Устойчивость стержней. Примеры решения задач

1. Основные соотношения теории упругой устойчивости

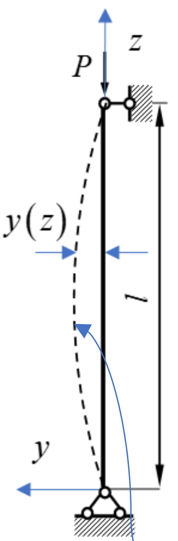
Уравнение продольного изгиба (см. лекцию)

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{P \cdot y}{EI_x} \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + k^2 y = 0, \qquad k^2 = \frac{P}{EI_x}.$$

Решение:

$$y(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$$

где C_1, C_2 определяются из граничных условий. Например, для шарнирно-опертого стержня:



$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0,$$
$$y(l) = 0 \rightarrow C_1 \sin kl = 0.$$

Из второго уравнения $\sin kl = 0$, откуда $kl = \pi n$, $n = 1, 2, 3...$

Число n соответствует числу полуволн синусоиды.

Итак, из

$$k^2 = \frac{P}{EI_x}, \quad kl = \pi n$$

следует формула Эйлера для критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{(\pi n)^2 EI_x}{l^2}, \qquad n = 1, 2, 3...$$

$P_{кр}$ - сила, при которой существует форма равновесия стержня с искривленной упругой линией (форма потери устойчивости стержня показана штриховой линией), то есть

при $P < P_{кр}$ - форма равновесия единственная и прямолинейная,

при $P \geq P_{кр}$ - прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой, возможны смежные формы равновесия (то есть формы потери устойчивости).

Критическая сила зависит от условий закрепления. Формулу Эйлера обобщают для различных граничных условий:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{l_{\text{пр}}^2}, \qquad l_{\text{пр}} = \mu l, \qquad \mu = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3...$$

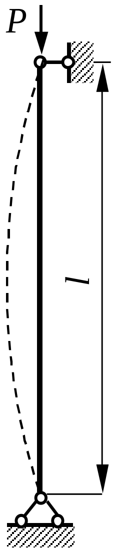
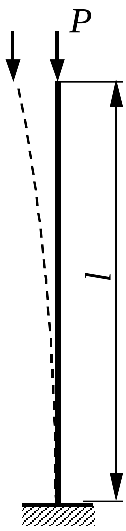
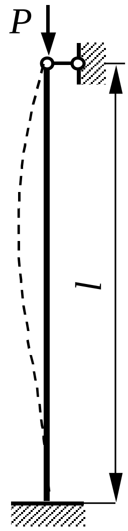
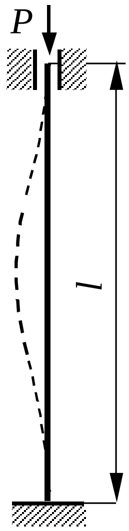
где

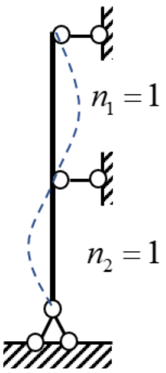
μ - коэффициент приведения длины,

$l_{\text{пр}}$ - приведенная длина стержня,

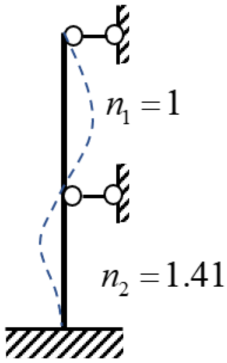
n - число полуволн синусоиды, которое определяет форму потери устойчивости.

