

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

В.Е. ХРОМАТОВ, О.В. НОВИКОВА, Е.В. ПОЗНЯК,
А.В. БЕСОВА, Т.Н. КОМИССАРОВА

**ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Курсовое проектирование

Учебное пособие к курсовому проектированию

по курсу

“Механика материалов и конструкций”

для студентов, обучающихся по направлениям
«Энергетическое машиностроение», «Прикладная механика»,
«Машиностроение», «Мехатроника и робототехника»

Москва
Издательство МЭИ
2019

УДК 539.4
ББК
30.121
Х-941

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Подготовлено на кафедре робототехники, мехатроники,
динамики и прочности машин

Рецензенты: докт. техн. наук, проф. А.С. Сидоренко, МАИ (НИУ)
докт. техн. наук, проф. В.П. Чирков, НИУ «МЭИ»

Под редакцией к.т.н. профессора кафедры робототехники, мехатроники,
динамики и прочности машин В.П. Радина

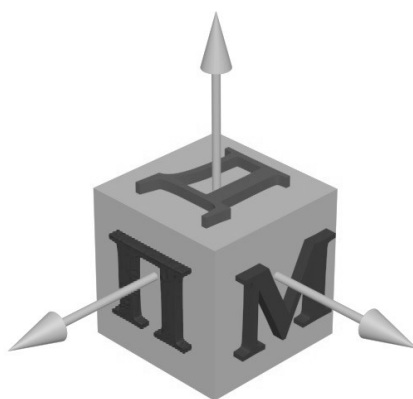
Авторы: В.Е. Хроматов, О.В. Новикова, Е.В. Позняк,
А.В. Бесова, Т.Н. Комиссарова

Х 941 Прочность, устойчивость, колебания элементов
машиностроительных конструкций. / В.Е. Хроматов,
О.В. Новикова, Е.В. Позняк, А.В. Бесова, Т. Н. Комиссарова. – М.:
Издательство МЭИ, 2019. - 87 с.

Представлены задачи расчетов на прочность и жесткость при силовом нагружении таких элементов конструкций, как стержневые статически неопределимые системы; толстостенные трубопроводы; тонкостенные оболочки вращения, рассчитываемые по безмоментной теории и при осесимметричном изгибе; круговые пластины, задачи устойчивости стержней. Динамические задачи рассматриваются на примерах определения критических скоростей вращающихся валов и собственных частот изгибных колебаний стержней с распределенной массой.

Пособие предназначено для студентов 2 курса Института Энергомашиностроения и механики, обучающихся по направлениям 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.03 Прикладная механика, 15.03.06 Мехатроника и робототехника.

УДК 539.4
ББК 30.121



ПРЕДИСЛОВИЕ

При изложении курсов механики, физики, математики весьма продуктивным и компактным является структурно-логический метод изложения учебных дисциплин [1]. Метод легко может быть приспособлен и весьма эффективен при подготовке электронных учебных пособий. За счет компактности изложения теоретического материала появляются дополнительные возможности включения в учебные пособия большого числа практических примеров, которые можно найти и в других учебниках по сопротивлению материалов, механике материалов и конструкций [2, 3].

При доказательстве основных теорем математики, выводе расчетных формул курсов прикладной механики весьма важной является совместная творческая деятельность преподавателя и студентов, так или иначе, но участвующих в процессе вывода формул и доказательстве теорем. Так и формируется аналитическое мышление. Вместе с тем конечной задачей инженера, специалиста с высшим образованием является умение применять полученные теоретические знания к решению практических задач. Причем на выходе из ВУЗа от специалиста требуется умение решать прикладные задачи. Все это заставляет сместить акценты при изучении фундаментальных дисциплин — математики, физики, теоретической и прикладной механики. При чтении лекций часть теоретического материала можно отнести к самостоятельной проработке студентами по рекомендованной учебной литературе. На лекциях и практических занятиях следует решать большее число практических примеров и задач. Помочь студентам в этом вопросе могут переизданные и вновь изданные учебные пособия [4-6], в которых содержатся примеры решения основных задач по курсу «Механика материалов и конструкция» (ММК) с примерами составления

программ решения задач с использованием математического обеспечения MathCad в [4] и MatLab в [6]. В экзаменационный билет обязательно включается практическая задача, перечень которых также имеется в учебных пособиях [7-10] и заранее известен студентам.

Пересмотр методики преподавания высшей математики в МЭИ был предложен еще в 70-80-х годах прошлого столетия и изложен в учебных пособиях М.Л. Краснова, А.И. Киселева, Г.И. Макаренко, например «Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие для вузов – М.: Высшая школа, 1978». В основе их метода лежит идея *«учить будущих инженеров сложным разделам высшей математики при минимальном изложении теории на рассмотрении подробных решений тщательно подобранных типовых примеров»*.

Опыт преподавания дисциплин прикладной механики в НИУ «МЭИ» показывает, что основное внимание должно уделяться практической работе студентов над соответствующими расчетными заданиями по сопротивлению материалов и прикладной механике, некоторые из которых представлены в пособии [4]. При решении этих задач уже на младших курсах студенты сталкиваются с постановкой практических задач проектирования, необходимостью применения методов прикладной математики и математических пакетов, необходимостью доведения расчетов до числовых результатов. Отсутствие числовых результатов - значения напряжений, перемещений, коэффициента запаса прочности не позволяет сделать вывод о несущей способности конструкции. Поэтому все практические задачи на семинарских занятиях должны быть доведены до числа. Проверка усвоения материала проводится и при написании студентами в течение семестра контрольных работ. Задачи для контрольных работ могут быть почерпнуты из [7-9]. Вместе с тем при достаточном количестве задачник и учебных пособий ощущается нехватка простых по своей постановке и расчетным схемам задач. Кроме того, при проведении контрольных работ и составлении экзаменационных билетов необходимо обеспечить многовариантность задач.

Одной из отличительных особенностей учебных пособий [1, 10] является включение в них биографических очерков о научной и преподавательской деятельности выдающихся преподавателей МЭИ и ученых-основателей специальности и кафедры Динамики прочности машин. На наш взгляд, в учебных пособиях, издаваемых в ВУЗах, включение в них сведений о научных школах специализирующих кафедр ВУЗа способствует воспитанию патриотизма и приобщению молодежи к науке [15-17]. В [10] содержатся исторические сведения о научной деятельности основоположников механики, которые также включаются в

экзаменационную программу и билеты по соответствующим курсам направления подготовки «Прикладная механика» в НИУ «МЭИ».

В данном учебном пособии представлены постановка задач и примеры их решения с использованием математического обеспечения MathCad [11, 12] по основным разделам курса ММК: расчет статически неопределимых балок и рам методом сил; расчет толстостенных цилиндров и трубопроводов под действием наружного и внутреннего давления – осесимметричная задача теории упругости; расчет тонкостенных оболочек, заполненных жидкостью по безмоментной теории; исследование осесимметричной деформации при изгибе круговых цилиндрических оболочек и круговых пластин. В задачах устойчивости и динамики стержневых систем рассматриваются задачи расчета на устойчивость двухпролетных стержней, проектирования равноустойчивого поперечного сечения. Задачи определения критических скоростей вращающихся валов с двумя дисками и задачи расчета спектров собственных колебаний стержней с распределенной массой. В приложениях приводятся основные расчетные формулы, необходимые для решения представленных задач и таблицы числовых данных. Каждый студент получает индивидуальную расчетную схему и самостоятельно выполняет задачи курсового проектирования на основе примеров решения, изложенных на практических занятиях. Предлагаемое учебное пособие поможет учащимся решить эти задачи.

Пособие предназначено для студентов 2 курса института Энергомашиностроения и механики, обучающихся по направлениям 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», изучающих дисциплину «Механика материалов и конструкций» и может быть рекомендовано при изучении других родственных дисциплин, содержащих аналогичные задачи.

Глава 1. Задачи курсового проекта

Задача 1. Расчет статически неопределимой балки методом сил

Произвести проектирование перекрытия строительной конструкции, представленной дважды статически неопределимой балкой.

1. Рассмотреть два варианта основной системы, один из которых получен путем включения врезных шарниров, а другой – при непосредственном отбрасывании лишних связей. Построить эпюры единичных моментов и выбрать оптимальный вариант основной системы.
2. Построить эпюры грузовых изгибающих моментов, вычислить коэффициенты канонических уравнений метода сил, решить уравнения относительно лишних неизвестных.
3. Построить эпюры изгибающих моментов. Провести деформационную проверку путем перемножения эпюры изгибающих моментов и эпюр единичных сил. Оценить погрешность расчетов (допускается погрешность не более 5%).
4. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям изгиба подобрать поперечное сечение балки стандартного прокатного профиля (двутавр или швеллер).
5. Вычислить перемещение точки К.

Принять $[\sigma]=160$ МПа, $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Задача 2. Расчет плоской рамы методом сил

Плоская рама изготовлена из стержней стандартного прокатного профиля и нагружена внешними силами. Материал стержней — сталь, $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа.

1. Методом сил раскрыть статическую неопределимость рамы.
2. Построить эпюры внутренних силовых факторов N_z , Q_y , M_x .
3. Определить коэффициент запаса прочности рамы по нормальным напряжениям.
4. Для линейного закона изменения температуры по высоте поперечного сечения рамы определить перемещения точки К от температурного воздействия.

Указание: Применить формулу Максвелла–Мора, учесть продольную и изгибную температурные деформации. Принять начальную монтажную температуру $T_0 = 20^\circ\text{C}$, температуру наружной и внутренней поверхности рамы $T_1 = 5^\circ\text{C}$, $T_2 = 40^\circ\text{C}$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹.

Задача 3. Осесимметричная задача теории упругости

1. Привести уравнения равновесия в напряжениях и в перемещениях для осесимметричной задачи теории упругости, общее решение задачи в перемещениях и напряжениях.
2. Для заданной схемы нагружения цилиндрического тела давлением p записать граничные условия и решить краевую задачу: определить постоянные интегрирования и выписать решение задачи через параметр давления p .
3. По заданному критерию прочности определить допускаемое значение давления $[p]$.
4. При найденном значении давления $[p]$ построить эпюры радиальных и окружных напряжений σ_r , σ_θ и радиальных перемещений $u(r)$. (Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$).
5. В опасной точке цилиндра выделить элемент и указать действующие на его гранях радиальные и окружные напряжения.

Задача 4. Расчет тонкостенной оболочки по безмоментной теории

Тонкостенный резервуар с толщиной стенок h заполнен жидкостью плотностью ρ и нагружен давлением газа p_0 .

1. Используя безмоментную теорию для оболочек вращения – уравнение Лапласа и метод сечений построить эпюры меридиональных и окружных напряжений по участкам.
2. По заданному критерию прочности определить толщину стенки резервуара.

Задача 5. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки

1. Привести уравнение осесимметричной изгибной деформации оболочки и решение типа краевого эффекта для прогибов, углов поворотов сечений оболочки, изгибающих моментов и поперечных сил. Для заданной расчетной схемы стальной оболочки оценить длину зоны краевого эффекта $x_{кз} \approx \lambda \approx 2.5\sqrt{Rh}$.
2. Записать граничные условия и определить постоянные интегрирования аналитически или численно (с использованием математического пакета MathCAD или Matlab).
3. Аналитически или численно построить решение для прогибов и изгибающих моментов и соответствующие эпюры (графики) $w(x)$, $M_x(x)$ в области краевого эффекта $0 \leq x \leq x_{кз}$.
4. Проверить прочность оболочки по критерию Сен-Венана.

Задача 6. Расчет круговой пластины при осесимметричном нагружении

В качестве расчетной схемы элемента парогенератора принимается круговая (кольцевая) пластина постоянной толщины, нагруженная осесимметричной нагрузкой.

1. Привести уравнение изгиба пластин и его решение для прогибов, углов поворотов и изгибающих моментов в полярных координатах.
2. Для заданной расчетной схемы записать граничные условия и определить постоянные интегрирования аналитически или численно (с использованием математического пакета MathCAD или Matlab).
3. Аналитически или численно построить решение для прогибов, радиальных и окружных изгибающих моментов и соответствующие эпюры (графики) $w(r)$, $M_r(r)$, $M_\theta(r)$.
4. Для опасных точек определить радиальные и окружные напряжения изгиба, показать вид напряженного состояния в опасных точках.
5. Из расчетов на прочность и жесткость определить допускаемое значение внешней нагрузки.

Задача 7. Устойчивость стержней

Прямолинейный стальной стержень нагружен осевой силой P .

1. Дать определение критической силы для сжатого стержня, определение гибкости стержня, понятие предельной гибкости. Привести формулы для расчета критической силы в зависимости от его гибкости.
2. Для стержня составного сечения подобрать размер c из условия равно-устойчивости стержня относительно главных центральных осей.
3. Из расчета на устойчивость по коэффициенту продольного изгиба $\varphi(\lambda)$ определить допускаемое значение внешней силы P .
Принять $[\sigma]=160$ МПа.

Задача 8. Изгибные колебания вращающихся валов

Промежуточный вал редуктора вращается с постоянной частотой вращения. На вал посажены диски массами M_1 , M_2 с эксцентриситетами ε_1 и ε_2 , лежащими в одной плоскости.

1. Рассматривая вал с дисками как систему с двумя степенями свободы, записать уравнения малых вынужденных колебаний вала.
2. Вычислить частоты собственных колебаний ω_1 , ω_2 и соответствующие им критические числа оборотов вала n_1 , n_2 .

3. Вычислить амплитуды смещений дисков вращающегося вала при рабочем числе оборотов, равном $n_{\text{раб}} = (n_1 + n_2)/2$, и наибольшие напряжения изгиба в поперечных сечениях вала.
4. Вывести формулы для прогибов вала в местах крепления дисков в зависимости от угловой частоты вращения вала. Построить амплитудно-частотные характеристики системы (выполняется факультативно).

Задача 9. Колебания стержней с распределенной массой

1. Для заданного стержня постоянного поперечного сечения привести уравнение свободных изгибных колебаний, его решение в общем виде и записать граничные условия, соответствующие предложенной схеме.
2. Используя справочные данные, выписать соотношения для частот свободных изгибных колебаний, привести значения первых трех корней частотного уравнения.
3. Произвести подбор размеров поперечного сечения стержня из условия ограничения первой собственной частоты колебаний $\omega_1 < [\omega] = 1000$ Гц.
4. Вычислить вторую и третью частоты колебаний стержня, привести соответствующие им формы колебаний.

Глава 2. Примеры решения задач курсового проекта с использованием математического пакета MathCad

Задача 1. Расчет статически неопределимой балки методом сил

Произвести проектирование перекрытия строительной конструкции, представленной дважды статически неопределимой балкой (рис. 1.1).

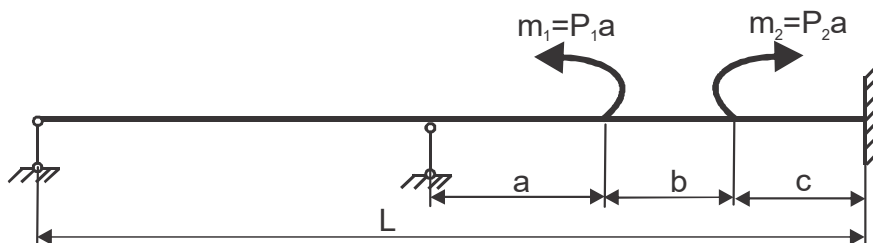


Рис. 1.1. Расчетная схема

Исходные данные:

$$\begin{aligned} L &:= 5.9 \text{ м} & P_1 &:= 50 \cdot 10^3 \text{ Н} \\ a &:= 1.3 \text{ м} & P_2 &:= 130 \cdot 10^3 \text{ Н} \\ b &:= 1 \text{ м} & \sigma_{\text{доп}} &:= 160 \cdot 10^6 \text{ МПа} \\ c &:= 1.4 \text{ м} & & \\ E &:= 2 \cdot 10^{11} \text{ МПа} & & \end{aligned}$$

Решение:

Определим степень статической неопределенности. Число неизвестных реакций равно 5; число уравнений статики равно трем, поэтому система дважды статически неопределима:

$$\eta := 5 - 3 = 2$$

Рассмотрим два варианта основной системы. Первый вариант - получен путем включения врезанных шарниров. На рисунке 1.2 представлена основная система.

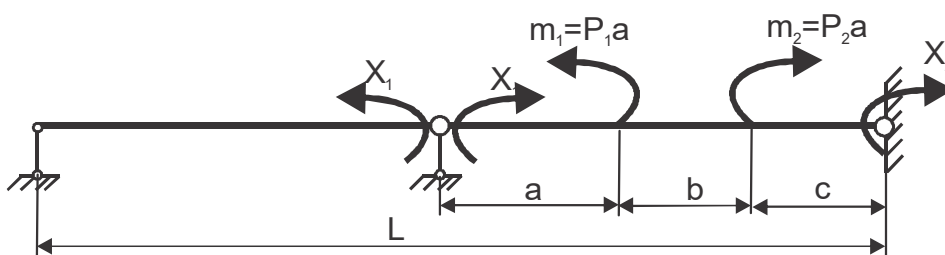


Рис. 1.2. Расчетный вариант основной системы, полученной путем включения врезанных шарниров

Построим эпюры единичных изгибающих моментов. Для построения эпюр единичных изгибающих моментов необходимо определить опорные реакции, возникающие в основной системе от действия единичного момента $X_1=1$ и единичной силы $X_2=1$, приложенных в направлении отброшенных связей.

Найдем реакции опор, возникающие в основной системе от действия единичного момента $X_1=1$ (рис. 1.3)

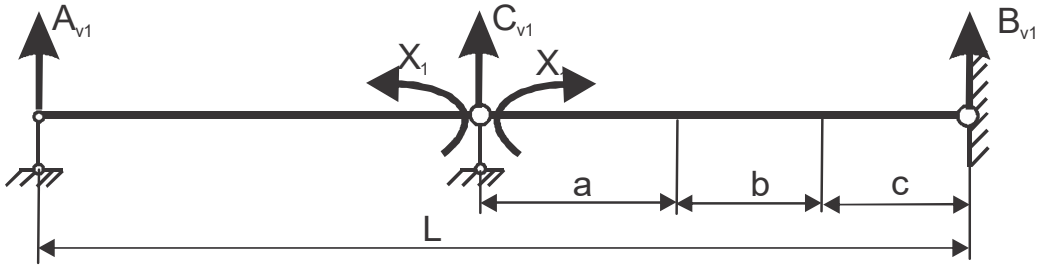


Рис. 1.3. Основная система под действием единичного момента X_1

Запишем уравнения статики. Сумму моментов относительно врезанного шарнира левой части, правой части и сумму проекций на вертикаль

$$\sum \text{mom}_o = A_{v1} \cdot (L - a - b - c) - X_1 = 0$$

$$\sum \text{mom}_o = B_{v1} \cdot [(a + b) + c] - X_1 = 0$$

$$\sum V = A_{v1} + B_{v1} + C_{v1} = 0$$

Получим, что:

$$A_{v1} := \frac{1}{(L - a - b - c)}$$

$$B_{v1} := \frac{1}{[(a + b) + c]}$$

$$C_{v1} := -A_{v1} - B_{v1}$$

Составим выражение для единичного изгибающего момента, возникающего в основной системе от действия $X_1=1$

$$M_{1v1}(z) := \begin{cases} A_{v1} \cdot z & \text{if } 0 \leq z \leq (L - a - b - c) \\ \left[A_{v1} \cdot z + [z - (L - a - b - c)] \cdot (-A_{v1} - B_{v1}) \right] & \text{if } L - a - b - c \leq z \leq L \end{cases}$$

$$z1 := 0, \frac{L}{100} .. L$$

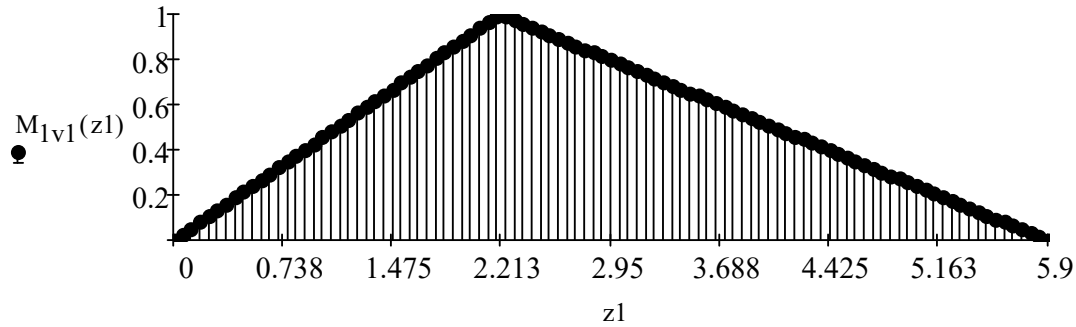


Рис. 1.4. Эпюра единичного изгибающего момента M_1

Найдем реакции опор, возникающие в основной системе от действия единичной силы $X_2=1$ (рис. 1.5)

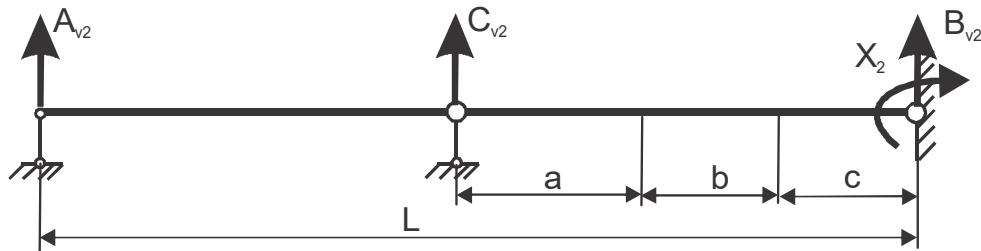


Рис. 1.5. Основная система под действием единичной силы X_2

Запишем уравнения статики. Сумму моментов относительно врезанного шарнира левой части, правой части и сумму проекций на вертикаль

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_b &= A_{v2} \cdot (L - a - b - c) = 0 \\ \cdot \\ \sum \text{mom}_b &= B_{v2} \cdot [(a + b) + c] - X_2 = 0 \\ \cdot \\ \sum V &= A_{v2} + B_{v2} + C_{v2} = 0 \\ \cdot \end{aligned}$$

Получим, что:

$$A_{v2} := 0$$

$$B_{v2} := \frac{1}{[(a + b) + c]}$$

$$C_{v2} := -A_{v2} - B_{v2}$$

Составим выражение для единичного изгибающего момента, возникающего в основной системе от действия $X_2=1$

$$M_{2v1}(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z \leq (L - a - b - c) \\ [z - (L - a - b - c)] \cdot C_{v2} & \text{if } L - a - b - c \leq z \leq L \end{cases}$$

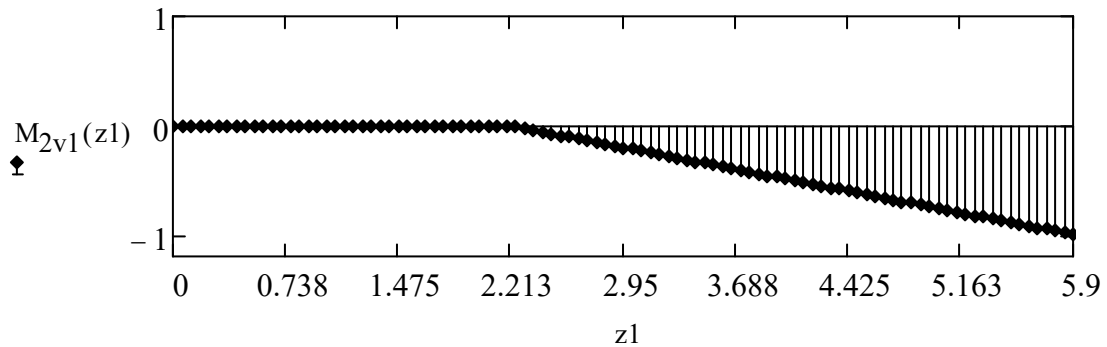


Рис. 1.6. Эпюра единичного изгибающего момента M_2

Второй вариант основной системы - получен при непосредственном отбрасывании лишних связей (рис. 1.7)

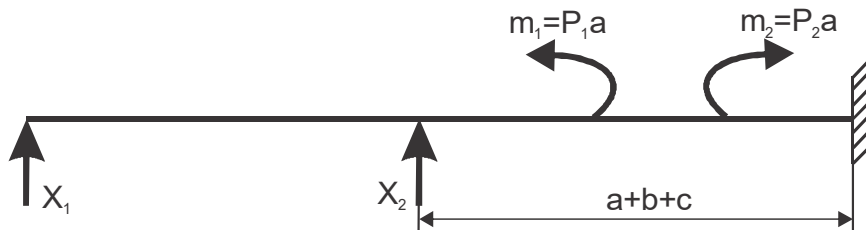


Рис. 1.7. Расчетный вариант основной системы, полученной при непосредственном отбрасывании лишних связей

Построим эпюры единичных моментов, возникающие в основной системе от действия единичных сил $X_1=1$ и $X_2=1$, приложенных в направлении отброшенных связей.



