Изгибные колебания вала (продолжение)

1. Вынужденные колебания систем со многими степенями свободы

Причина вынужденных колебаний механической системы - действие переменных во времени вынуждающих сил. Установившиеся вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы.

Установившиеся вынужденные колебания системы с n степенями свободы при синфазном (происходящем с одинаковой фазой) изменении внешних сил по гармоническому закону описываются системой уравнений в одном из альтернативных вариантов:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\mathbf{q}=\mathbf{P}_0\cos\theta t \qquad \text{или} \qquad \mathbf{F}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{q}=\mathbf{F}\mathbf{P}_0\cos\theta t, \tag{1}$$

где $\mathbf{P}_0$ – вектор амплитуд внешних сил; θ – частота возбуждения.

Решение уравнений (1) имеет вид

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_0\cos\theta t\,. \tag{2}$$

Подстановка (2) в уравнения (1) приводит к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд обобщенных координат, решение которой имеет вид

$$\mathbf{q}_0=\left(\mathbf{C}-\theta^2\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{P}_0 \qquad \text{или} \qquad \mathbf{q}_0=\left(\mathbf{E}-\theta^2\mathbf{F}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{F}\,\mathbf{P}_0\,. \tag{3}$$

Вспоминаем прошлое занятие: уравнение для определения собственных частот

$$\det\left(\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{A}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad \det\left(\mathbf{E}-\omega^2\mathbf{F}\mathbf{A}\right)=0 \tag{4}$$

Очевидно, если частота возбуждения θ совпадёт с одной из собственных частот ω_α $(\alpha=1,2,\ldots,n)$ или будет к ней близка, определитель (4) будет равен нулю или очень мал, матрицы в скобках в (3) будут вырожденные, следовательно, при $\theta\to\omega_\alpha$ амплитуды колебаний неограниченно возрастут, что соответствует *резонансу* динамической системы.

Резонанс – резкое возрастание амплитуды колебаний динамической системы при совпадении частоты вынуждающей силы с одной из собственных частот системы.

Динамический расчет безынерционного вала с неуравновешенными массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ с эксцентриситетами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, образующими вектор-столбец $\boldsymbol{\varepsilon}$, приводит к уравнениям типа (1). Если эксцентриситеты лежат в одной плоскости, проходящей через ось вращения вала, то при вращении вала на каждую массу начинает действовать центробежная сила $m_\alpha\theta^2\varepsilon_\alpha$ с вертикальной проекцией $m_\alpha\theta^2\varepsilon_\alpha\cos\theta t$ $(\alpha=1,2,\ldots,n)$. Вектор вынуждающих сил в (1) равен $\mathbf{P}_0 \cos\theta t = \theta^2 \mathbf{A\varepsilon} \cos\theta t$, амплитуда вынуждающей силы равна $\mathbf{P}_0 = \theta^2 \mathbf{A\varepsilon}$, тогда

$$\mathbf{q}_0 = \left(\mathbf{E} - \theta^2 \mathbf{FA}\right)^{-1} \theta^2 \mathbf{F}\,\mathbf{A\varepsilon}. \tag{5}$$

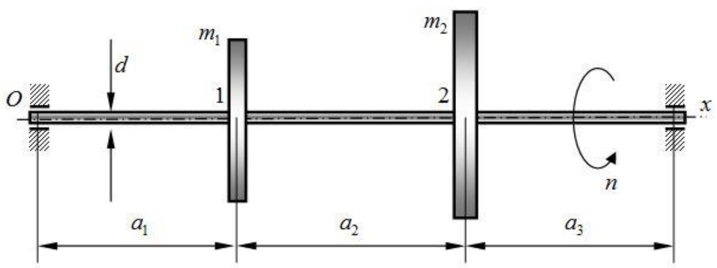
Зависимость (5) амплитуды вынужденных колебаний от частоты вращения вала θ называется *амплитудно-частотной характеристикой*.

Частоты вращения $\theta_{кр}$, при которых матрица $\mathbf{E} - \theta_{кр}^2 \mathbf{FA}$ в (5) становится вырожденной, называются *критическими*. Из (5) становится понятно, что критическая частота $\theta_{кр,\,\alpha}$ вращения вала совпадает с собственной частотой ω_α, при этом количество критических частот равно числу степеней свободы динамической системы.

Соответствующие критическим частотам скорости вращения называют *критическими скоростями* вала $n_{кр,\,\alpha} = 30\theta_{кр,\,\alpha}/\pi = 30\omega_\alpha/\pi$ (в оборотах в минуту). Если рабочая скорость вращения вала приближается к критической, амплитуды изгибных колебаний (5) резко возрастают, и вал работает в резонансном режиме.

2. Пример динамического расчета вала (продолжение)

Вал с прямолинейной осью диаметром d с двумя закрепленными на нем дисками массами m_1 и m_2 вращается в двух расположенных по концам подшипниках. Центры масс дисков смещены относительно оси вала на величину эксцентриситетов ε_1 и ε_2. Требуется определить критические скорости вращение вала $n_{кр1}$ и $n_{кр2}$. Предполагая, что эксцентриситеты расположены в одной плоскости, проходящей через ось вращения, построить амплитудно-частотную характеристику при изменении скорости вращения от нуля до $1{,}5n_{кр2}$, а также вычислить максимальные динамические напряжения при рабочей скорости вращения $n_\text{р}$.



