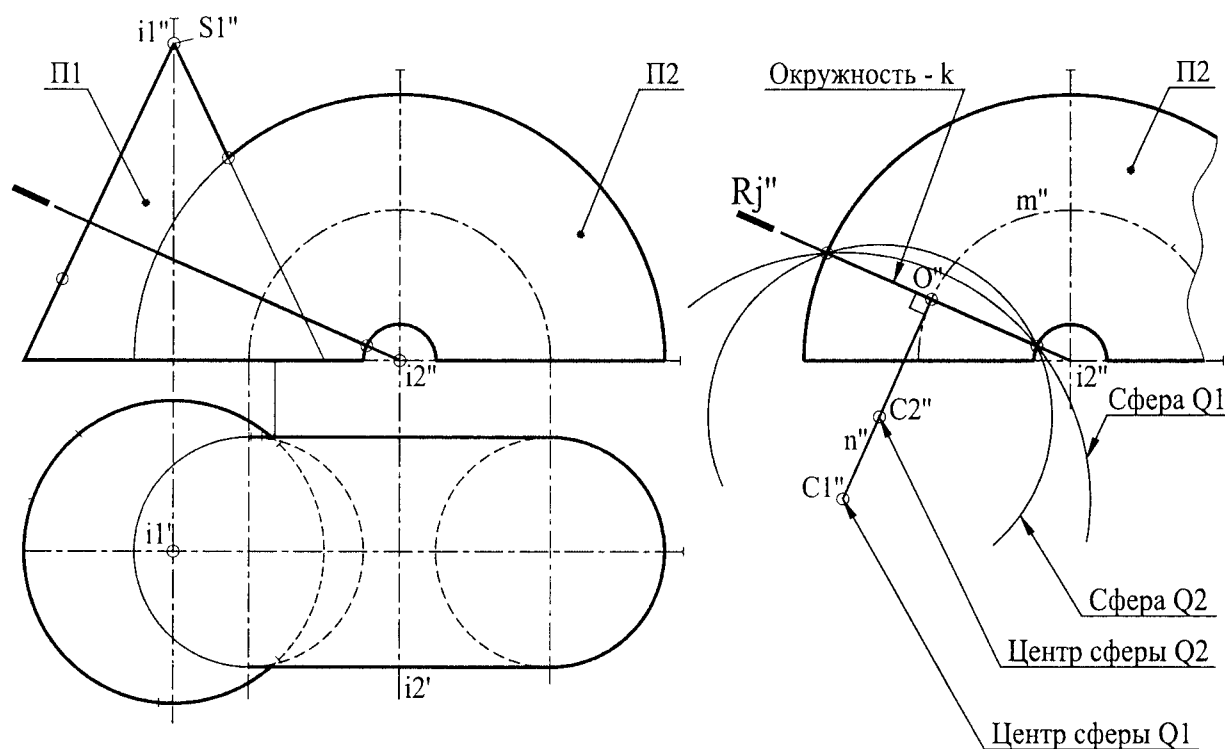


Рис. 8.10