Рис. 1.8. Основная система под действием единичной силы X_1

Составим выражение для единичного изгибающего момента, возникающего в основной системе от действия $X_1=1$

$$M_{1v2}(z) := 1 \cdot z$$

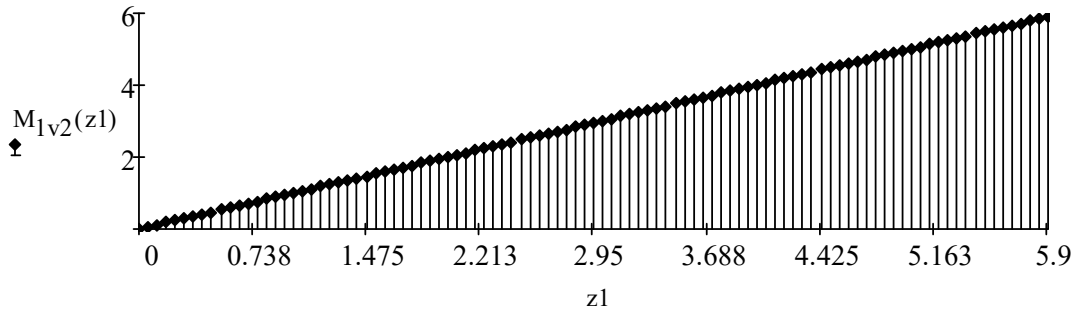


Рис. 1.9. Эпюра единичного изгибающего момента M_1

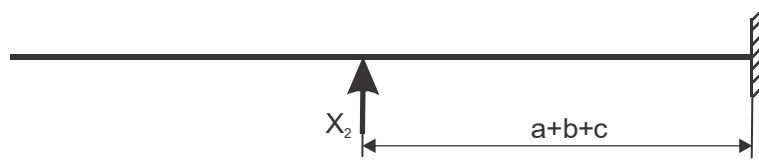


Рис. 1.10. Основная система под действием единичной силы X_2

Составим выражение для единичного изгибающего момента, возникающего в основной системе от действия $X_2=1$

$$M_{2v2}(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z \leq (L - a - b - c) \\ [1 \cdot [z - (L - a - b - c)]] & \text{if } L - a - b - c < z \leq L \end{cases}$$

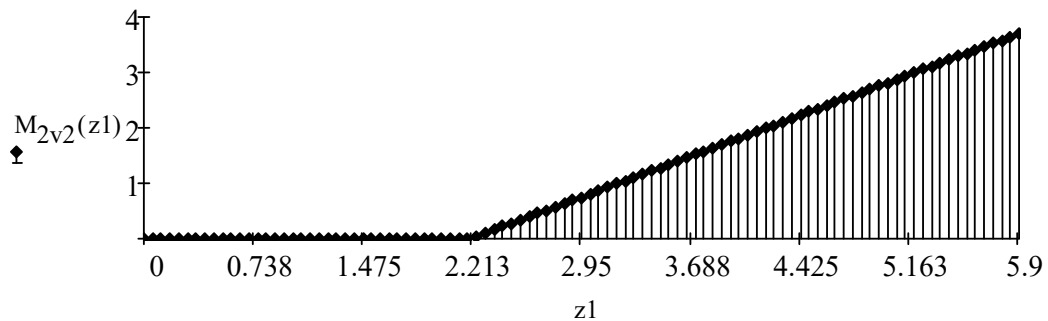


Рис. 1.11. Эпюра единичного изгибающего момента M_2

Для расчетов выберем второй вариант схемы и построим эпюру грузовых моментов

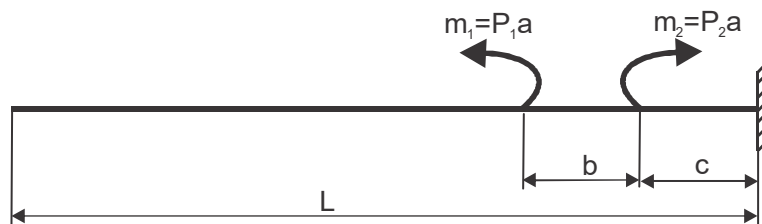


Рис. 1.12. Основная система под действием внешней нагрузки

Составим выражение для грузового момента, возникающего в основной системе от действия внешних сил

$$M_{\text{grv2}}(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z \leq (L - b - c) \\ -P_1 \cdot a & \text{if } L - b - c \leq z \leq L - c \\ -P_1 \cdot a + P_2 \cdot a & \text{if } L - c \leq z \leq L \end{cases}$$

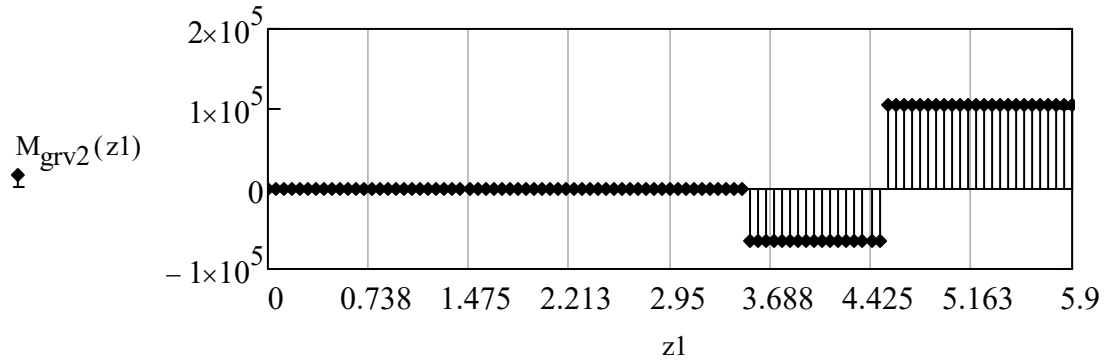


Рис. 1.13. Эпюра грузового момента для основной системы

Запишем канонические уравнения метода сил:

$$\sum_{n=1}^2 (\delta_{jk} \cdot x_k) + \Delta_{jp} = 0 \quad \begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

или

Коэффициенты канонических уравнений метода сил будем рассчитывать, используя интеграл Максвелла-Мора:

$$\delta_{jk} = \int_0^L \frac{M_j \cdot M_k}{E \cdot J_x} dz = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_j \cdot M_k dz \quad \Delta_{jp} = \int_0^L \frac{M_p \cdot M_j}{E \cdot J_x} dz$$

Вычисление относительных перемещений:

■

$$\delta_{11}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_{1v2}(z) \cdot M_{1v2}(z) dz \quad \int_0^L M_{1v2}(z) \cdot M_{1v2}(z) dz = 68.46$$

$$\delta_{12}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_{1v2}(z) \cdot M_{2v2}(z) dz \quad \int_0^L M_{1v2}(z) \cdot M_{2v2}(z) dz = 31.943$$

$$\delta_{21}(E, J_x) = \delta_{12}(E, J_x)$$

$$\delta_{22}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_{2v2}(z) \cdot M_{2v2}(z) dz \quad \int_0^L M_{2v2}(z) \cdot M_{2v2}(z) dz = 16.884$$

$$\Delta_{1p}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_{1v2}(z) \cdot M_{grv2}(z) dz \quad \int_0^L M_{1v2}(z) \cdot M_{grv2}(z) dz = 4.971 \times 10^5$$

$$\Delta_{2p}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_{2v2}(z) \cdot M_{grv2}(z) dz \quad \int_0^L M_{2v2}(z) \cdot M_{grv2}(z) dz = 3.198 \times 10^5$$

Подставим коэффициенты в систему канонических уравнений и решим систему уравнений:

■

$$\text{Given } x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

$$68.46 \cdot x_1 + 31.943 \cdot x_2 + 4.971 \times 10^5 = 0$$

$$31.943 \cdot x_1 + 16.884 \cdot x_2 + 3.198 \times 10^5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1.345 \times 10^4 \\ -4.438 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Построение эпюр изгибающих моментов. Заметим, что эпюру изгибающих моментов можно построить по принципу суперпозиций:

$$M_x(z) := M_{grv2}(z) + M_{1v2}(z) \cdot x_1 + M_{2v2}(z) \cdot x_2$$

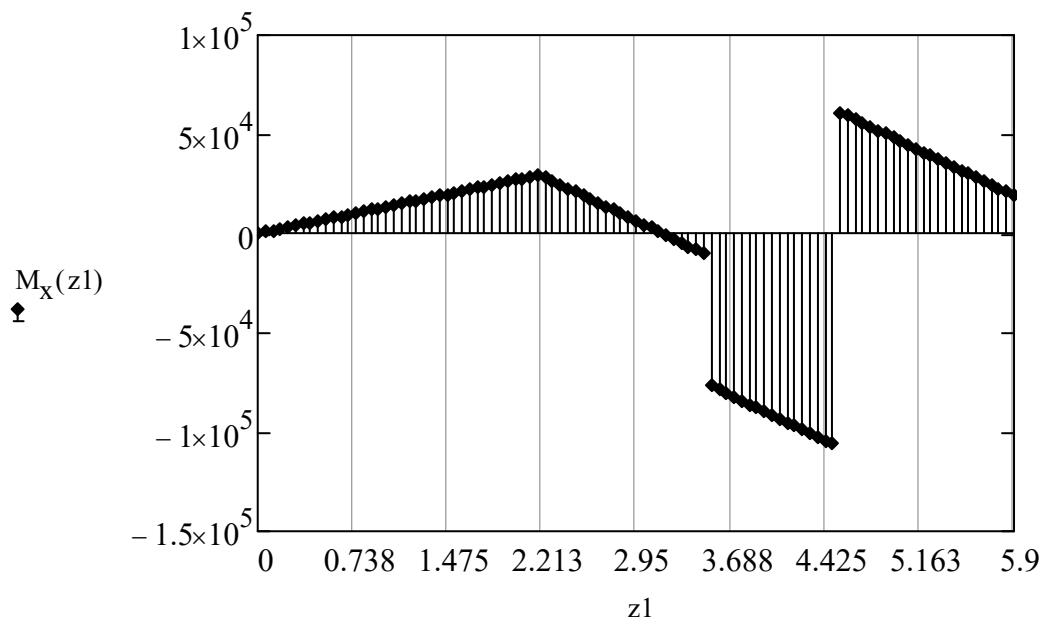


Рис. 1.14. Эпюра изгибающего момента

Деформационная проверка.

Для деформационной проверки возьмем первый вариант основной системы, полученный путем врезания шарниров и вычислим перемещения основной системы в направлении отброшенных связей по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \int_0^L \frac{M_X \cdot M_1}{E \cdot J_X} dz$$

$$\int_0^L M_{1v1}(z) \cdot M_X(z) dz = 7.803$$

$$\int_0^L M_{2v1}(z) \cdot M_X(z) dz = 2.787$$

$$\int_0^L |M_{1v1}(z)| \cdot |M_X(z)| dz = 9.469 \times 10^4$$

$$\int_0^L |M_{2v1}(z)| \cdot |M_X(z)| dz = 9.122 \times 10^4$$

$$\eta_1 := \frac{7.803}{9.469 \times 10^4} \cdot 100 = 0.008 \quad \%$$

$$\eta_2 := \frac{2.787}{9.122 \times 10^4} \cdot 100 = 0.003 \quad \%$$

В первом и во втором случаях погрешности расчета составляют меньше 5%.

Расчет на прочность.

Максимальный изгибающий момент возникает в сечении приложения момента M_2

$$M_{x_max} := M_x(L - c - 0.000000001) = -1.066 \times 10^5 \text{ Нм}$$

Максимальное нормальное напряжение равно:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_max}}{W_x} \leq \sigma_{\text{доп}}$$

Тогда момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_{x_max}}{\sigma_{\text{доп}}}$$

$$M_{x_max} := 1.066 \times 10^5$$

$$\sigma_{\text{доп}} := 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$W_x := \frac{M_{x_max}}{\sigma_{\text{доп}}} = 0.0006662 \quad W_x = 6.662 \times 10^{-4} \text{ м}^3$$

По таблицы подберем прокатный профиль в виде двутавра:
Двутавр №36

$$W_x := 743 \text{ см}^3$$

$$J_x := 13380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

Определим перемещение точки К.

Для определения перемещения точки К в основной систем в точке К приложим единичную силу $X_3=1$ и построим эпюру единичного момента



Рис. 1.15. Основная система с приложенной единичной силой в точке К

Составим выражение для единичного момента

$$M_{1k}(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z \leq b \\ 1 \cdot (z - b) & \text{if } b \leq z \leq L \end{cases}$$

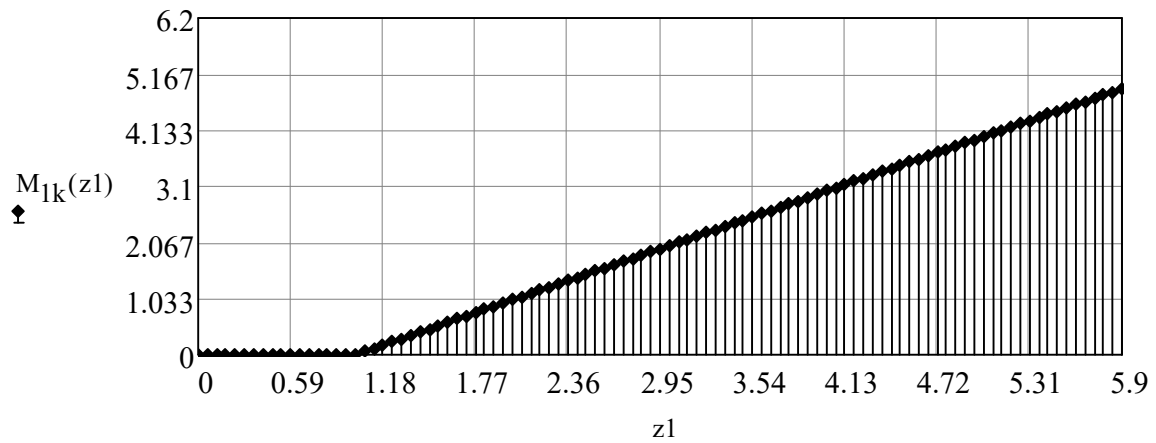


Рис. 1.16. Эпюра изгибающего момента от единичной силы $X_3=1$

С помощью интеграла Максвелла-Мора определим перемещение точки К

$$\Delta_k = \int_0^L \frac{M_x \cdot M_{1k}}{E \cdot J_x} dz$$

$$\int_0^L \frac{M_x(z) \cdot M_{1k}(z)}{E \cdot J_x} dz = -3.103 \times 10^{-4}$$

Перемещение точки К

$$\Delta_k := -0.31 \text{ мм}$$

Задача 2. Расчет плоской рамы методом сил

Плоская рама (рис. 2.1) изготовлена из стержней стандартного прокатного профиля и нагружена внешними силами. Методом сил раскрыть статическую неопределимость рамы. Построить эпюры внутренних силовых факторов. Определить коэффициент запаса прочности рамы по нормальным напряжениям. Для линейного закона изменения температуры по высоте поперечного сечения рамы определить перемещения точки К от температурного воздействия.

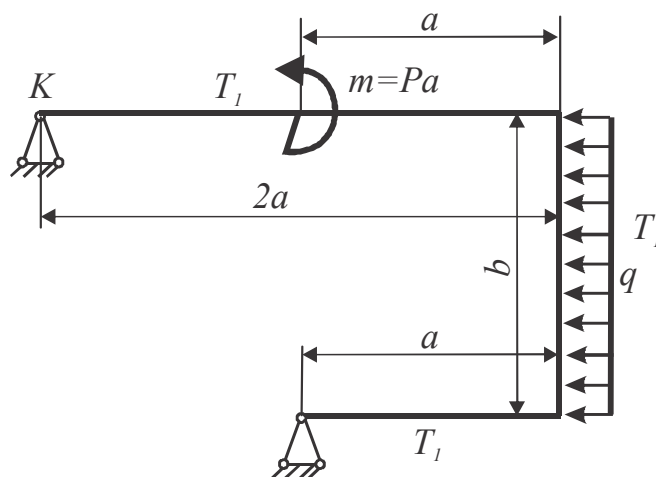


Рис.2.1. Расчетная схема

Исходные данные:

$$\begin{aligned}
 a &:= 1.15 \text{ м} & E &:= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \\
 b &:= 0.55 \text{ м} & T_0 &:= 20 \text{ }^\circ\text{C} \\
 P &:= 16 \cdot 10^3 \text{ Н} & T_1 &:= 5 \text{ }^\circ\text{C} \\
 q &:= 4 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}} & T_2 &:= 40 \text{ }^\circ\text{C} \\
 \sigma_T &:= 240 \cdot 10^6 \text{ Па} & \alpha &:= 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1} \\
 \text{двутавр № 22} & W_x := 232 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 & J_x &:= 2550 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \\
 h &:= 0.22 \text{ м} & F &:= 30.6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2
 \end{aligned}$$

Решение:

Определим степень статической неопределенности. Число неизвестных реакций равно 4; число уравнений статики равно трем, поэтому система один раз статически неопределима:

$$\eta := 4 - 3 = 1$$

Выберем основную систему (рис. 2.2).

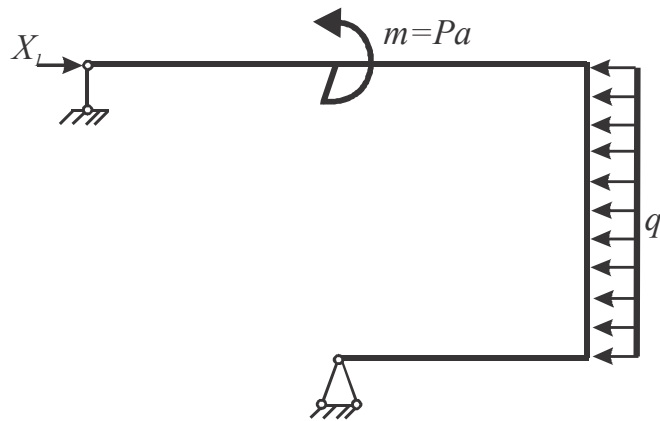


Рис. 2.2 Расчетный вариант основной системы

Запишем канонические уравнения метода сил:

$$\sum_{n=1}^n (\delta_{jk} \cdot x_k) + \Delta_{jp} = 0$$

или

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \Delta_{1p} = 0$$

Для решения канонического уравнения метода сил найдем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1p} , для этого построим эпюры единичных и грузовых моментов.

Для построения эпюр единичных изгибающих моментов необходимо определить опорные реакции, возникающие в основной системе от действия единичной силы $X_1=1$, приложенной в направлении отброшенной связи.

Найдем реакции опор, возникающие в основной системе от действия единичной силы $X_1=1$ (рис. 2.3).

