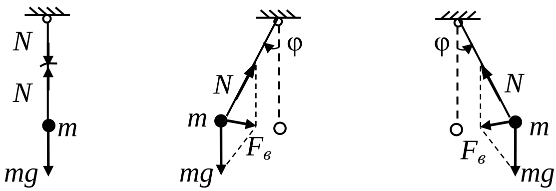
Элементы теории механических колебаний

Колебания являются одним из видов механического движения элементов конструкций и деталей машин, характеризуются поочередным возрастанием и убыванием функции, описывающей положение точек системы во времени и в некотором пространстве измерения.

Колебаниями *называют процесс поочередного возрастания и убывания во времени значения какой-либо величины (ГОСТ 24346-80).*

Пример 1. Математический маятник (материальная точка массой m, подвешенная на нерастяжимой нити длиной l) находится в равновесии в поле сил тяжести.

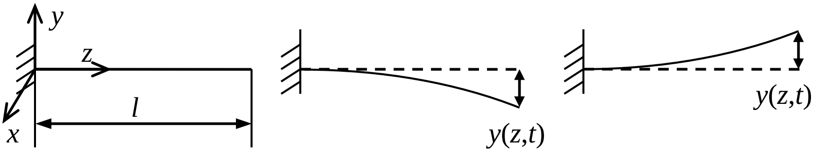
При отклонении массы влево от положения равновесия на угол φ возникает составляющая силы тяжести $F_в$, стремящаяся вернуть маятник в исходное состояние равновесия (вертикальное положение).



Маятник проходит положение равновесия и за счет сил инерции движется до крайнего правого положения. Затем начинает движение влево за счет возникающей составляющей силы тяжести $F_в$.

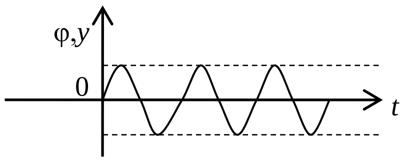
Сила $F_в$ является результирующей силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{N}$.

Пример 2. Упругий стержень длиной l, жесткостью на изгиб EI_x, отклоненный от горизонтального положения равновесия начинает совершать колебания около исходного (горизонтального) положения равновесия за счет сил упругости.

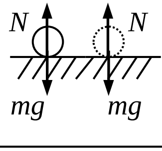


Колебания, возникающие в системе при выведении ее из состояния равновесия и происходящие под действием внутренних для системы восстанавливающих сил, называются ***свободными*** *или* ***собственными колебаниями****.*

Функции $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника, $y(z,t)$ — прогиб стержня описывают поведение системы во времени, меняются от нулевого до некоторых максимальных и минимальных значений.



Шарик на горизонтальной плоскости, будучи отклоненным от исходного положения равновесия, совершать колебания не будет, т.к. здесь не возникает восстанавливающей силы, стремящейся вернуть шарик в исходное состояние.

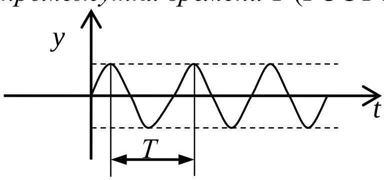


Сила тяжести mg уравновешивается силой нормального давления N со стороны горизонтальной плоскости ($F_в$=0).

1.1 Кинематические характеристики колебательных процессов

Для описания положения механической системы, совершающей колебания, вводится некоторая функция, характеризующая поведение системы во времени. Для маятника это $\varphi(t)$ — угол отклонения от положения равновесия, для стержня — $y(t)$ смещение точек стержня.

Колебания называются ***периодическими****, если любые значения описывающей их функции повторяются через равные промежутки времени T* (ГОСТ 24346-80).

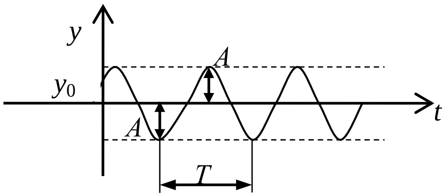


$y(t+T)=y(t)$

Время совершения одного полного колебания T называется ***периодом колебаний****.*
В технике период колебаний измеряется в секундах (с).

Частотой колебаний *называют число колебаний N, совершаемое системой в единицу времени $f = N/t$. Частота колебаний* может быть определена как величина обратная периоду колебаний $f = 1/T$. Размерность частоты в технике 1/с — Герц, (Гц). В теоретических расчетах вводится ***угловая частота*** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, равная числу колебаний, совершаемых системой за 2π секунд. Размерность угловой частоты — рад/с.

