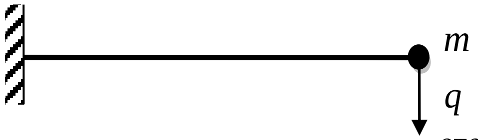
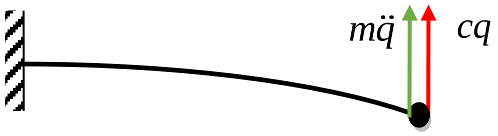
Изгибные колебания валов

1. Свободные колебания. Система с одной степенью свободы

Свободные колебания совершаются за счет внутренних упругих сил и сил инерции при задании начального отклонения системы от положения равновесия или при задании начальной скорости.



q - перемещение массы по направлению степени свободы



При отклонении массы на нее начинают действовать:
cq - восстанавливающая упругая сила со стороны упругой балки,
$m\ddot{q}$ - даламберова сила инерции.

Сумма этих сил по принципу Даламбера равна нулю: $m\ddot{q}+cq=0$.

Принцип Даламбера: состояние движения механической системы можно рассматривать как состояние равновесия, если ко всем действующим на систему силам добавить даламберовы силы инерции.

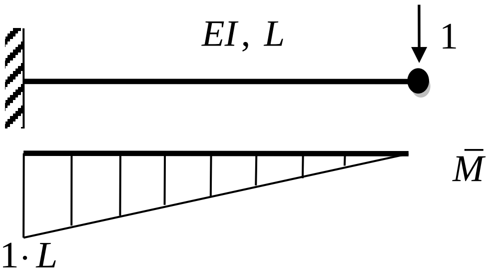
Запись уравнения движения в стандартном виде: $\ddot{q}+\omega_0^2 q=0$,

где $\omega_0=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - собственная частота системы или частота собственных колебаний. Решение уравнения колебаний – см. лекцию «Теория колебаний 1».

Упругую силу $F=cq$ удобно представлять через податливость – перемещение от единичной силы:

$$F=cq \text{ при } F=1: \quad 1=cf \quad \rightarrow \quad c=\frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad F=\frac{1}{f}q .$$

Податливость легко определить с помощью интеграла Максвелла-Мора:



$$f = \int_0^L \frac{\bar{M}^2}{EI} dz = \frac{L}{6EI}\left(L^2 + 4\frac{L}{2}\frac{L}{2} + 0\right) = \frac{L^3}{3EI}.$$

Тогда уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{q} + cq = 0, \quad c = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad mf\ddot{q} + q = 0$$

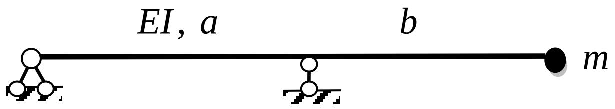
$$\frac{mL^3}{3EI}\ddot{q} + q = 0.$$

Запись уравнения движения в стандартном виде:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3EI}{mL^3}}$ - собственная частота системы.

Вопрос – как найти собственную частоту колебаний системы?



2. Свободные колебания. Системы со многими степенями свободы

Уравнения *малых свободных колебаний* системы с n степенями записывается в матричной форме

$$\mathbf{A\ddot{q}} + \mathbf{Cq} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ - матрица инерции, $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ - матрица жесткости $(j,k = 1,2,\ldots,n)$, $\mathbf{q}(t)$ – n-мерный вектор обобщенных координат.