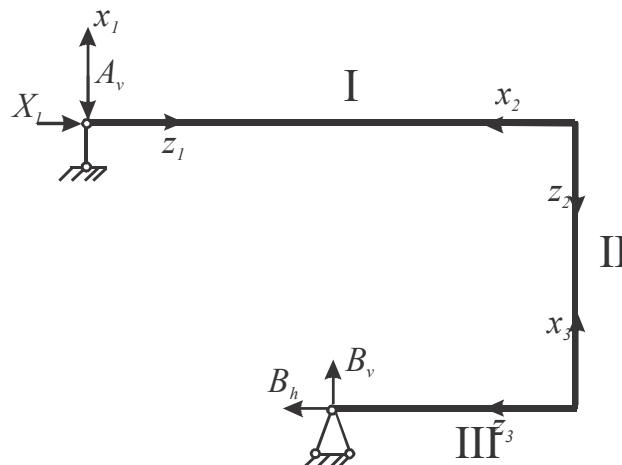


Рис. 2.3. Основная система под действием единичного момента X_1

Запишем уравнения статики. Сумму моментов относительно точки В, сумму проекций на горизонталь и сумму проекций на вертикаль

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_B &= A_v \cdot a - X_1 \cdot b = 0 \\ \sum H &= B_H - X_1 = 0 \\ \sum V &= A_v - B_v = 0 \end{aligned}$$

Получим, что:

$$A_v := \frac{b}{a} \quad B_v := \frac{b}{a} \quad B_H := 1$$

Составим выражение для единичного изгибающего момента, возникающего в основной системе от действия $X_1=1$. Для этого введем системы координат на каждом из трех участков рамы (рис. 2.3)

$$z_1 := 0, \frac{2 \cdot a}{100} \dots 2 \cdot a$$

$$M_{1I}(z_1) := -A_v \cdot z_1 \quad 0 \leq z_1 \leq 2a$$

$$M_{1II}(z_2) := A_v \cdot 2 \cdot a - 1 \cdot z_2 \quad 0 \leq z_2 \leq b$$

$$M_{1III}(z_3) := A_v \cdot (2a - z_3) - 1 \cdot b \quad 0 \leq z_3 \leq a$$

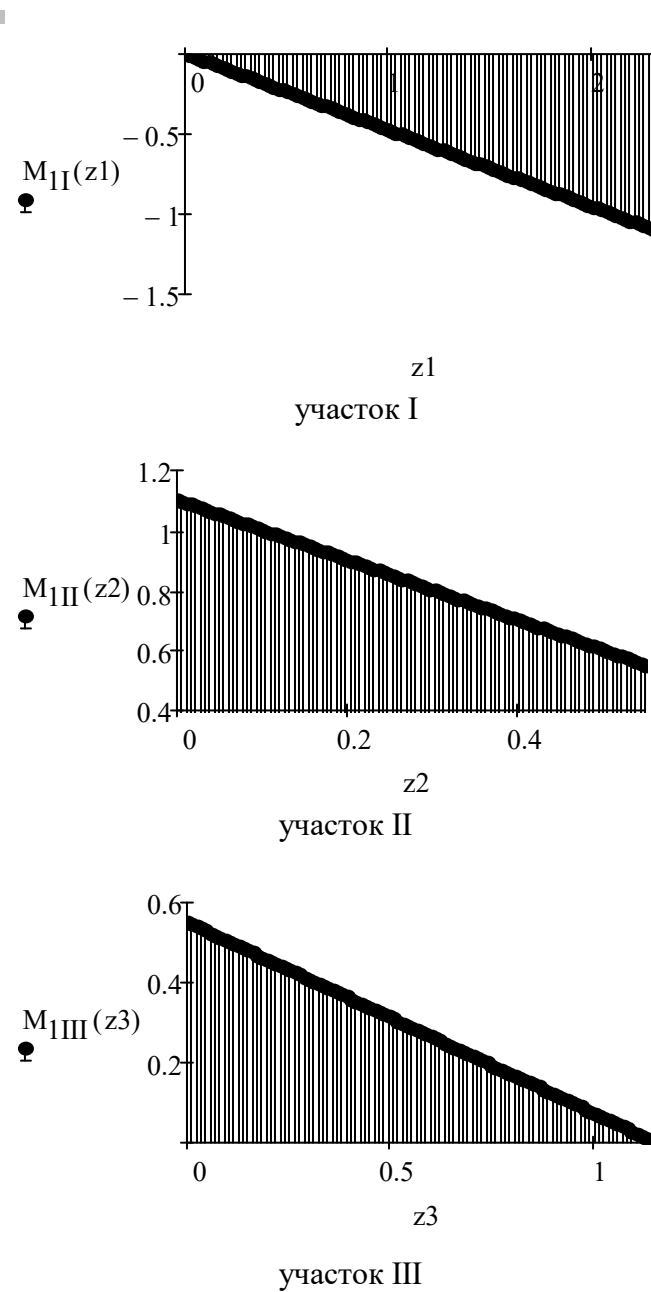


Рис. 2.4. Эпюры единичного изгибающего момента M_1 по участкам

Составим выражение для продольной силы, возникающей при действии единичной силы

$$N_{1II}(z_1) := -1 \quad 0 \leq z_1 \leq 2a \quad N_{1III}(z_2) := A_v \quad 0 \leq z_2 \leq b \quad N_{1III}(z_3) := B_h \quad 0 \leq z_3 \leq a$$

Построим эпюру грузовых моментов

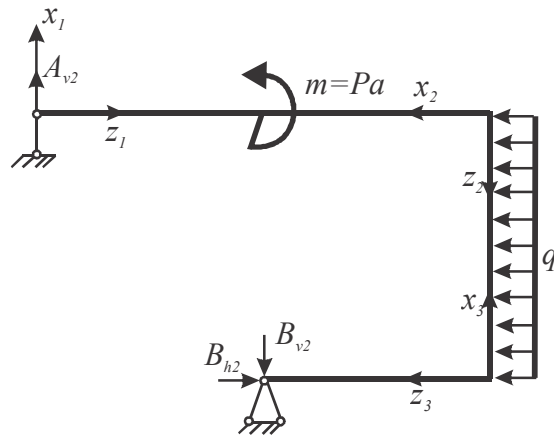


Рис. 2.5. Основная система под действием внешней нагрузки

Запишем уравнения статики. Сумму моментов относительно точки В, сумму проекций на горизонталь и сумму проекций на вертикаль

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_B &= -A_v \cdot a + Pa + q \cdot \frac{b^2}{2} = 0 \\ \sum H &= -B_h + q \cdot a = 0 \\ \sum V &= A_v - B_v = 0 \end{aligned}$$

Получим, что:

$$A_{v1} := P + q \cdot \frac{b^2}{2a} \quad B_{h1} := q \cdot a \quad B_{v1} := P + q \cdot \frac{b^2}{2a}$$

Составим выражение для грузового момента, возникающего в основной системе под действием внешних сил

$$\begin{aligned} M_{pI}(z_1) &:= \begin{cases} A_{v1} \cdot z_1 & \text{if } 0 \leq z_1 \leq a \\ A_{v1} \cdot z_1 - P \cdot a & \text{if } a \leq z_1 \leq 2a \end{cases} & 0 \leq z_1 \leq 2a \\ M_{pII}(z_2) &:= -A_{v1} \cdot 2 \cdot a + P \cdot a + q \cdot \frac{z_2^2}{2} & 0 \leq z_2 \leq b \\ M_{pIII}(z_3) &:= -A_{v1} \cdot (2a - z_3) + \left(P \cdot a + q \cdot \frac{b^2}{2} \right) & 0 \leq z_3 \leq a \end{aligned}$$

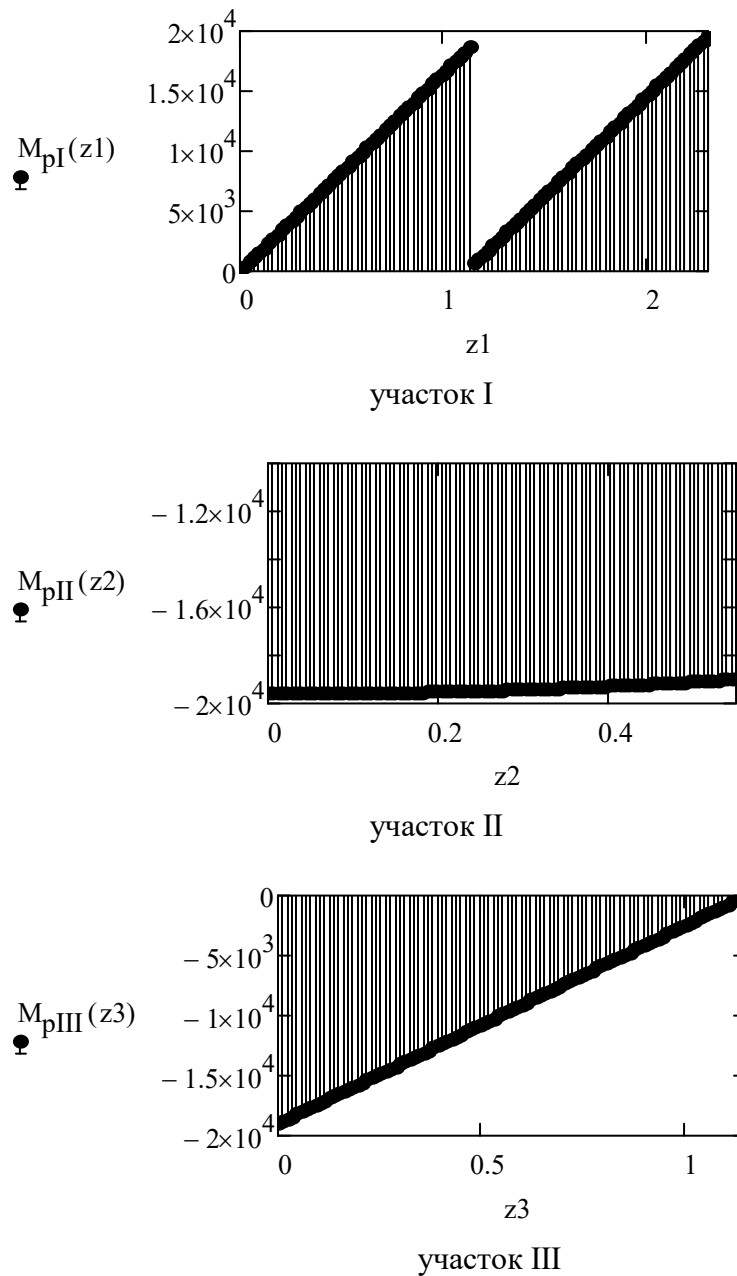


Рис. 2.6. Эпюры грузового изгибающего момента M_p по участкам

Коэффициенты канонических уравнений метода сил будем рассчитывать, используя интеграл Максвелла-Мора:

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{E \cdot J_x} dz = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_1 \cdot M_1 dz \quad \Delta_{1p} = \int_0^L \frac{M_p \cdot M_1}{E \cdot J_x} dz$$

Вычисление относительных перемещений:

$$\delta_{11}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^{2a} \mathbf{M}_1(z) \cdot M_1(z) dz$$

$$\int_0^{2a} M_{1I}(z) \cdot M_{1I}(z) dz + \int_0^b M_{1II}(z) \cdot M_{1II}(z) dz + \int_0^a M_{1III}(z) \cdot M_{1III}(z) dz = 1.432$$

$$\Delta_{1p}(E, J_x) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L \mathbf{M}_1(z) \cdot M_p(z) dz$$

$$\int_0^{2a} M_{pI}(z) \cdot M_{1I}(z) dz + \int_0^b M_{pII}(z) \cdot M_{1II}(z) dz + \int_0^a M_{pIII}(z) \cdot M_{1III}(z) dz = -2.743 \times 10^4$$

Подставим коэффициенты в систему канонических уравнений и решим систему уравнений:

$$\text{Given } X_1 := 1$$

$$1.432 \cdot X_1 + -2.743 \times 10^4 = 0$$

$$X_1 := \text{Find}(X_1) = 1.916 \times 10^4$$

Построение эпюр внутренних силовых факторов:

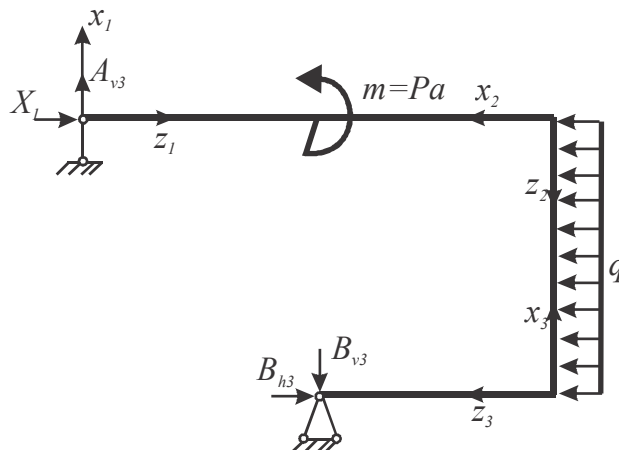


Рис. 2.7. Основная система

Найдем реакции опор. Запишем уравнения статики. Сумму моментов относительно точки В, сумму проекций на горизонталь и сумму проекций на вертикаль

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_B &= -A_v \cdot a + Pa + q \cdot \frac{b^2}{2} - X_1 \cdot b = 0 \\ \sum H &= -B_h + q \cdot a - X_1 = 0 \\ \sum V &= A_v - B_v = 0 \end{aligned}$$

Получим, что:

$$A_{v3} := P + q \cdot \frac{b^2}{2a} - X_1 \cdot \frac{b}{a} \quad B_{h3} := q \cdot a - X_1 \quad B_{v3} := P + q \cdot \frac{b^2}{2a} - X_1 \cdot \frac{b}{a}$$

Запишем выражения для внутренних силовых факторов Nz, Qy, Mx для каждого из участков

$$\begin{aligned} &0 \leq z_1 \leq 2a \\ M_{xI}(z_1) &:= \begin{cases} A_{v3} \cdot z_1 & \text{if } 0 \leq z_1 \leq a \\ A_{v3} \cdot z_1 - P \cdot a & \text{if } a \leq z_1 \leq 2a \end{cases} \\ Q_{yI}(z_1) &:= A_{v3} \quad N_{zI}(z_1) := -X_1 \\ &0 \leq z_2 \leq b \\ M_{xII}(z_2) &:= -A_{v3} \cdot 2 \cdot a + P \cdot a + q \cdot \frac{z_2^2}{2} - X_1 \cdot z_2 \\ Q_{yII}(z_2) &:= -q \cdot z_2 + X_1 \quad N_{zII}(z_2) := A_{v3} \\ &0 \leq z_3 \leq a \\ M_{xIII}(z_3) &:= -A_{v3} \cdot (2a - z_3) + \left(P \cdot a + q \cdot \frac{b^2}{2} \right) - X_1 \cdot b \\ Q_{yIII}(z_3) &:= -B_{v3} \quad N_{zIII}(z_3) := -B_{h3} \end{aligned}$$

Вычислим значения внутренних силовых факторов в нескольких точках сечения для построения эпюр

$$M_{xI}(0) = 0 \quad M_{xI}(a - 0.0001) = 8.469 \times 10^3 \quad M_{xI}(a) = -9.93 \times 10^3$$

$$M_{xI}(2 \cdot a) = -1.461 \times 10^3$$

$$M_{xII}(0) = 1.461 \times 10^3 \quad M_{xII}(b) = -8.47 \times 10^3$$

$$M_{xIII}(0) = -8.47 \times 10^3 \quad M_{xIII}(a) = 0$$

$$Q_{yI}(0) = 7.365 \times 10^3 \quad Q_{yII}(0) = 1.916 \times 10^4 \quad Q_{yII}(b) = 1.696 \times 10^4$$

$$Q_{yIII}(0) = -7.365 \times 10^3$$

$$N_{zI}(0) = -1.916 \times 10^4 \quad N_{zII}(0) = 7.365 \times 10^3 \quad N_{zIII}(0) = 1.456 \times 10^4$$

На рисунках 2.8-2.10 приведены эпюры внутренних силовых факторов

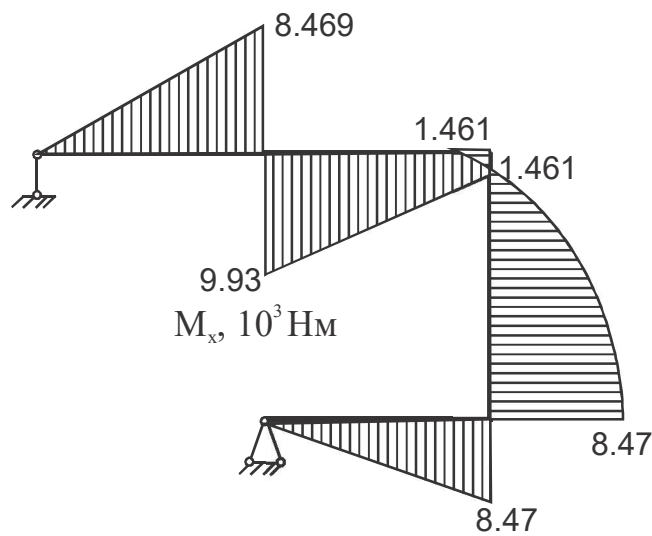


Рис. 2.8 Эпюра изгибающего момента

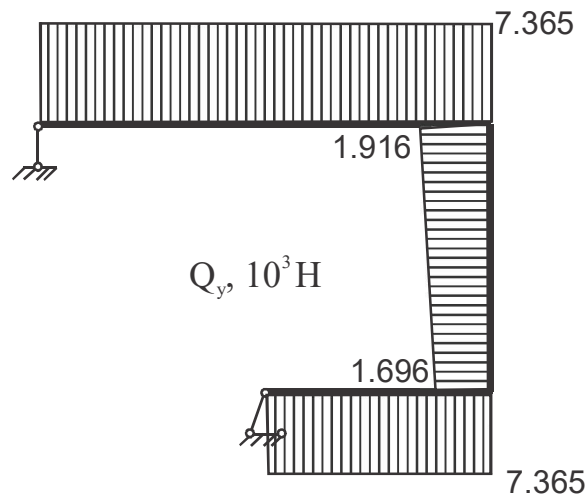


Рис. 2.9 Эпюра поперечной силы

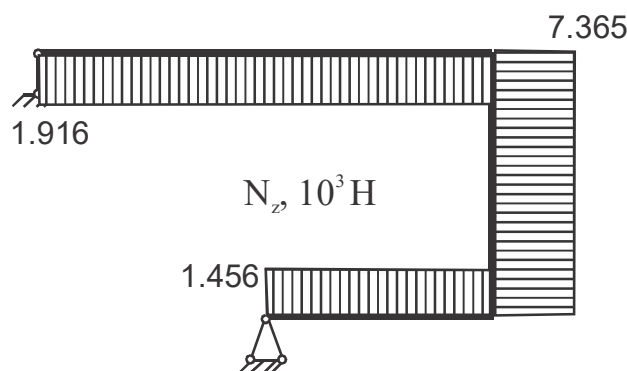


Рис. 2.10 Эпюра продольной силы

Определим коэффициент запаса прочности. Максимальный изгибающий момент возникает в сечении приложения момента M

$$M_{x_max} := |M_{xI}(a)| = 9.93 \times 10^3$$

Максимальное нормальное напряжение равно:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_max}}{W_x} \leq \sigma_{доп} = \frac{\sigma_T}{n}$$

Тогда коэффициент запаса прочности равен:

$$n := \frac{\sigma_T \cdot W_x}{M_{x_max}} = 5.607$$

Определим вертикальное перемещение точки К от температурного воздействия.

Выберем основную систему приведенную на рисунке 2.2. Выражения для изгибающего единичного момента и продольной силы, от действия единичной силы X_1 при ведены ранее. Определим неизвестную X_{1T} из канонического уравнения метода сил при температурном воздействии

$$\delta_{11T} \cdot X_{1T} + \Delta_{1T} = 0$$

$$\delta_{11T} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{E \cdot J_x} dz + \int_0^L \frac{N_1 \cdot N_1}{E \cdot F} dz$$

$$\delta_{11T} := \frac{1.432}{E \cdot J_x} + \int_0^{2 \cdot a} \frac{N_{1II}(z) \cdot N_{1II}(z)}{E \cdot F} dz + \int_0^b \frac{N_{1III}(z) \cdot N_{1III}(z)}{E \cdot F} dz + \int_0^a \frac{N_{1III}(z) \cdot N_{1III}(z)}{E \cdot F} dz$$

$$\Delta_{1T} = \frac{\alpha \cdot (T_H - T_B)}{h} \cdot \int_0^L M_1 dz + \alpha \cdot \Delta T_{cp} \cdot \int_0^L N_1 dz \quad \Delta T_{cp} := \frac{(T_2 + T_1)}{2} - T_0$$

$$\Delta_{1T1} := \alpha \cdot \left[\frac{(T_2 - T_1)}{h} \cdot \int_0^{2 \cdot a} M_{1II}(z) dz + \frac{(T_1 - T_2)}{h} \cdot \left(\int_0^b M_{1III}(z) dz + \int_0^a M_{1III}(z) dz \right) \right]$$

$$\Delta_{1T2} := \alpha \cdot \left[\Delta T_{cp} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot a} N_{1II}(z) dz + \int_0^b N_{1III}(z) dz + \int_0^a N_{1III}(z) dz \right) \right]$$

$$\Delta_{1T} := \Delta_{1T1} + \Delta_{1T2}$$

$$\Delta_{1T} = -0.041$$

Итак, найдем неизвестное усилие

$$X_{1T} := \frac{-\Delta_{1T}}{\delta_{11T}} = 1.422 \times 10^5$$

Найдем выражение для единичного момента от действия единичной силы в точке К для основной системы, выражение для изгибающего момента при действии усилия X_{1T} можно искать как $M_x = X_{1T} \cdot M_1$

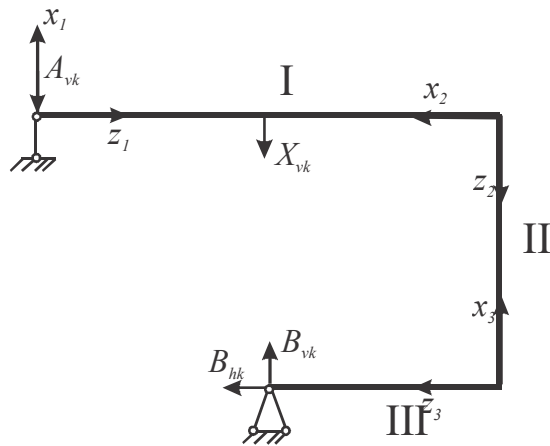


Рис. 2.11 Основная система с приложенной единичной силой в точке К

Запишем уравнения статики. Сумму моментов относительно точки В, сумму проекций на горизонталь и сумму проекций на вертикаль

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_B &= -A_{vk} \cdot a = 0 \\ \sum H &= -B_h = 0 \\ \sum V &= A_v - B_v + X_{vk} = 0 \end{aligned}$$

Получим, что:

$$A_{vk} := 0 \quad B_{hk} := 0 \quad B_{vk} := 1$$

Составим выражение для грузового момента, возникающего в основной системе от действием внешних сил

$$\begin{aligned} M_{1kI}(z_1) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z_1 \leq a \\ 1 \cdot (z_1 - a) & \text{if } a \leq z_1 \leq 2a \end{cases} & 0 \leq z_1 \leq 2a \\ M_{1kII}(z_2) &:= a & 0 \leq z_2 \leq b \\ M_{1kIII}(z_3) &:= 1 \cdot (a - z_3) & 0 \leq z_3 \leq a \end{aligned}$$

С помощью интеграла Максвелла-Мора найдем вертикальное перемещение точки К

$$\Delta_{vk} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_x}{E \cdot J_x} dz$$

$$\Delta_{vk} := \int_0^{2 \cdot a} \frac{M_{1kI}(z) \cdot X_{1T} \cdot M_{1II}(z)}{E \cdot J_x} dz + \int_0^b \frac{M_{1kII}(z) \cdot X_{1T} \cdot M_{1III}(z)}{E \cdot J_x} dz + \int_0^a \frac{M_{1kIII}(z) \cdot X_{1T} \cdot M_{1III}(z)}{E \cdot J_x} dz$$

Вертикальное перемещение точки равно:

$$\Delta_{vk} = 4.408 \times 10^{-3}$$

Задача 3. Осесимметричная задача теории упругости

Для заданной схемы нагружения решить краевую задачу и определить допускаемое давление p , построить эпюры радиальных и окружных напряжений и радиальных перемещений

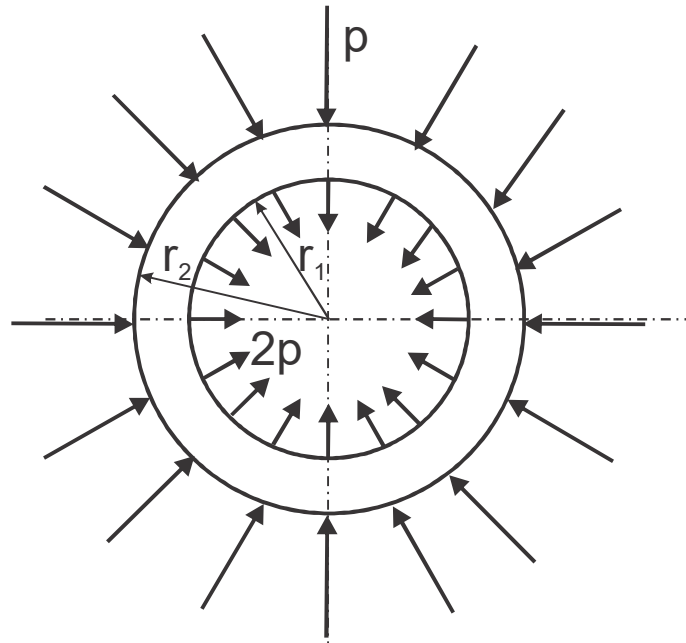


Рисунок 3.1 Расчетная схема

Исходные данные:

$$r_1 := 0.04 \text{ см}$$

$$r_2 := 0.12 \text{ см}$$

$$\sigma_{\text{доп}} := 180 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Критерий Сен - Венана

$$E := 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

$$\nu := 0.3$$

Решение:

Приведем уравнения равновесия в напряжениях и перемещениях для осесимметричной задачи теории упругости.