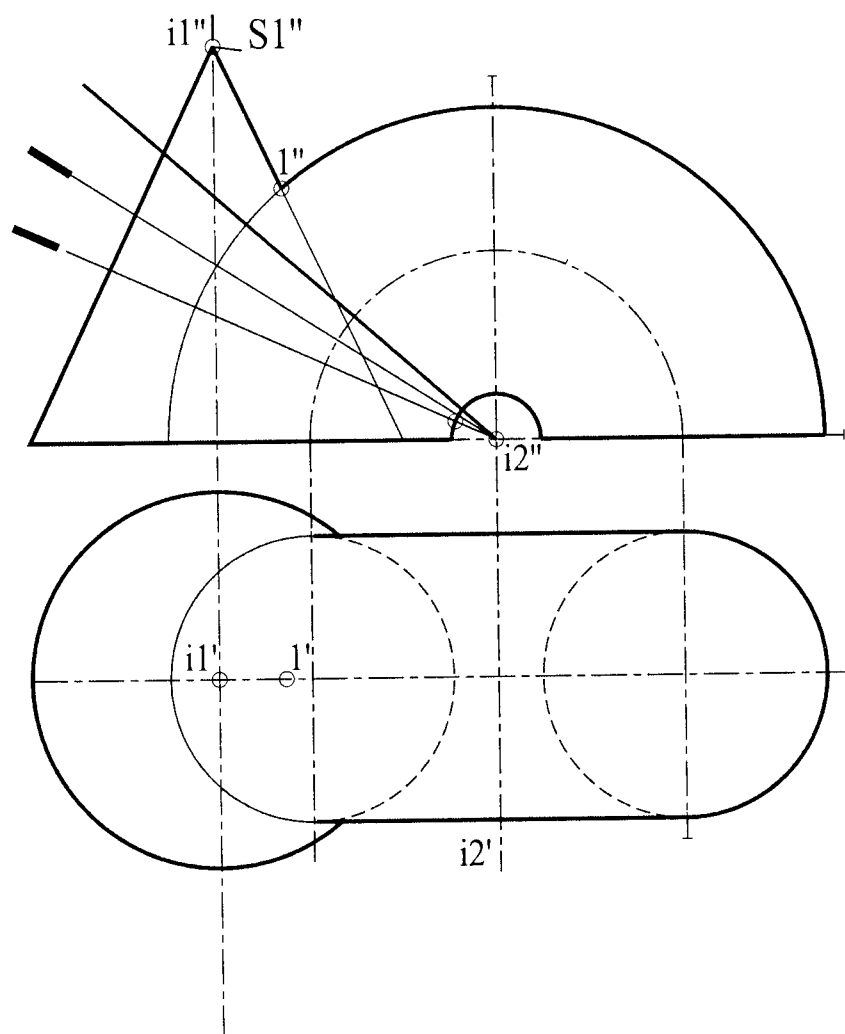
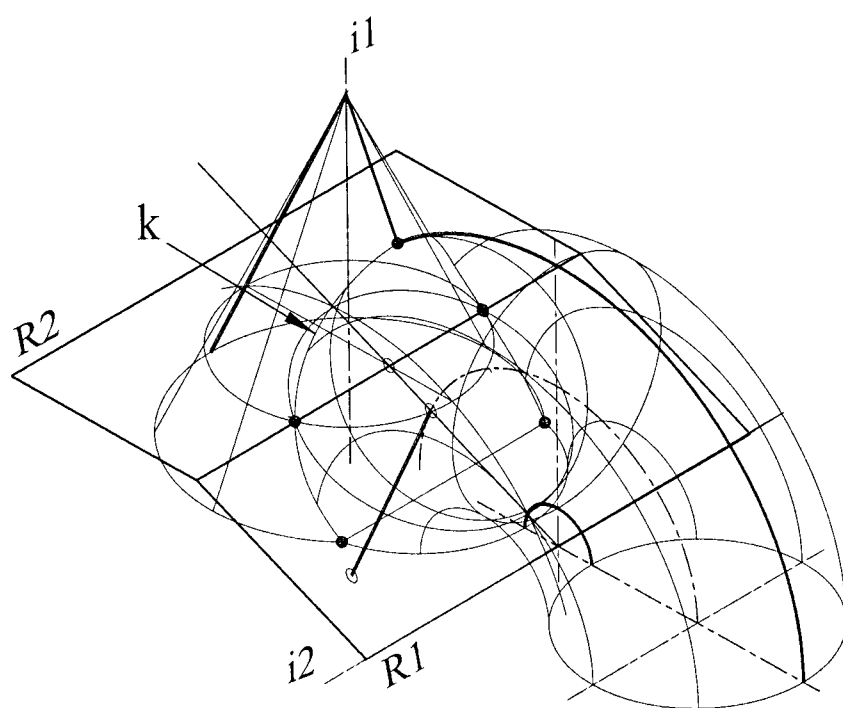


