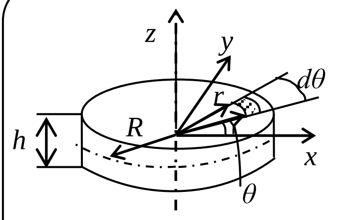
4.ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим круговую пластину радиуса R, толщиной h, нагруженную силами *симметрично расположенными относительно оси пластины* Oz. Деформации, перемещения и напряжения, возникающие в пластине, будут также симметричны относительно оси z.

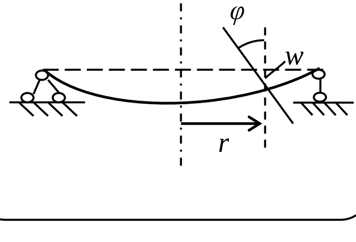


Расчет круговых и кольцевых пластин целесообразно проводить в полярной системе координат, связанной с декартовыми координатами соотношениями $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, где r — радиус рассматриваемой точки на срединной плоскости пластины, θ — полярный угол (окружная координата).

При расчете круговых пластин примем гипотезы, аналогичные принятым при расчете тонкостенных оболочек. Будем рассматривать пластины, у которых прогибы много меньше ее толщины (жесткие пластины) и в поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты и поперечные силы.

Нормальные перемещения и относительные деформации в круговых пластинах.

Примем за нормальный прогиб пластины w — перемещения точек срединной плоскости пластины, отсчитываемые от горизонтальной плоскости вдоль оси z.



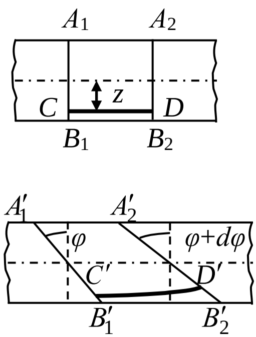
Угол поворота нормали к поверхности пластины φ связан с прогибом очевидным соотношением $\boxed{\varphi = -\frac{dw}{dr}.}$

При отрицательном прогибе $w < 0$ имеем положительный угол поворота нормали (угол поворота поперечного сечения пластины).

Относительная деформация в радиальном направлении.

Рассмотрим произвольное волокно CD, имеющее длину dz и отстоящее на расстоянии z от срединной плоскости.

После деформации пластины нормаль A_1B_1 повернется на угол φ, нормаль A_2B_2 на угол $(\varphi+d\varphi)$. Волокно CD удлинится.



$$\Delta(CD) = \left(C'D' - CD\right) = z \cdot tg(\varphi + d\varphi) - z \cdot tg\varphi \approx z(\varphi + d\varphi) - z\varphi \approx zd\varphi$$

Относительная радиальная деформация

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta(CD)}{CD} = \frac{zd\varphi}{dz} = -z\frac{d^2w}{dr^2}$$

Относительная деформация в окружном направлении.

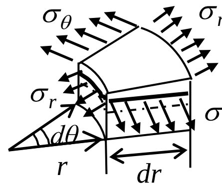
Длина окружности, проходящая через точку C до изгиба пластины равна $S_0 = 2\pi \cdot r$.

После изгиба пластины длина окружности $S_k = 2\pi(r + ztg\varphi) \approx 2\pi(r + z\varphi)$.

Относительная окружная деформация

$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta S}{S_0} = \frac{2\pi(r + z\varphi) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{z}{r}\varphi = -\frac{z}{r}\frac{dw}{dr}$$

Радиальные и окружные напряжения в элементе круговой пластины, вырезанном двумя осевыми сечениями под углом $d\theta$ и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и (r+dr) определяются согласно закону Гука.



$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r\right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right]$$

Радиальный изгибающий момент — момент, действующий в радиальном направлении (погонный момент), Н•м/м

$$M_r = -\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_r \cdot z \cdot dz = +\int_{-h/2}^{h/2}\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]dz =$$

$$= D\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]$$

Окружной изгибающий момент — момент, действующий в окружном направлении (погонный момент), Нм/м

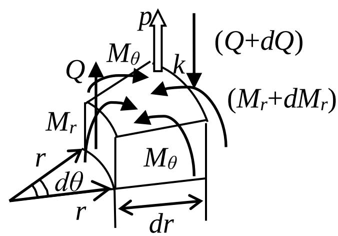
$$M_\theta = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \cdot z \cdot dz = +\int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] dz =$$

$$= D\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right]$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Уравнение равновесия элемента круговой пластины в усилиях.