Уравнение равновесия в напряжениях:

$$\frac{d}{dr} \sigma_r + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

Уравнение равновесия в перемещении:

$$\frac{d^2}{dr^2}u + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr}u \right) - \frac{u}{r^2} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d}{dr}u + \nu \cdot \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \nu \cdot \frac{d}{dr}u \right)$$

Запишем общее решение в перемещениях:

$$u(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r}$$

Запишем общее решение в напряжениях:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\nu) - C_2 \cdot \frac{1-\nu}{r^2} \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\nu) + C_2 \cdot \frac{1-\nu}{r^2} \right]$$

где C_1 и C_2 константы интегрирования

Запишем граничные условия для данной системы (рисунок 3.1):

$$1) r=r_1 \quad \sigma_r = 2p$$

$$2) r=r_2 \quad \sigma_r = -p$$

Решим краевую задачу:

$$\text{Given } C_1 := 1 \quad C_2 := 1$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\nu) - C_2 \cdot \frac{1-\nu}{r_1^2} \right] = 2p$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\nu) - C_2 \cdot \frac{1-\nu}{r_2^2} \right] = -p$$

$$\text{Find}(C_1, C_2) \text{ float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} -4.81e-12 \cdot p \\ -3.51e-14 \cdot p \end{pmatrix}$$

В результате численного решения константы интегрирования равны:

$$C_1(p) := -4.81e-12 \cdot p$$

$$C_2(p) := -3.51e-14 \cdot p$$

Тогда выражения для напряжений и перемещений имеют вид:

$$u(r, p) := C_1(p) \cdot r + C_2(p) \cdot \frac{1}{r}$$

$$\sigma_r(r, p) := \frac{E}{1 - \nu^2} \left[C_1(p) \cdot (1 + \nu) - C_2(p) \cdot \frac{1 - \nu}{r^2} \right]$$

$$\sigma_\theta(r, p) := \frac{E}{1 - \nu^2} \left[C_1(p) \cdot (1 + \nu) + C_2(p) \cdot \frac{1 - \nu}{r^2} \right]$$

Определим значение допускаемого давления p по заданной критерию Сен-Венана

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{доп}}$$

Найдем эквивалентные напряжения в точках $r=r_1$ и $r=r_2$

При $r = r_1$

$$\sigma_r(r_1, p) \text{ float, 3} \rightarrow 2.0 \cdot p$$

$$\sigma_z := 0 \quad \text{т. к. цилиндр открытый}$$

$$\sigma_\theta(r_1, p) \text{ float, 3} \rightarrow -4.75 \cdot p$$

$$\sigma_{\text{экв}r1}(p) := 2.0 \cdot p - (-4.75 \cdot p) \text{ float, 3} \rightarrow 6.75 \cdot p$$

При $r = r_2$

$$\sigma_r(r_2, p) \text{ float, 2} \rightarrow -1.0 \cdot p$$

$$\sigma_z := 0 \quad \text{т. к. цилиндр открытый}$$

$$\sigma_\theta(r_2, p) \text{ float, 3} \rightarrow -1.75 \cdot p$$

$$\sigma_{\text{экв}r2}(p) := 0 - (-1.75 \cdot p) \text{ float, 3} \rightarrow 1.75 \cdot p$$

Опасное сечение при $r=r_1$

Тогда эквивалентное напряжение равно:

$$\sigma_{\text{экв_CB}}(p) := \sigma_{\text{экв}r1}(p) \quad \sigma_{\text{экв_CB}}(p) = 6.75 \cdot p$$

Запишем условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв_СВ}}(p) \leq \sigma_{\text{доп}}$$

Получим, что допускаемая нагрузка равна:

$$6.75 \cdot p \leq \sigma_{\text{доп}} \quad p_{\text{доп}} \leq \frac{\sigma_{\text{доп}}}{6.75} \quad p_{\text{доп}} := \frac{\sigma_{\text{доп}}}{6.75} = 2.667 \times 10^7 \text{ МПа}$$

Построим эпюры при найденном значении допускаемой нагрузки

$$p := p_{\text{доп}}$$

Для построения эпюр введем новую переменную

$$r_{\text{gr}} := 0, \frac{1}{1500} \dots r_2$$

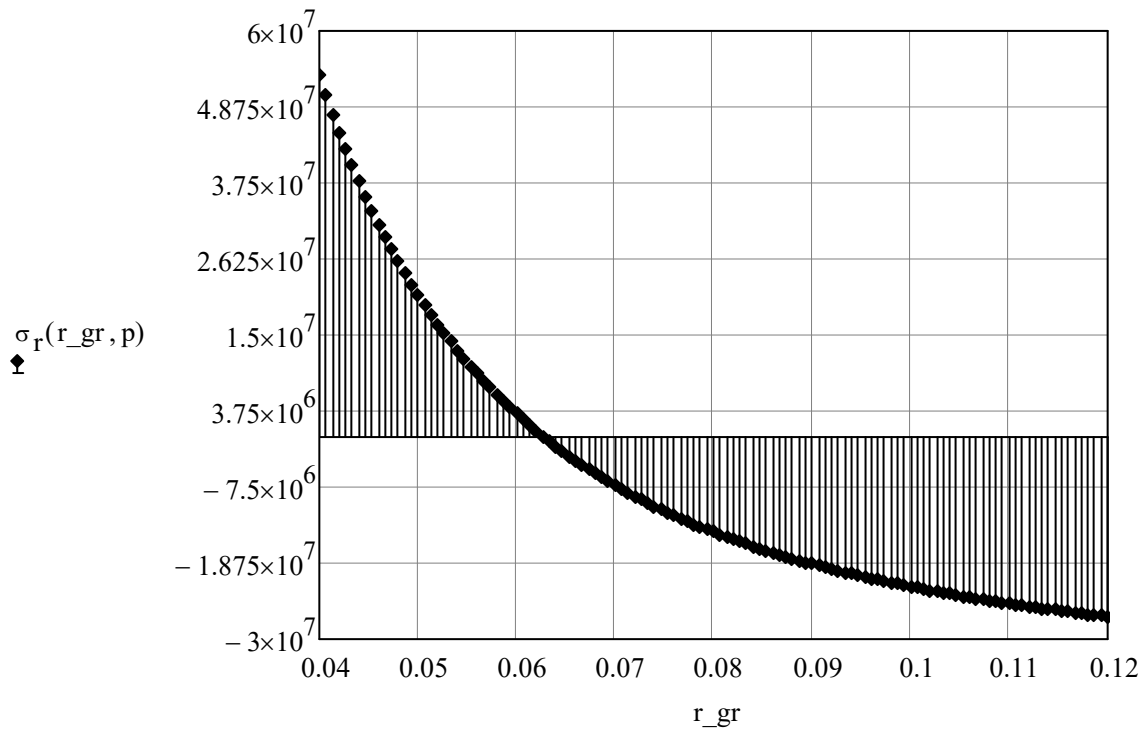


Рис. 3.2 График зависимости радиальных напряжений при допускаемой нагрузке

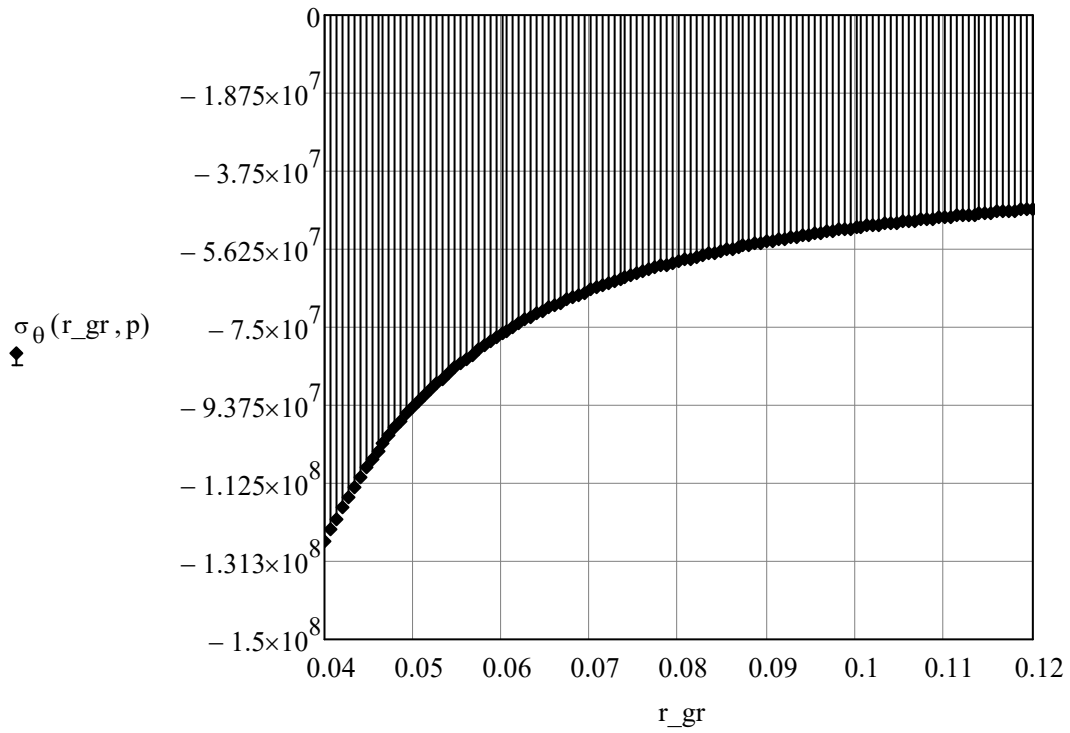


Рис. 3.3 График зависимости окружных напряжений при допустимой нагрузке

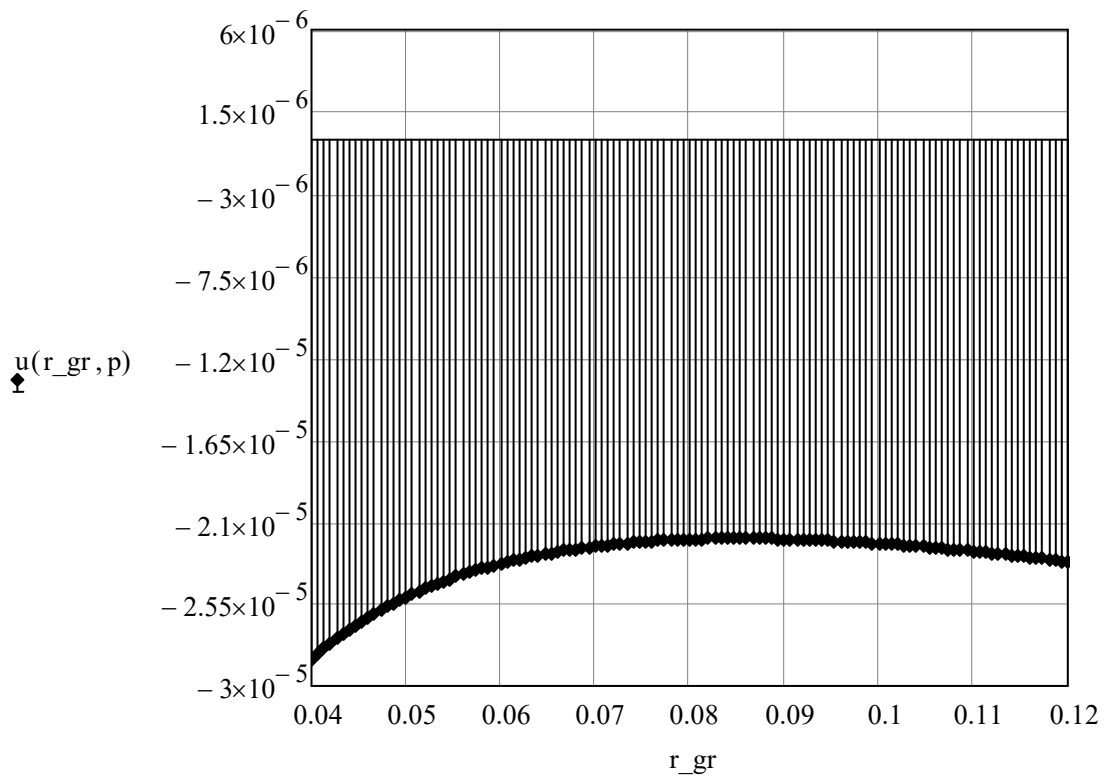


Рис. 3.4 График зависимости радиальных перемещений при допустимой нагрузке

Покажем действующие на цилиндр в опасной точке $r=r_1$ радиальные и окружные напряжения

$$\sigma_{\theta}(r_1, p) = -1.266 \times 10^8 \text{ Па} \qquad \sigma_r(r_1, p) = 5.335 \times 10^7 \text{ Па}$$

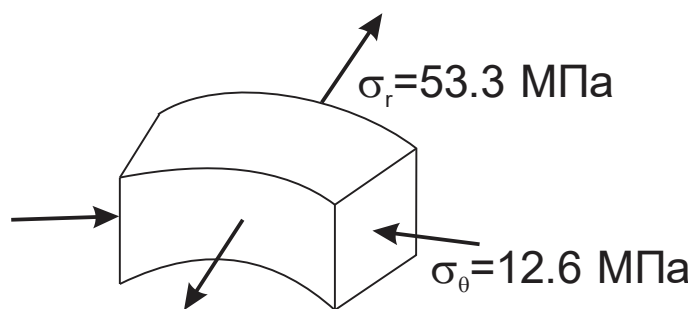


Рис. 3.5 Элемент в опасной точке сечения с действующими на него напряжениями при допустимой нагрузке

Задача 4. Расчет тонкой оболочки по безмоментной теории

Тонкостенный резервуар с толщиной стенки h заполнен жидкостью плотностью ρ_0 и нагружен давлением p_0 . Используя безмоментную теорию оболочек вращения -уравнение Лапласа и метод сечений построить эпюры меридианальных и окружных напряжений. По заданному критерию прочности определить толщину стенки

Исходные данные:

$$a := 2.4 \text{ м} \quad z_0 := 1.4 \text{ м} \quad b := 1 \text{ м} \quad R := 3 \text{ м} \quad p_0 := 0.25 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$g := 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \rho := 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad \sigma_{\text{доп}} := 170 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

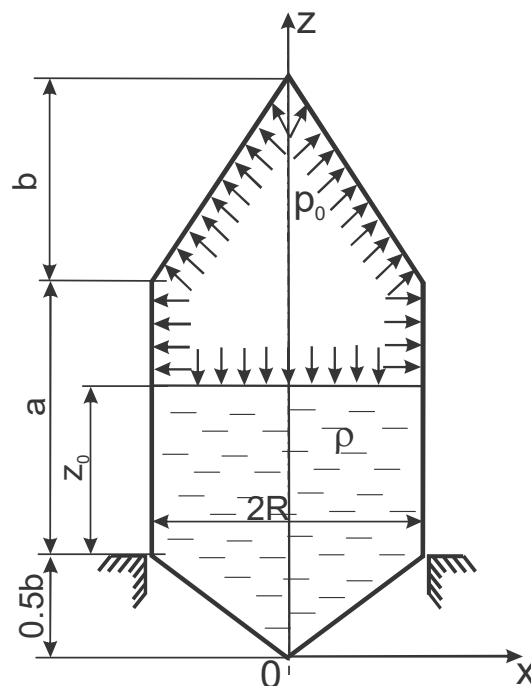


Рис. 4.1 Резервуар с жидкостью под газовым давлением

Решение:

Для решения данной задачи воспользуемся безмоментной теорией оболочек. Уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_\theta}{r_\theta} = \frac{p}{h}$$

Ось z направим вверх из вершины нижнего конуса. Давление p в точке жидкости с координатой z определяется по формуле:

$$p = p_0 + \rho \cdot (z_0 + 0.5b - z)$$

1. Рассмотрим коническую часть оболочки с жидкостью (рис. 4.2)

$$0 \leq z \leq 0.5b$$

$$\cos\alpha := \frac{0.5b}{\sqrt{(0.5b)^2 + R^2}} \quad \operatorname{tg}\alpha := \frac{R}{0.5 \cdot b}$$

Радиусы кривизны конической части оболочки равны

$$\rho_{m1} = \infty \quad \rho_{\theta 1}(x) := \frac{x}{\cos\alpha} \quad x(z) := z \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

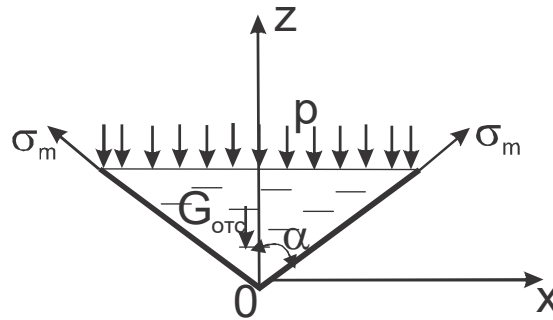


Рис. 4.2 Отсеченная коническая часть оболочки с жидкостью

Давление p в точке жидкости с координатой z

$$p(z) := p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 + 0.5b - z)$$

Из уравнения Лапласа получим:

$$\sigma_{\theta 1}(z, h) := \frac{[p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 + 0.5b - z)] \cdot (z \cdot \operatorname{tg}\alpha)}{h \cdot (\cos\alpha)}$$

Запишем уравнения равновесия в проекции на ось Oz для отсеченной части оболочки:

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot x(z) \cdot h \cdot \cos\alpha - p(z) \cdot \pi \cdot x(z)^2 - \rho \cdot g \cdot V_{\text{отс}} = 0$$

где

$$V_{\text{отс}}(z) := \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot x(z)^2 \cdot z$$

Тогда выражение для меридиальных напряжений для конической части оболочки примет вид:

$$\sigma_{m1}(z, h) := \frac{[p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 + 0.5b - z)] \cdot x(z) - \rho \cdot g \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot x(z) \cdot z\right)}{2 \cdot h \cdot \cos\alpha}$$

2. Рассмотрим цилиндрическую часть оболочки с жидкостью (рис. 4.3)

$$0.5 \cdot b \leq z \leq 0.5b + z_0$$

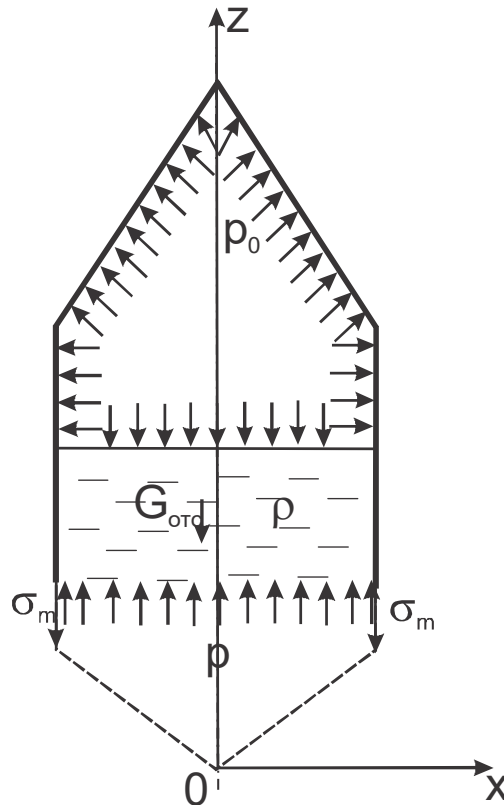


Рис. 4.3. Отсеченная цилиндрическая часть оболочки с жидкостью

Радиусы кривизны цилиндрической части оболочки равны

$$\rho_{m2} = \infty \quad \rho_{\theta 2}(x) := R$$

Давление p в точке жидкости с координатой z

$$p(z) := p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 + 0.5b - z)$$

Из уравнения Лапласа получим:

$$\sigma_{\theta 2}(z, h) := \frac{[p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 + 0.5b - z)] \cdot R}{h}$$

Запишем уравнения равновесия в проекции на ось Oz для отсеченной части оболочки:

$$\sigma_{m2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h - p(z) \cdot \pi \cdot R^2 - \rho \cdot g \cdot V_{\text{отс}2} = 0$$

Где

$$V_{\text{отс}2}(z) := \pi \cdot R^2 \cdot (z_0 + 0.5b - z)$$

Тогда выражение для меридиальных напряжений для конической части оболочки примет вид:

$$\sigma_{m2}(z, h) := \frac{[p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 + 0.5b - z)] \cdot R - \rho \cdot g \cdot R \cdot (z_0 + 0.5b - z)}{2 \cdot h}$$

3. Рассмотрим цилиндрическую часть оболочки под газовым давлением (4.4)

$$0.5b + z_0 \leq z \leq 0.5b + a$$

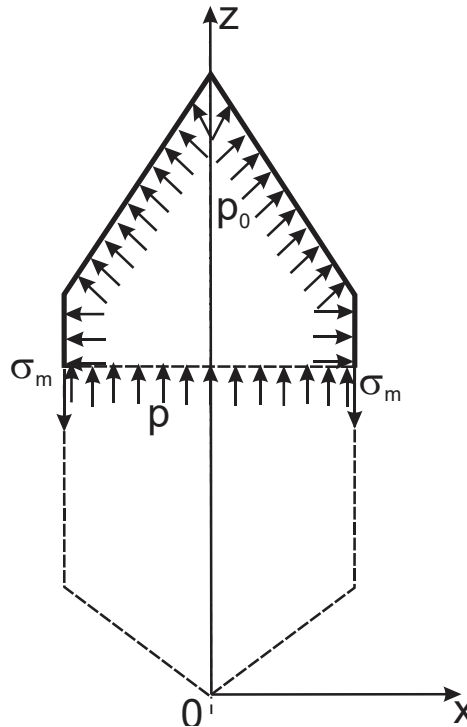


Рис. 4.4 Отсеченная цилиндрическая часть оболочки под газовым давлением

Радиусы кривизны цилиндрической части оболочки равны

$$\rho_{m3} = \infty \quad \rho_{\theta3}(x) := R$$

Давление $p = p_0$ в точке с координатой z

Из уравнения Лапласа получим:

$$\sigma_{\theta3}(z, h) := \frac{p_0 \cdot R}{h}$$

Запишем уравнения равновесия в проекции на ось Oz для отсеченной части оболочки:

$$\sigma_{m3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h - p_0 \cdot \pi \cdot R^2 = 0$$

Тогда выражение для меридианальных напряжений для конической части оболочки примет вид:

$$\sigma_{m3}(z, h) := \frac{p_0 \cdot R}{2 \cdot h}$$

4. Рассмотрим коническую часть оболочки под газовым давлением
(4.5)

$$0.5b + a \leq z \leq 0.5b + a + b$$

$$\cos\beta := \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} \quad \operatorname{tg}\beta := \frac{R}{b}$$

Радиусы кривизны конической части оболочки равны

$$\rho_{m4} = \infty \quad \rho_{\theta 4}(x_1) := \frac{x_1}{\cos\beta}$$

Где

$$x_1(z) := (1.5 \cdot b + a - z) \cdot \operatorname{tg}\beta$$

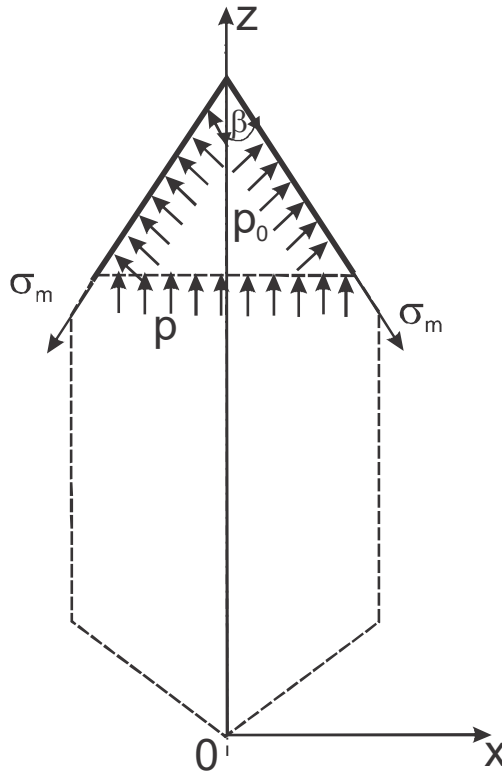


Рис. 4.5 Отсеченная коническая часть оболочки под газовым давлением

$$\cos\beta := \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} \quad \operatorname{tg}\beta := \frac{R}{b}$$