Примеры типовых граничных условий

Тип закрепления концов стержня				
n	1	0.5	$\sqrt{2}=1.41$	2
μ	1	2	0.7	0.5



$$\mu=\frac{1}{n_1+n_2}=\frac{1}{2}$$



$$\mu=\frac{1}{n_1+n_2}=\frac{1}{2.41}=0.41$$

2. Критическое напряжение и гибкость

Критической силе $P_{кр}$ соответствует критическое напряжение $\sigma_{кр}$

$$P_{кр}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2},\quad \sigma_{кр}=\frac{P_{кр}}{F}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2},\quad \text{где введено обозначение}$$

$$\lambda^2=\frac{(\mu l)^2 F}{I}=\frac{(\mu l)^2}{I/F},\quad \lambda=\frac{\mu l}{\sqrt{I/F}}=\frac{\mu l}{i_{\min}},\quad i_{\min}=\sqrt{I/F},$$

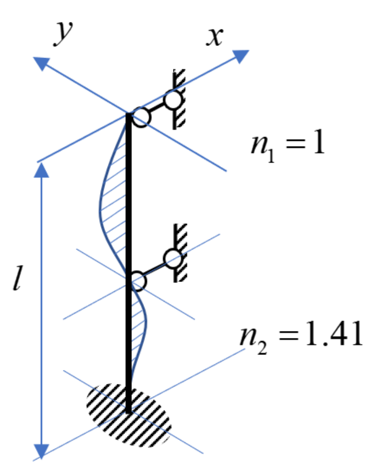
здесь λ - гибкость стержня (безразмерная величина), $i_{\min}$ - минимальный радиус инерции (м).

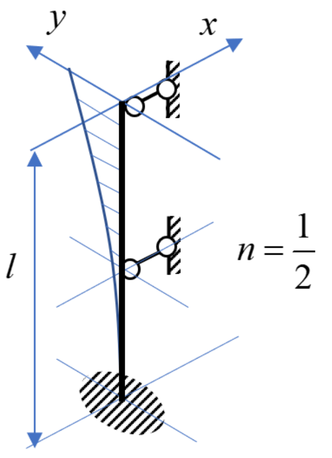
$$i_{\min} = \min(i_x,\ i_y), \qquad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$$

При расчете на устойчивость берут именно минимальный радиус инерции, так как ему соответствует максимальная гибкость стержня.

3. Пространственные системы

Для пространственных систем коэффициенты приведения длины и приведенные длины в двух горизонтальных направлениях могут отличаться:





Изгиб относительно оси y:

$$\mu_y = \frac{1}{n_1 + n_2} = \frac{1}{2.41} = 0.41$$

$$l_y = \mu_y l = 0.41l$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{\sqrt{I_y/F}} = \frac{l_y}{i_y}$$

Изгиб относительно оси x:

$$\mu_x = \frac{1}{n} = 2$$

$$l_x = \mu_x l = 2l$$

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{\sqrt{I_x/F}} = \frac{l_x}{i_x}$$

Если $\lambda_y \neq \lambda_x$, расчет на устойчивость проводят по большей гибкости.

4. Рациональное сечение и условие равноустойчивости

Рациональным является сечение, которое обладает наибольшими моментами инерции при заданной площади, будучи при этом равноустойчивым относительно обеих осей. Условие равноустойчивости: $\lambda_y = \lambda_x$.

5. Ограничение на применение формулы Эйлера и предельная гибкость

Формула Эйлера получена в предположении упругой работы стержня, поэтому есть ограничение на ее применение:

$$\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}.$$

Так как $\sigma_{кр} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$, это условие можно переписать так:

$$\lambda \ge \lambda_{пр}, \text{ где } \lambda_{пр} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}},$$

где $\lambda_{пр}$ - предельная гибкость.

Если $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$, то $\sigma_{кр}$ определяют по формуле Ясинского (см. лекцию).

6. Инженерный расчет на устойчивость (проверочный расчет).

