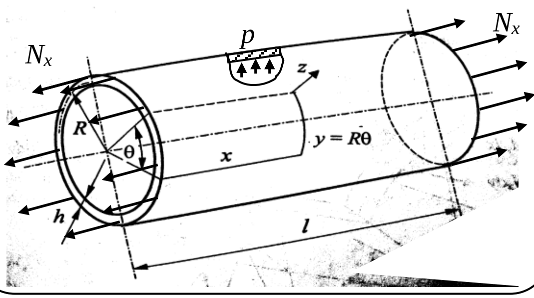
3.ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.

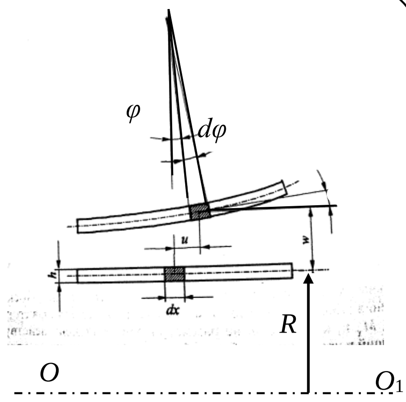
Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку толщиной h, радиусом срединной поверхности R, нагруженную нормальным давлением p и растягивающими продольными усилиями N_x.



Положение точек оболочки на срединной поверхности будем определять координатой x вдоль образующей и криволинейной координатой $y = R\theta$ в окружном направлении. Координата z направлена по нормали к срединной поверхности.

При осесимметричном нагружении оболочки и закреплении краев все внутренние силовые факторы зависят только от координаты x. Задача определения напряженно-деформированного состояния является одномерной.

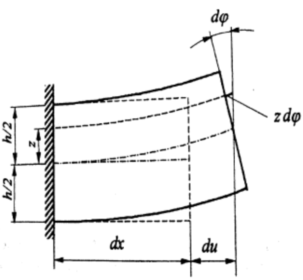
Нормальные перемещения в цилиндрических оболочках.



w — перемещение точек срединной поверхности оболочки по нормали — вдоль оси Oz (нормальный прогиб)

u — перемещение точек срединной поверхности оболочки в продольном направлении — вдоль оси Ox.

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$ — угол поворота поперечного сечения оболочки.

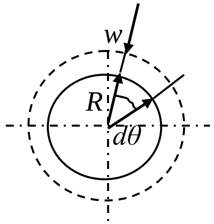


Относительная продольная деформация произвольного волокна, отстоящего на расстоянии z от срединной поверхности оболочки

$$\varepsilon_x = \frac{du - zd\varphi}{dx} = \frac{du}{dx} - z\frac{d\varphi}{dx} =$$

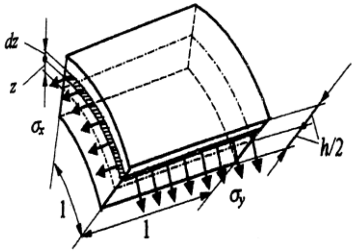
$$= \frac{du}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2} = \varepsilon_0 - z\frac{d^2w}{dx^2}$$

Здесь du — удлинение элемента оболочки dx;
$d\varphi$ — угол поворота правого поперечного сечения элемента;
$\varepsilon_0 = \dfrac{du}{dx}$ — относительная продольная деформация срединной поверхности оболочки.



Относительная деформация в окружном направлении

$$\varepsilon_y = \varepsilon_\theta = \frac{(R+w)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{w}{R}$$



Нормальные напряжения в поперечном сечении оболочки на расстоянии z от срединной поверхности оболочки определяем согласно закону Гука.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\left(\varepsilon_0 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \nu\frac{w}{R}\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{w}{R} + \nu\left(\varepsilon_0 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]$$

Внутренние силовые факторы при осесимметричной деформации оболочки.