Давление $p=p_0$ в точке с координатой z

Из уравнения Лапласа получим:

$$\sigma_{\theta 4}(z, h) := \frac{p_0 \cdot [(1.5 \cdot b + a - z) \cdot \operatorname{tg}\beta]}{h \cdot \cos\beta}$$

Запишем уравнения равновесия в проекции на ось Oz для отсеченной части оболочки:

$$\sigma_{m4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_1(z) \cdot h \cdot \cos\beta - p_0 \cdot \pi \cdot x_1(z)^2 = 0$$

Тогда выражение для меридиональных напряжений для конической части оболочки примет вид:

$$\sigma_{m4}(z, h) := \frac{p_0 \cdot [(1.5 \cdot b + a - z) \cdot \operatorname{tg}\beta]}{2 \cdot h \cdot \cos\beta}$$

В результате меридиональные и окружные напряжения в зависимости от координаты z имеют вид

$$\sigma_m(z, h) := \begin{cases} \sigma_{m1}(z, h) & \text{if } 0 \leq z \leq 0.5 \cdot b \\ \sigma_{m2}(z, h) & \text{if } 0.5 \cdot b \leq z \leq 0.5 \cdot b + z_0 \\ \sigma_{m3}(z, h) & \text{if } 0.5 \cdot b + z_0 \leq z \leq 0.5 \cdot b + a \\ \sigma_{m4}(z, h) & \text{if } 0.5 \cdot b + a \leq z \leq 0.5 \cdot b + a + b \end{cases}$$

$$\sigma_\theta(z, h) := \begin{cases} \sigma_{\theta1}(z, h) & \text{if } 0 \leq z \leq 0.5 \cdot b \\ \sigma_{\theta2}(z, h) & \text{if } 0.5 \cdot b \leq z \leq 0.5 \cdot b + z_0 \\ \sigma_{\theta3}(z, h) & \text{if } 0.5 \cdot b + z_0 \leq z \leq 0.5 \cdot b + a \\ \sigma_{\theta4}(z, h) & \text{if } 0.5 \cdot b + a \leq z \leq 0.5 \cdot b + a + b \end{cases}$$

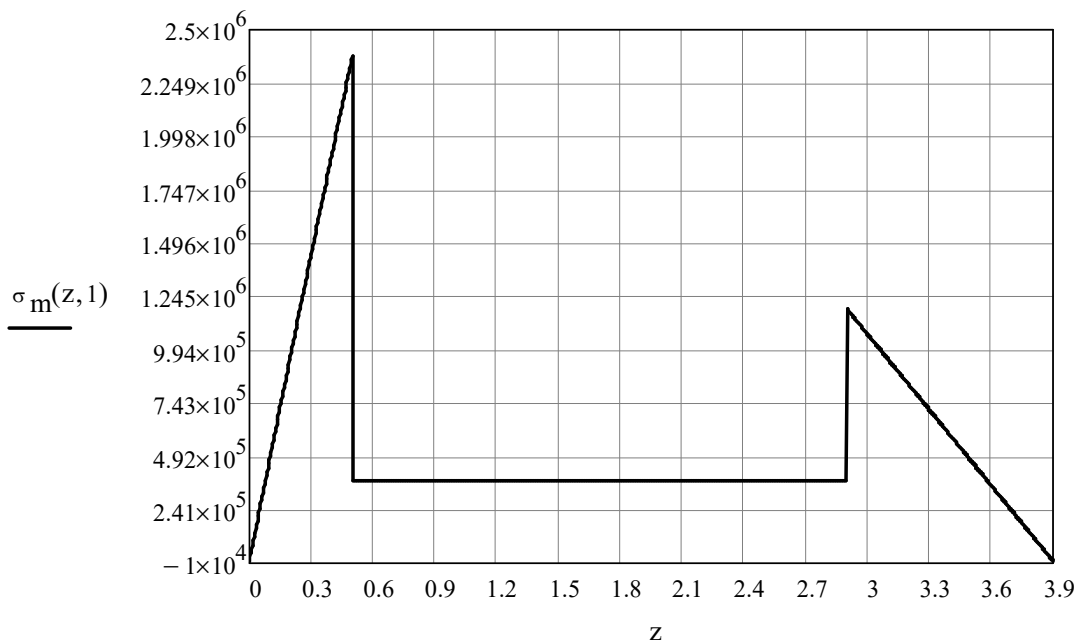


Рис. 4.6 График зависимости меридиональных напряжений σ_m^*h в зависимости от координаты z

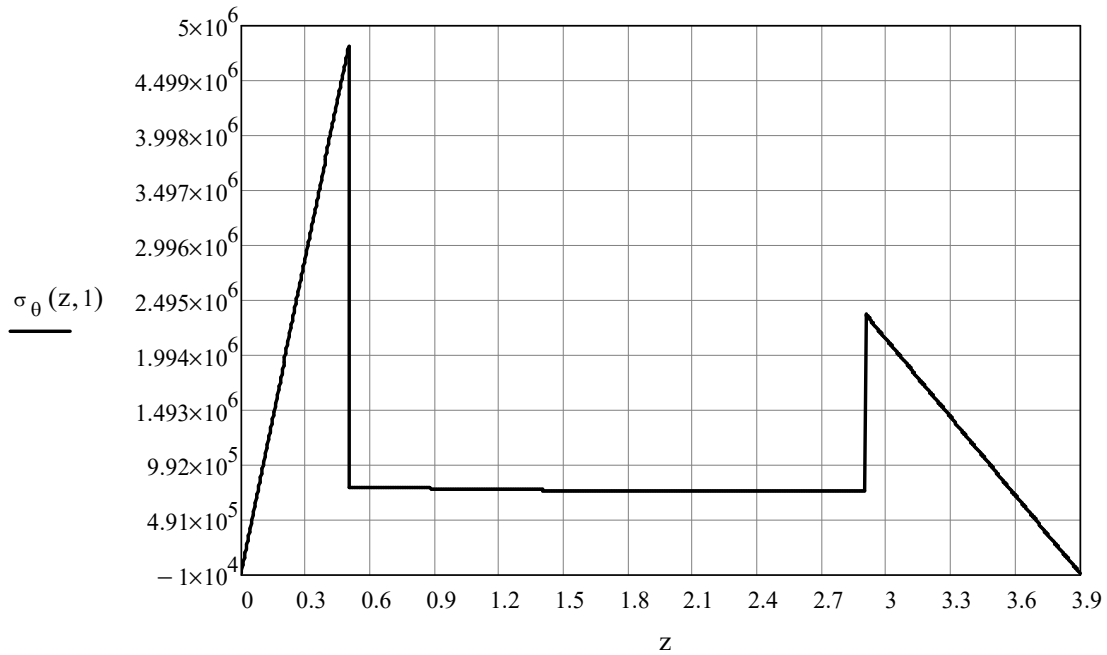


Рис. 4.7 График зависимости окружных напряжений σ_{θ}^*h в зависимости от координаты z

Из графиков видно, что опасным является сечение в конической части оболочки возле опоры, где

$$\sigma_{m\max} = \sigma_{m1}(0.5b, h) \text{ float, 3} \rightarrow \sigma_{m\max} = \frac{2.38e6}{h}$$

$$\sigma_{\theta\max} = \sigma_{\theta1}(0.5b, h) \text{ float, 3} \rightarrow \sigma_{\theta\max} = \frac{4.82e6}{h}$$

Напряженное состояние в опасной элемента в окрестности опасной точки изображено на рисунке 4.8. Здесь учтено, что радиальные напряжения малы:

$$\sigma_m, \sigma_{\theta} > \sigma_r = -p$$

Наибольшее эквивалентное напряжение по критерию Сен-Венана:

$$\sigma_{\text{ЭВК}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{4.82e6}{h} \quad \sigma_2 = \frac{2.38e6}{h} \quad \sigma_3 := 0$$

$$\sigma_{\text{ЭВК}} = \frac{4.82e6}{h} - 0 = \frac{4.82e6}{h}$$

Из условия прочности:

$$\sigma_{\text{ЭВК}} \leq \sigma_{\text{доп}}$$

$$\frac{4.82e6}{h} \leq \sigma_{\text{доп}}$$

Получим

$$h \geq \frac{4.82e6}{\sigma_{\text{доп}}} \text{ float},3 \rightarrow h \geq 0.0284 \text{ м}$$

$$h := 30 \text{ мм}$$

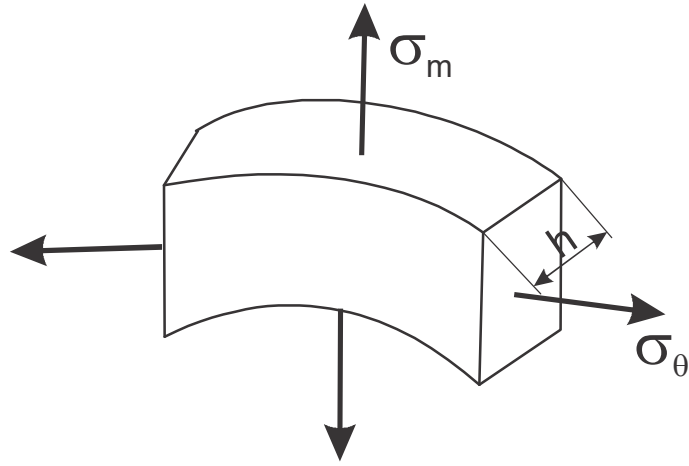


Рис. 4.8. Напряженное состояние в опасной точке

Задача 5. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки

Цилиндрическая оболочка постоянной толщины с заданными закреплениями краев нагружена осесимметричной нагрузкой. Оценить длину зоны краевого эффекта, записать граничные условия и определить постоянные интегрирования. Построить решения для прогибов и изгибающих моментов в области краевого эффекта. Проверить прочность оболочки по критерию Сен-Венана.

Исходные данные:

$$\begin{aligned}
 p_0 &:= 40 \cdot 10^3 \text{ Па} & h &:= 0.008 \text{ м} \\
 q &:= 2500 \frac{\text{Н}}{\text{м}} & \sigma_{\text{доп}} &:= 260 \cdot 10^6 \text{ Па} \\
 \rho &:= 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} & E &:= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \\
 R &:= 0.75 \text{ м} & \nu &:= 0.3
 \end{aligned}$$

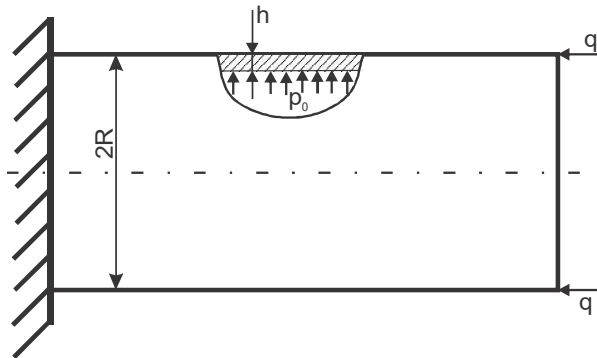


Рис. 5.1. Расчетная схема

Решение:

Приведем уравнение осесимметричной изгибной деформации оболочки и решение типа краевого эффекта для прогибов, углов поворотов сечений оболочки, изгибающих моментов и поперечных сил.

Уравнение равновесия цилиндрической оболочки в перемещениях

$$D \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E \cdot h}{R^2} \cdot w = p - \nu \cdot \frac{N_x}{R}$$

Где

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

- цилиндрическая жесткость

N_x - погонное продольная сила, p - нормальное давление

Решение неоднородного дифференциального уравнения 4-го порядка относительно нормального прогиба $w(x)$ складывается из общего решения однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения $w_q(x)$ неоднородного уравнения

$$w(x) := e^{-k \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(k \cdot x) + C_2 \cdot \sin(k \cdot x)) + e^{k \cdot x} \cdot (C_3 \cdot \cos(k \cdot x) + C_4 \cdot \sin(k \cdot x)) + w_q(x)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на краях оболочки.

Волновое число:

$$k := \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 \cdot h^2}}$$

$$k = 16.595$$

частное решение, зависит от внешних нагрузок, действующих на оболочку:

$$w_q(x) = \frac{R^2}{E \cdot h} \cdot \left(P - \nu \cdot \frac{N_x}{R} \right)$$

Оценим длину зоны краевого эффекта для расчетной схемы стальной оболочки:

$$\lambda := \frac{\pi}{k} = 0.189$$

Из условия ограниченности решения на бесконечности следует принять $C_3 = C_4 = 0$.

Решение основанное на концепции краевого эффекта вблизи края имеет вид:

$$w(x) = e^{-k \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(k \cdot x) + C_2 \cdot \sin(k \cdot x)) + \frac{R^2}{E \cdot h} \cdot \left(P_0 - \nu \cdot \frac{N_x}{R} \right)$$

$$\phi(x) = \frac{d}{dx} w(x) = k \cdot e^{-k \cdot x} \cdot [(C_1 - C_2) \cdot \cos(k \cdot x) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(k \cdot x)]$$

$$M(x) = D \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 2 \cdot k^2 \cdot D \cdot e^{-k \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \sin(k \cdot x) - C_2 \cdot \cos(k \cdot x))$$

$$M_y = \nu \cdot M_x$$

$$Q(x) = D \cdot \frac{d^3}{dx^3} w(x) = 2 \cdot k^3 \cdot e^{-k \cdot x} \cdot D \cdot [(C_1 + C_2) \cdot \cos(k \cdot x) + (C_1 - C_2) \cdot \sin(k \cdot x)]$$

Запишем граничные условия и найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2

Продольное усилие для данной расчетной схемы равно

$$N_x = -q$$

Граничные условия для жестко закрепленного края при $x=0$:

$$w(0) = 0$$

$$\phi(x) = 0$$

Решим систему и найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$\text{Given } C_1 := 1 \quad C_2 := 1$$

$$e^{-k \cdot 0} \cdot (C_1 \cdot \cos(k \cdot 0) + C_2 \cdot \sin(k \cdot 0)) + \frac{R^2}{E \cdot h} \cdot \left(p_0 - v \cdot \frac{-q}{R} \right) = 0$$

$$k \cdot e^{-k \cdot 0} \cdot [(C_1 - C_2) \cdot \cos(k \cdot 0) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(k \cdot 0)] = 0$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(C_1, C_2) \text{ float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.0000144 \\ -0.0000144 \end{pmatrix}$$

Построим решения для прогибов, углов поворотов, изгибающих моментов и поперечных сил

$$w(x) := e^{-k \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(k \cdot x) + C_2 \cdot \sin(k \cdot x)) + \frac{R^2}{E \cdot h} \cdot \left(p_0 - v \cdot \frac{-q}{R} \right)$$

$$\phi(x) := k \cdot e^{-k \cdot x} \cdot [(C_1 - C_2) \cdot \cos(k \cdot x) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(k \cdot x)]$$

$$M_x(x) := 2 \cdot k^2 \cdot D \cdot e^{-k \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \sin(k \cdot x) - C_2 \cdot \cos(k \cdot x))$$

$$M_y(x) := v \cdot M_x(x)$$

$$Q(x) := 2 \cdot k^3 \cdot e^{-k \cdot x} \cdot D \cdot [(C_1 + C_2) \cdot \cos(k \cdot x) + (C_1 - C_2) \cdot \sin(k \cdot x)]$$

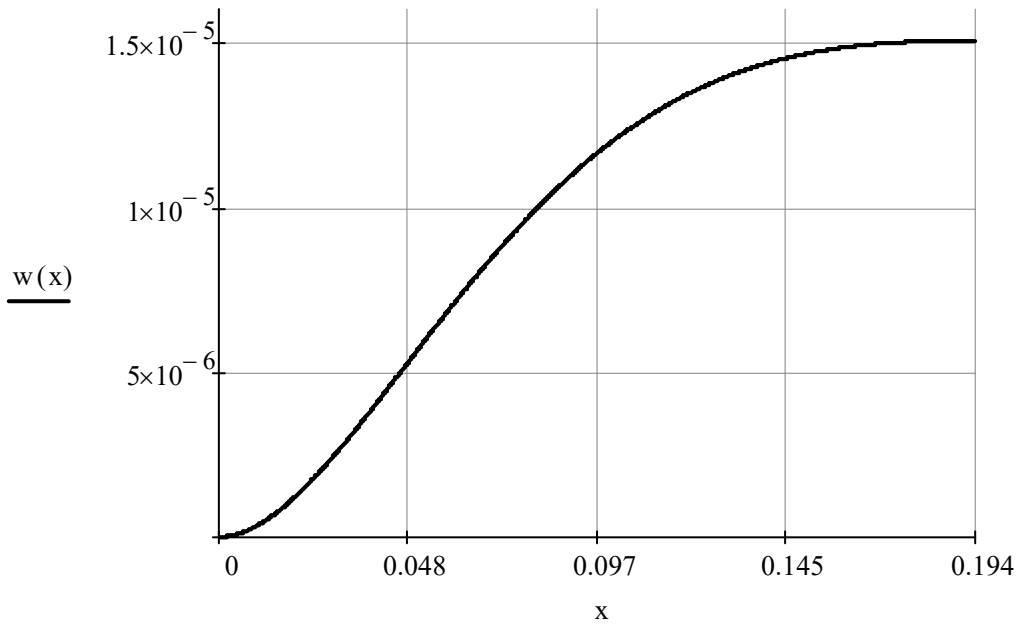


Рис. 5.2. График зависимости прогиба $w(x)$ в области краевого эффекта

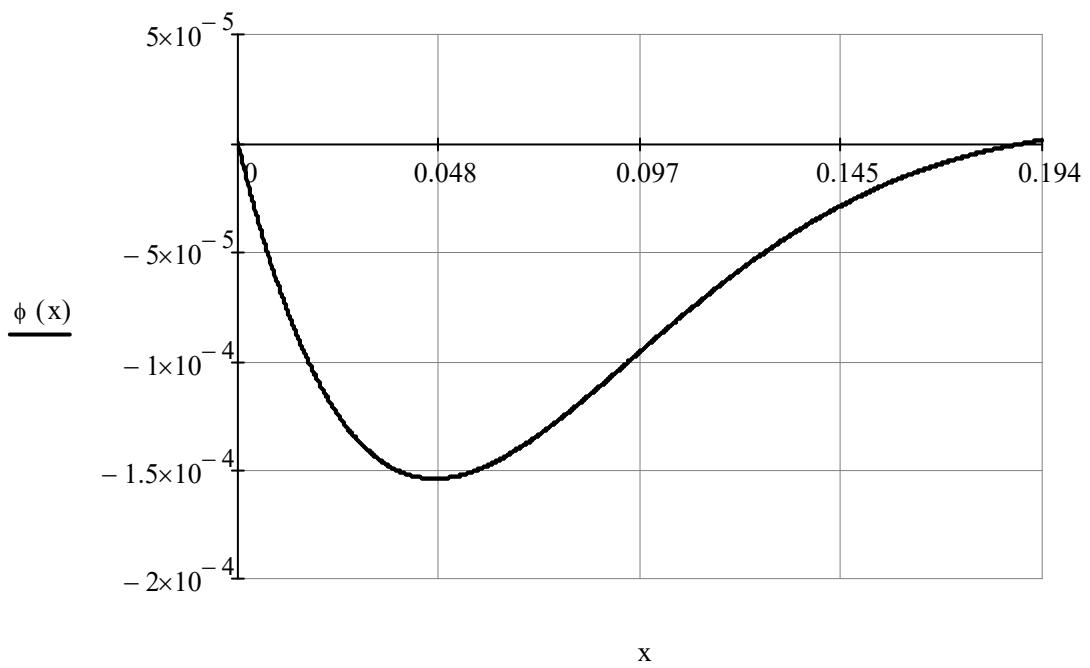


Рис. 5.3. График зависимости угла поворота $f(x)$ в области краевого эффекта

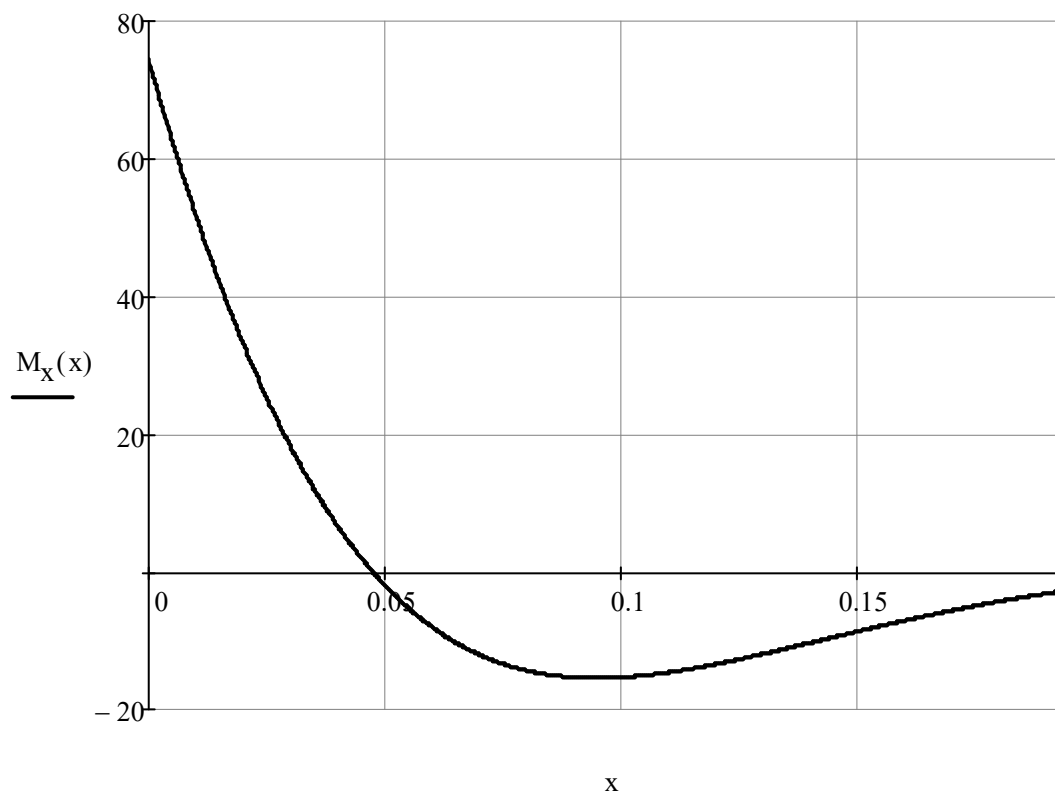


Рис. 5.4. График зависимости изгибающего момента $M_x(x)$ в области краевого эффекта

