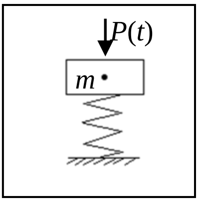
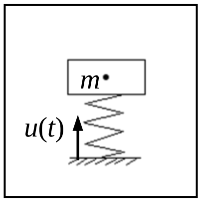
1.5. Вынужденные колебания механических систем

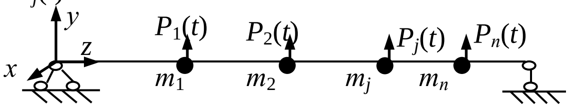
Колебания, которые вызываются переменным внешним воздействием, называются ***вынужденными колебаниями****.*

Вынужденные колебания поддерживаются в системе за счет притока энергии извне. Колебания могут быть вызваны действием переменной внешней силой $P(t)$, или вибрациями основания (кинематическое возбуждение), характеризуемое смещением $u(t)$.





Рассмотрим колебания механической системы упругий безинерционный стержень, несущий n сосредоточенных масс m_j, на которые действуют переменные во времени силы $P_j(t)$.



Под действием внешних сил $P_j(t)$ (j=1, 2,…n) система совершает вынужденные колебания. При ее движении на каждую массу m_j действует Даламберова сила инерции

$$\vec{I}_j = -m_j \ddot{y}_j .$$

Как и в случае свободных колебаний будем определять перемещение y_j массы m_j как сумму перемещений $y_{jк}$ от совокупности сил $P_к(t)$, $I_к(t)$, приложенных ко всем массам

$$y_j(t) = y_{j1}(P_1, I_1) + y_{j2}(P_2, I_2) + ... + y_{jj}(P_j, I_j) + ...$$

$$+ y_{jn}(P_n, I_n) = \sum_{k=1}^{n} y_{jk}(P_k, I_k) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \cdot (P_k + I_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \cdot (P_k - m_k \ddot{y}_k)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$y_j(t) + \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k \ddot{y}_k = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} P_k(t) \qquad (1)$$

j=1, 2,…n

Получили систему неоднородных дифференциальных уравнений вынужденных колебаний механической системы с n степенями свободы. В правую часть входит параметр внешней силы $P_к(t)$; f_{jk} — элементы матрицы единичных перемещений системы.

Важным в практическом отношении является случай *гармонического внешнего воздействия* $P_j(t) = P_{Aj}\cos\theta t$, где P_{Aj} — амплитудное значение внешней силы; θ — частота внешнего воздействия (частота возбуждения).

Для случая *установившихся вынужденных колебаний* при гармоническом внешнем воздействии решение для перемещений $y_j(t)$ ищем в виде

$$y_j(t) = A_j\cos\theta t, \qquad (2)$$

где A_j — амплитуда установившихся вынужденных колебаний.

Подставляя решение (2) в систему (1) получим систему неоднородных алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний.

$$A_j - \theta^2\sum_{k=1}^{n} f_{jk}m_k A_k = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}P_{Ak} \quad (3)$$

Решение для амплитуд A_j системы уравнений (3) можно получить по формулам Крамера

$$A_j(\theta) = \frac{\Delta_j(\theta)}{\Delta(\theta)} \qquad (4)$$

где $\Delta(\theta)$ — определитель системы (3)

$$\Delta(\theta) = \begin{vmatrix} (1-\theta^2 f_{11}m_1) & -\theta^2 f_{12}m_2 \ldots & -\theta^2 f_{1n}m_n \\ -\theta^2 f_{21}m_1 & (1-\theta^2 f_{22}m_2)\ldots & -\theta^2 f_{2n}m_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\theta^2 f_{n1}m_1 & -\theta^2 f_{n2}m_2\ldots & (1-\theta^2 f_{nn}m_n) \end{vmatrix} \quad (5)$$

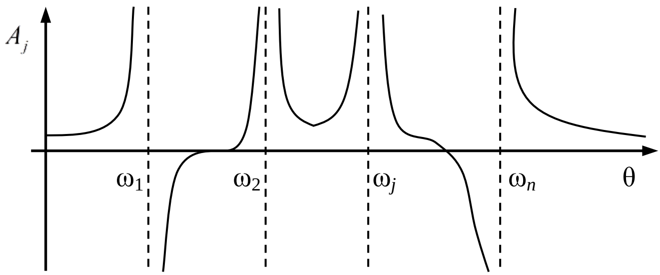
$\Delta_j(\theta)$ — алгебраическое дополнение, полученное путем замены *j*-го столбца в определителе (5) вектор-столбцом правой части системы (3).