Простейшим и наиболее важным видом периодических колебаний являются ***гармонические*** (***синусоидальные***) колебания, при которых описывающая их функция изменяется во времени по закону $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где A, ω, φ_0 — постоянные параметры.



Амплитуда колебаний A — *наибольшее отклонение системы от положения равновесия.*

Параметр φ_0 называется ***начальной фазой*** *колебаний.*

Аргумент $(\omega t + \varphi_0)$ называется ***фазой колебаний*** *в произвольный момент времени t.*

$y_0(t = 0) = A\sin\varphi_0$ — начальное смещение системы от положения равновесия.

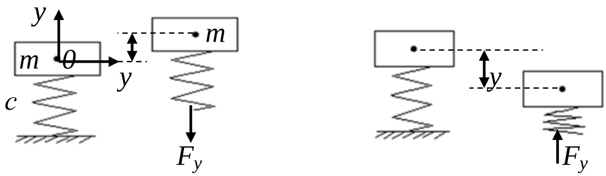
$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$$ — скорость гармонических колебаний.

$$w(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$$ — ускорение.

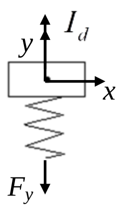
В технике перемещение, скорость и ускорение при колебаниях (вибрациях) называют соответственно *виброперемещением*, *виброскоростью*, *виброускорением*.

1.2. Уравнение колебаний простейшей механической системы (линейный осциллятор)

Рассмотрим колебания тела массой *m*, установленного на упругой опоре, которую будет представлять упругая пружина жесткостью *c*.
Тело, отклоненное от исходного положения равновесия и предоставленное самому себе, начнет совершать колебания около исходного положения равновесия за счет развивающихся сил упругости F_y в пружине. Примем линейную зависимость для сил упругости от перемещения: $F_y = cy$.



Уравнение колебаний массы *m* выведем, используя *принцип Даламбера*: **Состояние движения механической системы можно рассматривать как состояние равновесия, если к действующим внешним и внутренним силам добавить даламберовы (фиктивные) силы инерции** $\vec{I}_d = -m\vec{a} = -m\ddot{\vec{y}}$.
Даламберовы силы инерции $\vec{I}_d$ прикладываем в направлении положительного отсчета движения тела.



Запишем уравнение равновесия, спроектировав все силы на ось *Oy*.

$$\sum OY = 0\,;\; I_d - F_y = 0\,;\; -m\ddot{\vec{y}} - cy = 0$$

$$\ddot{\vec{y}} + \omega^2 y = 0 \qquad (1)$$

где $\omega^2 = c/m$ — квадрат частоты собственных колебаний рассматриваемой системы.

Уравнение (1) — дифференциальное уравнение второго порядка, называют *уравнением колебаний линейного осцилятора*. Оно должно быть дополнено начальными условиями :

при t=0 1) $y(0)=y_0$ 2) $\dot{y}(0) = \upsilon_0$

В начальный момент времени задают начальное смещение y_0 и начальную скорость υ_0 .

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \qquad (2)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий:

$$y(t=0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = y_0 ; \qquad C_2 = y_0$$

$$\dot{y}(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t$$

$$\dot{y}(t=0) = \omega C_1 \cdot 1 - \omega C_2 \cdot 0 = \upsilon_0 ; \quad C_1 = \upsilon_0 / \omega$$

$$y(t) = \upsilon_0 / \omega \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \qquad (3)$$

Решение (3) может быть представлено в виде

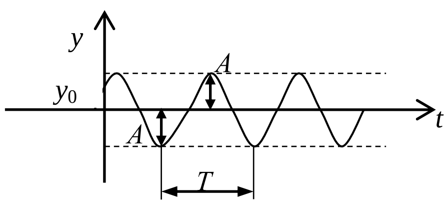
$$y(t) = \grave{A} \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (3')$$

где $\grave{A} = \sqrt{\tilde{N}_1^2 + \tilde{N}_2^2} = \sqrt{(\upsilon_0/\omega)^2 + y_0^2}$ — амплитуда колебаний

$\varphi_0 = arctg(C_2/C_1) = arctg(y_0 \omega / \upsilon_0)$ — начальная фаза

$\omega = \sqrt{c/m}$ — частота колебаний (рад/сек)

$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/c}$ — период колебаний (сек)



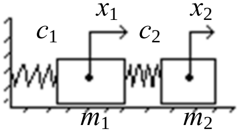
1.3. Число степеней свободы механической системы

Для описания положения всех рассматриваемых объектов механической системы в любой момент времени t необходимо задавать и определять необходимое число функций, определяющих конфигурацию системы во времени. В предыдущих примерах достаточно было задать одну функцию, определяющую положение тела.