Если ввести матрицу податливости $\mathbf{F} = [f_{jk}]$, обратную по отношению к матрице жесткости $\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1}$, то после умножения слева уравнения (1) на матрицу $\mathbf{F}$ будем иметь

$$\mathbf{FA\ddot{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и (2) соответствует гармоническим колебаниям с частотой ω и начальной фазой φ и имеет вид

$$\mathbf{q}(\mathrm{t}) = \mathbf{v}\cos(\omega t + \varphi). \qquad (3)$$

Подстановка (3) в одно из уравнений колебаний (1), (2) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент вектора амплитуд $\mathbf{v}$, который определяет *собственные формы колебаний*. Например, подстановка в матричное уравнение (1) дает

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}. \qquad (4)$$

Условие существования нетривиального (ненулевого) решения системы однородных уравнений (4) приводит к уравнению для определения собственных частот

$$\det\left(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}\right) = 0. \qquad (5)$$

Аналогично для уравнения колебаний в форме (2) получим

$$\det\left(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{FA}\right) = 0, \qquad (6)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

В развернутом виде частотные уравнения (5) и (6) записываются следующим образом:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} & \cdots & c_{1n} - \omega^2 a_{1n} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & \cdots & c_{2n} - \omega^2 a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} - \omega^2 a_{n1} & c_{n2} - \omega^2 a_{n2} & \cdots & c_{nn} - \omega^2 a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(7)$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 m_1 f_{11} & -\omega^2 m_2 f_{12} & \cdots & -\omega^2 m_n f_{1n} \\ -\omega^2 m_1 f_{21} & 1 - \omega^2 m_2 f_{22} & \cdots & -\omega^2 m_n f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\omega^2 m_1 f_{n1} & -\omega^2 m_2 f_{n2} & \cdots & 1 - \omega^2 m_n f_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определители в левых частях (7), получим полиномы n-й степени относительно ω^2. Корни этих полиномов ω_α^2 есть квадраты частот свободных колебаний, а их квадратные корни ω_α называются *собственными частотами*. Упорядоченная по возрастанию совокупность собственных частот $\omega_1 \le \omega_2 \le \ldots \le \omega_n$ образует *спектр собственных частот.*

Компоненты $v_{k\alpha}$ собственного вектора v_α, соответствующего собственной частоте ω_α, определяются из уравнений, аналогичных (4):

$$(\mathbf{C} - \omega_\alpha^2 \mathbf{A})\,\mathbf{v}_\alpha = 0. \qquad (8)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (8) имеет бесконечное множество нетривиальных решений, определяемых с точностью до постоянного множителя. Для выбора однозначного решения эти уравнения дополняются *условием нормировки* $\sum_{k=1}^{n} v_{k\alpha}^2 = 1$ или другими условиями, например $v_{1\alpha} = 1$.

Собственные формы колебаний $\mathbf{v}_\alpha$ должны удовлетворять условиям ортогональности:

$$\mathbf{v}_\alpha^{\mathrm{т}} \mathbf{A} \mathbf{v}_\beta = 0; \quad \mathbf{v}_\alpha^{\mathrm{т}} \mathbf{C} \mathbf{v}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{9}$$

3. Свободные колебания. Системы с двумя степенями свободы

Уравнения свободных колебаний (1) и (2) для системы с двумя степенями свободы $(n = 2)$ примут вид:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{11}m_1\ddot{q}_1 + f_{12}m_2\ddot{q}_2 + q_1 = 0, \\ f_{21}m_1\ddot{q}_1 + f_{22}m_2\ddot{q}_2 + q_2 = 0. \end{cases}$$

Второе из уравнений собственных частот (7) имеет следующие корни:

$$\boxed{\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m_1 f_{11} + m_2 f_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{m_1 f_{11} - m_2 f_{22}}{2}\right)^2 + m_1 m_2 f_{12}^2}}}}, \tag{10}$$

а компоненты $v_{1\alpha}$, $v_{2\alpha}$ векторов собственных форм $\mathbf{v}_\alpha$ $(\alpha = 1,2)$ из (8) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{v_{2\alpha}}{v_{1\alpha}} = \frac{1 - \omega_\alpha^2 m_1 f_{11}}{\omega_\alpha^2 m_2 f_{12}} = \frac{\omega_\alpha^2 m_1 f_{21}}{1 - \omega_\alpha^2 m_2 f_{22}}. \tag{11}$$

Итак, каждой собственной частоте соответствует своя форма колебаний:

- частоте ω_1 соответствует вектор первой формы колебаний

$$\boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1 - \omega_1^2 m_1 f_{11}}{\omega_1^2 m_2 f_{12}} \end{pmatrix}}, \tag{12}$$

- частоте ω_2 соответствует вектор второй формы колебаний

$$\boxed{\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\omega_2^2 m_1 f_{11}}{\omega_2^2 m_2 f_{12}} \end{pmatrix}}. \qquad (13)$$

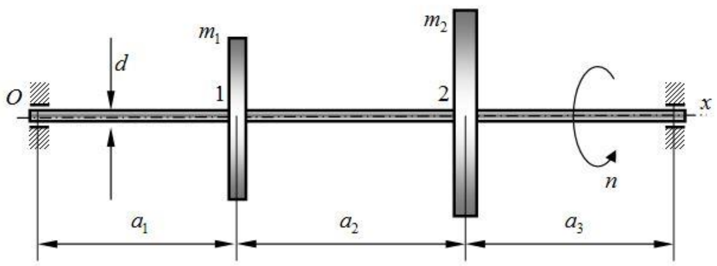
Собственные формы колебаний $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ должны удовлетворять условиям ортогональности, которые в матричной форме имеют вид:

$$\boxed{\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{v}_2 = 0; \quad \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathbf{v}_2 = 0}. \qquad (14)$$

Совокупность собственных частот и форм называется собственным спектром системы.

4. Собственные изгибные колебания вала. Пример расчета

Определить собственные частоты и формы изгибных колебаний вала диаметром d с двумя закрепленными на нем дисками массами m_1 и m_2, проверить правильность нахождения собственного спектра с помощью условий ортогональности, найденные формы изобразить графически.

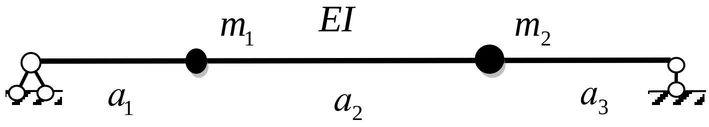


Массой вала по сравнению с массами дисков пренебречь.

Исходные данные:

- диаметр вала $d = 0.03$ м;
- массы дисков $m_1 = 7$ кг, $m_2 = 15$ кг;
- параметры длины $a_1 = 0.25$ м, $a_2 = 0.25$ м, $a_3 = 0.25$ м;
- модуль продольной упругости материала вала $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па.

Расчетная схема вала:



Уравнение движения удобно взять в форме (2), через матрицу податливостей:

$$\mathbf{F}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \ .$$

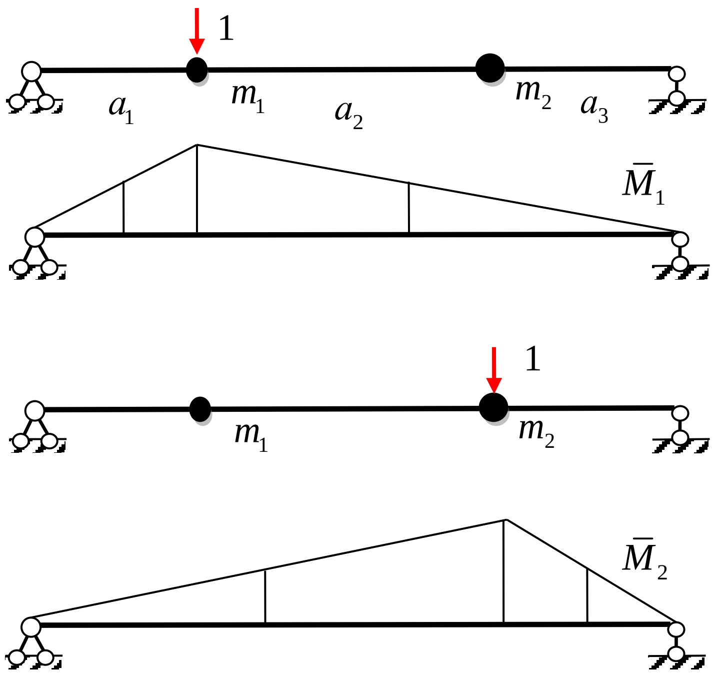
Матрица инерции $\mathbf{A}$ диагональная и имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, \text{ кг.}$$