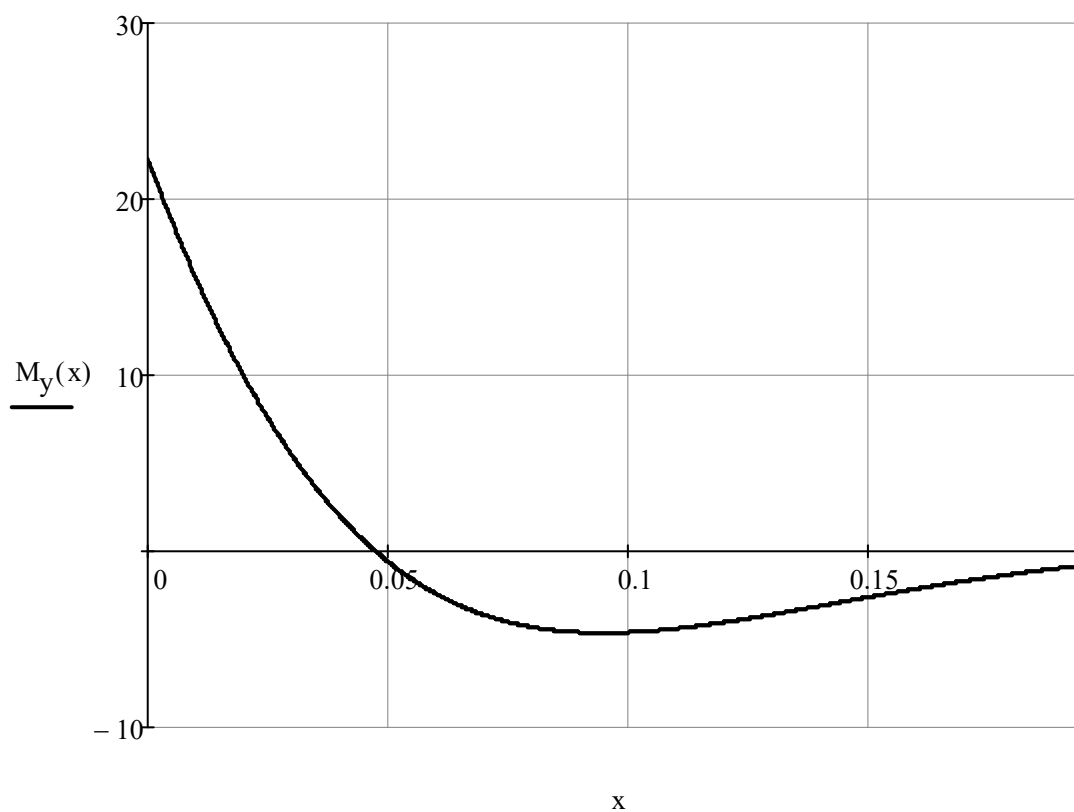


Рис. 5.5 График зависимости изгибающего момента $M_y(x)$ в области краевого эффекта

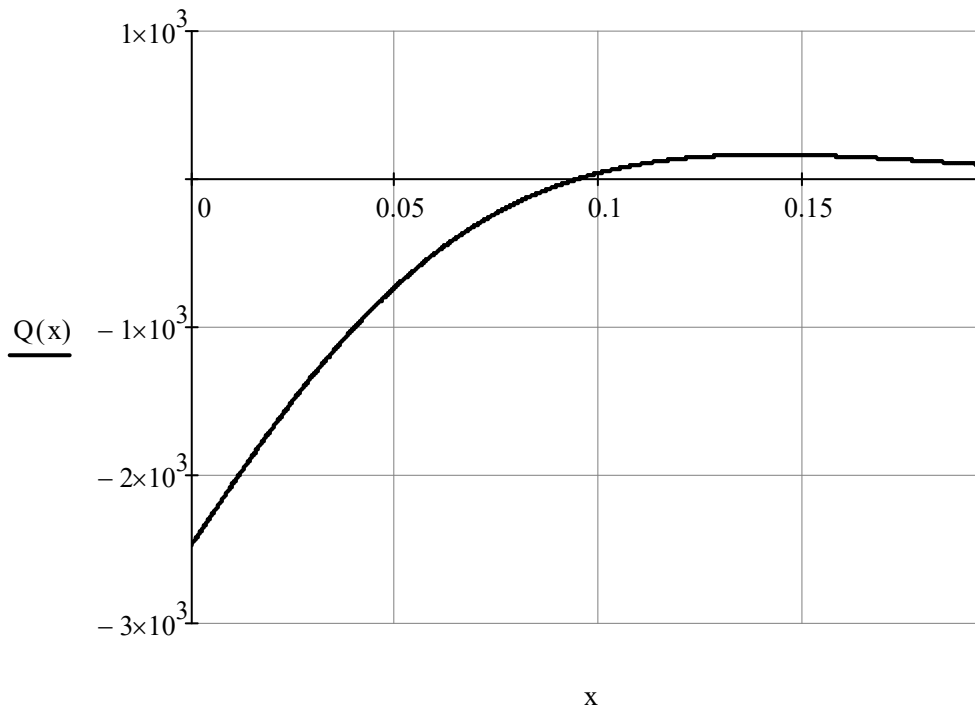


Рис. 5.6 График зависимости поперечной силы $Q(x)$ в области краевого эффекта

Проверим прочность оболочки по критерию Сен-Венана. Из графиков видно, что опасным является сечение $x=0$. Найдем, чему равны изгибающие моменты в опасном сечении:

$$M_x(0) = 74.37 \text{ Н} \quad M_y(0) = 22.311 \text{ Н}$$

Тогда напряжения, возникающие в опасном сечении равны:

$$\sigma_x := \frac{-6 \cdot M_x(0)}{h^2} = -6.972 \times 10^6 \quad \sigma_y := \frac{-6 \cdot M_y(0)}{h^2} = -2.092 \times 10^6$$

$$\sigma_{\text{экв_СВ}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 0 - (-6.972 \times 10^6) = 6.972 \times 10^6 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{\text{экв_СВ}} \leq \sigma_{\text{доп}}$$

Условие прочности выполняется.

Задача 6. Расчет круговой пластины при осесимметричном нагружении

В качестве расчетной схемы элемента парогенератора применяется круговая (кольцевая) пластина постоянной толщины, нагруженная осесимметричной нагрузкой.

Для заданной расчетной схемы записать граничные условия и определить постоянные интегрирования. Построить решение для прогибов, радиальных и окружных изгибающих моментов и соответствующие эпюры $w(r)$, $M_r(r)$, $M_\theta(r)$. Для опасных точек определить радиальные и окружные напряжения изгиба, показать вид напряженного состояния в опасных точках. Из расчета на прочность и жесткость определить допускаемое значение внешней нагрузки.

Исходные данные:

$$\begin{aligned} r_1 &:= 0.35 \text{ м} & E &:= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \\ r_2 &:= 0.7 \text{ м} & \nu &:= 0.3 \\ h &:= 0.012 \text{ м} & \sigma_{\text{доп}} &:= 285 \cdot 10^6 \text{ Па} \\ w_{\text{доп}} &:= 0.0012 \text{ м} \end{aligned}$$

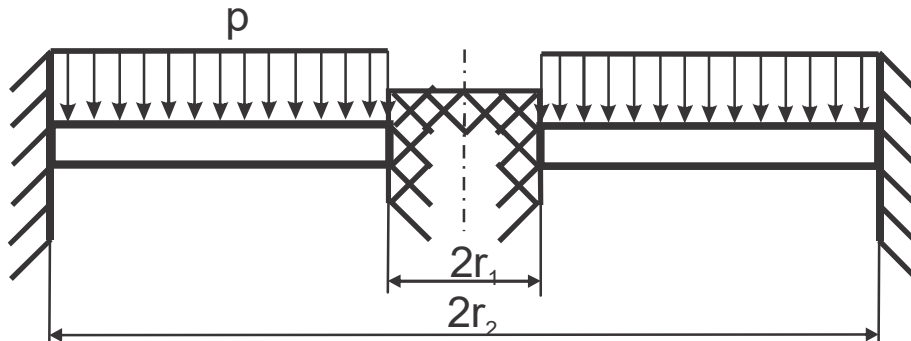


Рис. 6.1 Расчетная схема

Решение:

Приведем уравнение изгиба пластины в полярных координатах

$$D \cdot \left(\frac{d}{dr} \Delta w \right) = Q$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)$$

- оператор Лапласа в полярной системе координат

Q - поперечная сила

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

- цилиндрическая жесткость

Дифференциальное уравнение изгиба пластин относительно нормального прогиба имеет вид:

$$D \Delta \Delta w = p$$

где p - давление на поверхность пластины

Общее решение уравнения записывается в виде:

$$w(r) = C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_3 \cdot \ln(r) + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln(r) + w_{\text{ч}}$$

где C_1 - C_4 - постоянные интегрирования, $w_{\text{ч}}$ -частное решение, которое в данном случае нагружения пластины равномерным давлением имеет вид:

$$w_{\text{ч}} = \frac{-pr^4}{64D}$$

Выражение для угла поворота имеет вид:

$$\phi(r) = -\frac{d}{dr} w(r) = -\left[2 \cdot C_2 \cdot r + C_3 \cdot \frac{1}{r} + C_4 \cdot r \cdot (1 + 2 \cdot \ln(r)) + \frac{-pr^3}{16D} \right]$$

Изгибающие моменты в полярных координатах:

$$M_r = D \left(\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} w(r) \right)$$

$$M_{\theta} = D \left(\nu \cdot \frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} w(r) \right)$$

Граничные условия для расчетной схемы, приведенной на рисунке 6.1, имеют вид:

$$\text{при } r = r_1 \quad \begin{cases} w(r_1) = 0 \\ \phi(r_1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{при } r = r_2 \quad \begin{cases} w(r_2) = 0 \\ \phi(r_2) = 0 \end{cases}$$

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования

Given

$$C_1 + C_2 \cdot r_1^2 + C_3 \cdot \ln(r_1) + C_4 \cdot r_1^2 \cdot \ln(r_1) + \frac{-p \cdot r_1^4}{64D} = 0$$

$$\left[2 \cdot C_2 \cdot r_1 + C_3 \cdot \frac{1}{r_1} + C_4 \cdot r_1 \cdot (1 + 2 \cdot \ln(r_1)) + \frac{-p \cdot r_1^3}{16D} \right] = 0$$

$$C_1 + C_2 \cdot r_2^2 + C_3 \cdot \ln(r_2) + C_4 \cdot r_2^2 \cdot \ln(r_2) + \frac{-p \cdot r_2^4}{64D} = 0$$

$$\left[2 \cdot C_2 \cdot r_2 + C_3 \cdot \frac{1}{r_2} + C_4 \cdot r_2 \cdot (1 + 2 \cdot \ln(r_2)) + \frac{-p \cdot r_2^3}{16D} \right] = 0$$

$$\text{Find}(C_1, C_2, C_3, C_4) \text{ float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} 2.543e-7 \cdot p \\ 2.002e-7 \cdot p \\ 1.262e-7 \cdot p \\ 0.000001081 \cdot p \end{pmatrix}$$

В результате постоянные интегрирования равны:

$$C_1(p) := 2.543e-7 \cdot p$$

$$C_2(p) := 2.002e-7 \cdot p$$

$$C_3(p) := 1.262e-7 \cdot p$$

$$C_4(p) := 0.000001081 \cdot p$$

Запишем выражения для прогибов, углов поворотов и внутренних силовых факторов, подставив постоянные интегрирования

$$w(r, p) := C_1(p) + C_2(p) \cdot r^2 + C_3(p) \cdot \ln(r) + C_4(p) \cdot r^2 \cdot \ln(r) + \frac{-p \cdot r^4}{64D}$$

$$\phi(r, p) := \frac{d}{dr} w(r, p)$$

Выражения для внутренних силовых факторов:

$$M_r(r, p) := D \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} w(r, p) + \frac{v}{r} \cdot \frac{d}{dr} w(r, p) \right)$$

$$M_\theta(r, p) := D \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} w(r, p) + v \cdot \frac{d^2}{dr^2} w(r, p) \right)$$

$$Q_r(r, p) := D \cdot \left(\frac{d^3}{dr^3} w(r, p) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2} w(r, p) - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} w(r, p) \right)$$

Построим эпюры прогибов и изгибающих моментов
Для построения введем вспомогательную переменную

$$r_0 := r_1, r_1 + 0.005 .. r_2$$

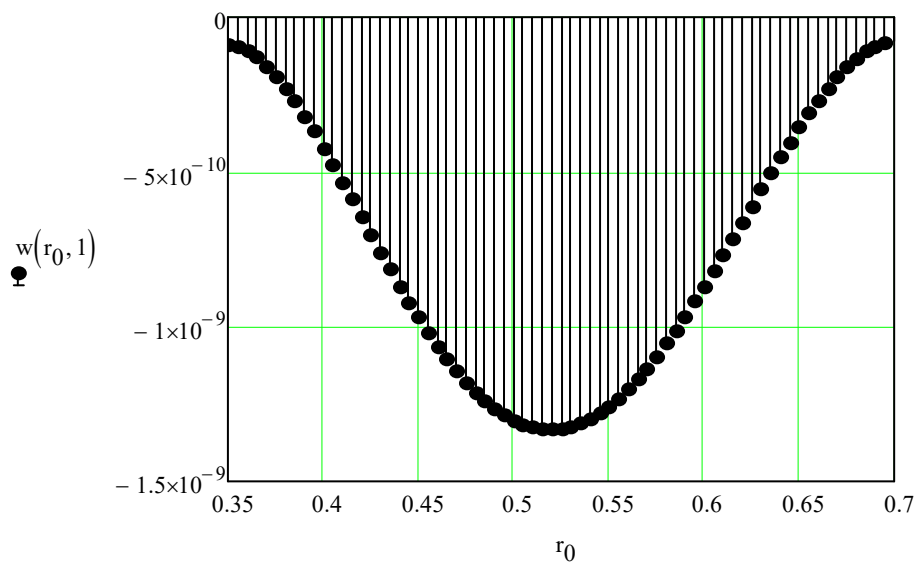


Рис. 6.2. Эпюра прогибов $w(r)$

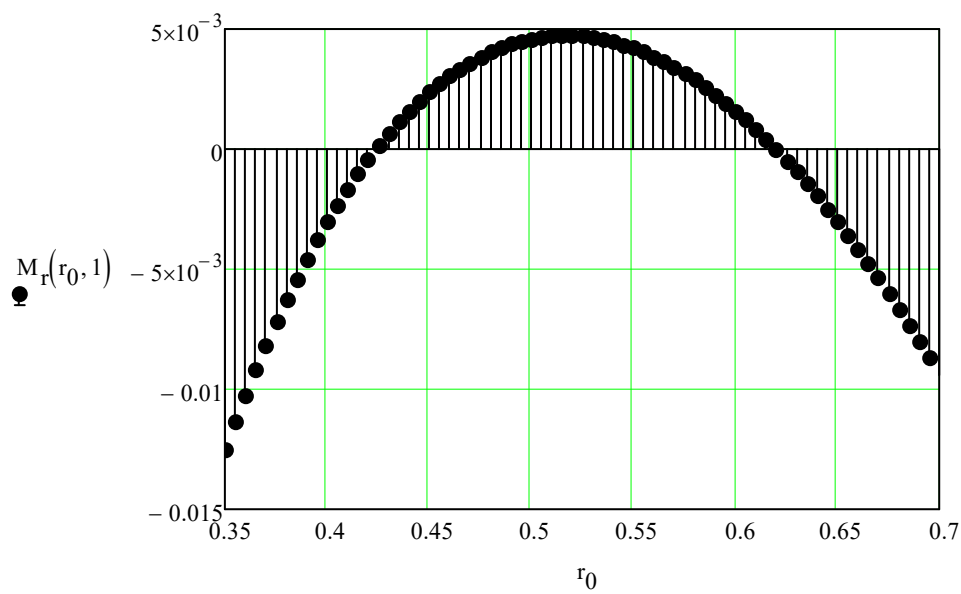


Рис. 6.3. Эпюра изгибающего момента $M_r(r)$

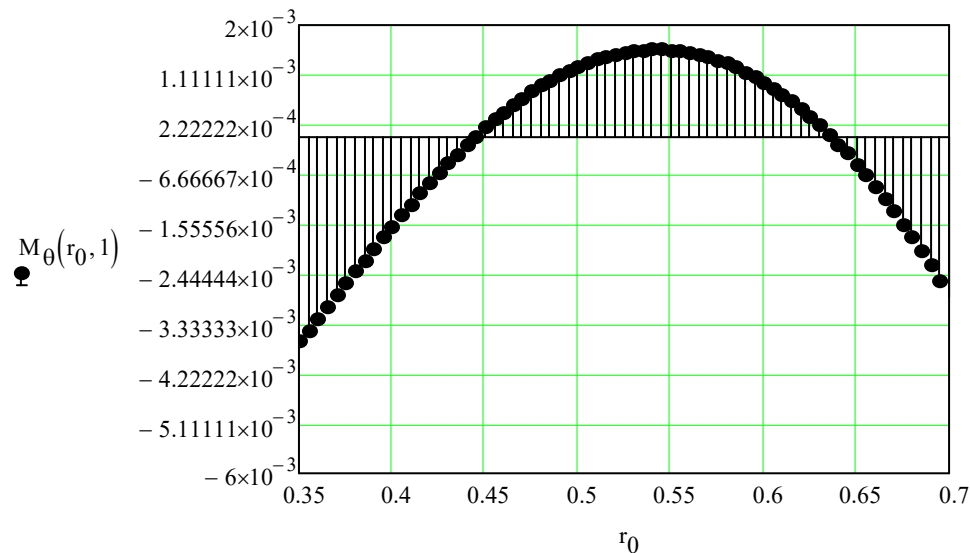


Рис. 6.4. Эпюра изгибающего момента $M_\theta(r)$

Максимальный прогиб в пластине возникает в сечении $r=0.525$

$$w(0.525, p) \text{ float, 4} \rightarrow -1.331e-9 \cdot p$$

Из расчета на жесткость определим допустимое значение внешнего давления

$$w_{\max} \leq w_{\text{доп}}$$

$$1.331e-9 \cdot p \leq w_{\text{доп}}$$

$$p \leq \frac{w_{\text{доп}}}{1.331e-9} \text{ simplifyfloat, 3} \rightarrow p \leq \frac{0.000902}{e-9}$$

Максимальные изгибающие моменты в окружном и радиальном направлении возникают в сечении $r=r_1$

$$M_r(r_1, 1) = -0.012 \text{ Нм}$$

$$M_\theta(r_1, 1) = -3.63 \times 10^{-3} \text{ Нм}$$

$$\sigma_r(p) := \frac{-6 \cdot M_r(r_1, p)}{h^2} \quad \sigma_r(p) \text{ float, 3} \rightarrow 504.0 \cdot p$$

$$\sigma_\theta(p) := \frac{-6 \cdot M_\theta(r_1, p)}{h^2} \quad \sigma_\theta(p) \text{ float, 3} \rightarrow 151.0 \cdot p$$

На рисунке 6.5 приведен вид напряженного состояния в опасном сечении

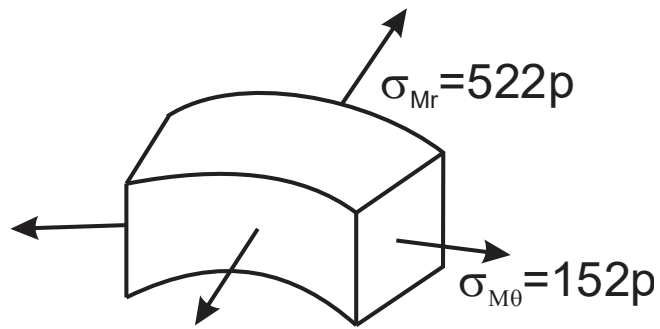


Рис. 6.5. Напряженное состояние в опасном сечении

Найдем эквивалентное напряжение по критерию Сен-Венана:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} := 522.0 \cdot p - 0$$

$$522.0 \cdot p \leq \sigma_{\text{доп}}$$

$$p \leq \frac{\sigma_{\text{доп}}}{522.0} \text{ float, 3} \rightarrow p \leq 545977.0$$

Из двух найденных значений в качестве допускаемого выбираем меньшее давление:

$$p_{\text{доп}} := 0.546 \text{ МПа}$$

Задача 7. Устойчивость стержней

Прямолинейный стержень нагружен осевой силой P . для стержня составного сечения подобрать размер s из условия равноустойчивости стержня относительно главных центральных осей. Из расчета на устойчивость по коэффициенту продольного изгиба $\phi(\lambda)$ определить допустимое значение внешней силы P .

Исходные данные:

$$E := 1 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$$

$$l := 2.5 \text{ м}$$

$$\sigma_{\text{доп}} := 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Номер профиля 20

Из таблицы для двутавра №20

$$h := 0.2 \text{ м}$$

$$b := 0.1 \text{ м}$$

$$J_{x1} := 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$J_{y1} := 115 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$i_{x1} := 8.28 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$i_{y1} := 2.07 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$F_1 := 26.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

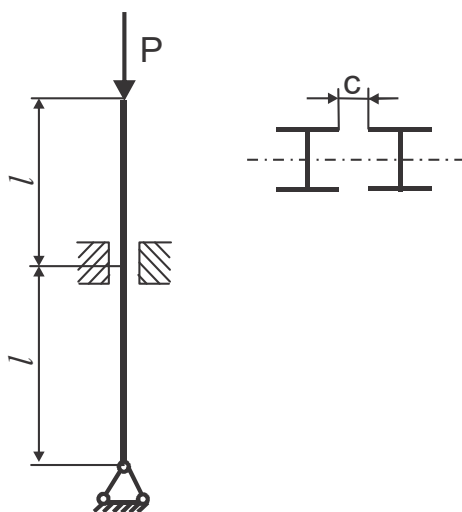


Рис. 7.1. Расчетная схема

Решение:

Определим расстояние s из условия равноустойчивости составного поперечного сечения, представленного на рисунке 7.1. Равноустойчивость будет обеспечена при равенстве гибкости стержня относительно обеих главных осей инерции сечения, т. е.

$$\lambda_x = \lambda_y$$

Где

$$\lambda_x = \frac{\mu \cdot l}{i_x} \quad \lambda_y = \frac{\mu \cdot l}{i_y}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \quad \text{и} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \quad \text{радиусы инерции}$$

μ -коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня

l - длина стержня

С учетом того, что длина стержня не зависит от оси и коэффициенты приведения длины равны. Условие равновесности будет выполняться при $I_x = I_y$

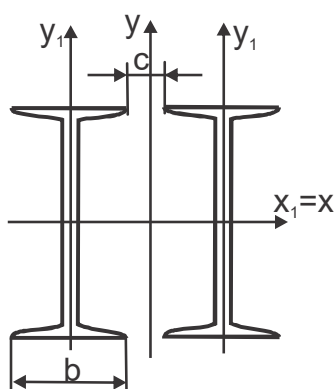


Рис. 7.2. Сечение стержня

Определим моменты инерции стержня

$$J_x := 2 \cdot J_{x1} = 2 \cdot (1840 \cdot 10^{-8}) \quad F_{\text{ww}} := 2 \cdot F_1$$

$$J_x = 3.68 \times 10^{-5} \quad \text{м}^4$$

$$J_y(c) := 2 \cdot \left[J_{y1} + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right)^2 \cdot F_1 \right]$$

Определим параметр c

$$c1 := 0.1 \quad \text{начальное значение}$$

$$c := \text{root} \left[2 \cdot \left[J_{y1} + \left(\frac{b}{2} + \frac{c1}{2} \right)^2 \cdot F_1 \right] - 2 \cdot J_{x1}, c1 \right]$$

$$c = 60.456 \times 10^{-3}$$

Вычислим радиус инерции сечения стержня:

$$i := \sqrt{\frac{J_x}{F}} = 0.083 \text{ м}$$

Вычислим гибкость стержня. Для рассматриваемой схемы:

$$n := 0.5 + \sqrt{2} = 1.914$$

$$\text{тогда } \mu := \frac{1}{n} = 0.522$$

$$\lambda := \frac{\mu \cdot (2 \cdot l)}{i} = 31.524$$

Найдем по таблице коэффициент продольного изгиба

$$\phi := 0.95$$

Определим допускаемое значение силы P из условия устойчивости:

$$\sigma_y = \frac{P_{\text{доп}}}{F} < \phi(\lambda) \cdot \sigma_{\text{доп}}$$

$$P_{\text{доп}} := F \cdot \phi \cdot \sigma_{\text{доп}} = 8.147 \times 10^5 \text{ Н}$$

Задача 8. Изгибные колебания вращающихся валов

Промежуточный вал редуктора вращается с постоянной частотой вращения. На вал посажены диски массами M_1 и M_2 с эксцентриситетами ε_1 и ε_2 , лежащими в одной плоскости. Записать уравнение малых вынужденных колебаний, вычислить частоты собственных колебаний ω_1 и ω_2 и соответствующие им критические числа оборотов вала n_1 и n_2 . Вычислить амплитуды смещений дисков вращающегося вала при рабочем числе оборотов, равном $n_{\text{раб}} = (n_1 + n_2)/2$, и наибольшее напряжение изгиба в поперечных сечениях вала. Вывести формулы для прогибов вала в местах крепления дисков в зависимости от угловой частоты вращения вала. Построить амплитудно-частотные характеристики системы.

