

6Ф6.5

Р 79

УДК 62-52.001.24

**Ротач В. Я.**

**Р79** Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. М., «Энергия», 1973.

440 с. с ил.

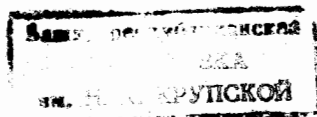
Содержание книги охватывает главные этапы расчета динамики автоматических систем регулирования непрерывных производственных процессов — идентификацию объектов и систем, выбор информационной схемы и законов функционирования регулирующей аппаратуры.

Книга предназначена для инженерно-технических работников и студентов высших учебных заведений соответствующих специальностей.

Р 3313-228  
051(01)-72 255-72

е646605

6Ф6.5



**ВИТАЛИЙ ЯКОВЛЕВИЧ РОТАЧ**  
Расчет динамики промышленных  
автоматических систем регулирования

♦  
Редактор *О. С. Соболев*  
Редактор издательства *Н. А. Медведева*  
Переплет художника *И. Г. Иванова*  
Технический редактор *Л. Н. Никитина*  
Корректор *И. А. Володьева*

♦  
Слано в набор 26/VII 1972 г.  
Формат 84×108<sup>1/32</sup>  
Усл. печ. л. 23,1  
Тираж 12 000 экз.

Подписано к печати 16/III 1973 г. Т-04746  
Бумага типографская № 3  
Уч.-изд. л. 24,89  
Цена 1 р. 45 к.  
Зак. 1284

Издательство «Энергия». Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

♦  
Московская типография № 10 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Управление всяким объектом по существу состоит из выбора цели (критерия) управления и подачи на объект специально организованных управляющих воздействий, необходимых для достижения этой цели. Способ формирования управляющих воздействий существенно зависит от степени детерминизма объекта: если его поведение для каждого момента времени может быть достаточно точно предсказано, управляющие воздействия могут меняться по заранее заданным жестким программам; если же объект работает в непредвиденно меняющихся условиях или непредвиденно меняются свойства самого объекта, управляющее устройство должно всякий раз оценивать конкретную ситуацию и соответствующим образом менять характер управляющих воздействий. В последнем случае системы управления приходится, как правило, строить по принципу обратной связи. Это значит, что входные управляющие воздействия на объект формируются по информации о текущем изменении его выхода — показателя цели управления.

При практическом осуществлении систем управления недетерминированными объектами функции устранения влияния их недетерминизма на процесс управления обычно выполняют специальные технические устройства — автоматические регуляторы, которые совместно с объектом, режим работы которого они регулируют, образуют автоматическую систему регулирования.

Автоматические регуляторы осуществляют непрерывный контроль случайных изменений величин, характеризующих режим работы регулируемого объекта (так называемых регулируемых величин), и при их отклонениях от желаемых значений подают на объект необходимые регулирующие воздействия, так чтобы устранить эти отклонения. В зависимости от характера задания желаемого значения регулируемых величин системы регулирования делятся на обычные и экстремальные. В первых из них желаемое значение регулируемых величин является заранее известной функцией времени или каких-либо других величин (в ча-

стности, заданное значение может быть и постоянным): в экстремальных системах требуется поддерживать наибольшие или наименьшие из возможных в данной ситуации значения регулируемых величин.

Регулирующие воздействия регулятор может осуществлять либо путем включения или отключения отдельных механизмов, агрегатов и т. п., из которых состоит объект (т. е. путем изменения его структуры), либо без изменения структуры воздействием на специально предусмотренные регулирующие органы объекта. Обычно системы управления сложными объектами выполняются по иерархическому принципу. Это значит, что система регулирования таким объектом расчленяется на системы, стоящие на разных уровнях подчинения. Система более высокого ранга, ориентируясь на общий (глобальный) критерий управления, выдает команды на включение или отключение отдельных локальных объектов, а также осуществляет выбор частных критериев управления этими объектами. Локальные системы регулирования осуществляют поддержание заданных оптимальных режимов как в пусковых, так и в нормальных стационарных эксплуатационных условиях.

В предлагаемой книге рассмотрены вопросы построения (синтеза) обычных автоматических систем регулирования, работающих в стационарных эксплуатационных условиях, т. е. рассматриваются задачи, являющиеся по своей постановке далеко не новыми [Л. 1]. Тем не менее анализ предпосылок и идеализаций, которые могут считаться достаточно установившимися в литературе по инженерным методам синтеза систем регулирования, показывает, что эти предпосылки зачастую не соответствуют реально существующим ситуациям. Отметим наиболее важные из них.