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} f_{1k} P_{A1} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k} P_{A2} \\ \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} f_{nk} P_{An} \end{bmatrix}$$

Решения для амплитуд колебаний (4) имеют бесконечные значения, когда определитель системы (5) равен нулю. Равенство нулю определителя (5) приводит к частотному уравнению для определения собственных частот колебаний механической системы с *n* степенями свободы. Следовательно, при частотах возбуждения θ, равных собственным частотам колебаний системы ω_j получаем бесконечные решения для амплитуд колебаний — *резонанс*.

*Явление совпадения частоты возбуждения с одной из собственных частот колебаний системы, сопровождающееся резким возрастанием амплитуды колебаний называется **резонансом**.*

*График зависимости амплитуды колебаний массы m_j от частоты возбуждения называют **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы.***



Вертикальные асимптоты проведены в точках $\theta = \omega_j$ (j=1,2,…n) и соответствуют резонансным частотам, при которых $A_j \to \infty$.

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы (линейный осциллятор)

Уравнение колебаний при гармоническом внешнем воздействии $y_1 + f_{11} m_1 \ddot{y}_1 = f_{11} P_A \cos\theta t$.

Решение для установившихся вынужденных колебаний ищем в виде $y(t) = A\cos\theta t$.

Уравнение для амплитуд колебаний $A(1-\theta^2 f_{11} m_1) = f_{11} P_A$.

Амплитуда колебаний

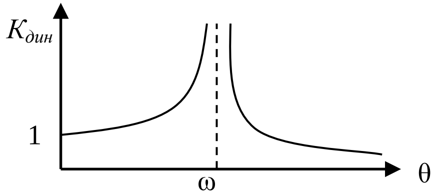
$$A = \frac{f_{11} P_A}{(1-\theta^2 f_{11} m_1)} = \frac{y_{ст}}{(1-\theta^2/\omega^2)} = K_{дин} y_{ст}$$

Здесь $y_{ст} = f_{11} P_A$ — статическое смещение в системе при ее статическом нагружении силой P_A;

$\omega = 1/\sqrt{f_{11} m_1}$ — частота собственных колебаний;

$$K_{дин} = \frac{1}{(1-\theta^2/\omega^2)}$$ — динамический коэффициент.

$K_{дин}$ показывает во сколько раз динамическое смещение в системе больше статического за счет действия сил инерции в колеблющейся системе ($K_{дин} = A / y_{ст}$).

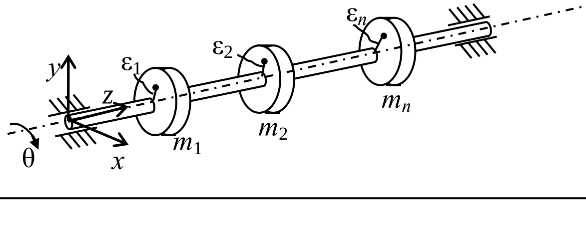


При расчетах на прочность механических систем, совершающих колебания, сначала производят необходимые расчеты при статическом нагружении, а затем полученные значения перемещений, напряжений умножают на $K_{дин}$.

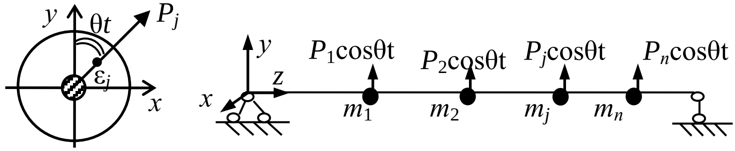
При проектировании механических систем, совершающих колебания необходимо проводить отстройку частоты возбуждения θ от частоты собственных колебаний ω, чтобы избежать бесконечно больших значений величин.

1.6. Изгибные колебания вращающихся валов. Понятие о критических скоростях

Рассмотрим вращающийся вал, несущий несбалансированные диски m_1, m_2, m_n, центры масс которых не лежат на оси вращения; ε_j — *эксцентриситеты масс* — расстояния от центров масс до оси вращения; θ — частота вращения вала.



При вращении вала с частотой θ вследствие дисбаланса масс возникают центробежные силы $P_j = m_j \varepsilon_j \theta^2$, вызывающие изгиб вала.