Исходные данные:

$m_1 := 50$ кг	$E := 200 \cdot 10^9$ Па
$m_2 := 40$ кг	$d := 40 \cdot 10^{-3}$ м
$a := 0.4$ м	$\varepsilon_1 := 0.4 \cdot 10^{-3}$ м
$b := 0.5$ м	$\varepsilon_2 := 0.2 \cdot 10^{-3}$ м
$l := 0.9$ м	$\sigma_{\text{доп}} := 160 \cdot 10^6$ Па
Полная длина вала: $L := a + b + l = 1.8$	

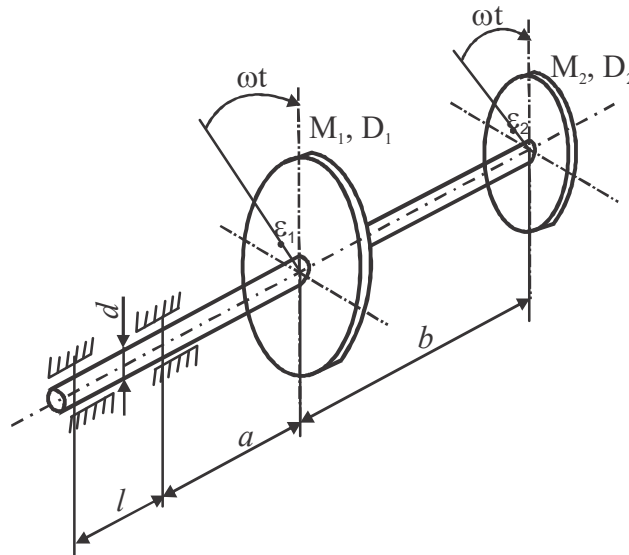


Рис. 8.1 Расчетная схема

Решение:

Запишем уравнение малых изгибных колебаний вращающегося вала с двумя дисками:

$$y_j + \sum_{k=1}^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y_k \cdot m_k \cdot f_{jk} \right) = \theta^2 \cdot \sum_{k=1}^2 (f_{jk} \cdot \varepsilon_k \cdot m_k) \cdot \cos(\theta \cdot t) \quad j := 1, 2$$

где θ - частота вращения

m_k - неуравновешенные массы дисков

ε_k - эксцентриситеты смещений центров масс дисков относительно оси вращения

f_{jk} - элементы матрицы податливости

Вычислим осевой момент инерции вала и жесткость на изгиб

$$I := \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 1.257 \times 10^{-7} \text{ м}^4 \quad EI := E \cdot I = 2.513 \times 10^4$$

Вычислим податливости. Для этого поочередно прикладываем единичные силы к сечениям посадки дисков 1 и 2 (рис. 8.2), составим выражения для единичных моментов и построим эпюры единичных моментов (рис. 8.3)

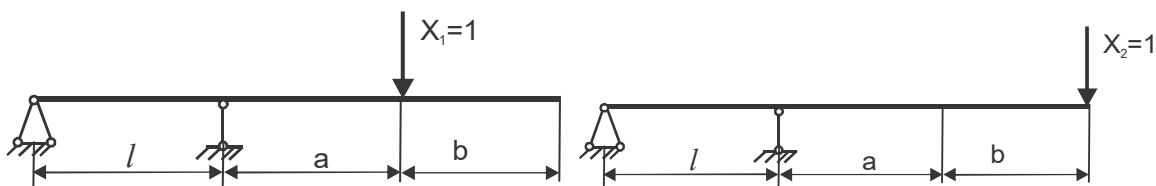


Рис. 8.2. Схема для расчета податливостей с приложенными единичными силами в местах посадки дисков на вал

$$M_1(z) := \begin{cases} \left(\frac{-a}{l} \cdot z \right) & \text{if } 0 \leq z \leq l \\ \left(\frac{-a}{l} \cdot z \right) + \frac{a+1}{l} \cdot (z-l) & \text{if } l \leq z \leq l+a \\ 0 & \text{if } l+a \leq z \leq l+a+b \end{cases}$$

$$M_2(z) := \begin{cases} \left(-\frac{a+b}{l} \cdot z \right) & \text{if } 0 \leq z \leq l \\ \left(-\frac{b+a}{l} \cdot z \right) + \frac{a+b+1}{l} \cdot (z-l) & \text{if } l \leq z \leq l+a+b \end{cases}$$

$$z := 0, \frac{L}{100} .. L$$

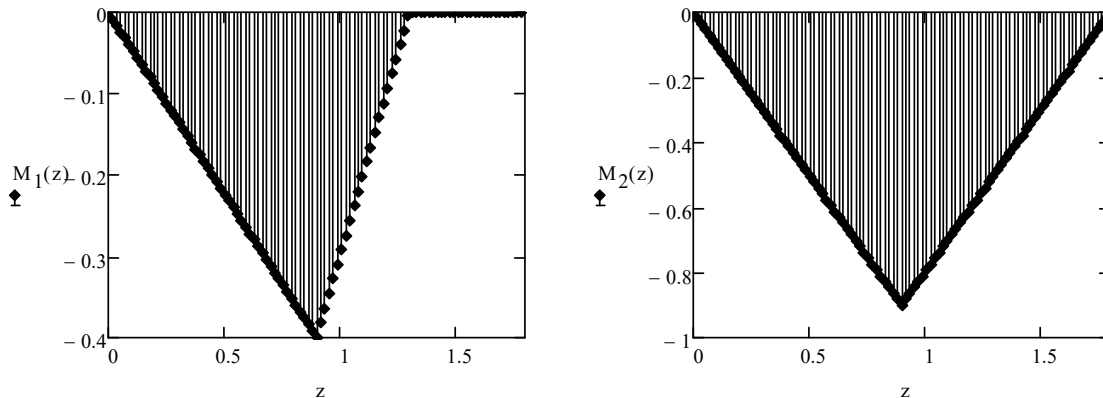


Рис. 8.3. Эпюры единичных моментов

С помощью интеграла Максвелла-Мора найдем податливости системы:

$$f_{11} := \int_0^L \frac{M_1(z) \cdot M_1(z)}{EI} dz = 2.759 \times 10^{-6}$$

$$f_{12} := \int_0^L \frac{M_1(z) \cdot M_2(z)}{EI} dz = 6.738 \times 10^{-6}$$

$$f_{21} := f_{12} = 6.738 \times 10^{-6}$$

$$f_{22} := \int_0^L \frac{M_2(z) \cdot M_2(z)}{EI} dz = 1.934 \times 10^{-5}$$

Определим собственные частоты колебаний дисков:

$$\omega_1 := \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot f_{11} + m_2 \cdot f_{22}}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot f_{11} - m_2 \cdot f_{22}}{2}\right)^2 + m_1 \cdot m_2 \cdot f_{12}^2}}} = 33.45 \quad \frac{1}{c}$$

$$\omega_2 := \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1 \cdot f_{11} + m_2 \cdot f_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot f_{11} - m_2 \cdot f_{22}}{2}\right)^2 + m_1 \cdot m_2 \cdot f_{12}^2}}} = 237.29 \quad \frac{1}{c}$$

Определим критические скорости вращения:

$$n_1 := \frac{30 \cdot \omega_1}{\pi} = 319.44 \frac{1}{\text{мин}}$$

$$n_2 := \frac{30 \cdot \omega_2}{\pi} = 2.266 \times 10^3 \frac{1}{\text{мин}}$$

Рабочее число оборотов:

$$n_{\text{раб}} := \frac{n_1 + n_2}{2} = 1.293 \times 10^3 \frac{1}{\text{мин}}$$

Рабочая частота вращения

$$\theta_{\text{раб}} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 135.373 \frac{1}{\text{с}}$$

Найдем прогибы вала y_1 и y_2 в зависимости от рабочей частоты вращения вала. Уравнение будем решать в матричном виде. Для этого введем матрицы:

инерции:

$$A := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

податливости:

$$F := \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

вектор эксцентриситетов

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

единичную матрицу

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда прогибы вала в зависимости от рабочей частоты имеют вид:

$$y(\theta) := (E - \theta^2 \cdot F \cdot A)^{-1} \cdot \theta^2 \cdot F \cdot A \cdot \varepsilon$$

$$y_1(\theta) := y(\theta)_0 \text{ simplifyfloat, 4} \rightarrow \frac{7.507e86 \cdot \theta^2 + -7.279e83 \cdot \theta^4 + 5.173e79 \cdot \theta^6 + -6.934e74 \cdot \theta^8 + 3.98 \cdot 10^{70}}{-1.255e91 \cdot \theta^2 + 5.935e87 \cdot \theta^4 + -1.991e83 \cdot \theta^6 + 1.734e78 \cdot \theta^8 + 6.88 \cdot 10^{70}}$$

$$y_2(\theta) := y(\theta)_1 \text{ simplifyfloat, 4} \rightarrow -\frac{1.0 \cdot \theta^2 \cdot (1.148e67 \cdot \theta^2 + -3.22e62 \cdot \theta^4 + 2.167e57 \cdot \theta^6 - 1.245e70)}{-7.841e73 \cdot \theta^2 + 3.71e70 \cdot \theta^4 + -1.244e66 \cdot \theta^6 + 1.083e61 \cdot \theta^8 + 4.30 \cdot 10^{70}}$$

На рисунках 8.4 и 8.5 представлены амплитудно-частотные характеристики в зависимости от частоты вращения вала

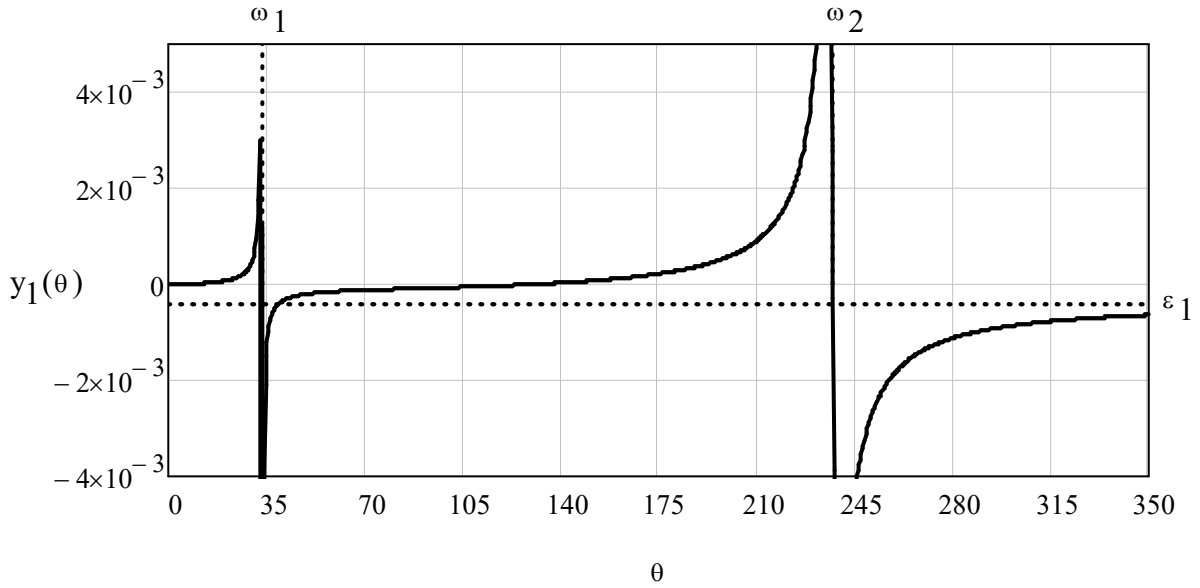


Рис. 8.4. Зависимость перемещения сечения 1 от частоты вращения вала

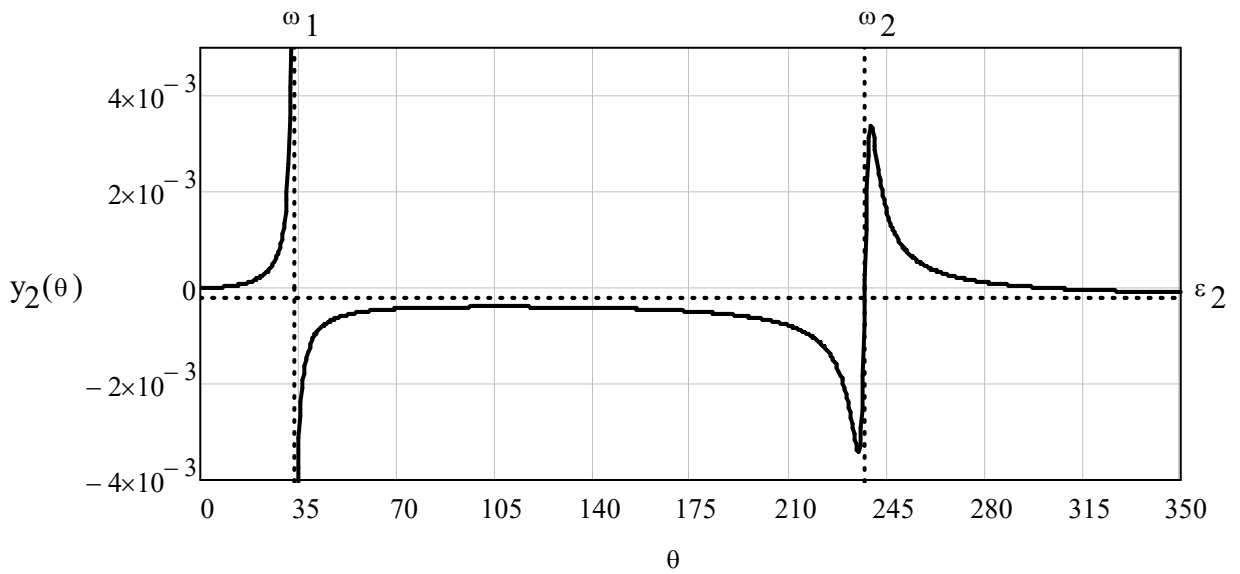


Рис. 8.5. Зависимость перемещения сечения 2 от частоты вращения вала

Определим амплитуды смещений дисков вращающегося вала при рабочей частоте вращения:

$$A_{1p} := y_1(\theta_{\text{раб}}) \quad A_{1p} = 1.279 \times 10^{-5}$$

$$A_{2p} := y_2(\theta_{\text{раб}}) \quad A_{2p} = -4.081 \times 10^{-4}$$

Определим центробежные силы:

$$p_{1p} := m_1 \cdot \theta_{\text{раб}}^2 \cdot (\varepsilon_1 + A_{1p}) = 378.233$$

$$p_{2p} := m_2 \cdot \theta_{\text{раб}}^2 \cdot (\varepsilon_2 + A_{2p}) = -152.549$$

Изгибающие моменты могут быть вычислены по принципу суперпозиций

$$M_x(z) := p_{1p} \cdot M_1(z) + p_{2p} \cdot M_2(z)$$

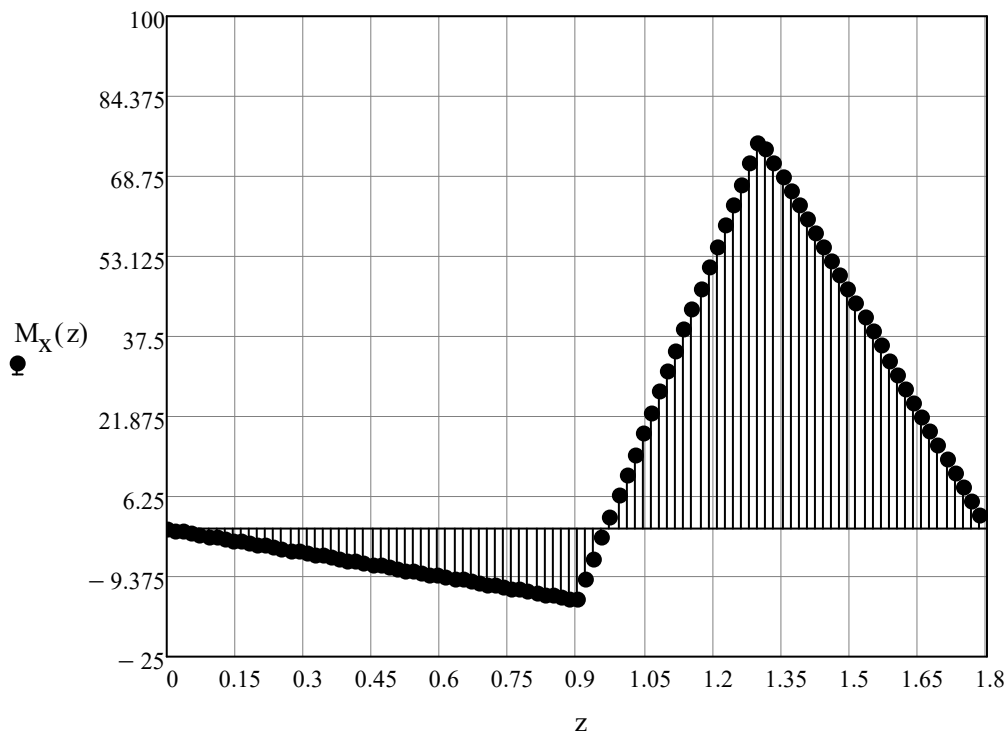


Рис. 8.6. Эпюра изгибающего момента при рабочей частоте вращения вала

Определим максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_max}}{W_x} \quad W_x := \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

$$M_{x_max} := M_x(1.30) = 76.275$$

$$\sigma_{\max} := \frac{M_{x_max}}{W_x} = 12.14 \times 10^6$$

Условие прочности:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{доп}}$$

$$12.13 \times 10^6 \leq 160 \cdot 10^6$$

Условие прочности выполнено.

Задача 9 Колебания стержней с распределенной массой

Для заданного стержня постоянного поперечного сечения привести уравнение свободных изгибных колебаний, его решение в общем виде и записать граничные условия, соответствующие предложенной схеме. Выписать соотношения для частот свободных изгибных колебаний, привести значение первых трех корней частотного уравнения. Произвести подбор размеров поперечного сечения стержня из условия ограниченности первой собственной частоты колебаний $\omega_1 < [\omega]$. Вычислить вторую и третью частоты колебаний стержня, привести соответствующие им формы колебаний

Исходные данные:

$$E := 200 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$\rho := 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$l := 1 \text{ м}$$

$$c = \frac{b}{h} = 0.8$$

$$\omega_{\text{доп}} := 1000 \text{ Гц}$$

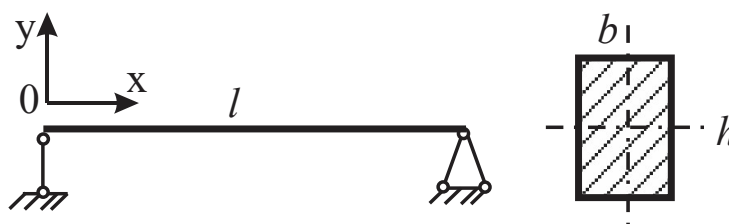


Рис. 9.1 Расчетная схема

Решение:

Уравнение свободных изгибных колебаний

$$E \cdot J_x \cdot \frac{d^4}{dz^4} y + \rho \cdot F \cdot \frac{d^2}{dt^2} y = 0$$

Решение уравнения изгибных колебаний в общем виде:

$$y(z) = (C_1 \cdot \cos(k \cdot z) + C_2 \cdot \sin(k \cdot z) + C_3 \cdot \text{ch}(k \cdot z) + C_4 \cdot \text{sh}(k \cdot z)) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\text{где } k^4 = \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot F}{E \cdot J_x}$$

Запишем граничные условия для схемы, приведенной на рисунке 9.1

$$\text{при } z=0 \quad y = 0$$

$$M_x = E \cdot J_x \cdot \frac{d^2}{dz^2} y = 0$$

$$\text{при } z=1 \quad y = 0$$

$$M_x = E \cdot J_x \cdot \frac{d^2}{dz^2} y = 0$$

Выпишем соотношения для частот свободных изгибных колебаний

$$\omega_n = \left(\frac{\pi \cdot n}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J_x}{\rho \cdot F}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_x(h) := \frac{0.8 \cdot h \cdot h^3}{12}$$

- момент инерции поперечного сечения

$$F(h) := 0.8h \cdot h \quad \text{- площадь поперечного сечения}$$

Тогда первые три собственные частоты равны:

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi \cdot 1}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{0.8 \cdot h \cdot h^3}{12}}{\rho \cdot (0.8h \cdot h)}} = \left(\frac{\pi}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\pi \cdot 2}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{0.8 \cdot h \cdot h^3}{12}}{\rho \cdot (0.8h \cdot h)}} = \left(\frac{2\pi}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}}$$

$$\omega_3 = \left(\frac{\pi \cdot 3}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{0.8 \cdot h \cdot h^3}{12}}{\rho \cdot (0.8h \cdot h)}} = \left(\frac{3\pi}{1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}}$$

Произведем подбор размеров поперечного сечения стержня из условия ограничения первой собственной частоты колебаний $\omega_1 < [\omega]$

$$\left(\frac{\pi}{1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}} < \omega_{\text{доп}}$$

$$h < \omega_{\text{доп}} \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{12\rho}{E}} \text{ simplifyfloat, 3} \rightarrow h < \frac{3 \cdot \sqrt{130}}{50 \cdot \pi^2}$$

$$h := \omega_{\text{доп}} \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{12\rho}{E}} = 0.069 \quad \text{м}$$

Произведем расчет первых трех собственных частот и приведем соответствующие формы колебаний.