Цель расчета – проверить сжатые элементы на возможную потерю устойчивости по условию:

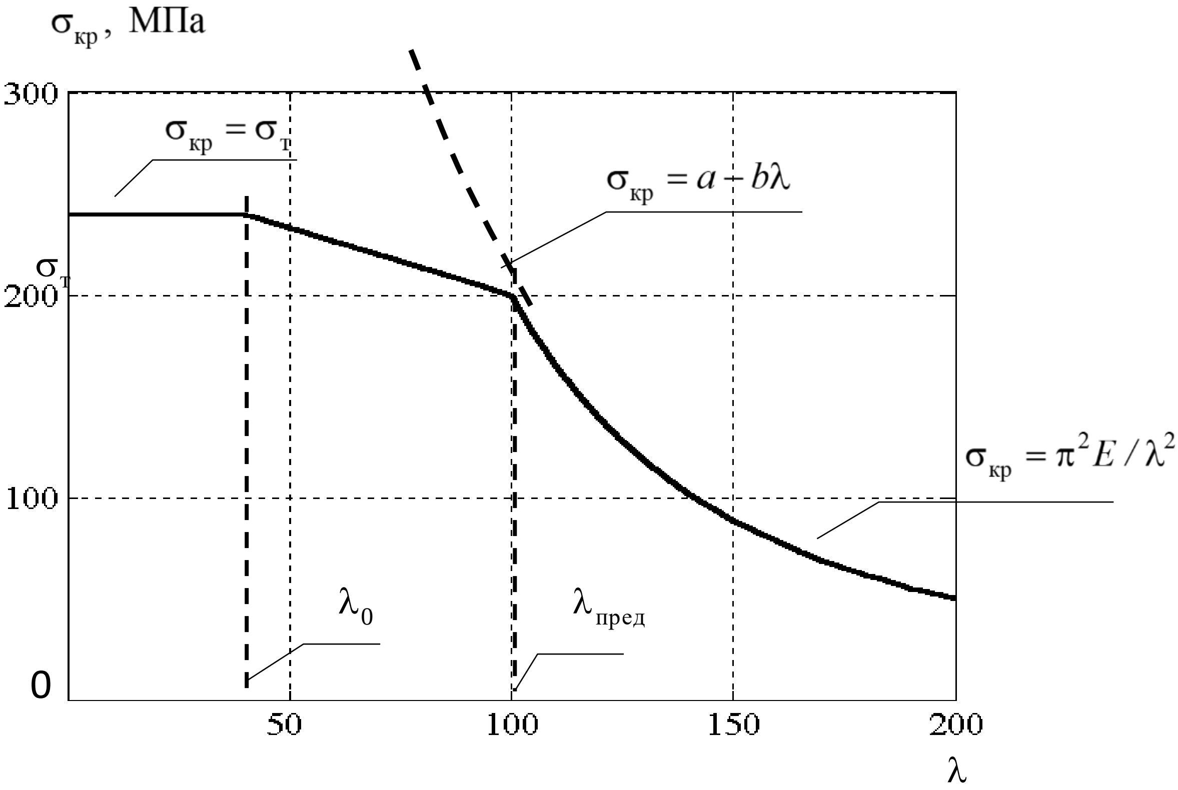
$$\sigma_{сж} \le [\sigma]_{сж}, \quad \text{где} \quad [\sigma]_{сж} = \varphi(\lambda)[\sigma].$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ - коэффициент снижения допускаемых напряжений (коэффициент продольного изгиба), определяется по таблице:

Коэффициенты продольного изгиба для сталей марок Ст.2, 3, 4.

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	1.00	0.99	0.96	0.94	0.92	0.89	0.86	0.81	0.75	0.69	0.60	0.52	0.45	0.40	0.36	0.32	0.29	0.26	0.23	0.21	0.19

7. Полная диаграмма зависимости критических напряжений от гибкости стержня



8. Расчеты на устойчивость за пределами упругости

В случае $\lambda_0<\lambda<\lambda_{пред}$ критическое напряжение определяется различными эмпирическими зависимостями, например, по формуле Ф. С. Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda .$$

Константы a и b определяются из условий стыковки линейного участка диаграммы ($\sigma_{кр}$, λ) с гиперболой Эйлера $\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2$ и горизонтальной линией $\sigma_{кр} = \sigma_т$:

$$b = \frac{\sigma_т - \sigma_{пц}}{\lambda_{пред} - \lambda_0}, \quad a = \sigma_{пц} + b\lambda_{пред} .$$

Для Ст3 допускается принимать $a = 310\,МПа$, $b = 1.14\,МПа$.

