

1.7. Свободные колебания стержней с распределенной массой

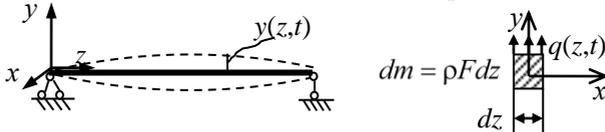
Упругие системы с распределенной массой и жесткостью (стержни, пластины, оболочки) обладают бесконечным числом степеней свободы.

Колебания таких систем описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

При решении задач динамики, кроме начальных условий, необходимо задавать граничные условия.

Для составления уравнений движения также воспользуемся принципом Даламбера.

Рассмотрим изгибные колебания стержня, вызванные отклонением от исходного положения равновесия.



Будем полагать площадь поперечного сечения F , жесткость на изгиб EI_x **постоянными** по длине стержня l .

Дифференциальное уравнение изгиба стержня относительно функции прогибов $y(z, t)$ имеет вид

$$EI_x \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q(z, t),$$

где $q(z, t)$ — распределенные (погонные) внешние силы — даламберовы силы инерции $q = -\rho F \partial^2 y / \partial t^2$

(ρ — плотность материала).

Уравнение свободных изгибных колебаний стержня

$$EI_x \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Построение решения об изгибных колебаниях шарнирно-опертого по краям стержня

Решение уравнения (1) будем искать методом разделения переменных с функцией времени из класса гармонических функций

$$y(z, t) = Y(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

где $Y(z)$ — функция формы колебаний стержня, ω — частота колебаний.

Подставляя (2) в уравнение (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно форм колебаний

$$EI_x \frac{d^4 Y}{dz^4} - \omega^2 \rho F Y = 0 \quad (3)$$

Введем частотный параметр $k^4 = \omega^2 \rho F / EI_x$ и перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{d^4 Y}{dz^4} - k^4 Y = 0 \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) ищется в виде

$$Y(z) = C \cdot e^{\alpha z} \quad (5)$$

где C — произвольная постоянная, α — характеристический показатель.

Подставляя (5) в (4) получим характеристическое уравнение

$$\alpha^4 - k^4 = 0 \quad (6)$$

корни которого равны

$$\alpha_{1,2} = \pm k ; \quad \alpha_{3,4} = \pm ik \quad (7)$$

Общее решение уравнения (4) можно записать через тригонометрические и гиперболические функции

$$Y(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \operatorname{ch} kz + C_4 \operatorname{sh} kz \quad (8)$$

Постоянные $C_1—C_4$ находятся из граничных условий. Для шарнирно-опертого по двум концам стержня граничные условия для форм колебаний $Y(z)$ на левом краю при $z=0$ и правом краю при $z=l$ имеют вид:

- 1) $Y(z=0) = 0$;
- 2) $M_x(z=0) = EI_x d^2Y(0)/dz^2 = 0$ (9)
- 3) $Y(z=l) = 0$
- 4) $M_x(z=l) = EI_x d^2Y(l)/dz^2 = 0$

Подстановка решения для форм колебаний (8) в граничные условия (9) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $C_1—C_4$. Эта система имеет нетривиальное решение в том случае, если её определитель равен нулю. Выпишем определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl & chkl & shkl \\ -\cos kl & -\sin kl & chk & shkl \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Раскрывая этот определитель, получим трансцендентное уравнение относительно частотного параметра $k = (\omega^2 \rho F / EI_x)^{1/4}$

$$2shkl \cdot \sin kl = 0 \quad (10')$$

Очевидно $shkl \neq 0$. Тогда остается

$$\sin kl = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) как и в случае системы с конечным числом степеней свободы имеет смысл частотного уравнения. Оно имеет счетное бесконечное множество корней

$$\chi_n = kl = \pi n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

С учетом обозначений для частотного параметра k получим соотношение для частот изгибных колебаний стержня

$$k = \frac{\chi_n}{l} = \frac{\pi n}{l} \cdot \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\rho F}{EI_x}}$$

$$\omega_n = \left(\frac{\chi_n}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}} \quad (12)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

Совокупность частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ образуют *спектр собственных частот*. Их нумеруют в порядке возрастания

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n .$$

Для определения форм колебаний необходимо найти постоянные интегрирования $C_1—C_4$.

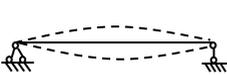
Рассматривая систему алгебраических уравнений, полученную после реализации граничных условий (9) можно получить $C_1=C_3=0$; $C_4=0$.