1. Обычно предполагается, что входные воздействия на регулируемый объект являются доступными для контроля и имеется возможность получить (по крайней мере, принципиально) математическое описание объекта относительно всех этих воздействий, например в виде системы дифференциальных уравнений. Учет случайного характера функционирования объекта ограничивается при этом, как правило, лишь учетом случайного характера изменения внешних (возмущающих) воздействий на объект, вероятностные характеристики которых также предполагаются известными.

В действительности же реально существующие объекты в промышленном производстве могут находиться под воздействием весьма большого числа случайных возмущений, действующих по различным каналам, причем среди них могут быть вообще недоступные для контроля, а следовательно, оказывается нереальным предположение о возможности получения их вероятностных характеристик. Практически это обстоятельство делает также невозможным экспериментальное получение математической модели объекта по каналам действия таких неконтролируемых возмущений.

2. Как правило, задача синтеза системы автоматического регулирования рассматривается лишь как задача определения наилучшего закона (алгоритма) формирования регулятором регулирующих воздействий, в частности как задача коррекции в нужном направлении динамических свойств регулятора. При этом рассмотрение схем систем автоматического регулирования производится на основании структурных соображений, т. е. исходя из характера взаимодействия отдельных элементов системы, определяемых лишь видом математического описания этих элементов, вне связи с физическими особенностями и выполняемыми ими в системе техническими функциями.

Между тем практический опыт построения систем регулирования промышленных объектов показывает, что главное значение здесь приобретает не задача выбора алгоритмов функционирования регуляторов (эти алгоритмы по существу predeterminedены технико-экономическими соображениями, поскольку аппаратура регулирования должна выбираться из номенклатуры, серийно выпускаемой приборостроительными заводами), а задача построения оптимальной схемы получения регулятором текущей информации о состоянии объекта регулирования (информационной схемы системы), которая отражает характер взаимодействия между двумя основными функциональными элементами системы регулирования — объектом и регулятором. Объясняется это тем, что регулирование лишь по конечному эффекту, т. е. путем оценки текущего значения показателя цели регулирования, как правило, не позволяет осуществить поддержание этого показателя на требуемом уровне с требуемой точностью даже при использовании самого совершенного закона регулирова-

ния. Связано это в первую очередь с тем, что показатель цели регулирования обычно реагирует на изменение регулирующих воздействий с запаздыванием во времени. В результате информация, заключенная в текущем изменении этого показателя, оказывается в значительной степени обесцененной, так что дальнейшая, пусть даже самая совершенная обработка ее в регулирующих устройствах не может восстановить эти потери.

Потери информации могут происходить и вследствие запаздывания, возникающего при формировании самого показателя цели регулирования, так как вычисление такого показателя обычно требует усреднения входящих в него переменных на достаточно большом интервале времени (как это имеет место, например, при вычислении коэффициента полезного действия объекта, среднеквадратичных отклонений регулируемых величин и т. п.).

Практически поэтому почти каждая действующая автоматическая система регулирования производственных процессов является системой косвенного регулирования, в которой на вход регулятора подается не сам показатель цели регулирования, а соответствующим образом подобранные косвенные величины, связанные с показателем цели регулирования достаточно тесной зависимостью. По-видимому, по той же причине не нашли сколько-нибудь широкого распространения автоматические поисковые оптимизаторы экстремальных технико-экономических показателей промышленных объектов; их функции, как правило, значительно более успешно выполняют обычные системы регулирования косвенных величин, т. е. объективно такие системы следует рассматривать не только как системы стабилизации, но и как системы автоматической оптимизации режимов работы объектов.

Таким образом, при разработке автоматических систем регулирования производственных процессов приходится использовать также и информационные методы. Естественно, что эти методы должны выбираться с учетом специфики решаемых здесь задач, в частности само определение понятия ценности или количества информации, очевидно, должно формулироваться в рамках так называемого прагматического [Л. 37] подхода к формулировке этого термина.