Q — поперечные силы, возникающие на радиальных гранях, погонные силы — Н/м
$pdr \cdot rd\theta$ — внешняя сила от нормального давления p на поверхности пластины



$$\sum Oz = 0 \rightarrow pdr \cdot rd\theta + Qrd\theta - (Q + dQ)(r + dr)d\theta = 0$$

$$pr = r\frac{dQ}{dr} + Q$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(Q \cdot r) = p}$$

Уравнение моментов относительно правого края элемента

$$\sum mom_k = 0 \to M_r \cdot rdr + (Q \cdot rd\theta)dr - (M_r + dM_r)(r+dr)d\theta +$$
$$+ 2M_\theta \cdot dr \cdot \sin(d\theta/2) + pdr \cdot rd\theta\, dr/2 = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_r}{dr} + \frac{(M_r - M_\theta)}{r} = p}$$

Уравнение равновесия в перемещениях, его решение.

После подстановки в последнее уравнение равновесия моментов их выражения через нормальный прогиб получим

$$D\left[\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right] = Q \qquad \text{или}$$

$$D\frac{d}{dr}\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = Q \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = Q$$

$$\boxed{D\frac{d(\Delta w)}{dr} = Q}$$

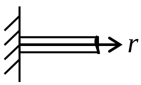
где $\Delta = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{d}{dr}\right)$ — оператор Лапласа в полярной системе координат для осесимметричной деформации.

После подстановки последнего соотношения в 1-ое уравнение равновесия получим уравнение равновесия в перемещениях

$$\boxed{D\Delta\Delta w = p}$$

После четырехкратного интегрирования получим решение для прогибов $w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w_*$,
где w_* — частное решение. Для случая постоянного давления по поверхности пластины $w_* = \dfrac{pr^4}{64D}$.
$C_1 \div C_4$ — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на краях кольцевой пластины при $r = r_1$ и $r = r_2$. На каждом краю пластины формулируют по два краевых условия.

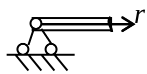
<u>Жестко закрепленный край</u>



$$w = 0$$

$$\varphi = \frac{dw}{dr} = 0$$

<u>Шарнирно-опертый край</u>

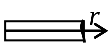


$$w = 0$$

$$M_r = D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = 0$$

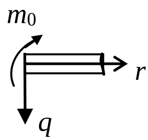
<u>Свободный край</u>

$$M_r = D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = 0$$



$$Q_r = D\frac{d}{dr}(\Delta w) = 0$$

<u>Нагруженный край</u>



$$M_r = m_0$$

$$Q_r = q$$

В результате дифференцирования решения для прогибов круговой пластины получим соотношения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечной силы через постоянные интегрирования $C_1 \div C_4$.

$$\phi = -\frac{dw}{dr} = -\left(2C_2 r + C_3 \frac{1}{r} + C_4 r(1 + 2\ln r) + \frac{pr^3}{16D}\right)$$

$$M_r = D\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = D\left(2C_2(1+\nu) - C_3\frac{(1-\nu)}{r^2} + \right.$$

$$\left. + C_4((3+\nu) + 2(1+\nu)\ln r)\right) + \frac{pr^2}{16}(3+\nu)$$

$$M_\theta = D\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2}\right] = D\left(2C_2(1+\nu) + C_3\frac{(1-\nu)}{r^2} + \right.$$

$$\left. + C_4((1+3\nu) + 2(1+\nu)\ln r)\right) + \frac{pr^2}{16}(1+3\nu)$$

$$Q = D\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right) = 4C_4\frac{D}{r} + \frac{pr}{2}$$

В сплошной пластине из условия ограниченности решений в центре при $r = 0$ полагаем $C_3 = C_4 = 0$. Тогда решение для прогибов имеет вид

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + w_*$$