

Программа экзамена по дисциплине
«Механика материалов и конструкций»
4 семестр 2025/2026 учебного года,
гр. С-(02-126)-24, ИГ-03-24, Сэ-12-24

1. Расчет статически неопределимых систем, работающих на изгиб, по методу сил. Основная система и требования, предъявляемые к ней. Канонические уравнения метода сил. Определение коэффициентов канонических уравнений.
2. Сочетание изгиба с кручением стержня кругового сечения. Вычисление эквивалентного момента и эквивалентных напряжений по теориям прочности Сен-Венана и Мизеса.
3. Тензор напряжений. Главные напряжения.
4. Обобщенный закон Гука.
5. Удельная потенциальная энергия упругой деформации
6. Прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Понятие о критериях прочности.
7. Формулировка критерия прочности Мизеса.
8. Формулировка критерия прочности Сен-Венана.
9. Сопоставление критериев текучести для случая упрощенного плоского напряженного состояния.
10. Формулировка критерия прочности Мора.
11. Расчеты на прочность при циклически меняющихся напряжениях. Типы циклов и их параметры.
12. Кривая усталости Велера. Предел выносливости материалов.
13. Факторы, влияющие на величину предела выносливости.
14. Диаграмма предельных напряжений Хейга. Определение коэффициента запаса по выносливости.
15. Расчеты на выносливость при плоском напряженном состоянии. Формула Гафа-Полларда
16. Осесимметричная задача теории упругости. Тензор напряжений в цилиндрической системе координат. Уравнение равновесия в напряжениях для элемента цилиндра, нагруженного давлением.
17. Соотношения для деформаций в окружном и радиальном направлениях для осесимметричной задачи теории упругости. Уравнение равновесия в перемещениях для элемента цилиндра, нагруженного давлением.
18. Интегрирование дифференциального уравнения в перемещениях для элемента цилиндра, нагруженного давлением. Общее решение для перемещений и напряжений. Постановка граничных условий. Формулы Ламэ.
19. Определение напряжений и перемещений от центробежных сил в кольцевом вращающемся диске.
20. Напряжения и деформации во вращающемся тонкостенном кольце. Определение напряжений и деформаций в сплошном вращающемся диске.

21. Расчет тонкостенных оболочек по безмоментной теории. Определение окружных и меридиональных напряжений в замкнутых цилиндрических, конических и сферических оболочках. Расчет деформаций.
22. Уравнение Лапласа для произвольных тонкостенных оболочек вращения. Уравнение равновесия для отсеченной части оболочки.
23. Осесимметричная изгибная деформация круговых цилиндрических оболочек. Основные предпосылки и гипотезы. Внутренние силовые факторы. Уравнения равновесия в усилиях.
24. Деформации при осесимметричном изгибе цилиндрических оболочек: нормальный прогиб, относительные продольные и окружные деформации. Соотношения для напряжений.
25. Вывод уравнений равновесия в перемещениях при осесимметричной изгибной деформации круговых цилиндрических оболочек. Постановка граничных условий.
26. Частное решение дифференциального уравнения осесимметричной изгибной деформации цилиндрической оболочки, его физический смысл. Решение типа краевого эффекта.
27. Определение продольных и окружных усилий при осесимметричной изгибной деформации круговых цилиндрических оболочек. Определение напряжений от безмоментных усилий и изгибающих моментов.
28. Свободные и вынужденные колебания механических систем. Частота и период колебаний. Вывод уравнения собственных колебаний линейного осциллятора. Его решение.
29. Уравнения собственных колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Его решение. Частотное уравнение.
30. Определение частот собственных колебаний простейших механических систем с одной и двумя степенями свободы.
31. Вынужденные колебания механических систем с конечным числом степеней свободы. Амплитуды вынужденных колебаний. Динамический коэффициент.
32. Изгибные колебания вращающихся валов с несбалансированными дисками. Понятие о критических скоростях вращающихся валов.

Прикладные вопросы курса

1. Статически неопределимые балки и рамы
 - 1.1. Записать канонические уравнения метода сил для дважды статически-неопределимой балки, пояснить смысл и показать на схеме коэффициенты уравнений δ_{jk} , Δ_{jP} .
 - 1.2. Записать канонические уравнения метода сил для дважды статически-неопределимой Г-образной рамы, пояснить их смысл и показать на схеме коэффициенты уравнений δ_{jk} , Δ_{jP} .
 - 1.3. Что такое степень статической неопределимости системы (балки, рамы)? Привести пример 1 раз статически-неопределимой балки.
 - 1.4. Как определить максимальный прогиб в жестко защемленной с двух сторон балке от сил собственного веса?