3. Обычно применяемая процедура синтеза автоматических систем регулирования исходит из того, что долж-

на быть известна математическая модель регулируемого объекта (неизменяемой части системы), основываясь на которой и осуществляют все расчеты. Роль математических моделей значительно возросла с развитием вычислительной техники, позволяющей в принципе отыскать оптимальную систему регулирования, даже при отсутствии специально разработанных методов синтеза, путем простого перебора вариантов. Аналитические методы синтеза в этом случае начинают играть вспомогательную роль, лишь как средство уменьшения числа исследуемых вариантов. Это обстоятельство послужило причиной интенсивного развития в последнее время теоретических и экспериментальных методов построения математических моделей объектов, вылившихся в специальную в значительной степени самостоятельную ветвь теории и техники автоматического управления, получившую название идентификации объектов.

Более пристальное изучение проблемы показывает, однако, принципиальную ограниченность методов синтеза, основанных на априорно заданных математических моделях объектов. Дело в том, что синтез системы регулирования по заранее заданной модели объекта был бы логически безупречным, если бы свойства модели точно отражали свойства реального объекта. В действительности же всякая модель отражает эти свойства лишь с некоторой степенью приближения. Соответственно при построении модели объекта необходимо прежде всего выбрать критерий, характеризующий погрешность такого приближения, а также указать допустимую величину этой погрешности. Но сделать это в отрыве от конечной цели построения модели, т. е. в отрыве от свойств будущей системы регулирования принципиально невозможно. Иначе говоря, выбор критерия приближения при построении модели объекта в равной мере зависит как от свойств объекта, так и от свойств будущего регулятора, который будет осуществлять регулирование режима работы этого объекта, а также от выбора показателя цели управления.

Таким образом, задача построения математической модели объектов регулирования является по своей сути логически противоречивой (для определения модели объекта необходимо знать, какой регулятор будет установлен на объекте; сама же модель собственно и ищется для нахождения этого регулятора).

В отмеченном противоречии находит свое отражение необходимость применения системного подхода при рассмотрении отдельных элементов системы.

Системный подход требует, чтобы свойства каждого элемента из совокупности, образующей какую-либо систему, рассматривались не изолированно, а в неразрывной связи, во взаимодействии с остальными элементами данной системы. В частности, при определении математической модели любого элемента системы следует исходить не из того, насколько хорошо модель отражает свойства собственно этого отдельно взятого элемента, а из того, насколько свойства всей системы после замены в ней рассматриваемого элемента его моделью станут отличаться от свойств действительной системы. Подобно тому, как система, собранная из хорошо функционирующих по отдельности, но плохо взаимодействующих между собой элементов может оказаться в целом неработоспособной [Л. 40], так и модель системы, составленная из моделей отдельных элементов, полученных вне связи с другими элементами, может дать в целом совершенно превратное представление о свойствах системы.

Необходимо отметить также, что пренебрежение системным подходом может привести к существенным ошибкам при экспериментальной оценке математической модели объекта (идентификации объекта) в условиях его нормального функционирования. Дело в том, что промышленные объекты в условиях нормальной эксплуатации, как правило, не могут работать без регулирования, которое в отсутствие автоматических регуляторов выполняет обслуживающий персонал объекта, т. е. эти объекты даже при отсутствии автоматики все равно являются элементами системы управления. Поэтому простое наблюдение за входами и выходами объекта с последующей статистической обработкой результатов этих наблюдений в лучшем случае должно дать не искомую модель объекта, а модель всей системы управления в целом, которая будет зависеть не только от свойства объекта, но в не меньшей степени от того, как обслуживающий персонал формирует управляющие воздействия на объект. Скорее же всего подобная процедура, если не принять специальных мер, вообще не приведет ни к какому результату, так как вопрос об устойчивости статистических свойств обслуживающего персонала в процессе идентификации обычно остается открытым.

В связи с отмеченными особенностями систем регулирования промышленных объектов серьезные трудности возникают с выбором математического аппарата для расчетов. Как известно, в настоящее время отсутствует сколько-нибудь работоспособный с инженерной точки зрения математический аппарат, позволяющий осуществлять синтез систем регулирования для недетерминированных динамических нелинейных объектов, находящихся под действием случайных неконтролируемых возмущений [Л. 72]. Для описания поведения таких объектов, строго говоря, неприменим аппарат нелинейных дифференциальных уравнений; аппарат же бесконечномерных условных законов распределения теории вероятностей еще не разработан в такой степени, чтобы его можно было рекомендовать для использования в инженерной практике.

