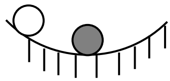
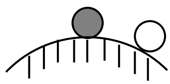
21.УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.

Равновесие называется ***устойчивым***, если система, будучи выведенной из этого состояния каким либо воздействием, вновь возвращается в исходное состояние после удаления воздействия.



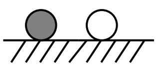
Шарик, находящийся на вогнутой поверхности, будучи отклоненным от исходного состояния равновесия стремится к нему вернуться после снятия воздействия.

Равновесие называется ***неустойчивым***, если система, не возвращается в исходное состояние после удаления воздействия.

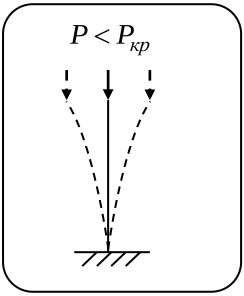


Шарик, находящийся на вершине выпуклой поверхности после отклонения от исходного состояния вновь к нему не возвращается.

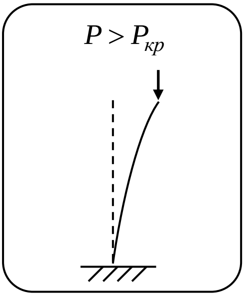
Равновесие называется ***безразличным***, если система, будучи отклоненной от него остается в равновесии и в новом положении.



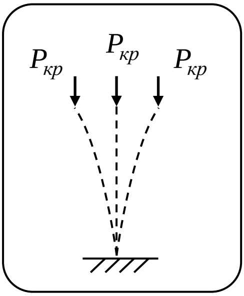
Шарик, находящийся на плоскости остается в равновесии при любых отклонениях от исходного состояния.



При небольших значениях сжимающих сил прямолинейный стержень, будучи отклоненным от исходного состояния вновь вернется к нему после удаления воздействия.



При сжимающих силах, больших некоторых критических значений, стержень теряет исходную прямолинейную форму равновесия.



Безразличное состояние равновесия при его сжатии критической силой (прямолинейная и искривленная ось стержня).

Критической силой $P_{кр}$ называется наименьшее значение продольной силы, при котором исходная прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой.

Продольным изгибом называется изгиб стержня под действием продольной силы. (При продольной силе возникают поперечные деформации.)

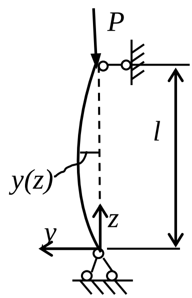
Вывод формулы для критической силы шарнирно-опертого стержня.

Основные допущения:

1. Материал стержня упругий, справедлив закон Гука при растяжении-сжатии
$$\sigma = E\varepsilon \quad (\sigma < \sigma_{пц})$$
2. Деформации при продольном изгибе малы
$$y(z) << l$$
3. Для кривизны стержня справедливо приближенное соотношение
$$\chi = \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}$$

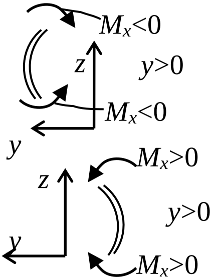
Рассмотрим стержень длиной l, с постоянной жесткостью на изгиб $EI_x = const$, сжатый силой P.

Определим значение продольной силы P, при которой стержень наряду с прямолинейной формой равновесия будет иметь и искривленные формы равновесия.



Изгибающий момент в любом сечении стержня $M_x = -P \cdot y$.

Согласно ранее принятому правилу знаков при положительном прогибе $y(z) > 0$ изгибающий момент отрицательный $M_x < 0$.



Уравнение продольного изгиба

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{P\cdot y}{EI_x} \text{ или}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2y = 0 \text{, где } k^2 = \frac{P}{EI_x}.$$

Решение дифференциального уравнения

$$y(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Для шарнирно-опертого по краям стержня граничные условия имеют вид

1) $y(z) = 0$; 2) $y(z = l) = 0$

Реализуя условия 1), 2) получим

C_2=0; $C_1 \sin kl = 0$

При продольном изгибе $C_1 \neq 0$;

Следовательно $\sin kl = 0$

Это условие выполняется при

$kl = \pi n$, где n=1, 2, 3,…

или $\frac{P}{EI_x} l^2 = (\pi n)^2$

или $\boxed{P_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EI_x}{l^2}}$, n=1, 2, 3…

Минимальное значение продольной силы, при которой возникает продольный изгиб (n=1) шарнирно-опертого стержня называют эйлеровой силой

$$\boxed{P_э = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}}$$

Решение дифференциального уравнения продольного изгиба для шарнирно-опертого стержня

$$\upsilon(z) = C_1 \sin \frac{\pi z}{l},$$

что соответствует образованию одной полуволны синусоиды, укладывающейся на стержне длиной *l*. При этом предполагается, что изгиб происходит относительно главной центральной оси *Ox* сечения стержня.