Числом степеней свободы *механической системы называется число независимых параметров, однозначно определяющих положение точек системы в любой момент времени* t.

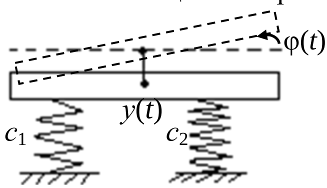
Для реальных систем это число всегда велико. Обычно их схематизируют системами с конечным числом степеней свободы, выделяя наиболее существенные параметры движения.

<u>Пример 1</u>. Для определения положения двух тел массой m_1, m_2, находящихся на горизонтальной плоскости и соединенных между собой пружинами жесткостью c_1, c_2, необходимо задать две линейные координаты x_1, x_2.



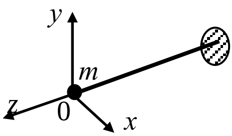
Говорят система имеет две степени свободы: n=2.

<u>Пример 2</u>. Жесткое тело длиной l опирается на пружины жесткостью c_1, c_2. При движении в плоскости центр тяжести тела может смещаться вертикально на величину $y(t)$, а само тело может поворачиваться на угол $\varphi(t)$ вокруг центра тяжести.



Система имеет две степени свободы: n=2.

Пример 3. Материальная точка, закрепленная на конце упругого стержня, отклоненная от исходного положения равновесия может совершать колебания в пространстве за счет восстанавливающих сил упругости в стержне.



Для описания движения точки в пространстве необходимо определить три линейные функции в системе координат $0xyz$. Система имеет три степени свободы: n=3. При большой жесткости на растяжение продольное перемещение вдоль оси $0z$ отсутствует и система будет иметь только две степени свободы.

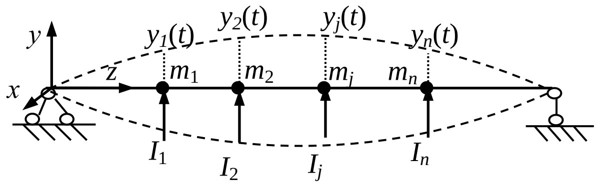
В общем случае движения материального тела его положение в пространстве определяется тремя координатами смещения центра масс тела x_c, y_c, z_c и тремя углами поворота — углы Эйлера. Говорят, что свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы n=6.

Число степеней свободы определяет порядок системы дифференциальных уравнений движения системы.

Связи, наложенные на систему, уменьшают число степеней свободы.

1.4. Уравнения свободных колебаний системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим упругий безинерционный стержень изгибной жесткости EI_x, несущий n сосредоточенных масс m_j.
При отклонении стержня от исходного положения равновесия вертикально вверх после снятия внешнего воздействия стержень начинает совершать колебания за счет восстанавливающих сил упругости.



Положение каждой массы m_j при колебаниях описывается функцией $y_j(t)$ (j=1, 2,…n).
Для вывода уравнений движения системы рассмотрим перемещение j –ой массы под действием даламберовых сил инерции $\vec{I}_j = -m_j\, d^2\vec{y}_j \big/ dt^2 = -m_j \ddot{\vec{y}}_j$, которые будем прикладывать в направлении положительного отсчета y_j.

Перемещение массы m_j определяется совокупностью сил I_j и вычисляется как сумма перемещений $y_{jк}$ от каждой силы в отдельности:

$$y_j(t) = y_{j1}(I_1) + y_{j2}(I_2) + ... + y_{jj}(I_j) + ... + y_{jn}(I_n) = \sum_{k=1}^{n} y_{jk}(I_k)$$

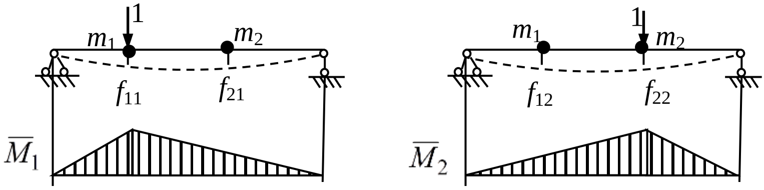
j=1,2,…n

Введем матрицу единичных перемещений f_{jk}, каждый элемент которой представляет перемещение j –ой массы от единичной силы, приложенной в $к$-ой массе. Элементы матрицы вычисляются по формуле Максвелла-Мора:

$$f_{jk} = \int_0^l \frac{\overline{M}_j \cdot \overline{M}_k}{EI_x} dz\ ,$$

где $\overline{M}_j$, $\overline{M}_k$ — значения единичных изгибающих моментов от единичных сил, приложенных к соответствующим массам.