Рис. 8.11

9. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

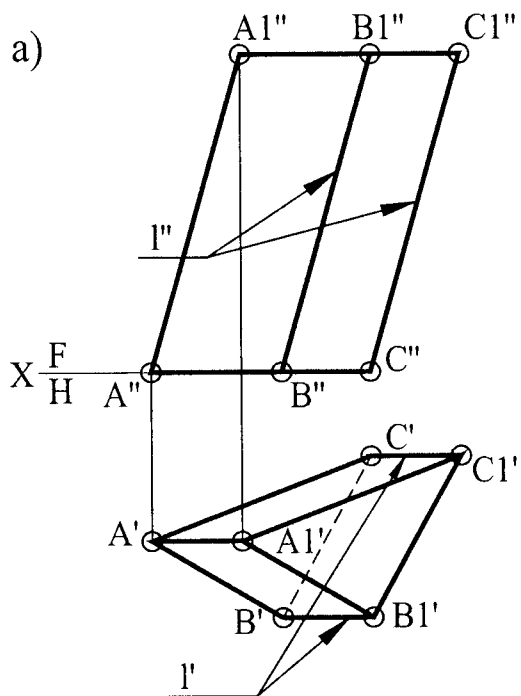
9.1. Развертывание поверхностей многогранников

Разверткой называют фигуру, полученную совмещением поверхности геометрического тела с плоскостью [1]. Если поверхность тела (или ее часть) может быть совмещена с плоскостью без разрывов и складок, то такую поверхность называют развертываемой [1]: **«К развертываемым поверхностям можно отнести линейчатые поверхности, в частности, те из них, которые имеют пересекающиеся (или параллельные) смежные образующие линии»**

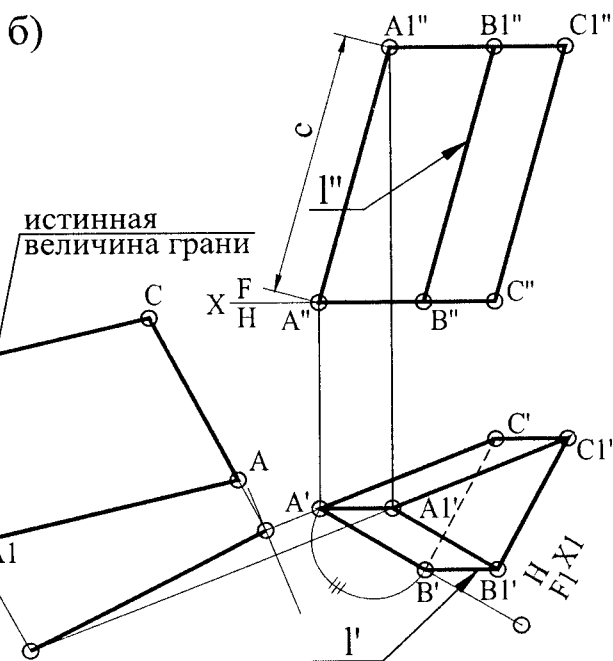
При построении разверток многогранников определяют натуральный (истинный) вид каждой грани, используя различные способы преобразования проекций (рис. 9.1, 9.2). Выбор способов преобразования зависит от вида многогранника и его расположения относительно плоскостей проекций.

Известны [1] три способа построения развертки поверхностей многогранников:

1. способ нормального сечения;
2. способ раскатки;
3. способ треугольников (триангуляции).