Будем полагать, что центры масс дисков лежат в одной плоскости. Тогда вертикальные составляющие центробежных сил инерции лежат в одной плоскости и равны

$$P_j \cos\theta t = m_j \varepsilon_j \theta^2 \cos\theta t\ .$$

Действующие центробежные силы инерции вызывают вынужденные колебания вала, описываемые системой уравнений

$$y_j + \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k \ddot{y}_k = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k \varepsilon_k \theta^2 \cos\theta t \quad (1)$$

j=1,2,…n

Решение системы уравнений (1) ищем в классе гармонических функций

$$y_j(t) = A_j \cos\theta t \qquad (2)$$

где A_j — смещение точек оси вращающегося вала.

Подставляя (2) в систему (1) получим систему алгебраических уравнений относительно A_j

$$A_j - \theta^2 \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k A_k = \theta^2 \sum_{k=1}^{n} f_{jk} m_k \varepsilon_k \qquad (3)$$

Решение системы (3) можно получить по формулам Крамера

$$A_j(\theta) = \frac{\Delta_j(\theta)}{\Delta(\theta)} \qquad (4)$$

где $\Delta(\theta)$ — определитель системы (3), $\Delta_j(\theta)$ — алгебраическое дополнение, описанное выше.

Запишем систему (3) и ее решение для случая системы с двумя степенями свободы n=2

$$\begin{cases} A_1(1-\theta^2 f_{11}m_1) - A_2\theta^2 f_{12}m_2 = \theta^2(f_{11}m_1\varepsilon_1 + f_{12}m_2\varepsilon_2) \\ -A_1\theta^2 f_{21}m_1 + A_2(1-\theta^2 f_{22}m_2) = \theta^2(f_{21}m_1\varepsilon_1 + f_{22}m_2\varepsilon_2) \end{cases} \qquad (3')$$

$$A_1(\theta) = \frac{\Delta_1(\theta)}{\Delta(\theta)}; \quad A_2(\theta) = \frac{\Delta_2(\theta)}{\Delta(\theta)} \qquad (4')$$

$$\Delta(\theta) = \begin{vmatrix} (1-\theta^2 f_{11}m_1) & -\theta^2 f_{12}m_2 \\ -\theta^2 f_{21}m_1 & (1-\theta^2 f_{22}m_2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(\theta) = \begin{vmatrix} \theta^2(f_{11}m_1\varepsilon_1 + f_{12}m_2\varepsilon_2) & -\theta^2 f_{12}m_2 \\ \theta^2(f_{21}m_1\varepsilon_1 + f_{22}m_2\varepsilon_2) & (1-\theta^2 f_{22}m_2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(\theta) = \begin{vmatrix} (1-\theta^2 f_{11}m_1) & \theta^2(f_{11}m_1\varepsilon_1 + f_{12}m_2\varepsilon_2) \\ -\theta^2 f_{21}m_1 & \theta^2(f_{21}m_1\varepsilon_1 + f_{22}m_2\varepsilon_2) \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta(\theta)$ системы уравнений (3) обращается в ноль при совпадении частоты вращения вала θ с одной из собственных частот ω_j изгибных колебаний вала. При этом значения перемещений A_j неограниченно возрастают.

Критическими скоростями вращающегося вала *называют скорости, численно совпадающие с собственными частотами изгибных колебаний вала, при которых резко возрастают деформации.*

В технике скорость вращения измеряется числом оборотов в минуту: $n = 30 \cdot \theta / \pi$. Резонансным частотам соответствуют критические числа оборотов $n_k = 30 \cdot \omega_k / \pi$.

При возрастании скорости вращения вала и после прохождения критических скоростей происходит самоцентрирование вала, когда $A_k \to (-\varepsilon_k)$, т.е. центры масс располагаются на оси вращения.

При проектировании вращающихся валов, несущих сосредоточенные диски необходимо проводить их балансировку, принимать меры, приводящие к уменьшению дисбаланса масс: $\varepsilon_j \to 0$.

При выборе рабочих режимов частот вращения $\theta_{раб}$ вала проводить отстройку от резонансных частот колебаний вала: $\theta_{раб} \neq \omega_j$.

При вращении вала с рабочей частотой $\theta_{раб}$ массы m_j получают смещение A_j от оси вращения. Возникающие амплитудные динамические усилия $P_{Aj} = m_j \theta^2 (\varepsilon_j + A_j)$ вызывают изгиб вала.

Поэтому необходимо проводить проверку прочности при изгибе $\sigma_{\max} = \max M_x / W_x \le [\sigma]$.