Например, для n=2 имеем



Матрица f_{jk} позволяет записать перемещение $y_j(t)$ в виде:

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \cdot I_k(t) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \cdot \left(-m_k \ddot{y}_k\right) \text{ или}$$

$$y_j(t) + \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \cdot m_k \ddot{y}_k = 0 \qquad (1)$$

j=1,2,…n

Получили систему дифференциальных уравнений (1) свободных колебаний механической системы с n степенями свободы.

Решение системы уравнений свободных колебаний

Решение системы уравнений (1) будем искать в классе гармонических функций

$$y_j(t) = A_j \sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \quad j=1, 2,\ldots n \qquad (2)$$

где A_j — амплитуда колебаний, ω — частота, φ_0 — начальная фаза.

Подставляя (2) в систему (1) получим систему алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний

$$A_j - \omega^2 \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k A_k = 0\,, \qquad j=1,2,\ldots n \qquad (3)$$

В развернутом виде система (3) имеет вид:

j=1 $$A_1(1-\omega^2 f_{11}m_1)-A_2\omega^2 f_{12}m_2-...-A_n\omega^2 f_{1n}m_n=0$$

j=2 $$-A_1\omega^2 f_{21}m_1+A_2(1-\omega^2 f_{22}m_2)-...-A_n\omega^2 f_{2n}m_n=0$$

j=n $$-A_1\omega^2 f_{n1}m_1-A_2\omega^2 f_{n2}m_2-...+A_n(1-\omega^2 f_{nn}m_n)=0$$

Для того чтобы система однородных алгебраических уравнений имела ненулевые (нетривиальные) решения $A_j \neq 0$ необходимо чтобы определитель этой системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} (1-\omega^2 f_{11}m_1) & -\omega^2 f_{12}m_2... & -\omega^2 f_{1n}m_n \\ -\omega^2 f_{21}m_1 & (1-\omega^2 f_{22}m_2)... & -\omega^2 f_{2n}m_n \\ -\omega^2 f_{n1}m_1 & -\omega^2 f_{n2}m_2... & (1-\omega^2 f_{nn}m_n) \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

Раскрывая определитель (4) получим частотное уравнение относительно параметра частоты ω^2

$$\left(\omega^2\right)^n b_n+\left(\omega^2\right)^{n-1} b_{n-1}+...+\left(\omega^2\right)^2 b_2+\omega^2 b_1+b_0=0 \qquad (4')$$

Это уравнение имеет n корней ω^2, положительные значения которых упорядочивают в порядке возрастания

$$\omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3 ... \le \omega_n$$

и которые образуют спектр собственных частот механической системы.

Каждому корню ω_j соответствует частное решение вида (2). Общее решение системы уравнений (1) представляет собой сумму решений вида (2)

$$y_j(t)=\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\sin\left(\omega_k t+\varphi_k\right)$$

При произвольных начальных условиях колебания механической системы описывается полигармонической функцией, причем число гармонических составляющих равно числу степеней свободы системы.

Формы собственных колебаний механической системы

Рассмотрим систему уравнений (3) относительно амплитуд колебаний A_j при определенном значении найденной частоты ω_c

$$A_{j(\tilde{n})} - \omega_{\tilde{n}}^2 \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k A_{k(\tilde{n})} = 0\,, \quad j=1, 2,\ldots n \qquad (5)$$

Система уравнений (5) является системой линейно-зависимых однородных алгебраических уравнений. Её решения могут быть выражены через одну из амплитуд колебаний, например, положив A_{1c}=1. В этом случае система (5) становится неоднородной, и она имеет (n-1) решений для амплитуд колебаний.

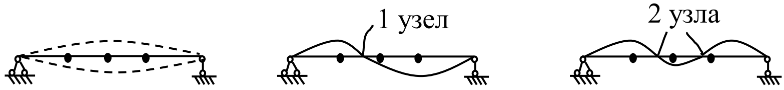
В итоге получаем так называемое распределение форм колебаний по отношению к заданному значению A_{1c}.