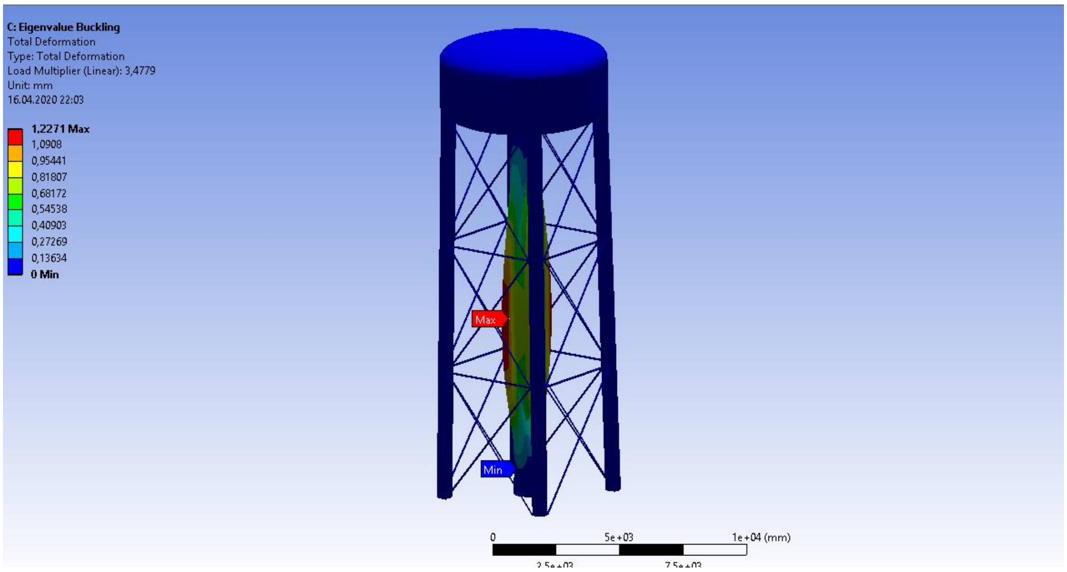
Допускаемое значение сжимающей нагрузки находится по формуле

$$[P] = \frac{P_{кр}}{[n]_y}$$

где $[n]_y$ – нормативный коэффициент запаса устойчивости, зависящий от гибкости стержня λ. Нормативный коэффициент запаса устойчивости должен быть больше нормативного коэффициента запаса прочности $[n]$.

Пример из жизни (ВКР магистра)

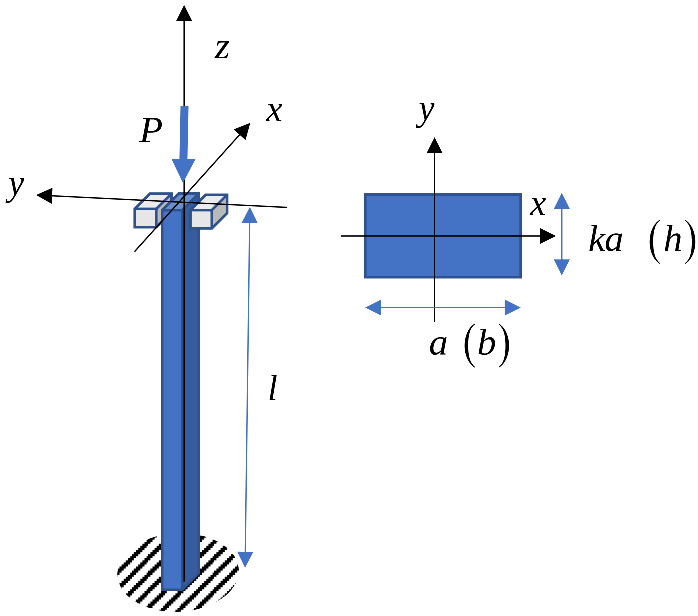
Пример расчета на общую устойчивость – расчет водонапорной башни с располагаемым напором 17 м и объемом резервуара 25 $м^3$ на возможную потерю устойчивости при полностью заполненном резервуаре. На рисунке показана первая форма потери устойчивости и рассчитанный коэффициент запаса устойчивости (КЗУ).