Продольное усилие

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{E}{(1-\nu^2)}\int_{-h/2}^{h/2}\left[\left(\varepsilon_0 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \nu\frac{w}{R}\right]dz =$$

$$= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_0 + \nu\frac{w}{R}\right]$$

Окружное усилие

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{w}{R} + \nu \left(\varepsilon_0 - z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] dz =$$

$$= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[\frac{w}{R} + \nu \varepsilon_0 \right]$$

Исключая ε_0 в соотношениях для N_x, N_y получим

$$N_y = \nu \cdot N_x + \frac{Eh}{R} w(x)$$

Изгибающий момент в продольном направлении

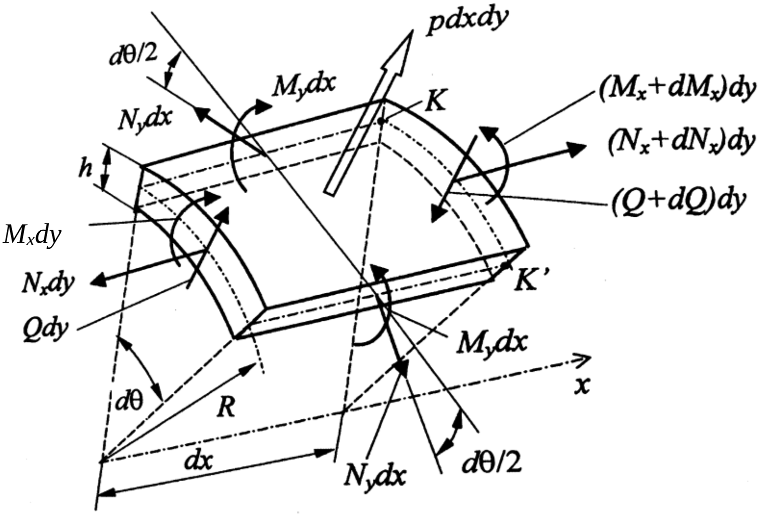
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} = D \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Изгибающий момент в окружном направлении

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z dz = \nu \cdot D \frac{d^2 w}{dx^2} = \nu \cdot M_x$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки при ее изгибе

Уравнения равновесия для элемента цилиндрической оболочки в усилиях.



Рассмотрим равновесие элемента оболочки размерами dx, $dy = Rd\theta$, нагруженного нормальным давлением p, безмоментными погонными продольными N_x и окружными N_y усилиями и погонными изгибающими моментами M_x — в направлении оси x (продольный изгибающий момент), и M_y — в направлении оси y (окружной изгибающий момент). Все внутренние силовые факторы являются погонными, т.е. отнесенными к единице длины.

Спроектируем все силы на ось Ox

$$-N_x dy + (N_x + dN_x)dy = 0 \;\rightarrow \qquad \boxed{dN_x = 0}$$

Спроектируем все силы на направлении нормали Oz

$$pdxdy + Qdy - (Q + dQ)dy - 2N_y dx \sin\left(d\theta/2\right) = 0$$

Учитывая, что $\sin(d\theta/2) = d\theta/2 = dy/2R \rightarrow$

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} + \frac{N_y}{R} = p}$$

Третьим уравнением равновесия будет равенство нулю моментов всех сил, действующих на элемент, относительно правого края $кк'$

$$M_x dy - (M_x + dM_x)dy + Qdxdy + pdxdy \cdot dx/2 -$$
$$- 2N_y dx\, dx/2 \sin\left(dx/2\right) = 0$$

Пренебрегая слагаемыми 2-го и более высокого порядка малости получим

$$\boxed{\frac{dM_x}{dx} = Q}$$

Уравнение равновесия цилиндрической оболочки в перемещениях, его интегрирование.