Определим матрицу податливости $\mathbf{F} = [f_{jk}]$. Вычислим осевой момент инерции поперечного сечения вала I, жесткость при изгибе EI и полную длину вала l

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 3{,}976 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad EI = E \cdot I = 8349{,}764 \text{ Нм}^2, \quad l = \sum_{k=1}^{3} a_k \ .$$

Прикладывая поочередно единичные силы к сечениям посадки дисков 1 и 2, изобразим эпюры единичных моментов $M_1(x)$ и $M_2(x)$



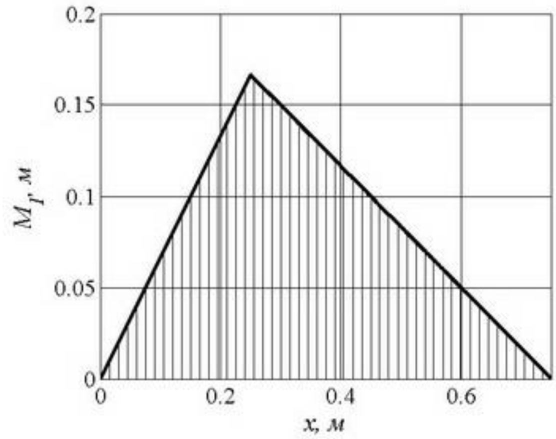


Рис. 1. Эпюра изгибающего момента M_1

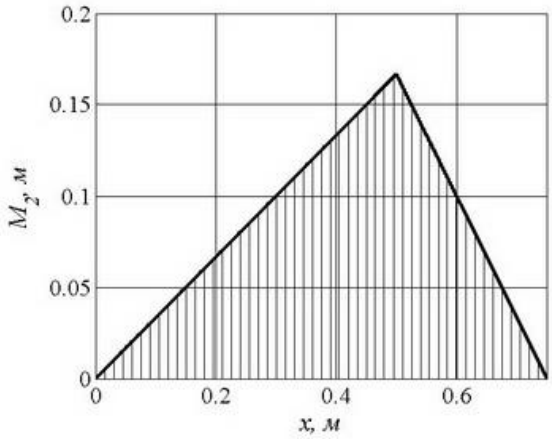


Рис. 2. Эпюра изгибающего момента M_2

Элементы матрицы $\mathbf{F}$ вычисляются с помощью интеграла Максвелла-Мора

$$f_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz, \quad f_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dz, \quad f_{12} = f_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dz.$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.317 & 7.277 \\ 7.277 & 8.317 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7}, \ \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

Собственные частоты изгибных колебаний вала ω_1 и ω_2 вычислим по формуле (10):

$$\omega_1 = 240.325 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 1008.522 \text{ рад/с}.$$

Каждой собственной частоте соответствует своя форма колебаний (формулы 12,13):

- первой собственной частоте ω_1 соответствует первая форма колебаний

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\omega_1^2 m_1 f_{11}}{\omega_1^2 m_2 f_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0528 \end{pmatrix},$$

- второй частоте ω_2 соответствует вторая форма колебаний

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\omega_2^2 m_1 f_{11}}{\omega_2^2 m_2 f_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4433 \end{pmatrix}.$$

! В системе Matlab задача определения собственных форм и частот решается функцией eig:

$$[\mathbf{V},\mathbf{\Omega}] = \mathrm{eig}\left((\mathbf{F} * \mathbf{A})^{\wedge} -1\right).$$

Для проверки правильности вычислений используем свойство ортогональности собственных форм (14):