1.5. Как определить угол поворота на правом шарнирно-опертом краю балки с жестко заземленным левым краем и нагруженной сосредоточенной силой посередине?

1.6. Портальная рама (П-образная) имеет шарнирно-неподвижные опоры. Как определить максимальные напряжения от сил собственного веса.

1.7. Что такое симметричная статически неопределимая балка, рама; симметричная, кососимметричная нагрузка? Какие основные системы предпочтительнее выбирать для них при раскрытии статической неопределимости? Почему?

1.8. Какая основная система предпочтительнее при расчете многопролетных статически неопределимых балок? Показать на примере 4 раза статически неопределимой балки и пояснить в чем преимущества расчета.

2. Задача Ламэ, вращающиеся диски

2.1. Определить допускаемое внутреннее давление p в закрытом толстостенном сосуде, нагруженном внутренним давлением при известных размерах сосуда r_1, r_2 и допускаемом напряжении $[\sigma]$.

2.2. Чему равно изменение внутреннего диаметра толстостенной трубы, имеющей радиусы r_1, r_2 , нагруженной внутренним давлением p_1 ?

2.3. Чему равно изменение внешнего диаметра толстостенной трубы, имеющей радиусы r_1, r_2 , нагруженной равномерным внешним давлением p_2 ?

2.4. Чему равны напряжения в сплошном вращающемся диске, изменение его внешнего диаметра от центробежных сил инерции?

2.5. Чему равны напряжения в тонкостенном вращающемся кольце, изменение его диаметра от центробежных сил инерции?

2.6. Сформулировать граничные условия и привести последовательность решения задачи для вращающегося кольцевого диска, жестко скрепленного с валом.

3. Безмоментная теория оболочек

3.1. Построить эпюры меридиональных и окружных напряжений в тонкостенной цилиндрической оболочке, установленной на жестком основании и заполненной жидкостью. Применить безмоментную теорию.

3.2. Построить эпюры меридиональных и окружных напряжений в тонкостенной цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью и закрепленной по верхнему краю.

3.3. Чему равны максимальные меридиональные и окружные напряжения в тонкостенной конической оболочке, наполненной жидкостью и закрепленной по верхнему краю?

3.4. Как определить гидростатическое давление в замкнутой тонкостенной сферической оболочке, заполненной жидкостью, и как оно направлено? Как определить напряжения?

3.5. Тонкостенная оболочка толщиной h в виде усеченного конуса, имеющая объем $V = \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$, заполнена жидкостью плотностью ρ и установлена на жестком основании (r_1 - радиус нижнего основания). По безмоментной теории определить напряжения в нижнем сечении основания радиуса r_1 и верхнем сечении радиуса r_2 . ($r_1 < r_2$)

3.6. Тонкостенная оболочка толщиной h в виде усеченного конуса, имеющая объем $V = \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$, заполнена жидкостью плотностью ρ и закреплена по верхнему краю r_2 . r_1 - радиус нижнего основания, r_2 - радиус верхнего основания ($r_1 > r_2$). По безмоментной теории определить напряжения в нижнем и верхнем сечениях.

4. Изгиб цилиндрических оболочек

4.1. Что такое краевой эффект при осесимметричной деформации цилиндрической оболочки, длина волны краевого эффекта? Записать решение типа краевого эффекта об изгибе оболочки.

4.2. Пояснить смысл частного решения задачи осесимметричной деформации цилиндрической оболочки, область его применимости.

4.3. Как построить решение для прогибов при осесимметричной деформации короткой цилиндрической оболочки, жестко заземленной по краям, нагруженной равномерным внутренним давлением?

4.4. Чему равны прогиб и изгибающий момент на свободном краю в полубесконечной круговой цилиндрической оболочке, нагруженной равномерным внутренним давлением?

4.5. Как вычислить напряжения от изгибающих моментов в жестко заземленной на одном краю полубесконечной цилиндрической оболочке, нагруженной равномерным внутренним давлением?

4.6. Построить решение об осесимметричной деформации цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью и установленной на жестком основании.

5. Расчеты на выносливость

5.1. Дать определение предела выносливости материала. От каких характеристик цикла нагружения он зависит?

5.2. Что такое концентрация напряжений, как она влияет на величину предела выносливости материалов?

5.3. Как строится диаграмма предельных напряжений? Привести способ ее схематизации для определения коэффициентов запаса по выносливости.

6. Колебания

6.1. Дать определение частоты колебаний. Как изменится частота колебаний линейного осциллятора при увеличении его жесткости в два раза ($m = const$), при увеличении его массы в два раза ($c = const$)?

