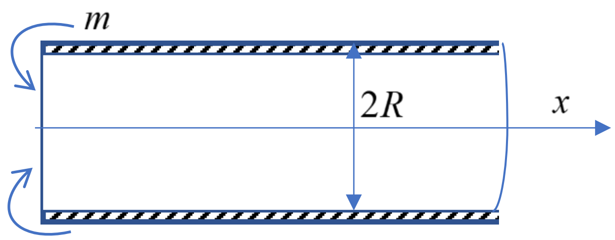
Осесимметричный изгиб цилиндрической оболочки

Задача 1. Стальная оболочка толщиной $h = 0,2$ см, радиусом срединной поверхности $R = 5$ см нагружена моментом m. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, допускаемый прогиб $[w] = 0,03$ мм. Определить $[m]$ из условия жесткости и условия прочности по критерию Губера-Мизеса.



Решение. Запишем уравнение изгиба оболочки под осесимметричной нагрузкой

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}w = \left(p - \nu\frac{N_x}{R}\right),$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 146,52$ Нм — цилиндрическая жесткость оболочки, внутреннее давление $p = 0$, продольное усилие $N_x = 0$.

Решение этого уравнения:

$$w(x) = e^{-kx}(C_1\cos kx + C_2\sin kx) + e^{kx}(C_3\cos kx + C_4\sin kx) + w_*,$$

где

$$w_*(x) = \frac{R^2}{Eh}\left(p - \nu\frac{N_x}{R}\right)$$ — частное решение,

в данном случае $w_*(x) = 0$, так как $p = 0$, $N_x = 0$,

$$k = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}} = 128,54 \text{ м}^{-1}$$ — волновое число,

тогда длина полуволны краевого эффекта равна $\lambda = \dfrac{\pi}{k} = 0,024$ м.

Оболочка полубесконечная, решение при $x \to \infty$ должно затухать, следовательно, $C_3 = C_4 = 0$.

Итак, решение имеет вид

$$w(x) = C_1 e^{-kx}\cos kx + C_2 e^{-kx}\sin kx\,.$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий:

$$\begin{cases} M_x(0) = -m \\ Q(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} D\left.\dfrac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=0} = D\left[2k^2 e^{-kx}(C_1\sin kx - C_2\cos kx)\right]\Big|_{x=0} = -m \\ D\left.\dfrac{d^3w}{dx^3}\right|_{x=0} = D\left[2k^3 e^{-kx}((C_1+C_2)\cos kx - (C_1-C_2)\sin kx)\right]\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{m}{2k^2D}, \\ C_2 = \dfrac{m}{2k^2D}. \end{cases}$$

В результате функции прогиба и усилий определены, можно строить графики (строим графики и убеждаемся, что 1) опасное сечение при $x = 0$, 2) краевой эффект заканчивается примерно при $x = (1{,}5 \div 2)\lambda$):

$$w(x) = \frac{m}{2k^2D}e^{-kx}\left(\sin kx - \cos kx\right),$$
$$M_x(x) = -m\cdot e^{-kx}(\sin kx + \cos kx),\quad M_y(x) = \nu M_x(x),\qquad x\in[0,+\infty)$$
$$Q(x) = 2k\cdot m\cdot e^{-kx}\sin kx,\ N_x = 0,$$
$$N_y(x) = \nu\cdot N_x + \frac{Eh}{R}w(x) = \frac{Eh}{R}w(x)\,.$$

Условие жесткости – ограничение максимальных перемещений. Очевидно, что максимальные перемещения при $x = 0$. Получим допускаемый момент из условия жесткости:

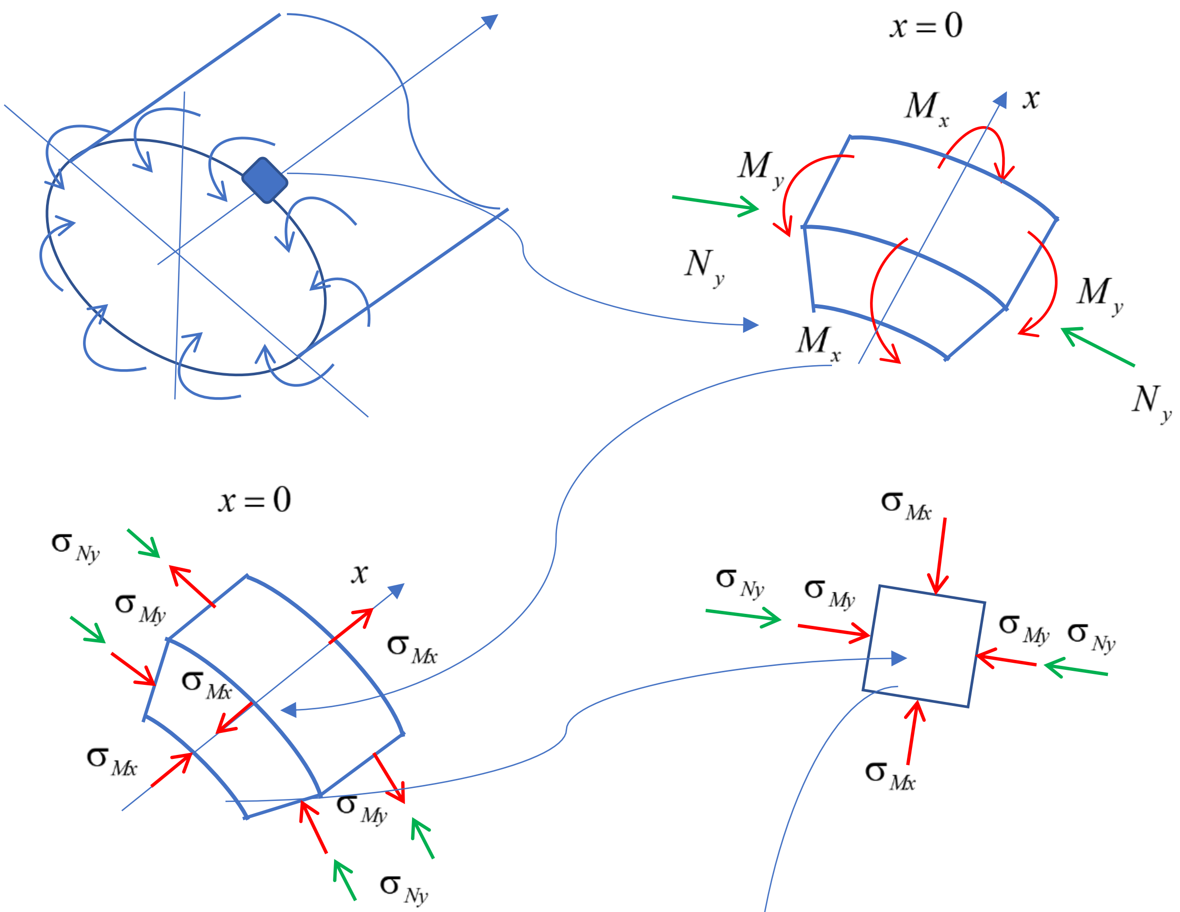
$$|w_{\max}| \le [w]$$
$$|w_{\max}| = |w(0)| = \left|\frac{m}{2k^2D}\right| \le [w],$$

следовательно, $[m]_{ж} = 2k^2D[w] = 145{,}3\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}}$.

Проведем анализ напряженного состояния в опасном сечении $x=0$. Рассмотрим действующие в сечении усилия и напряжения:

$$M_x(0)=-m, \qquad M_y(0)=-\nu m,$$

$$N_x=0, \qquad N_y(0)=\frac{Eh}{R}w(0)=-\frac{Eh}{R}\frac{m}{2k^2D}.$$



Опасная точка в опасном сечении – на внутренней поверхности оболочки, именно там складываются напряжения от окружных продольной силы и изгибающего момента.

Напряжения в общем случае рассчитываются по формулам:

$$\sigma_x=\sigma_{Nx}+\sigma_{Mx}=\pm\frac{N_x}{h}\pm\frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y=\sigma_{Ny}+\sigma_{My}=\pm\frac{N_y}{h}\pm\frac{6M_y}{h^2},$$

для точки на нижней поверхности получим (с учетом знаков напряжений, напряженное состояние - плоское):

$$\sigma_x = -\frac{6|M_x|}{h^2} = -1,5 \cdot 10^6 m,$$

$$\sigma_y = -\frac{|N_y|}{h} - \frac{6|M_y|}{h^2} = -0,45 \cdot 10^6 m - 0,83 \cdot 10^6 m = -1,28 \cdot 10^6 m.$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке найдем по критерию Губера-Мизеса:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y} = 2,4 \cdot 10^6 m.$$

Из условия прочности $\sigma_{экв} \leq [\sigma]$ получим величину допускаемого момента

$$[m]_{пр} = \frac{[\sigma]}{2,4 \cdot 10^6} = 66,7 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}}.$$

Значение допускаемого момента будет минимальным из значений, полученных из условий прочности и жесткости:

$$[m] = \min\left\{[m]_{пр}, [m]_{ж}\right\} = 66,7 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}}.$$