Для нелинейных динамических объектов трудно, а часто и вообще невозможно установить взаимосвязь между изменением в динамике экстремального значения показателя оптимальности, с одной стороны, и изменением регулируемых величин — с другой. Наконец, для таких объектов, как правило, невозможно сформулировать критерий оптимального приближения при построении математической его модели, который каким-то образом был бы увязан с критерием оптимального функционирования всей системы регулирования в целом.

Рассмотренные особенности систем регулирования имеют, очевидно, принципиальный характер и их учет невозможен без существенного изменения самого подхода к процедуре синтеза регуляторов. Необходимо отдавать отчет в том, что синтез регулятора по модели объекта принципиально невыполним, сколь бы совершенным ни был используемый математический аппарат. Процедуру синтеза системы регулирования следует рассматривать как системную задачу, решаемую с помощью многошаговой процедуры постепенного приближения к оптимальному, в рамках которой идентификация объекта, расчет и проверка результатов должны составлять единый взаимосвязанный процесс. Соответственно «классический» подход к синтезу по модели объекта должен рассматриваться лишь как первый шаг движения к оптимальному; все последующие шаги выполняются непосредственно на действующем объекте в процессе наладки системы регулирования. Таким образом, наладочные работы, рас-

сма́тривавшиеся до последнего времени скорее как работы, необходимость в которых обусловлена несовершенством методов синтеза и значение которых поэтому должно постепенно уменьшаться, приобретают свое важное значение, как один из основных этапов синтеза системы.

Сказанное, конечно, не умаляет значения первоначального этапа синтеза по модели объекта; естественно, что этот этап должен быть выполнен со всей возможной тщательностью с тем, чтобы по возможности, уменьшить объем работ, выполняемых при наладке системы. Речь идет лишь о необходимости понимания реальных возможностей этого этапа.

Следует также обратить внимание на то обстоятельство, что выполнение определенного объема работ по синтезу системы регулирования непосредственно на действующем объекте в процессе его наладки оправдано и с чисто практической точки зрения. Известно, что достаточно надежную математическую модель объекта регулирования невозможно получить без постановки соответствующего эксперимента на действующем объекте. В настоящее время практически нельзя найти действующего нового объекта, не оснащенного в той или иной мере аппаратурой автоматического регулирования. Соображения технико-экономического порядка обычно заставляют осуществлять проектирование и монтаж автоматической системы управления объекта параллельно с проектированием и монтажом основного технологического оборудования. Соответственно, к моменту пуска в эксплуатацию основного оборудования объекта обычно имеется в наличии готовая к включению в работу автоматическая система регулирования, проектирование которой осуществлено на основании имеющегося опыта проектирования аналогичных систем, предварительных аналитических расчетов и т. п. В этих условиях представляется по меньшей мере неразумным отказываться от имеющихся возможностей приступить к экспериментальному изучению не только отдельно взятого объекта, но и всей системы регулирования в целом, оптимизации ее настройки, выявлению ее возможностей, а в случае необходимости — и к изменению ее структуры, способствующей улучшению качества управления.

Использование многошаговой процедуры оптимизации системы позволяет также в значительной степени

решить проблему выбора математического аппарата для расчетов. Действительно, в этом случае достаточно обеспечить сходимость итерационной процедуры к оптимуму, а использование математической модели объекта при расчете каждого шага движения к оптимуму может рассматриваться лишь как средство убыстрения сходимости этой процедуры. Опыт показывает, что здесь вполне удовлетворительные результаты обычно дает использование линейных моделей объектов, в которых эффект действия случайных неконтролируемых возмущений может быть учтен в виде контролируемых аддитивных помех, наложенных на регулируемые величины. Возникающая вследствие такой замены ошибка расчетов учитывается и корректируется на последующих шагах итерационного процесса.

Естественно, что указанная итерационная процедура оптимизации может использоваться не только при построении новых систем регулирования, но также и для подстройки параметров действующих систем при регулировании объектов с непредвиденно меняющимися во времени динамическими свойствами. В конечном счете в случае необходимости на основе соответствующих алгоритмов настройки могут быть построены самонастраивающиеся системы регулирования промышленных объектов.

В предлагаемой книге рассматриваются методы синтеза автоматических систем регулирования непрерывных производственных процессов, учитывающие отмеченные особенности этих систем. Книга состоит из трех частей.

В первой части книги рассматривается математический аппарат линейной теории динамических систем (как детерминированных, так и стохастических), используемый в дальнейших расчетах. Учитывая прикладное направление книги, при изложении этого материала основное внимание обращалось на простоту и физическую наглядность выкладок.