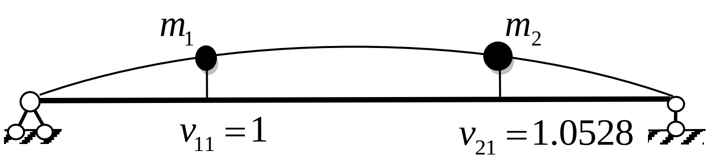
$$\mathbf{v}_1^{\text{т}} \mathbf{A} \mathbf{v}_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1.0528 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4433 \end{pmatrix} \approx 0$$

$$\mathbf{v}_1^{\text{т}} \mathbf{C} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 5.130 & -4.489 \\ -4.489 & 5.130 \end{pmatrix} \cdot 10^6, \ \text{Н/м} \qquad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.0528 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.130 & -4.489 \\ -4.489 & 5.130 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4433 \end{pmatrix} \approx 0$$

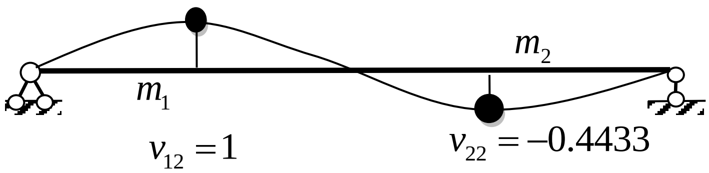
Графическое изображение собственных форм:

1 форма колебаний



$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0528 \end{pmatrix}$$

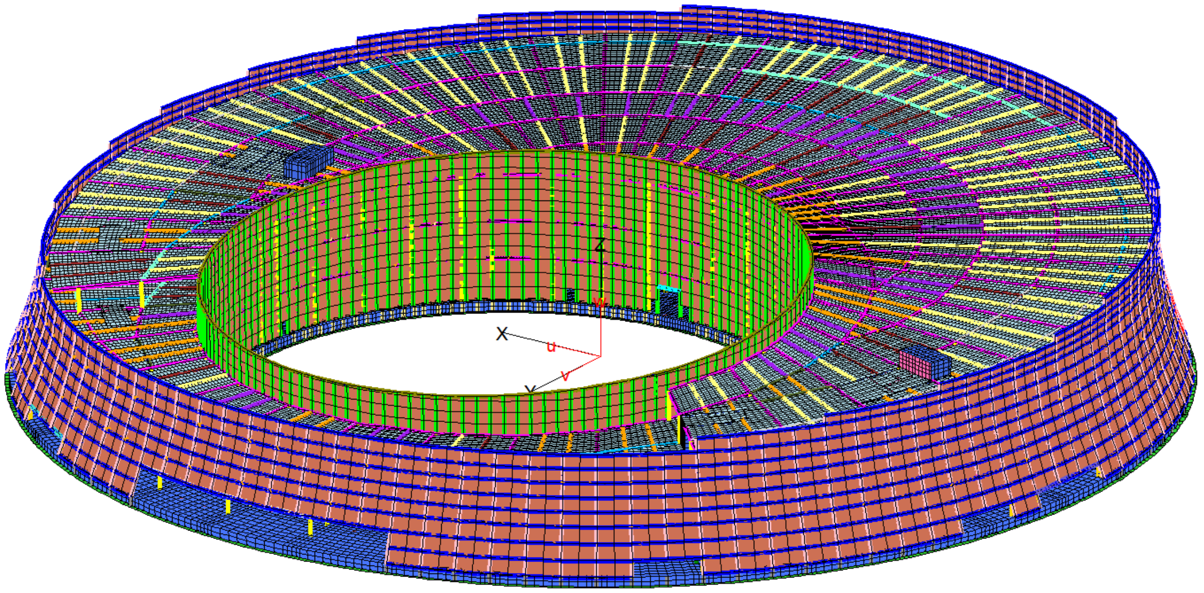
2 форма колебаний

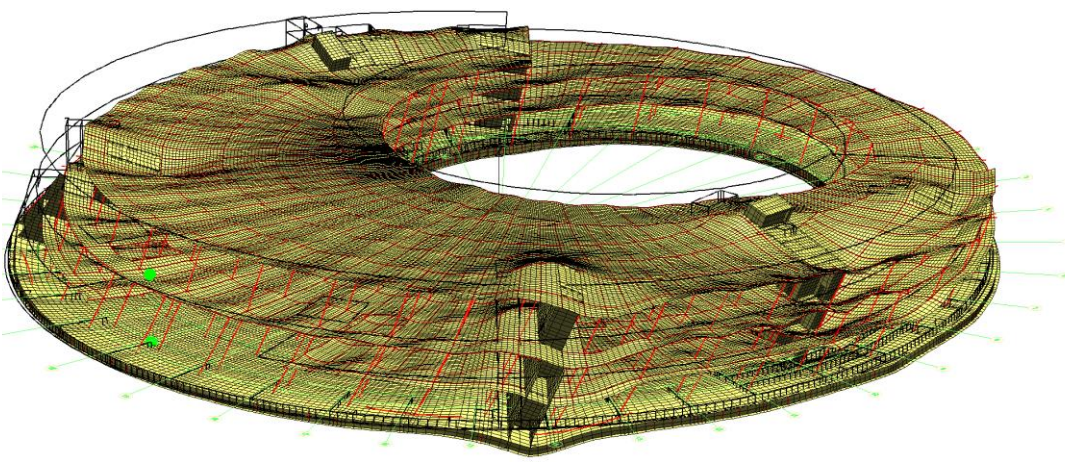