Выполнить развертку
поверхности призмы с
основанием, лежащим
в плоскости уровня



истинная
величина грани

Рис. 9.1

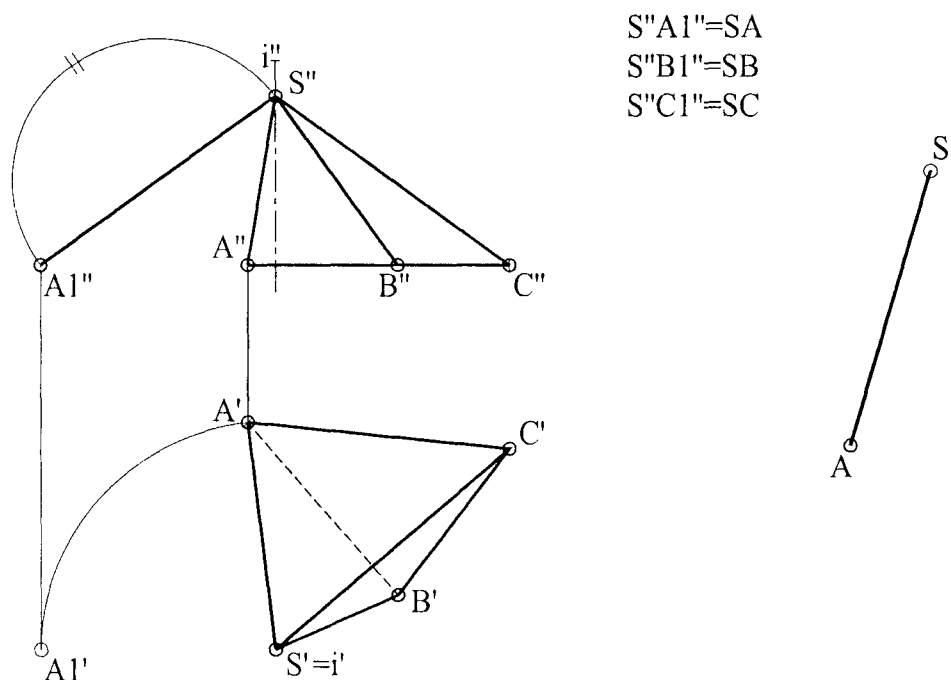


Рис. 9.2

9.2. Развертывание кривых поверхностей

Кривые поверхности, которые полностью без разрывов и складок можно совместить с плоскостью, **называют развертываемыми**. К этим поверхностям относятся **торсы** (поверхности, образованные прямыми линиями, касательными к направляющей пространственной кривой), конические и цилиндрические поверхности [1].

Остальные линейчатые и все нелинейчатые поверхности являются неразвертываемыми.

