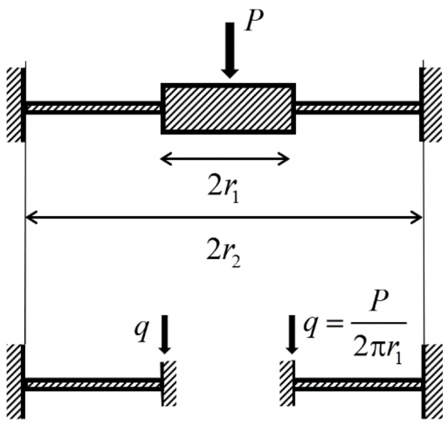
## Осесимметричный изгиб кольцевой пластины

Задача. Стальная кольцевая пластина толщиной $h = 0{,}004$ м, с внутренним и внешним радиусами $r_1 = 0{,}01$ м, $r_2 = 0{,}04$ м нагружена силой $P$, которая передается на пластину через абсолютно твердое тело, жестко прикрепленное к внутреннему торцу пластины. Принимая $[\sigma] = 400$ МПа, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}3$, определить допускаемую нагрузку $[P]$ по критерию прочности Губера-Мизеса.

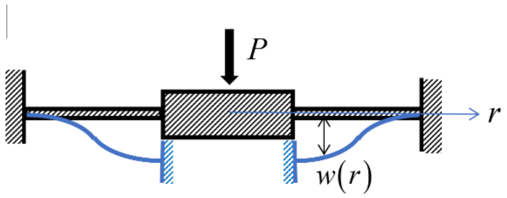



Решение.

Уравнение осесимметричного изгиба пластины (уравнение Софи Жермен - Лагранжа)

$$D\Delta\Delta w = p\,,$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость, давление на пластину $p = 0$.




Решение этого уравнения для кольцевой пластины:

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w_*\,,$$

где $w_* = \dfrac{pr^4}{64D}$ - частное решение,

в данном случае $w_*(x) = 0$, так как $p = 0$.

Постоянные $C_{1,2,3,4}$ определим из граничных условий на внутреннем и внешнем торцах пластины:

при $r = r_1$ : $\quad \varphi(r_1) = 0 \quad$ и $\quad Q(r_1) = -\dfrac{P}{2\pi r_1}$,

при $r = r_2$ : $\quad w(r_2) = 0 \quad$ и $\quad \varphi(r_2) = 0$.

Граничные условия приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно $C_{1,2,3,4}$:

$$
\begin{cases}
\varphi(r_1) = 0, \\
Q(r_1) = -\dfrac{P}{2\pi r_1}, \\
w(r_2) = 0, \\
\varphi(r_2) = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
2C_2 r_1 + C_3 \dfrac{1}{r_1} + C_4 r_1 (1 + 2\ln r_1) = 0, \\
4C_4 \dfrac{D}{r_1} = -\dfrac{P}{2\pi r_1} \ \rightarrow \ C_4 = -P\dfrac{1}{8D\pi}, \\
C_1 + C_2 r_2^{\,2} + C_3 \ln r_2 + C_4 r_2^{\,2} \ln r_2 = 0, \\
2C_2 r_2 + C_3 \dfrac{1}{r_2} + C_4 r_2 (1 + 2\ln r_2) = 0.
\end{cases}
$$

В матричном виде:

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{b},$$

$$
\mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0 & 2r_1 & \dfrac{1}{r_1} & r_1(1 + 2\ln r_1) \\
0 & 0 & 0 & 4\dfrac{D}{r_1} \\
1 & r_2^{\,2} & \ln r_2 & r_2^{\,2} \ln r_2 \\
0 & 2r_2 & \dfrac{1}{r_2} & r_2(1 + 2\ln r_2)
\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{P}{2\pi r_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

В силу линейности системы постоянные $C_{1,2,3,4}$ (а значит, и решение задачи) будут линейно зависеть от параметра силы $P$. Положим $P = 1$ и решим задачу, то есть определим функции единичных перемещений $\bar{w}(r)$, углов поворота $\bar{\varphi}(r)$, радиального и окружного изгибающих моментов $\bar{M}_r(r)$ и $\bar{M}_\theta(r)$, а также поперечной силы $\bar{Q}$. Для линейной задачи для произвольного значения силы $P$ будут выполняться соотношения:

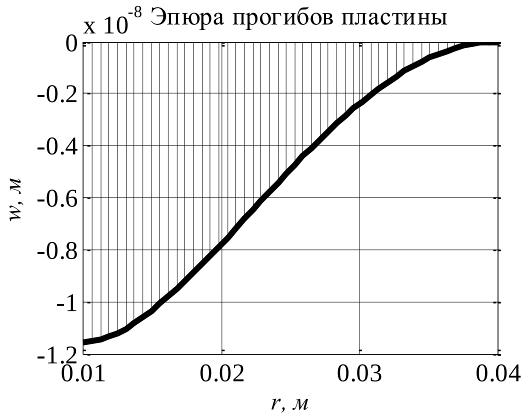
$$
\begin{aligned}
&w(r) = P \cdot \bar{w}(r), \quad M_r(r) = P \cdot \bar{M}_r(r), \\
&\varphi(r) = P \cdot \bar{\varphi}(r), \quad M_\theta(r) = P \cdot \bar{M}_\theta(r), \quad Q(r) = P \cdot \bar{Q}(r).
\end{aligned}
$$

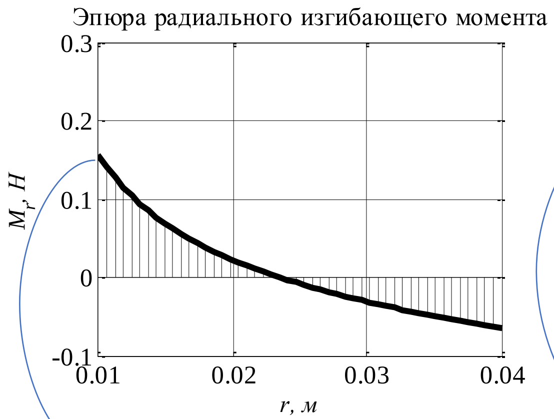
Решение для единичной силы получено с помощью MATLAB (файл Plastina.m):

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -6{,}449 \cdot 10^{-8}, \\
C_2 &= -8{,}915 \cdot 10^{-5}, \\
C_3 &= -1{,}004 \cdot 10^{-8}, \\
C_4 &= -3{,}394 \cdot 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

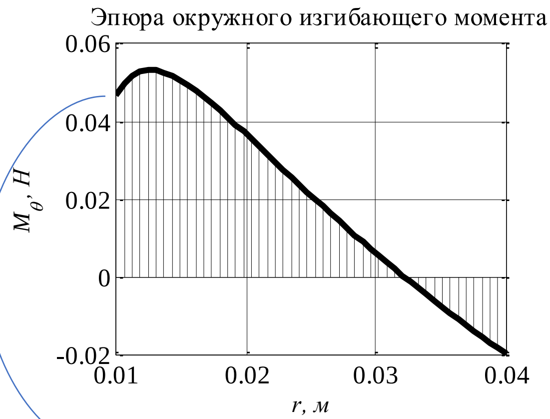
Строим эпюры единичных перемещений и внутренних усилий:

# Эпюры при единичной нагрузке

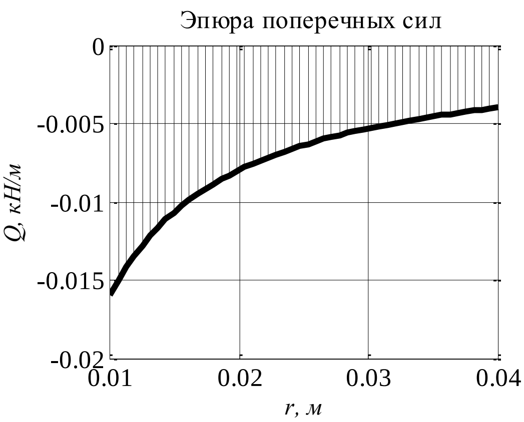


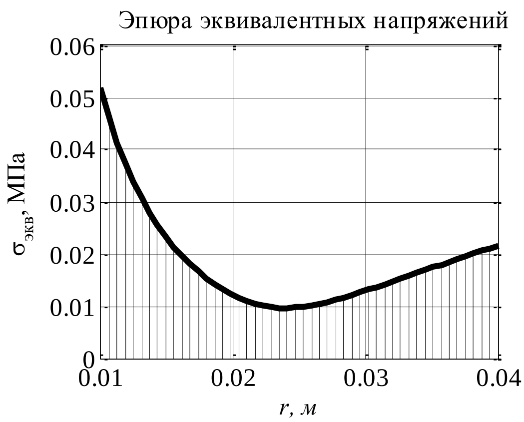




$\bar{M}_r(r_1) = 0{,}156$

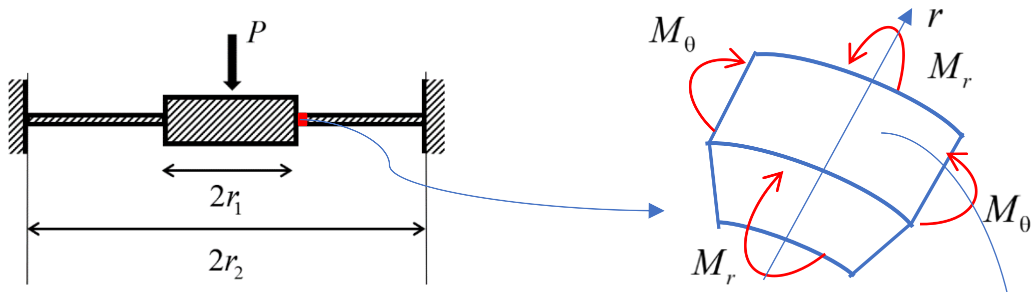



$\bar{M}_\theta(r_1) = 0{,}047$

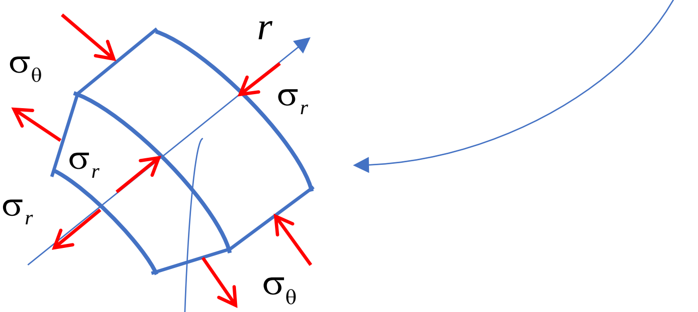


Проведем анализ напряженного состояния в опасном сечении $r = r_1$. Рассмотрим действующие в опасном сечении усилия и напряжения:

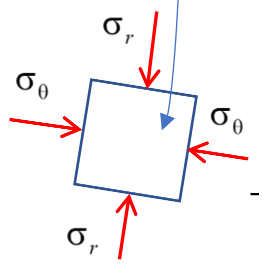



$$M_r(r_1) = P\cdot \bar{M}_r(r_1) = 0{,}156P,\quad M_\theta(r_1) = P\cdot \bar{M}_\theta(r_1) = 0{,}047P,$$




$$\sigma_r(r_1) = -\frac{6M_r(r_1)}{h^2} = -\frac{6\cdot P\cdot \bar{M}_r(r_1)}{h^2} = \frac{0{,}156P}{h^2} = -5{,}841\cdot 10^4 P,$$

$$\sigma_\theta(r_1) = -\frac{6M_\theta(r_1)}{h^2} = -\frac{6\cdot P\cdot \bar{M}_\theta(r_1)}{h^2} = \frac{0{,}047P}{h^2} = -1{,}752\cdot 10^4 P.$$




- плоское напряженное состояние

Эквивалентное напряжение в опасной точке $r = r_1$ найдем по критерию прочности Губера-Мизеса:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta} = 5{,}192\cdot 10^4 P.$$

Из условия прочности $\sigma_{экв} \le [\sigma]$ получим величину допускаемой силы

$$[P] = \frac{[\sigma]}{5{,}192\cdot 10^4} = 7{,}7 \text{ кН}.$$

# Эпюры при допускаемой нагрузке $[P] = 7,7$ кН