Решение для форм колебаний выражается с точностью до одной постоянной $C_2=C$.

$$Y(z) = C \sin kz = C \sin \frac{\pi n}{l} z \quad (13)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

Соответствующей частоте ω_n можно привести свою форму колебаний



$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}} ; \quad Y_1(z) = C \sin \frac{\pi z}{l}$$

$n=1$ -я форма, соответствует одна полуволна синусоиды.



$$\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}}; Y_2(z) = C \sin \frac{2\pi z}{l}$$

$n=2$ -я форма, соответствует две полуволны синусоиды.



$$\omega_3 = \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}}; Y_3(z) = C \sin \frac{3\pi z}{l}$$

$n=3$ -я форма

Чем выше частота колебаний стержня, тем сложнее форма колебаний.

Формы колебаний, соответствующие разным частотам ω_n и ω_m ортогональны между собой.

$$\int_0^l \rho F Y_n(z) \cdot Y_m(z) dz = \int_0^l \rho F \sin \frac{n\pi z}{l} \cdot \sin \frac{m\pi z}{l} dz = 0, (n \neq m)$$

Собственные формы $Y(z)$ изгибных колебаний стержней, соответствующие граничным условиям закрепления стержней и условиям ортогональности называются **балочными функциями**. Для шарнирно-опертого по краям стержня они имеют вид (13) и совпадают с формами потери устойчивости сжатых стержней.

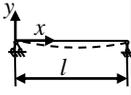
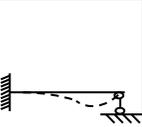
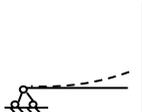
Частоты колебаний стержней с произвольными условиями закрепления краев

Для получения частотного уравнения типа (11) стержня с произвольными условиями закрепления краев необходимо записать по два соответствующих граничных условия по краям при $z=0$ и $z=l$ и составить определитель системы типа (10), дающий соответствующее частотное уравнение. После решения частотного уравнения находим корни χ_n , содержащие частоту колебаний стержня ω .

После нахождения корня χ_n можно вычислить частоту колебаний стержня с заданными условиями закрепления

$$\omega_n = \left(\frac{\chi_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho F}} \quad (14)$$

Сводная таблица решения задач об определении частот изгибных колебаний стержней

Схема, 1-я форма колебаний	Граничные условия		Частотное уравнение	Корни частотного уравнения		
	$z=0$	$z=l$		$n=1$	$n=2$	$n \geq 3$
	$Y = 0$ $\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$	$Y = 0$ $\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$	$\sin \chi_n = 0$	π	2π	πn
	$Y = 0$ $\frac{dY}{dz} = 0$	$Y = 0$ $\frac{dY}{dz} = 0$	$ch\chi_n \cos\chi_n = 1$	4,73	7,859	$\pi(n + \frac{1}{2})$
	$Y = 0$ $\frac{dY}{dz} = 0$	$\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$ $\frac{d^3 Y}{dz^3} = 0$	$ch\chi_n \cos\chi_n = -1$	1,875	4,694	$\pi(n - \frac{1}{2})$
	$Y = 0$ $\frac{dY}{dz} = 0$	$Y = 0$ $\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$	$tg\chi_n = th\chi_n$	3,927	7,069	$\pi(n + \frac{1}{4})$
	$\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$ $\frac{d^3 Y}{dz^3} = 0$	$\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$ $\frac{d^3 Y}{dz^3} = 0$	$ch\chi_n \cos\chi_n = 1$	0	4,73	$\pi(n - \frac{1}{2})$
	$Y = 0$ $\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$	$\frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$ $\frac{d^3 Y}{dz^3} = 0$	$tg\chi_n = th\chi_n$	0	3,927	$\pi(n - \frac{3}{4})$

1.8. Свободные колебания механических систем с линейным затуханием

Колебания механических систем, происходящие под действием восстанавливающих сил, со временем затухают из-за действия сил сопротивления.

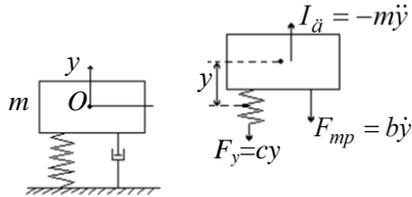
Силы сопротивления, приводящие к затуханию колебаний, уменьшению амплитуды колебаний называют **диссипативными силами**, а рассеяние энергии колеблющейся системы в окружающую среду называют **диссипацией энергии**.

В технике распространенным вариантом описания диссипации энергии является введение сил вязкого трения, пропорциональных скорости движения $F_{тр} = -b\dot{y}$.

Такие силы возникают при движении тела в вязкой жидкости, в гидравлическом амортизаторе (демпфере), схематически изображаемом в виде поршня в цилиндре. Направлены силы трения против движения тела. Коэффициент пропорциональности b называется **коэффициентом вязкого трения**.