6.2. Дать определение периода колебаний. Как изменится период колебаний линейного осциллятора при увеличении его массы в два раза ($c = const$), при увеличении его жесткости в два раза ($m = const$)?

6.3. Чему равны частоты колебаний плоской Г-образной рамы, имеющей одинаковые длины участков l кругового поперечного сечения жестко закрепленной на нижнем краю и имеющей сосредоточенную массу m на верхнем свободном краю?

6.4. Что такое динамический коэффициент? Как вычислить динамические перемещения и напряжения при вынужденных колебаниях консольной балки длиной l , имеющей на свободном краю массу m с действующей на неё силой $P(t) = P_A \cos \theta t$.

6.5. Чему равна критическая скорость вала длиной l , вращающегося с частотой θ , шарнирно-опертого по краям и имеющего посередине диск массой m ?

6.6. Как вычислить критические скорости вращающегося вала, имеющего n сосредоточенных дисков одинаковой массы m ?

7. Напряженно-деформированное состояние в точке

7.1. Как определяются главные напряжения?

7.2. Какое напряженное состояние имеет место при кручении валов?

- 7.3 Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
- 7.4. Запишите обобщенный закон Гука для плоского напряженного состояния.
- 7.5. Сформулируйте порядок расчета на прочность при изгибе с кручением вала.
- 7.6 Как вычисляются главные напряжения в общем случае плоского напряженного состояния?
- 7.7. Чему равны главные напряжения при изгибе с кручением валов?
- 7.8. Какое напряженное состояние имеет место при изгибе с кручением?

Критерии шкалы оценивания

Оценка 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: ответ на экзаменационный билет выполнен в рамках "продвинутого" уровня. Ответы даны верно (обучающийся знает определения, владеет терминологией, понимает и свободно излагает теорию во взаимосвязи с различными разделами дисциплины, отвечает на дополнительные вопросы), четко сформулированные особенности практических решений (задача решена верно, решение доведено до конца)

Оценка 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: ответ на экзаменационный билет выполнен в рамках "базового" уровня (студент знает основные определения, владеет терминологией, демонстрирует понимание материала). Большинство ответов даны верно (может допускать незначительные ошибки и неточности. После указания преподавателя на ошибку способен самостоятельно ее исправить). В практической части есть незначительные недостатки (ход решения задачи изложен верно, расчетные формулы записаны правильно, решение доведено до логического конца, в решении допускаются небольшие неточности и ошибки)

Оценка 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: ответ на экзаменационный билет выполнен в рамках "порогового" уровня. Основная часть задания выполнена верно (студент понимает основные определения, владеет терминологией, демонстрирует понимание большей части материала. При ответе на вопросы допускает ошибки, ход решения задачи изложен верно, но расчетные формулы записаны с ошибками и/или решение не доведено до логического конца). Не на все дополнительные вопросы даны верные ответы.

Оценка 2 («неудовлетворительно»)

Основная часть задания не выполнена или не даны ответы на вопросы экзаменационного билета и не выполнены критерии для оценки 3 («удовлетворительно»).

Лектор

Догадина Т. Н.

Зав. каф. РМДПМ

Меркурьев И. В.

Основные расчетные формулы

1.1 Обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z), \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

1.2 Удельная потенциальная энергия упругой деформации элементарного объема в окрестности точки:

$$\Phi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2).$$

$$\Phi = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)).$$

2. Осесимметричная задача теории упругости для толстостенных цилиндров и дисков

Уравнение равновесия в перемещениях:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\rho\omega^2 r \frac{(1-\nu^2)}{E}$$

Решение для перемещений: $u(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{\rho\omega^2 r^3(1-\nu^2)}{8E}$.

Решение для напряжений:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[C_1(1+\nu) - C_2 \frac{(1-\nu)}{r^2} \right] - \frac{\rho\omega^2 r^2(3+\nu)}{8}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[C_1(1+\nu) + C_2 \frac{(1-\nu)}{r^2} \right] - \frac{\rho\omega^2 r^2(1+3\nu)}{8}$$

C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Частные случаи решения задачи:

2.1. Вращающийся ненагруженный диск с отверстием.

Граничные условия: $\sigma_r(r_1) = 0, \sigma_r(r_2) = 0$.

$$u(r) = \frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2}{E} \frac{1}{8} \left(\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)}(r_1^2 + r_2^2)r + \frac{(3+\nu)r_1^2 r_2^2}{(1-\nu)r} - r^3 \right);$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\nu)\rho\omega^2}{8} \left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{(3+\nu)\rho\omega^2}{8} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{(1+3\nu)}{(3+\nu)} r^2 \right).$$

2.2. Сплошной вращающийся диск радиуса R.