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -\frac{N_y}{R} + p\,; \qquad \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_y}{R} = p\,;$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \frac{1}{R}\left(\nu \cdot N_x + \frac{Eh}{R}w\right) = p$$

$$\boxed{D\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}w = \left(p - \nu\frac{N_x}{R}\right)}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения 4-го порядка относительно нормального прогиба оболочки *w(x)* складывается из общего решения однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения $w_*(x)$ неоднородного уравнения

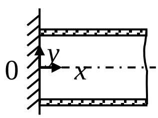
$$w(x) = e^{-kx}\left(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx\right) + e^{kx}\left(C_3 \cos kx + C_4 \sin kx\right) + w_*,$$

где $w_*(x) = \dfrac{R^2}{Eh}\left(p - \nu \dfrac{N_x}{R}\right)$ — частное решение, зависит от внешних нагрузок, действующих на оболочку

$$k = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$$ — волновое число

$C_1 \div C_4$ — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на краях оболочки. На каждом краю оболочки при $x = 0$ и при $x = l$ формулируют по два краевых условия.

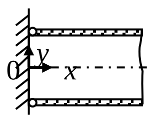
Жестко-закрепленный край



$$w = 0$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = 0$$

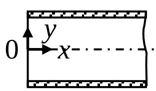
Шарнирно-опертый край



$$w = 0$$

$$M_x = D\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

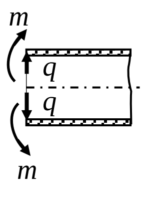
Свободный край



$$M_x = D\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$Q = D\frac{d^3 w}{dx^3} = 0$$

Нагруженный край



$$M_x = D\frac{d^2 w}{dx^2} = m$$

$$Q = D\frac{d^3 w}{dx^3} = q$$

Краевой эффект в круговых цилиндрических оболочках.

Общее решение для нормального прогиба оболочки содержит слагаемые, описывающие изгибные деформации оболочки ($e^{(\bullet)}, \sin(\cdot), \cos(\cdot)$) и безмоментные деформации оболочки (частное решение).

Местный изгиб оболочки, возникающий в результате закрепления ее краев, резкого изменения размеров и формы оболочки, а также в местах приложения сосредоточенных нагрузок, называется ***краевым эффектом.***

Для тонкостенных оболочек, у которых $h/R << 1$ в связи с быстрым изменением функции $e^{\pm kx}$ слагаемые, соответствующие изгибным деформациям дают существенный вклад в решение для $w(x)$ только в зоне краевого эффекта, протяженность которой оценивается величиной $\lambda = \pi/k$, называемой *длиной полуволны краевого эффекта.*

Длина полуволны краевого эффекта для металлических оболочек, имеющих коэффициент Пуассона $\nu \approx 0{,}3$ равна

$$\lambda = \pi/k = \pi \sqrt[4]{\frac{R^2 h^2}{3(1-\nu^2)}} \approx 2{,}5\sqrt{Rh}$$

При изменении продольной координаты x от 0 до λ функция e^{-kx} уменьшается в $e^{\pi} \approx 23$ раза. Таким образом, если длина цилиндрической оболочки удовлетворяет условию $l > 2\lambda$, то оболочку вблизи края $x=0$ можно рассматривать как полубесконечную, а в решении для $w(x)$ из условия ограниченности решения при $x \to \infty$ положить $C_3 = C_4 = 0$.

Решение, основанное на концепции краевого эффекта вблизи края x=0 для $0<x\leq\lambda$ имеет вид

$$w(x) = e^{-kx}(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + w_*$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \left[\frac{dw_*}{dx} - ke^{-kx}((C_1 - C_2)\cos kx + (C_1 + C_2)\sin kx)\right]$$

$$M_x = D\frac{d^2w}{dx^2} = D\left[\frac{d^2w_*}{dx^2} + 2k^2e^{-kx}(C_1 \sin kx - C_2 \cos kx)\right]$$

$$Q = D\frac{d^3w}{dx^3} = D\left[\frac{d^3w_*}{dx^3} + 2k^3e^{-kx}((C_1 + C_2)\cos kx - (C_1 - C_2)\sin kx)\right]$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z dz = \nu \cdot D\frac{d^2w}{dx^2} = \nu \cdot M_x$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из граничных условий, сформулированных на краю x=0.