Уравнение колебаний линейного осциллятора с учетом рассеяния энергии

Рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы — тело массой m , имеющее упругий амортизатор жесткостью c и гидравлический демпфер



При отклонении тела от положения равновесия оно начинает совершать колебания за счет восстанавливающих сил упругости $F_v = cy$.

Уравнение движения тела получим спроектировав все силы на ось OY , с учетом даламберовых сил инерции $I_{\ddot{a}} = -m\ddot{y}$.

$$\sum OY = 0; \quad I_{\ddot{a}} - F_{\delta\delta} - F_{\delta} = 0; \quad -m\ddot{y} - b\dot{y} - cy = 0$$

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (1)$$

Здесь $\omega_0 = (c/m)^{1/2}$ — собственная частота колебаний системы без учета сил сопротивления;

$\varepsilon = b/2m$ — коэффициент демпфирования, имеет размерность частоты (рад/сек).

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$y(t) = Ce^{\lambda t} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получим характеристическое уравнение

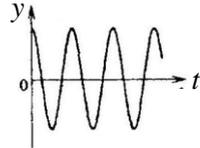
$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

Корни характеристического уравнения

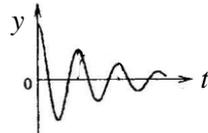
$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_0^2} \quad (4)$$

В зависимости от соотношения между параметрами ε и частотой ω_0 будем иметь различные виды движения системы.

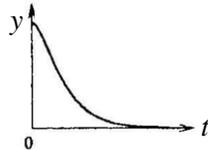
1) При $\varepsilon=0$ колебания имеют периодический характер.



2) При $\varepsilon < \omega_0$ будем иметь колебания с убывающей амплитудой.



3) При $\varepsilon > \omega_0$ имеем затухающее движение неколебательного характера.



Значение коэффициента демпфирования $\varepsilon = \omega_0$, соответствующее переходу от колебательного процесса затухания колебаний к монотонному называют **критическим**.

Построим решение задачи о свободных колебаниях в системе с вязким трением, вызванных начальным смещением y_0 с начальной скоростью v_0 при $t=0$.

После определения корней (4) характеристического уравнения (3) решение (2) принимает вид

$$y(t) = C_1 e^{(-\varepsilon - i\omega_\varepsilon)t} + C_2 e^{(-\varepsilon + i\omega_\varepsilon)t} \quad (5)$$

Здесь $\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$ — частота колебаний механической системы с учетом сил сопротивления; $i = \sqrt{-1}$;

C_1, C_2 — постоянные интегрирования, которые могут быть определены из начальных условий

$$\begin{aligned} y(t=0) &= y_0; \rightarrow C_2 = y_0; \\ \dot{y}(t=0) &= v_0; \rightarrow C_1 = (v_0 + \varepsilon y_0) / \omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

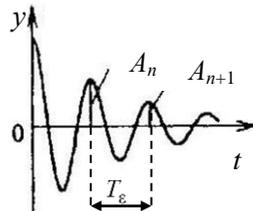
Решение (5) можно записать в виде

$$y(t) = A e^{-\varepsilon t} \cos(\omega_\varepsilon t - \varphi) \quad (6)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ — амплитуда колебаний в рассматриваемый момент времени t ; $\varphi = \arctg(C_2/C_1)$ — фаза колебаний.

Решение (6) описывает колебания с убывающей амплитудой. По аналогии с периодическими колебаниями можно ввести время совершения одного колебания — период

$$T_\varepsilon = 2\pi / \omega_\varepsilon.$$



Для оценки величины диссипации (рассеяния) энергии за один цикл колебаний вводят понятие логарифмического декремента затухания колебаний

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \varepsilon T_\varepsilon = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}} \quad (7)$$

В технике для определения коэффициента демпфирования ε экспериментально определяют отношение двух соседних амплитуд A_n и A_{n+1} , измеренных через промежутки времени T_ε . Для малых $\varepsilon \ll \omega_0$ из соотношения (7) будем иметь

$$\varepsilon \approx \frac{\delta\omega_0}{2\pi} = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

При вынужденных колебаниях в системах с диссипацией совпадение частоты возбуждения с какой-либо частотой собственных колебаний системы не приводит к неограниченному росту амплитуд колебаний. Амплитуды колебаний имеют большие, но конечные значения.

Динамический коэффициент для линейного осциллятора с линейным затуханием в случае гармонического возбуждения с частотой θ имеет вид

$$K_\theta(\theta) = \left[\left(1 - \theta^2/\omega_0^2\right)^2 + \left(2\varepsilon\theta/\omega_0^2\right)^2 \right]^{-1/2} K_0$$

С увеличением параметра относительного демпфирования $\gamma = \varepsilon/\omega_0 = 0,1; 0,2; 0,3 \dots$ амплитуды колебаний в системе с демпфированием понижаются.