Граничные условия: $\sigma_r(0) < \infty \Rightarrow C_2 = 0; \sigma_r(R) = 0$.

$$u(r) = \frac{\rho\omega^2(1-\nu^2)}{8E} \left(\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} R^2 r - r^3 \right);$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\nu)\rho\omega^2}{8} (R^2 - r^2); \quad \sigma_\theta = \frac{(3+\nu)\rho\omega^2}{8} \left(R^2 - \frac{(1+3\nu)}{(3+\nu)} r^2 \right).$$

2.3. Невращающийся цилиндр, нагруженный наружным и внутренним сжимающим давлением.

$\omega = 0$, граничные условия: $\sigma_r(r_1) = -p_1, \sigma_r(r_2) = -p_2$.

$$u(r) = \frac{(1-\nu)}{E} \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} r + \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r};$$

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \mp \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r^2}.$$

Осевые напряжения для закрытого цилиндра: $\sigma_z = \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$.

2.4. Невращающийся диск с жестким закреплением внутренней поверхности и нагруженный внешним растягивающим давлением p : $\omega = 0$, граничные условия: $u(r_1) = 0, \sigma_r(r_2) = p$.

$$u(r) = \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{pr_2^2}{(1+\nu)r_2^2 + (1-\nu)r_1^2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right); \quad \sigma_{r,\theta} = \frac{pr_2^2}{(1+\nu)r_2^2 + (1-\nu)r_1^2} \left((1+\nu) \pm \frac{r_1^2}{r^2} (1-\nu) \right).$$

3. Безмоментная деформация оболочек, содержащих жидкость и избыточное газовое давление

Уравнение Лапласа: $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{p}{h}$.

3.1. Сегмент сферической оболочки.

$$V_{cez} = \pi z^2 \left(R - \frac{z}{3} \right), \quad \sigma_{m,\theta} = \frac{\gamma R}{2h} \left((H - z) \pm \frac{z(3R-z)}{3(2R-z)} \right).$$

3.2. Коническая оболочка.

$$\sigma_m = \frac{\gamma z \left(H - \frac{2}{3}z \right) \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha}, \quad \sigma_\theta = \frac{\gamma z (H-z) \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha}.$$

H – приведенная высота столба жидкости: $H = \left(H_0 + \frac{p_0}{\gamma} \right)$,

где H_0 – высота столба жидкости, p_0 – избыточное газовое давление.

4. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки.

Уравнение равновесия цилиндрической оболочки в перемещениях:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = \left(p - \nu \frac{N_x}{R} \right).$$

Решение типа краевого эффект:

$$w(x) = w_0(x) + w_*(x) = C_1 e^{-kx} \cos kx + C_2 e^{-kx} \sin kx + w_*(x),$$

$$k = \left(\frac{Eh}{4DR^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad w_*(x) = \frac{R^2}{Eh} \left(p(x) - \nu \frac{N_x}{R} \right),$$

$$\phi = \frac{dw}{dx} = \frac{dw_*}{dx} - k e^{-kx} \left((C_1 - C_2) \cos kx + (C_1 + C_2) \sin kx \right),$$

$$M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2} = D \left(\frac{d^2 w_*}{dx^2} + 2k^2 e^{-kx} (C_1 \sin kx - C_2 \cos kx) \right),$$

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = D \frac{d^3 w}{dx^3} = D \left(\frac{d^3 w_*}{dx^3} + 2k^3 e^{-kx} \left((C_1 + C_2) \cos kx - (C_1 - C_2) \sin kx \right) \right),$$

$$M_y = \nu M_x, \quad N_y = \nu N_x + \frac{Eh}{R} w(x), \quad \sigma_x = \frac{N_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} \pm \frac{6M_y}{h^2}.$$

5. Собственные частоты и формы изгибных колебаний вала как системы с двумя степенями свободы

$$\omega_{1,2} = \left[\frac{f_{11}m_1 + f_{22}m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_{11}m_1 - f_{22}m_2}{2} \right)^2 + f_{12}f_{21}m_1m_2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2(z)}{EJ_x} dz, \quad f_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2(z)}{EJ_x} dz, \quad f_{12} = f_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(z)\bar{M}_2(z)}{EJ_x} dz.$$

Компоненты собственных форм колебаний по первой собственной частоте ω_1 :

$$\frac{v_{21}}{v_{11}} = \frac{1 - \omega_1^2 m_1 f_{11}}{\omega_1^2 m_2 f_{12}},$$

по второй собственной частоте ω_2 : $\frac{v_{22}}{v_{12}} = \frac{1 - \omega_2^2 m_1 f_{11}}{\omega_2^2 m_2 f_{12}}$.