Исходные данные:

- диаметр вала $d = 0.03$ м;
- массы дисков $m_1 = 7$ кг, $m_2 = 15$ кг;

- параметры длины $a_1 = 0.25$ м, $a_2 = 0.25$ м, $a_3 = 0.25$ м;
- эксцентриситеты $\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ м, $\varepsilon_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ м;
- модуль продольной упругости материала вала $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па;
- рабочая скорость вращения $n_\text{р} = 5000$ об/мин.

Ранее были определены матрицы инерции, податливости, рассчитаны собственные частоты и формы колебаний.
Матрица инерции $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, \text{ кг.}$$

Матрица податливости $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.317 & 7.277 \\ 7.277 & 8.317 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7}, \ \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

Собственные частоты изгибных колебаний вала ω_1 и ω_2:

$$\omega_1 = 240.325 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 1008.522 \text{ рад/с}.$$

Определив собственные частоты ω_1 и ω_2, найдем критические скорости

$$n_1 = 30\omega_1/\pi = 2295 \text{ об/мин}, \quad n_2 = 30\omega_2/\pi = 9631 \text{ об/мин}.$$

Амплитудные значения прогибов вала $q_1(n)$ в сечении 1 и $q_2(n)$ в сечении 2 (на рисунке) в зависимости от рабочей скорости вращения n определим по формуле (5)

$$\mathbf{q}(n) = \left(\mathbf{E} - \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица, $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ – вектор эксцентриситетов.

На рисунках построены амплитудно-частотные характеристики $q_1(n)$ (рис. 1) и $q_2(n)$ (рис. 2) в зависимости от рабочей частоты вращения. На рисунках показаны вертикальные асимптоты на критических скоростях вращения $n_{\text{кр}1}$ и $n_{\text{кр}2}$ и горизонтальные асимптоты $-\varepsilon_1$ и $-\varepsilon_2$, к которым стремятся функции $q_1(n)$ и $q_2(n)$ при неограниченном увеличении скорости вращения вала. Это явление называется *самоцентрированием* вала.

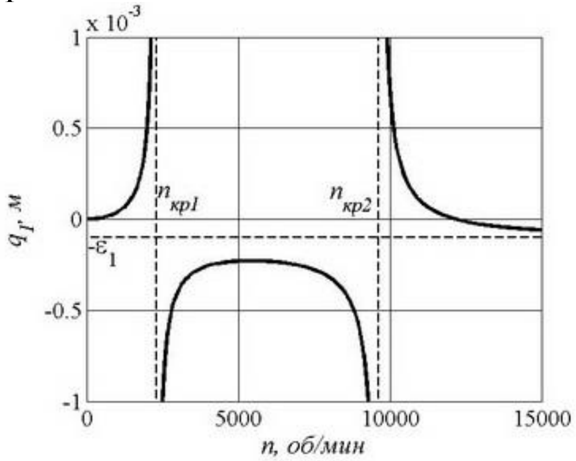


Рис. 1. Зависимость перемещения сечения 1 от скорости вращения вала

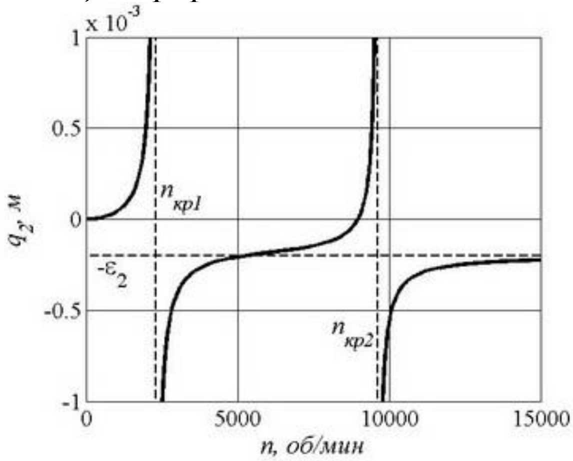


Рис. 2. Зависимость перемещения сечения 2 от скорости вращения вала

Определим перемещения дисков при вращении вала с рабочей скоростью $q_1(n_р)$ и $q_2(n_р)$ и центробежные силы P_1 и P_2 в точках крепления дисков на вал

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\pi n_р}{30}\right)^2 \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{q}(n_р) + \boldsymbol{\varepsilon}\right).$$

Изгибающие моменты могут быть вычислены по принципу суперпозиции сил:

$$M_{изг}(z) = P_1 \bar{M}_1(z) + P_2 \bar{M}_2(z),$$

или определены при нагружении расчетной схемы вала силами P_1 и P_2 в сечениях 1 и 2.

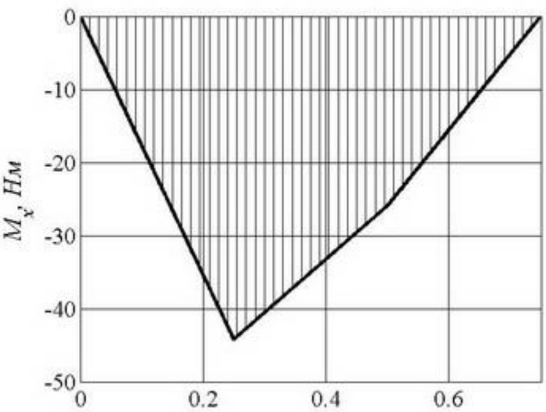


Рис. 3. Изгибающий момент при $n = n_р$

Эпюра $M_{изг}(z)$ представлена на рис. 3. Очевидно, что опасное сечение - это сечение посадки диска 1, где максимальные напряжения при моменте сопротивления вала $W = \frac{\pi d^3}{32}$ составляют

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{W_x} = 17 \text{ МПа}.$$