В общем случае потеря устойчивости (продольный изгиб) происходит относительно оси с наименьшим моментом инерции — $I_{\min}$.

Обобщение формулы Эйлера для других случаев закрепления стержней.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(l/n)^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

где $\mu = \frac{1}{n}$ — коэффициент приведения длины стержня, показывающий во сколько раз следует увеличить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной *l* при рассматриваемых условиях закрепления стержня;

n — число полуволн синусоиды упругой линии стержня, укладывающихся на длине *l* при продольном изгибе стержня.

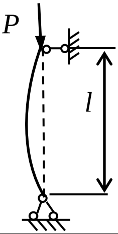
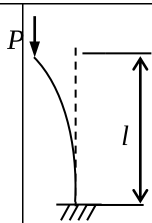
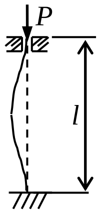
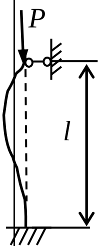
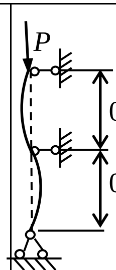
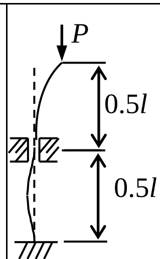
схема			
n	1	0.5	2
μ	1	2	0.5
$P_{кр}$	$\dfrac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\dfrac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}$	$\dfrac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$

схема			
n	$\sqrt{2}$	2	2+0.5=2.5
μ	$1/\sqrt{2}$	0.5	0.4
$P_{кр}$	$\dfrac{2\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\dfrac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\dfrac{\pi^2 EI_{\min}}{1.6l^2}$

При нагружении стержней силами, равными или большими критических значений в них возникают упругие деформации, исчезающие после снятия внешних сил.

Границы применимости формулы Эйлера.

При выводе формулы Эйлера предполагалось, что деформации упругие и справедлив закон Гука, т.е. критические напряжения не превышают предела пропорциональности материала $\sigma_{пц}$ стержня ($\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\min})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2}$$

Здесь введено $i_{\min} = (I_{\min}/F)^{1/2}$ — минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня,

$\lambda_{\max} = \mu l / i_{\min}$ — максимальная гибкость стержня относительно главной центральной оси поперечного сечения.

$$\lambda_{\max} = \max\left(\lambda_x = \mu l / i_x, \lambda_y = \mu l / i_y\right).$$

Условие применимости формулы Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \le \sigma_{пц}; \quad \lambda_{\max} \ge \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

Применение формулы Эйлера возможно для стержней, у которых их собственная гибкость больше некоторого предельного значения $\lambda_{пред}$, зависящего от свойств материала $\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E/\sigma_{пц}}$

Потеря устойчивости стержней при упруго-пластических деформациях.

Для стержней, у которых собственная гибкость $\lambda_{\max}$ меньше предельного значения при потере устойчивости при их нагружении напряжения превышают предел пропорциональности и возникают пластические (остаточные) деформации.

Расчет критической силы проводят по формуле Ф.С.Ясинского

$$\boxed{P_я = (a - b\lambda_{\max})F},$$

где *a, b* — некоторые коэффициенты, экспериментально устанавливаемые для различных материалов и имеющие смысл механических характеристик материалов при продольном изгибе стержней.

Обобщение результатов для расчетов критических сил при сжатии стержней

$$P_{кр} = \begin{cases} P_э = \dfrac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}, & \text{при } \lambda_{\max} > \lambda_{пред} \text{ (стержни большой гибкости)} \\ P_я = (a - b\lambda_{\max})F, & \text{при } \lambda_* < \lambda < \lambda_{пред} \text{ (стержни средней гибкости)} \\ P_T = \sigma_T F, & \text{при } \lambda < \lambda_* \text{ (стержни малой гибкости)} \end{cases}$$

где $\lambda_{\max} = \mu l / i_{\min}$, $\lambda_{пред} = \pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}$, $\lambda_* = (a - \sigma_T)/b$