Для определения форм колебаний необходимо найти постоянные интегрирования C_1 - C_4 . Рассматривая систему уравнений, полученную после реализации граничных условий, можно получить $C_1=C_3=C_4=0$. Решение для форм колебаний выражается с точностью до одной постоянной $C_2=C$

$$Y(z, n) := \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{1} \cdot z\right)$$

Первая собственная частота

$$\omega_1 := \left(\frac{\pi}{1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}} = 1000$$

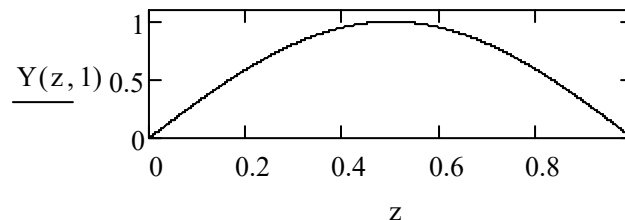


Рис. 9.2. Первая форма колебаний

Вторая собственная частота

$$\omega_2 := \left(\frac{2\pi}{1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}} = 4000$$

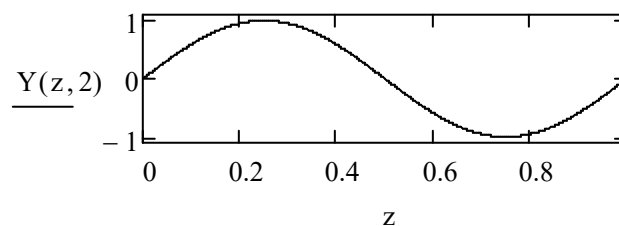


Рис. 9.3. Вторая форма колебаний

Третья собственная частота

$$\omega_3 := \left(\frac{3\pi}{1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^2}{12\rho}} = 9000$$

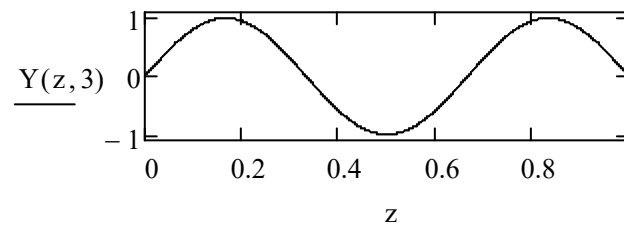


Рис. 9.4. Третья форма колебаний

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. **Хроматов В. Е.** Лекции по сопротивлению материалов в структурно-логических схемах: учебное пособие / В. Е. Хроматов, О. В. Новикова – М.: Издательский дом МЭИ, 2017.- 260 с.
2. **Феодосьев В.И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов/ В.И.Феодосьев. – 16-е изд., испр. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2016. – 543 с.
3. **Окопный Ю.А.** Механика материалов и конструкций: учебник для вузов/ Ю.А. Окопный, В.П. Радин, В.П. Чирков. – 2-е изд. доп. – М.: Машиностроение, 2008. – 436 с.
4. **Минин Л.С.** Сопротивление материалов. Расчетные и тестовые задания: учеб. пособие для академического бакалавриата /Л. С. Минин, Ю. П. Самсонов, В.Е. Хроматов – 3-е изд., испр. и доп.-М.: Издательство Юрайт, 2017.- 224 с.
5. **Ицкович Г.М.** Сопротивление материалов. Руководство к решению задач в 2 частях: учеб. пособие для академического бакалавриата / Г.М. Ицкович, Л.С. Минин, А.И. Винокуров – 4 –е изд., испр. и доп. -М.: Издательство Юрайт, 2017.
6. **Статические и динамические расчеты элементов энергомашиностроительных конструкций в примерах:** учебное пособие/ Е.В. Позняк [и др.] Под ред. В.П. Радина, В.Е. Хроматова - М.: Издательство МЭИ, 2017. -108 с.

Дополнительная литература

7. **Механика материалов и конструкций. Сборник задач:** Учебное пособие для вузов / Ю.А. Окопный, В. П. Радин, В. Е. Хроматов [и др.] – М.: Машиностроение, 2004. – 416 с.
8. **Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами:** учебное пособие для вузов / Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 632 с.
9. **Статические и динамические расчеты элементов конструкций в вопросах и задачах:** учебное пособие / В.Е. Хроматов, О.В. Новикова, А.В. Бесова [и др.] под ред. В.Е. Хроматова. – М.: Издательство МЭИ, 2015. – 88 с.
10. **Механика материалов и конструкций. Основные формулы. Контрольные вопросы и задачи. Основоположники механики:**

Учебное пособие / Ю.А. Окопный, В. П. Радин, В. Е. Хроматов, [и др.]
– М.: Издательский дом МЭИ, 2008 – 276 с.

11. **Очков В.Ф.** Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб.: Издательство БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.

12. **Кирьянов Д.В.** Mathcad 14: Работа в среде Mathcad 2001/2001i/11/12/13/14; Аналитические преобразования и численные методы; Дифференцирование и интегрирование и др.: Наиболее полное руководство. Издательство БХВ-Петербург. 2007. 704 стр.

Основные расчетные формулы

1. Осесимметричная задача теории упругости для вращающихся цилиндров и дисков.

Решение для перемещений: $u(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \rho \omega^2 r^3 \frac{(1-\nu^2)}{8E}$.

Решение для напряжений:

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(C_1(1+\nu) - C_2 \frac{(1-\nu)}{r^2} \right) - \frac{\rho \omega^2 r^2}{8} (3+\nu);$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(C_1(1+\nu) + C_2 \frac{(1-\nu)}{r^2} \right) - \frac{\rho \omega^2 r^2}{8} (1+3\nu);$$

C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Частные случаи решения задачи:

1.1. Вращающийся ненагруженный диск с отверстием.

Граничные условия: $\sigma_r(r_1) = 0$, $\sigma_r(r_2) = 0$.

$$u(r) = \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\rho \omega^2}{8} \left(\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} (r_1^2 + r_2^2) r + \frac{(3+\nu)}{(1-\nu)} \frac{r_1^2 r_2^2}{r} - r^3 \right);$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} \left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{(1+3\nu)}{(3+\nu)} r^2 \right).$$

1.2. Сплошной вращающийся диск радиуса R . Граничные условия:

$\sigma_r(0) < \infty \Rightarrow C_2 = 0$; $\sigma_r(R) = 0$.

$$u(r) = \frac{\rho \omega^2 (1-\nu^2)}{8E} \left(\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} R^2 r - r^3 \right);$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} (R^2 - r^2); \quad \sigma_\theta = \frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} \left(R^2 - \frac{(1+3\nu)}{(3+\nu)} r^2 \right).$$

1.3. Невращающийся цилиндр, нагруженный наружным и внутренним сжимающим давлением: $\omega = 0$, граничные условия: $\sigma_r(r_1) = -p_1$,

$$\sigma_r(r_2) = -p_2.$$

$$u(r) = \frac{(1-\nu)}{E} \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} r + \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r};$$

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \mp \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r^2};$$

осевые напряжения для закрытого цилиндра: $\sigma_z = \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$.

1.4. Невращающийся диск с жестким закреплением внутренней поверхности и нагруженный внешним растягивающим давлением p : $\omega = 0$, граничные условия: $u(r_1) = 0$, $\sigma_r(r_2) = p$.

$$u(r) = \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{p r_2^2}{(1+\nu) r_2^2 + (1-\nu) r_1^2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right);$$

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{p r_2^2}{(1+\nu) r_2^2 + (1-\nu) r_1^2} \left((1+\nu) \pm \frac{r_1^2}{r^2} (1-\nu) \right).$$

2. Безмоментная деформация оболочек, содержащих жидкость.

2.1 Уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{p}{h}$$

где p — внутреннее давление.

2.2. Сегмент сферической оболочки.

$$V_{сег} = \pi z^2 \left(R - \frac{z}{3} \right), \quad \sigma_{m,\theta} = \frac{\gamma R}{2h} \left((H - z) \pm \frac{z(3R - z)}{3(2R - z)} \right).$$

2.3. Коническая оболочка.

$$\sigma_m = \frac{\gamma z \left(H - \frac{2}{3} z \right) \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha}, \quad \sigma_\theta = \frac{\gamma z (H - z) \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha}.$$

H — приведенная высота столба жидкости: $H = \left(H_0 + \frac{p_0}{\gamma} \right)$,

где H_0 — высота столба жидкости, p_0 — избыточное газовое давление.

3. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки. Решение типа краевого эффекта.

$$w(x) = w_0(x) + w_*(x) = C_1 e^{-kx} \cos kx + C_2 e^{-kx} \sin kx + w_*(x),$$

$$k = \left(\frac{Eh}{4DR^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad w_*(x) = \frac{R^2}{Eh} \left(p(x) - \nu \frac{N_x}{R} \right),$$

$$\phi = \frac{dw}{dx} = \frac{dw_*}{dx} - ke^{-kx} \left((C_1 - C_2) \cos kx + (C_1 + C_2) \sin kx \right),$$

$$M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2} = D \left(\frac{d^2 w_*}{dx^2} + 2k^2 e^{-kx} (C_1 \sin kx - C_2 \cos kx) \right),$$

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = D \frac{d^3 w}{dx^3} = D \left(\frac{d^3 w_*}{dx^3} + 2k^3 e^{-kx} \left((C_1 + C_2) \cos kx - (C_1 - C_2) \sin kx \right) \right),$$

$$M_y = \nu M_x, \quad N_y = \left(\nu N_x + \frac{Eh}{R} w(x) \right), \quad \sigma_x = \frac{N_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} \pm \frac{6M_y}{h^2}.$$

4. Осесимметричный изгиб круговых пластин.

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w_*, \quad w_* = \frac{p_0 r^4}{64D},$$

$$\phi = -\frac{dw}{dr} = -\left(2C_2 r + C_3 \frac{1}{r} + C_4 r(1 + 2 \ln r) + \frac{p_0 r^3}{16D} \right);$$

$$M_r = D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) =$$

$$= D \left(2C_2(1 + \nu) - C_3 \frac{(1 - \nu)}{r^2} + C_4 \left((3 + \nu) + 2(1 + \nu) \ln r \right) \right) + \frac{p_0 r^2}{16} (3 + \nu);$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) =$$

$$= D \left(2C_2(1 + \nu) + C_3 \frac{(1 - \nu)}{r^2} + C_4 \left((1 + 3\nu) + 2(1 + \nu) \ln r \right) \right) + \frac{p_0 r^2}{16} (1 + 3\nu);$$

$$Q = D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = \left(4C_4 \frac{D}{r} + \frac{p_0 r}{2} \right);$$

$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{h^2}; \quad \sigma_\theta = \pm \frac{6M_\theta}{h^2}.$$

Исходные данные к задачам

Данные к задаче №1

№ варианта	l , м	a , м	b , м	c , м	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН
1	5.5	1.5	1.8	1.0	150	200	18
2	5.8	1.2	1.5	1.3	200	150	16
3	6.2	1.0	1.5	1.5	120	200	15
4	5.5	1.3	1.7	1.2	100	120	8
5	4.8	1.1	1.5	1.0	50	130	15
6	6.8	1.0	1.0	1.2	120	60	20
7	6.0	1.7	0.9	1.5	200	100	15
8	5.5	1.5	1.7	1.5	140	120	8
9	6.0	1.3	0.9	1.5	150	170	21
10	6.6	1.3	0.9	1.6	130	200	15
11	5.5	1.4	1.5	1.0	150	150	10
12	5.0	1.2	1.0	1.3	250	100	10
13	5.6	1.8	1.2	0.9	140	180	12
14	5.9	1.3	1.0	1.2	170	100	15
15	6.5	1.8	1.5	1.0	180	100	18
16	6.0	1.5	1.7	1.0	140	140	20
17	4.8	1.1	1.1	1.2	170	220	15
18	6.2	1.7	0.9	1.8	120	120	12
19	6.5	1.7	1.5	1.4	50	180	14
20	5.0	1.3	1.1	1.4	130	80	22
21	6.6	1.4	1.5	1.3	200	150	10
22	5.5	1.4	1.3	1.6	140	140	8
23	5.9	1.3	1.0	1.4	170	150	21
24	6.5	1.5	1.9	1.5	200	130	15
25	5.0	1.3	1.0	1.0	120	100	22

Данные к задаче №2

№ варианта	P , кН	a , м	b , м	Профиль
1	4	0,5	0,25	Двутавр 10
2	5	0,55	0,3	Швеллер 10
3	6	0,6	0,35	Двутавр 12
4	7	0,65	0,4	Швеллер 12
5	8	0,7	0,45	Двутавр 14
6	9	1,75	0,5	Швеллер 14
7	10	1,8	0,6	Двутавр 16
8	11	1,85	0,55	Швеллер 16
9	12	0,85	0,65	Двутавр 18
10	13	0,95	0,55	Швеллер 18
11	14	1,0	0,65	Двутавр 20
12	15	1,1	0,5	Швеллер 20
13	16	1,15	0,55	Двутавр 22
14	15	1,2	0,45	Швеллер 22
15	15	1,1	0,5	Двутавр 24
16	14	1,0	0,55	Швеллер 24
17	13	0,9	0,6	Двутавр 27
18	12	0,8	0,65	Швеллер 27
19	11	0,7	0,7	Двутавр 30
20	10	0,6	0,4	Швеллер 30
21	9	0,5	0,3	Двутавр 33
22	8	0,4	0,25	Швеллер 33
23	7	0,8	0,2	Двутавр 36
24	6	0,5	0,4	Швеллер 36
25	8	1,0	0,5	Двутавр 40

Данные к задаче №3

№ варианта	r_1 , см	r_2 , см	$[\sigma]$, МПа	Критерий прочности
1	4	10	100	Сен-Венана
2	5	11	120	Мизеса
3	6	12	140	Сен-Венана
4	5	10	150	Мизеса
5	4	12	160	Сен-Венана
6	6	11	170	Мизеса
7	5	11	180	Сен-Венана
8	6	12	190	Мизеса
9	5	12	140	Сен-Венана
10	7	10	120	Мизеса
11	4	11	130	Сен-Венана
12	5	12	140	Мизеса
13	6	12	150	Сен-Венана
14	5	10	160	Мизеса
15	6	11	170	Сен-Венана
16	4	12	180	Мизеса
17	5	10	190	Сен-Венана
18	6	11	200	Мизеса
19	5	12	150	Сен-Венана
20	4	10	130	Мизеса
21	4	11	140	Сен-Венана
22	5	12	150	Мизеса
23	6	10	160	Сен-Венана
24	5	11	170	Мизеса
25	4	12	180	Сен-Венана

Данные к задаче №4

№ варианта	a , м	b , м	R , м	z_0 , м	ρ , кг/м ³	p_0 , МПа	$[\sigma]$, МПа	Критерий прочности
1	2.0	1.0	3.0	1.0	1000	0.10	120	Сен-Венана
2	3.0	0.9	3.0	1.1	900	0.15	140	Мизеса
3	2.5	0.8	3.0	1.2	1100	0.10	150	Сен-Венана
4	2.2	1.1	3.0	1.3	900	0.20	160	Мизеса
5	2.4	1.0	3.0	1.4	1000	0.25	170	Сен-Венана
6	2.6	1.1	3.0	1.5	1100	0.30	180	Мизеса
7	2.8	0.9	3.0	1.6	1200	0.35	120	Сен-Венана
8	3.0	1.0	3.0	1.7	1000	0.40	140	Мизеса
9	1.8	1.1	3.0	1.8	1100	0.10	150	Сен-Венана
10	2.0	1.2	3.0	1.9	1000	0.20	160	Мизеса
11	2.1	0.9	4.0	2.0	1200	0.30	170	Сен-Венана
12	2.2	0.8	3.0	1.0	1000	0.25	180	Мизеса
13	2.3	1.0	3.0	1.1	1100	0.10	120	Сен-Венана
14	2.4	1.1	3.0	1.2	1000	0.15	140	Мизеса
15	2.5	1.0	3.0	1.3	900	0.20	150	Сен-Венана
16	2.6	1.1	3.0	1.4	1100	0.25	160	Мизеса
17	2.7	1.2	3.0	1.5	1200	0.30	170	Сен-Венана
18	2.8	0.9	3.0	1.6	1000	0.35	180	Мизеса
19	2.9	1.1	3.0	1.7	900	0.40	120	Сен-Венана
20	3.0	1.2	3.0	1.8	1200	0.10	140	Мизеса
21	2.1	1.0	4.0	1.9	1100	0.20	150	Сен-Венана
22	2.2	1.1	3.0	2.0	1000	0.30	160	Мизеса
23	2.3	1.2	3.0	1.0	1100	0.40	170	Сен-Венана
24	2.4	1.1	3.0	1.1	1000	0.10	180	Мизеса
25	2.5	1.0	3.0	1.3	900	0.20	150	Сен-Венана

Данные к задаче №5

№	p_0 , кПа	m , Нм/м	q , Н/м	ρ , кг/м ³	a , см	b , см	R , см	h , мм	Δ , мм
1	30	50	2100	1200	40	35	60	4	0,5
2	40	60	2200	1000	60	45	70	5	0,4
3	50	70	2300	1100	50	50	80	6	0,3
4	45	80	2400	1200	40	35	65	7	0,4
5	50	90	2500	1000	50	30	75	8	0,6
6	30	55	2600	1100	60	50	55	4	0,3
7	40	65	2300	1200	45	40	60	5	0,6
8	50	75	2400	1000	35	50	50	6	0,4
9	45	85	2500	1100	50	60	70	7	0,8
10	30	90	2600	1200	45	50	80	8	0,5
11	35	50	2700	1000	45	40	55	4	0,7
12	40	60	2500	1100	35	50	65	5	0,3
13	45	70	2800	1200	50	40	60	6	0,5
14	50	80	2700	1000	60	50	80	7	0,4
15	30	90	2600	1000	50	35	70	8	0,6
16	40	55	2300	1100	40	30	60	4	0,8
17	50	65	2500	1000	50	45	50	5	0,7
18	45	75	2400	1100	60	50	70	6	0,2
19	35	85	2800	1200	35	65	50	7	0,3
20	40	90	2700	1000	34	70	60	8	0,5
21	50	50	2300	1100	35	60	55	6	0,6
22	30	55	2500	1200	30	70	65	7	0,8
23	40	65	2600	1000	45	50	60	4	0,7
24	50	75	2800	1100	50	60	50	5	0,5
25	35	85	2900	1200	60	75	75	6	0,6

Данные к задаче №6

Вариант	$r_1, \text{ см}$	$r_2, \text{ см}$	$h, \text{ см}$	$[w], \text{ мм}$	$[\sigma], \text{ МПа}$
1	30	50	1.1	1.0	260
2	40	60	1.3	1.2	265
3	50	75	1.4	1.3	270
4	40	85	1.2	1.0	275
5	45	75	1.3	1.1	280
6	35	70	1.2	1.2	285
7	30	50	1.3	1.3	300
8	45	60	1.5	1.4	285
9	50	65	1.3	1.0	280
10	40	50	1.2	1.2	275
11	45	60	1.1	1.1	270
12	30	55	1.2	1.2	265
13	50	75	1.3	1.3	260
14	40	60	1.4	1.4	265
15	35	45	1.0	1.0	270
16	30	45	1.1	1.1	275
17	45	60	1.2	1.2	280
18	50	75	1.3	1.3	285
19	30	50	1.4	1.4	290
20	35	55	1.3	1.0	295
21	40	65	1.2	1.2	300
22	45	70	1.3	1.3	295
23	50	70	1.4	1.4	290
24	30	50	1.3	1.0	285
25	35	60	1.1	1.1	280

Данные к задаче №7

№ варианта	l , м	Номер профиля	Номер уголка (неравнобокий)
1	2,0	10	5/3,2
2	2,1	12	6,3/4,0
3	2,2	14	7/4,5
4	2,3	16	8/5
5	2,4	18	9/5,6
6	2,5	20	10/6,3
7	2,6	22	12,5/8
8	2,7	24	14/9
9	2,8	27	16/10
10	2,9	30	18/11
11	1,8	10	5/3,2
12	1,9	12	6,3/4,0
13	2,0	14	7/4,5
14	2,1	16	8/5
15	2,2	18	9/5,6
16	2,3	20	10/6,3
17	2,4	22	12,5/8
18	2,5	24	14/9
19	2,6	27	16/10
20	2,7	30	18/11
21	3,0	18a	5/3,2
22	3,2	20a	8/5
23	3,4	22a	14/9
24	3,5	24a	16/10
25	2,7	30	18/11

Данные к задаче №8

№ варианта	M_1 , кг	M_2 , кг	d , мм	ε_1 , мм	ε_2 , мм	a , м	b , м	l , м
1	20	10	40	0,1	0,4	0,3	0,4	0,9
2	10	20	30	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7
3	30	20	30	0,4	0,4	0,35	0,4	0,8
4	20	30	20	0,3	0,4	0,4	0,3	0,9
5	40	50	30	0,4	0,3	0,3	0,4	0,8
6	50	40	40	0,4	0,2	0,4	0,4	0,9
7	20	20	50	0,3	0,3	0,45	0,6	0,8
8	10	10	60	0,2	0,2	0,35	0,5	0,7
9	10	20	20	0,3	0,1	0,4	0,5	0,6
10	20	10	30	0,2	0,4	0,3	0,4	0,9
11	30	20	40	0,1	0,5	0,45	0,5	0,7
12	20	30	50	0,4	0,2	0,35	0,4	0,8
13	40	50	60	0,5	0,1	0,4	0,5	0,9
14	50	40	30	0,2	0,3	0,3	0,4	0,8
15	15	20	40	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9
16	20	25	50	0,3	0,2	0,3	0,45	0,8
17	30	35	60	0,4	0,5	0,35	0,5	0,7
18	40	45	30	0,2	0,4	0,4	0,6	0,6
19	45	50	40	0,5	0,3	0,3	0,4	0,9
20	50	45	50	0,4	0,2	0,4	0,55	0,7
21	45	30	60	0,3	0,3	0,4	0,6	0,8
22	30	15	40	0,2	0,2	0,35	0,5	0,9
23	25	15	30	0,3	0,1	0,4	0,6	0,8
24	20	30	20	0,2	0,2	0,4	0,5	0,9
25	45	50	40	0,1	0,4	0,35	0,45	0,8

Данные к задаче № 9

№ варианта	E , ГПа	ρ , г/см ³	l , м	$c=d_0/d$, b/h
1	200	7,8	1,0	0,8
2	71	2,7	1,2	0,7
3	110	8,9	1,4	0,6
4	80	2,8	1,6	0,5
5	100	2,5	1,8	0,4
6	190	7,7	2,0	0,8
7	90	8,7	0,5	0,7
8	180	8,0	0,6	0,6
9	130	9,0	0,7	0,5
10	140	2,5	0,8	0,4
11	90	2,9	0,9	0,8
12	220	7,9	1,0	0,7
13	210	7,7	1,2	0,6
14	110	9,0	1,4	0,5
15	70	2,5	1,6	0,4
16	80	2,9	1,8	0,8
17	200	7,8	1,0	0,8
18	71	2,7	1,2	0,7
19	110	8,9	1,4	0,6
20	80	2,8	1,6	0,5
21	100	2,5	1,8	0,4
22	190	7,7	2,0	0,8
23	90	8,7	0,5	0,7
24	180	8,0	0,6	0,6
25	130	9,0	0,7	0,5

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Задачи курсового проекта	6
Задача 1. Расчет статически неопределимой балки методом сил.....	6
Задача 2. Расчет плоской рамы методом сил.....	6
Задача 3. Осесимметричная задача теории упругости.....	7
Задача 4. Расчет тонкостенной оболочки по безмоментной теории	7
Задача 5. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки	7
Задача 6. Расчет круговой пластины при осесимметричном нагружении	8
Задача 7. Устойчивость стержней.....	8
Задача 8. Изгибные колебания вращающихся валов	8
Задача 9. Колебания стержней с распределенной массой.....	9
Глава 2. Примеры решения задач курсового проекта с использованием математического пакета MathCad.....	10
Задача 1. Расчет статически неопределимой балки методом сил.....	10
Задача 2. Расчет плоской рамы методом сил.....	20
Задача 3. Осесимметричная задача теории упругости.....	33
Задача 4. Расчет тонкой оболочки по безмоментной теории.....	39
Задача 5. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки	47
Задача 6. Расчет круговой пластины при осесимметричном нагружении ..	53
Задача 7. Устойчивость стержней.....	59
Задача 8. Изгибные колебания вращающихся валов	62
Задача 9 Колебания стержней с распределенной массой.....	68
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	72
Приложение 1.....	74
Приложение 2.....	77

Учебное издание

Хроматов Василий Ефимович
Новикова Ольга Валерьевна
Позняк Елена Викторовна
Бесова Анастасия Вячеславовна
Комиссарова Татьяна Николаевна

**ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие к курсовому проектированию

Редактор издательства
Компьютерная верстка

Подписано в печать
печ. л.

Печать офсетная
Тираж 200 Изд.№

Формат 60x84/16
Заказ

Физ.

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, Москва, Красноказарменная, д.14
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, Москва, Красноказарменная, д.13