Свойства частот и форм собственных колебаний

Совокупность собственных частот и форм колебаний называется ***спектром собственных колебаний****.*

1. *Собственные частоты положительные действительные числа.*

2. *Чем выше собственная частота, тем сложнее форма колебаний.*



ω_1 1-ая частота и форма колебаний | ω_2 2-ая частота и форма колебаний | ω_3 3-ая частота и форма колебаний

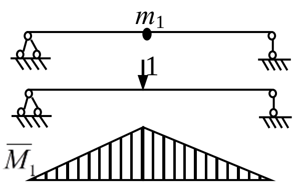
Для балок частоте $\omega_к$ соответствует ($к$-1) *узловых точек* — точек осевой линии, перемещения которых равны нулю.

3. *Формы собственных колебаний, соответствующие различным частотам взаимно ортогональны между собой:*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k A_k(\omega_c) \cdot A_k(\omega_j) = 0\,, \qquad c \neq j$$

Это означает, что работа сил инерции, соответствующих одной форме колебаний на перемещениях, соответствующих другой форме колебаний равна нулю.

<u>Пример 1</u>. Система с одной степенью свободы.



Уравнение колебаний $y_1 + f_{11} m_1 \ddot{y}_1 = 0$

Его решение $y_1(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Уравнение для амплитуд

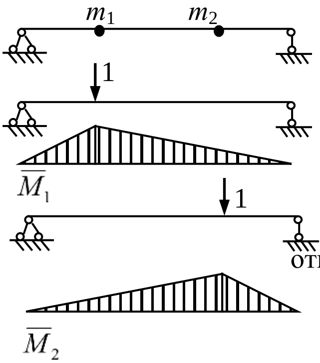
$$A_1(1 - \omega^2 f_{11} m_1) = 0\,.$$

Частотное уравнение

$$(1 - \omega^2 f_{11} m_1) = 0\,.$$

Частота колебаний $\omega = 1\big/\sqrt{f_{11} m_1}$, где $f_{11} = \int\limits_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI_x} dz$ — единичное перемещение, $\overline{M}_1$ — эпюра единичных моментов.

Пример 2. Система с двумя степенями свободы n=2.



Система дифференциальных уравнений

$$y_1 + (f_{11} m_1 \ddot{y}_1 + f_{12} m_2 \ddot{y}_2) = 0$$

$$y_2 + (f_{21} m_1 \ddot{y}_1 + f_{22} m_2 \ddot{y}_2) = 0$$

Решения ищем в виде

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Система алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний A_1, A_2

$$A_1(1 - \omega^2 f_{11} m_1) - A_2 \omega^2 f_{12} m_2 = 0$$

$$-A_1 \omega^2 f_{21} m_1 + A_2(1 - \omega^2 f_{22} m_2) = 0$$

Определитель системы алгебраических уравнений, равный нулю, дает частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} (1 - \omega^2 f_{11} m_1) & -\omega^2 f_{12} m_2 \\ -\omega^2 f_{21} m_1 & (1 - \omega^2 f_{22} m_2) \end{vmatrix} = 0$$

Перепишем его относительно величины обратной квадрату частоты колебаний $1/\omega^2$

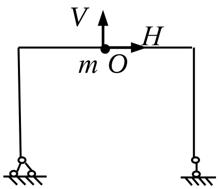
$$\begin{vmatrix} (\frac{1}{\omega^2} - f_{11} m_1) & f_{12} m_2 \\ f_{21} m_1 & (\frac{1}{\omega^2} - f_{22} m_2) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим биквадратное уравнение относительно параметра частоты $1/\omega$. Окончательное решение для частот собственных колебаний системы с двумя степенями свободы имеет вид

$$\omega_{1,2} = \left[\frac{f_{11} m_1 + f_{22} m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_{11} m_1 - f_{22} m_2}{2} \right)^2 + f_{12}^2 m_1 m_2} \right]^{-1/2}$$

Здесь f_{jk} —элементы матрицы единичных податливостей, вычисляемые по формуле Максвелла-Мора (j, k=1, 2).

$\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ — эпюры единичных изгибающих моментов.



К системе с двумя степенями свободы может быть отнесена и плоская рама, имеющая одну сосредоточенную массу m, которая может получать смещения в вертикальном и горизонтальном направлениях OV, OH в плоскости чертежа.

Для систем с большим числом степеней свободы $n \geq 3$ получаем частотное уравнение n-го порядка относительно ω^2, решение которого можно получить только численными методами.