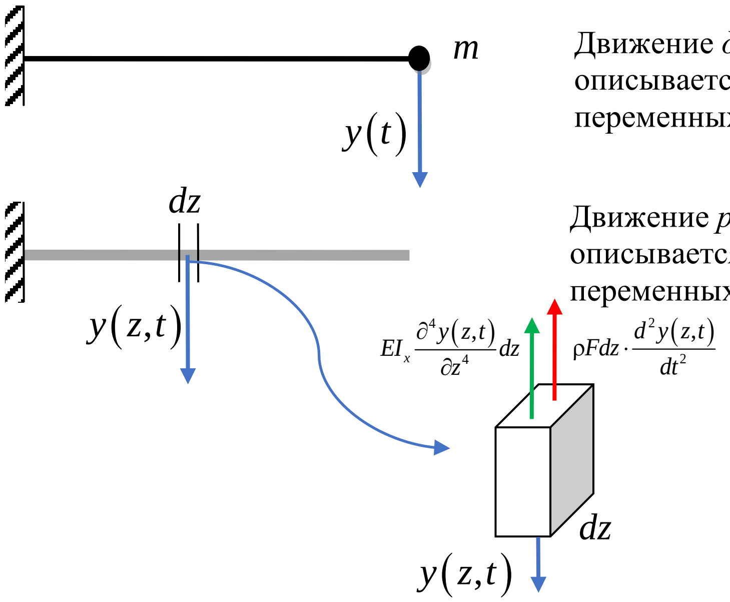
Свободные колебания распределенных стержневых систем

1. Уравнение свободных изгибных колебаний стержня

Распределенные механические системы обладают бесконечным числом степеней свободы.



Движение *дискретной системы* описывается конечным числом переменных (обобщенных координат)

Движение *распределенной системы* описывается бесконечным числом переменных

Перемещение бесконечно малого участка стержня длиной dz равно $y(z,t)$. Масса такого участка равна $\rho \cdot F \cdot dz$, во время движения на него действует сила инерции $\rho F dz \cdot \frac{d^2 y(z,t)}{dt^2}$ и восстанавливающая упругая сила $EI_x \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} dz$.

По принципу Даламбера получим уравнение свободных колебаний распределенной системы:

$$EI_x \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} + \rho F \cdot \frac{d^2 y(z,t)}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

Решение будем искать методом разделения переменных в виде

$$y(z,t) = Y(z) e^{i\omega t}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1):

$$EI_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4} - \omega^2 \rho F Y = 0$$

или

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial z^4} - k^4 Y = 0, \quad \text{где} \quad k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho F}{E I_x}}. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$Y(z) = Ce^{\alpha z}. \tag{4}$$

После подстановки (4) в (3) получим характеристическое уравнение, из которого найдем характеристический показатель α

$$\alpha^4 - k^4 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \alpha_{1,2} = \pm k, \quad \alpha_{3,4} = \pm ik.$$

Найденным характеристическим показателям соответствует общее решение уравнения (3):

$$Y(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \mathrm{ch} kz + C_4 \mathrm{sh} kz, \tag{5}$$

здесь

$$\mathrm{ch} kz = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ - гиперболический косинус,}$$

$$\mathrm{sh} kz = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ - гиперболический синус.}$$

Для справки – некоторые свойства этих функций:

$$\mathrm{sh}(0) = 0, \quad \mathrm{ch}(0) = 1,$$

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{ch} kz) = k \cdot \mathrm{sh} kz, \quad \frac{d}{dz}(\mathrm{sh} kz) = k \cdot \mathrm{ch} kz.$$

Постоянные $C_{1,2,3,4}$ определяют из граничных условий (см. сводную таблицу решений из лекции), задавая по два кинематических или силовых граничных условия на каждом конце. Граничные условия дают однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_{1,2,3,4}$. Чтобы существовало нетривиальное решение этой системы, её определитель должен быть равен нулю. Так получается трансцендентное уравнение относительно частотного параметра k в уравнении (3).

Для типовых случаев закрепления эти уравнения решены и их корни k_n известны (см. сводную таблицу решений из лекции). Этих корней счетное количество, и в таблице они выражаются через параметр χ_n

$$k_n = \frac{\chi_n}{L}, \text{ где } L \text{ - длина стержня.}$$

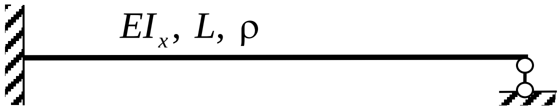
Зная k_n, определим частоты и формы собственного спектра системы

$$\omega_n = \left(\frac{\chi_n}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}}, \quad n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots \tag{6}$$

$$Y_n(z) = C_1 \cos k_n z + C_2 \sin k_n z + C_3 \mathrm{ch} k_n z + C_4 \mathrm{sh} k_n z\,.$$

2. Пример решения задачи

Определить длину стержня L из условия ограничения первой собственной частоты колебаний $\omega_1 \geq [\omega]$, $[\omega] = 1000$ рад/с.



$E = 200$ ГПа, $\rho = 7800\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

Двутавр №12 $\quad I_x = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ м^4,

$F = 1{,}47 \cdot 10^{-3}$ м^2

Решение.

Запишем уравнения свободных колебаний

$$EI_x \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} + \rho F \cdot \frac{d^2 y(z,t)}{dt^2} = 0\,,$$

уравнение для форм колебаний

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial z^4} - k^4 Y = 0, \quad \text{где} \quad k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho F}{EI_x}}\,,$$

и его решение

$$Y(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \mathrm{ch} kz + C_4 shkz\,.$$

Запишем граничные условия:

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ \left.\dfrac{dY}{dz}\right|_{z=0} = 0 \\ Y(L) = 0 \\ \left.\dfrac{d^2Y}{dz^2}\right|_{z=L} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 \cos kL + C_2 \sin kL + C_3 \mathrm{ch} kL + C_4 \mathrm{sh} kL = 0 \\ -C_1 \cos kL - C_2 \sin kL + C_3 \mathrm{ch} kL + C_4 \mathrm{sh} kL = 0 \end{cases}$$

Определитель полученной системы линейных уравнений должен быть равен нулю, иначе не будет существовать нетривиальное решение. Условие существования нетривиального решения дает трансцендентное частотное уравнение. Корни этого уравнения приведены в лекции в сводной таблице решений. По таблице с учетом формулы (6):

$$\chi_1 = 3,927 \quad \to \quad \omega_1 = \left(\frac{\chi_1}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}} = \frac{3,81 \cdot 10^3}{L^2}$$

Из условия $\omega_1 \geq [\omega]$ получим ограничение на длину стержня:

$$\omega_1 \geq [\omega] \quad \to \quad \frac{3,81 \cdot 10^3}{L^2} \geq 1000 \quad \to \quad L \leq 1,95 \text{ м.}$$