$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4433 \end{pmatrix}$$

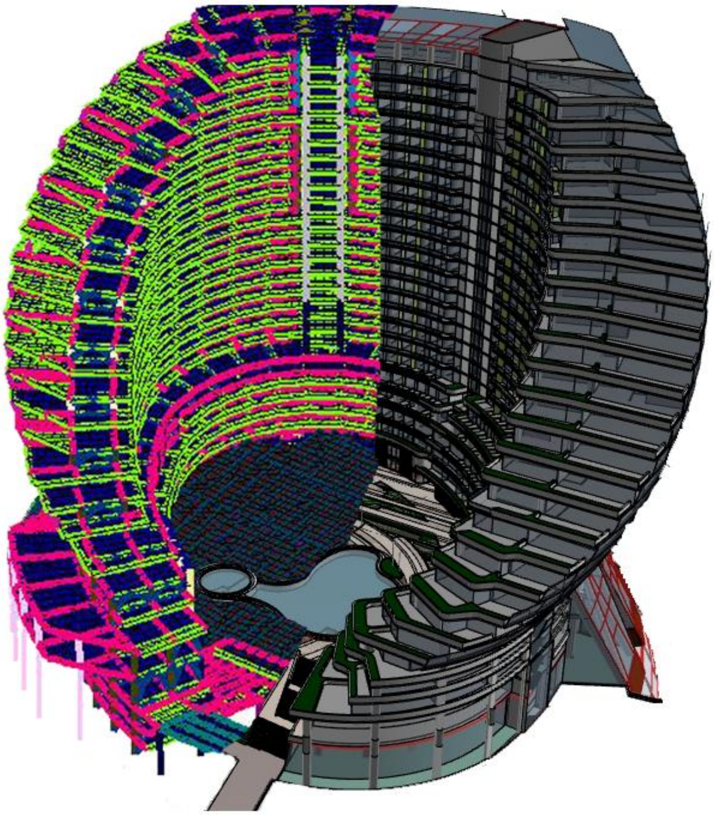
Примеры расчетов

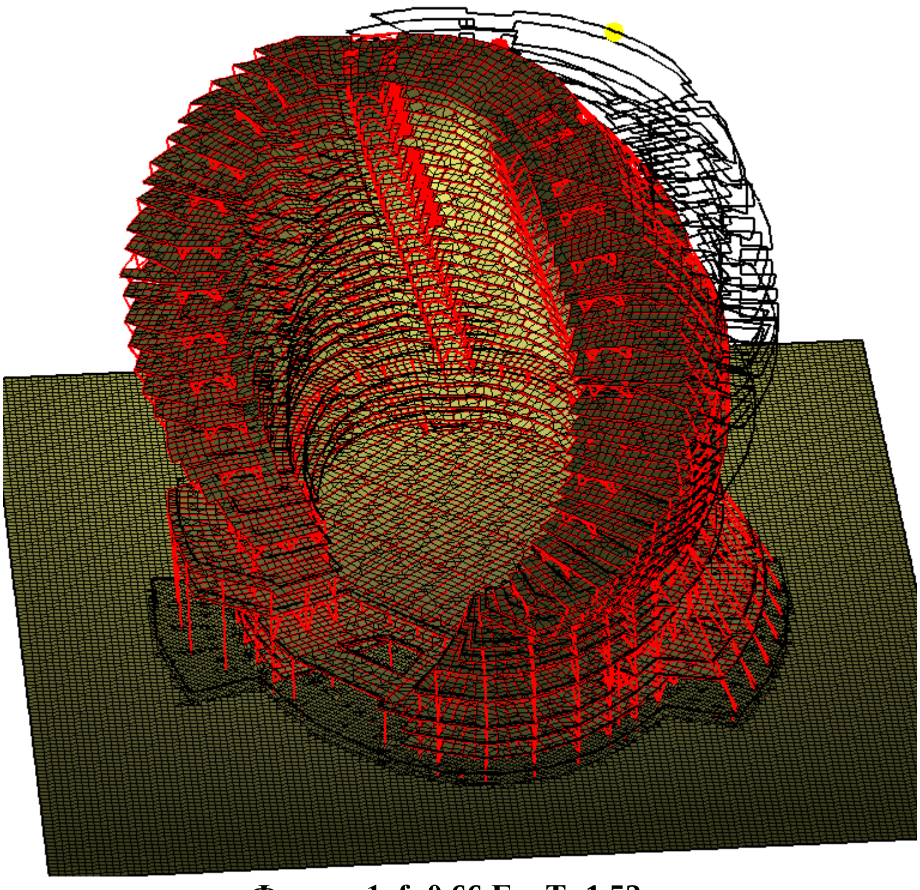
Аэропорт