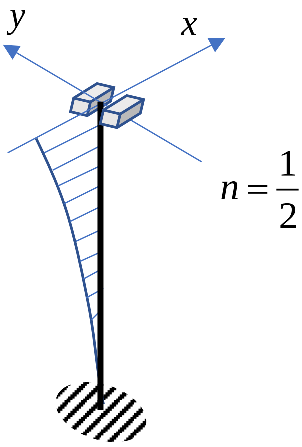


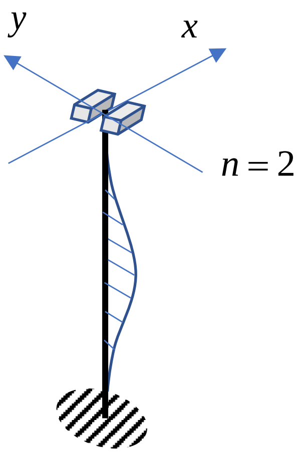
Первая форма потери устойчивости башни, КЗУ=3,47.

Задача. Определить параметр сечения k из условия равноустойчивости. Найти критическую силу $P_{кр}$. Найти допускаемое значение внешней силы P из расчета на устойчивость по коэффициенту продольного изгиба.

Принять: $a = 5$ см, $l = 1.5$ м, материал Ст.30 $E = 200$ ГПа, $\sigma_{пц} = 200$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.







Изгиб относительно оси y:

$$\mu_y = \frac{1}{n} = 2$$

$$l_y = \mu_y l = 2l$$

Изгиб относительно оси x:

$$\mu_x = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

$$l_x = \mu_x l = 0.5l$$

1. Определим размеры сечения из условия равноустойчивости $\left(\lambda_y = \lambda_x\right)$.

Площадь и моменты инерции сечения относительно двух осей:

$$F = ka \cdot a = ka^2,$$

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}a \cdot \left(ka\right)^3 = \frac{k^3a^4}{12}, \qquad I_y = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}ka \cdot \left(a\right)^3 = \frac{ka^4}{12}$$

Радиусы инерции:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{1}{12}\frac{a^4k^3}{ka^2}} = \frac{ak}{2\sqrt{3}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{1}{12}\frac{ka^4}{ka^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Гибкости в двух направлениях:

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i_x} = \frac{l\sqrt{3}}{ak}, \qquad \lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{4l\sqrt{3}}{a}.$$

Из условия равноустойчивости $\lambda_y = \lambda_x$ получаем параметр k:

$$\frac{l\sqrt{3}}{ak} = \frac{4l\sqrt{3}}{a} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{4}.$$

При таких параметрах сечения гибкость равна

$$\lambda = \lambda_y = \lambda_x = \frac{l\sqrt{3}}{ak} = \frac{1.5\sqrt{3} \cdot 4}{0.05} = 208.$$

2) Определим критическую силу $P_{\text{кр}}$. Проверим, применима ли формула Эйлера, для чего рассчитаем предельную гибкость:

$$\lambda_{\text{пр}} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \pi\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99.3$$

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пр}}$, то можно рассчитать критическую силу по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l_x^2} = ... = 28.6 \text{ кН}$$

3) Определим $\left[P\right]$ из расчета на устойчивость по коэффициенту продольного изгиба φ

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} \le \varphi\left(\lambda\right)\left[\sigma\right], \qquad \varphi\left(\lambda\right)\Big|_{\lambda=210} = 0.17 \text{ - по таблице}$$

Следовательно, $\left[P\right] = \varphi\left(\lambda\right)F\left[\sigma\right] = \varphi\left(\lambda\right)ka^2\left[\sigma\right] = ... = 17$ кН.

$\left[P\right] < P_{\text{кр}}$ - противоречия нет.