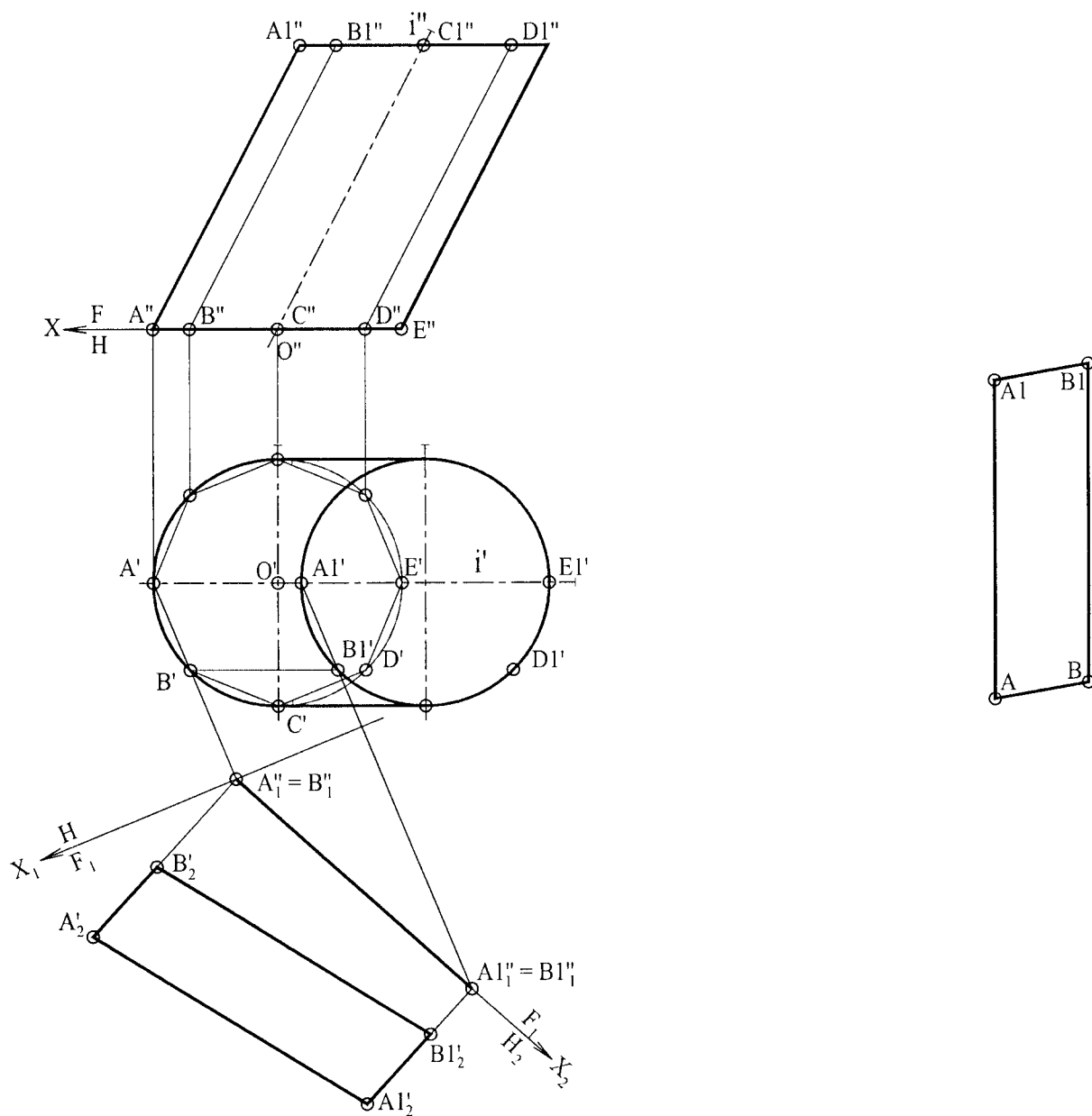


Рис. 9.3

ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

1. Центральное и параллельное проецирование.
2. Основные свойства параллельного проецирования.
3. Комплексный чертеж (эпюр Монжа). Преобразование чертежа.
4. Прямые линии и плоскости общего и частного положения на эюре Монжа.
5. Взаимная принадлежность точек, прямых линий, плоскостей.
6. Пересечение двух прямых линий. Пересечение прямой линии и плоскости.
7. Следы прямых линий и плоскостей.
8. Взаимная параллельность прямых линий и плоскостей.
9. Прямая линия, перпендикулярная к плоскости.
10. Способы преобразования проекций. Способ перемены плоскостей проекций. Способ плоскопараллельного перемещения. Вращение вокруг проецирующих прямых линий. Вращение вокруг линии уровня.
11. Многогранники. Линии пересечения многогранников плоскостью. Точки пересечения многогранников с прямой линией.
12. Построение линий пересечения двух многогранников.
13. Поверхности. Классификация. Определитель поверхности. Геометрическая и алгоритмическая части определителя поверхности.
14. Кинематические и каркасные способы задания поверхностей.
15. Ортогональные проекции поверхностей. Очерк поверхности.
16. Поверхности вращения второго порядка.
17. Линейчатые поверхности. Конические и цилиндрические поверхности.
18. Нелинейчатые поверхности. Сфера. Торовая поверхность.