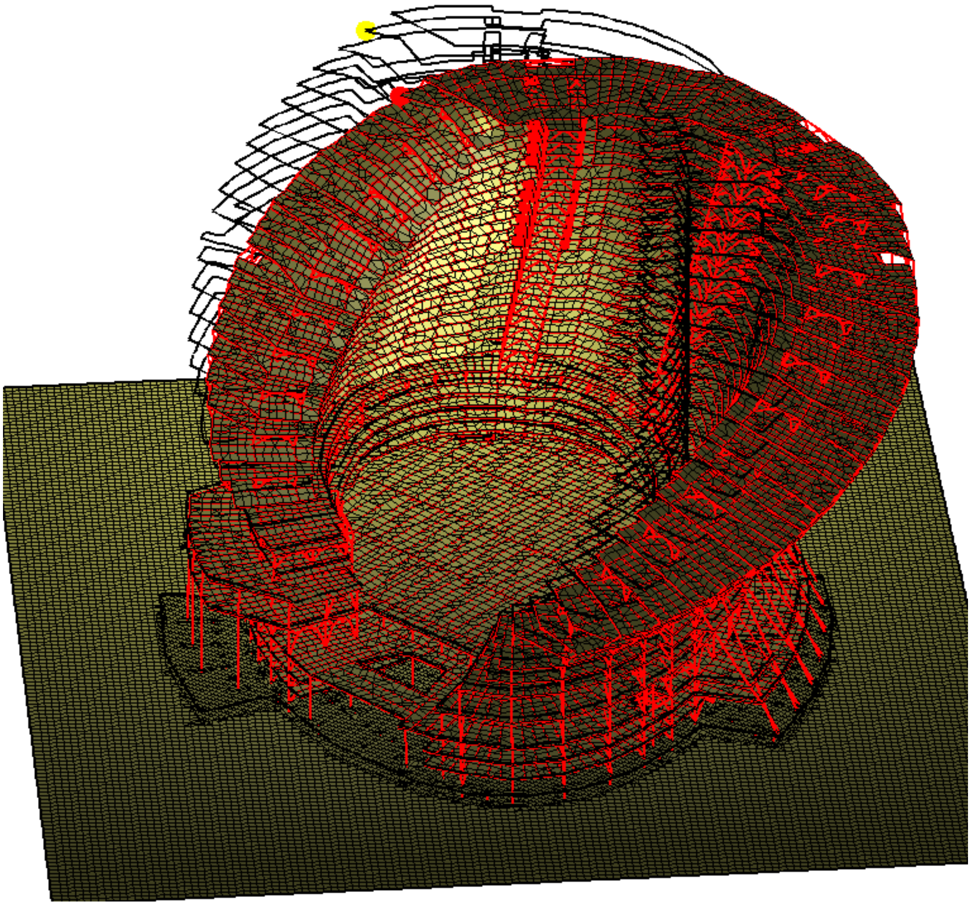


Гостиница и бизнес-центр

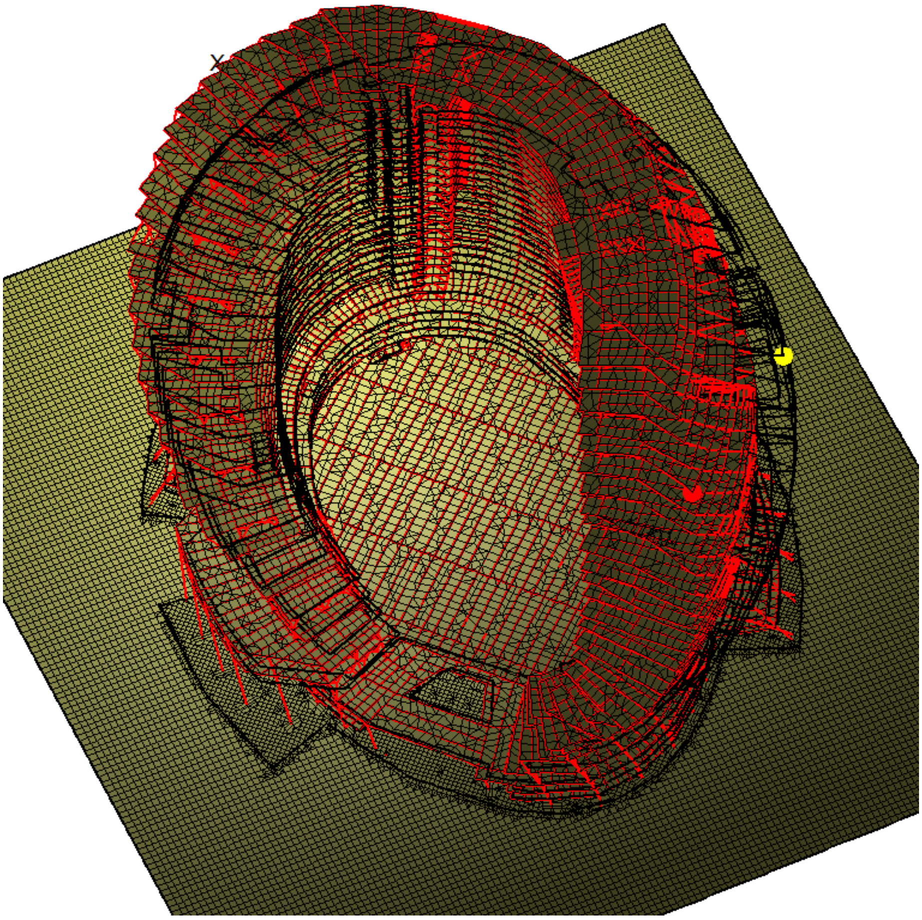




Форма 1. f=0.66 Гц, T=1.52 с.



Форма 2. f=0.69 Гц, T=1.45 с



Форма 3. f=0.78 Гц, T=1.27 с.