19. Применение каркасных линий для решения задач на поверхности геометрических тел.
20. Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью.
21. Способы построения линий пересечения поверхностей. Частные и общие способы решения. Способ вспомогательных поверхностей.
22. Построение линий пересечения поверхностей. Нормаль и касательная прямая линия к поверхности.
23. Плоскость, касательная к поверхности в заданной точке (построение касательной плоскости к поверхности в заданной точке).
24. Развертывание поверхностей геометрических тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фролов, С. А.** Начертательная геометрия / С. А. Фролов. — М.: ИНФРА-М, 2010. — 285 с., ил.
2. **Решение** практических задач методами начертательной геометрии. Сборник графических заданий и упражнений / под ред. И. В. Гордеевой. — М.: Издательство МЭИ, 2001. — 52 с.
3. **Локтев, О. В.** Краткий курс начертательной геометрии / О. В. Локтев. — М.: Высшая школа, 2004. — 136 с., ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	4
1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ	6
1.1. Свойства евклидова пространства	6
1.2. Центральное проецирование	7
1.3. Параллельное проецирование.....	7
2. ЭПЮР МОНЖА.....	12
2.1. Обратимость чертежа. Эпюр Монжа	12
2.2. Абсолютная (АСК) и относительная (ОСК) системы координат	12
2.3. Построение третьей проекции объекта.....	12
2.4. Положение точек и прямых относительно плоскостей проекций	14
2.5. Определение действительной величины отрезка	17
3. ЗАДАНИЕ И ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ	20
3.1. Задание плоскости на чертеже.....	20
3.2. Положение плоскостей относительно плоскостей проекций.....	21
3.3. Взаимное положение прямых линий	23
3.4. Взаимная принадлежность точки, прямой линии и плоскости.....	23
4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ	26
4.1. Главные линии плоскости (линии уровня, линии наибольшего наклона)...	26
4.2. Взаимное положение прямой линии и плоскости	27
4.3. Взаимное положение плоскостей.....	31
4.4. Определение линии пересечения двух плоскостей	32
4.5. Перпендикулярность прямых линий общего положения	34
4.6. Перпендикулярность плоскостей	35
5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ.....	36
5.1. Метод замены плоскостей проекции.....	36
5.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.....	38
5.3. Преобразование проекции способом плоскопараллельного перемещения.....	39
5.4. Преобразование проекции способом совмещения. Вращение вокруг линий уровня	41

6. МНОГОГРАННИКИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ	43
6.1. Понятие многогранника.....	43
6.2. Линии пересечения поверхности многогранника плоскостью частного положения.....	44
6.3. Определение точек пересечения поверхности многогранника с прямой линией.....	45
6.4. Определение линий пересечения поверхности многогранника с плоскостью общего положения	45
6.5. Определение линий пересечения поверхностей двух многогранников.....	46
7. ПОВЕРХНОСТИ.....	49
7.1. Образование и задание поверхности на чертеже.....	49
7.2. Точки и линии на поверхностях	52
7.3. Линии пересечения поверхности с плоскостью	56
7.4. Точки пересечения прямой линии с поверхностью вращения.....	62
7.5. Нормаль и касательная прямая к поверхности. Плоскость, касательная к поверхности.....	64
8. ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ	67
9. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.....	79
9.1. Развертывание поверхностей многогранников.....	79
9.2. Развертывание кривых поверхностей	81
ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»	83
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	85

Учебное издание

Степанов Юрий Владимирович

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь

Редактор издательства М. П. Малахов

Компьютерная верстка А. В. Софейчука

Темплан издания НИУ МЭИ 2016, метод.

Подписано в печать 13.09.2016

Формат 60×84/8

Физ. печ. л. 11,0

Изд. № 16у-059

Заказ 258/оп

Тираж 1000 экз.

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МЭИ, 11250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии МЭИ,

11250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 13