Вторая часть посвящена вопросам синтеза систем регулирования при априорно заданной математической модели объекта в предположении, что случайный характер действующих на объект возмущений является специфичной особенностью промышленных систем регулирования. На основании понятия предельной динамической точности регулирования получены оптимальные алгоритмы функционирования регуляторов и способы их аппроксимации, приводящие, в частности, к так называемым ти-

повым алгоритмам регулирования. Рассматриваются методы расчета оптимальных параметров этих алгоритмов. Результаты обобщаются для систем с цифровыми и импульсными регуляторами, а также систем с добавочными информационными каналами связи объекта с регулятором, введение которых позволяет повысить предельную динамическую точность регулирования.

В третьей части рассматриваются вопросы экспериментального получения математической модели объекта и итерационные методы оптимизации настройки действующих систем регулирования.

Расчетные методы доведены, как правило, до состояния, позволяющего осуществлять непосредственное программирование вычислений на ЭЦВМ. В то же время при изложении этих методов серьезное внимание уделяется их наглядности, в частности, возможности их интерпретации в графических построениях. Последнее обстоятельство имеет как самостоятельное значение (позволяющее, в случае необходимости, осуществлять расчеты без использования вычислительной техники), так и может служить средством для рационального выбора программы и начального состояния вычислительного процесса ЭЦВМ, а также его проверки на отдельных этапах.

Автор благодарит Е. Г. Дудникова, В. С. Балакирева, А. М. Цирлина, Н. С. Райбмана, Ю. Б. Рождественского, сотрудников кафедры АСУ ТП Московского энергетического института за сделанные замечания по рукописи книги, О. С. Соболева за ее редактирование, а также В. П. Зверькова, выполнившего расчет примеров для приложения.

*Автор*

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### 1-1. Системы односторонней передачи воздействий

Под термином «физическая система» в общем случае принято понимать совокупность взаимодействующих элементов произвольной физической природы, обособленную по тому или иному признаку от среды, в которой она функционирует. Обособленность реальных физических систем от внешней среды имеет относительный характер. Это значит, что система взаимодействует с внешней средой, однако это взаимодействие происходит лишь по определенным каналам [Л. 4]. Каналы, по которым система получает воздействия от внешней среды, называются входами системы, а сами эти воздействия — входными воздействиями или входными величинами системы; каналы, по которым система оказывает воздействия на внешнюю среду, называются выходами системы, а соответствующие воздействия — ее выходными величинами. Изменение выходной величины системы, вызванное подачей на ее вход некоторого входного воздействия, называется реакцией системы на это воздействие.

Для изображения взаимодействия системы с внешней средой обычно используется ее условное начертание, подобное приведенному на рис. 1-1. Здесь стрелками обозначены входное воздействие системы  $x(t)$  и ее выходная величина  $y(t)$ , которые являются функциями времени  $t$ . В общем случае как число входных воздействий, так и число выходных величин может быть произвольно большим. Системы с одной выходной величиной принято называть *одномерными* системами; в противном случае система считается *многомерной*.



Следует подчеркнуть, что изображение системы в виде рис. 1-1 предполагает однонаправленность передачи системой воздействий. Это значит, что в таких системах отсутствует обратное влияние выходных величин системы на ее входные воздействия.

Естественно, что все сказанное остается в силе и по отношению к элементам системы, каждый из которых может рассматриваться как самостоятельная относительно обособленная (хотя и более мелкая) система.



Рис. 1-1.

К числу относительно обособленных систем относятся и автоматические системы регулирования, представляющие собой совокупность двух основных взаимодействующих между собой элементов — регулируемого объекта и регулятора. Целью функционирования системы регулирования является поддержание заданного оптимального режима работы объекта в условиях, когда на объект действуют заранее непредвиденные случайные возмущающие воздействия со стороны внешней среды, нарушающие нормальный режим его работы.

На рис. 1-2,а приведена простейшая автоматическая система регулирования. Регулируемым объектом в этой системе является бак, в который непрерывно поступает жидкость и из которого она подается потребителю. Целью регулирования является поддержание уровня жидкости в баке  $y(t)$  на некотором заданном значении  $s(t)$ . Регулирование осуществляется автоматическим регулятором, выполненным в виде поплавка 1, перемещение которого посредством рычага 2 передается на регулирующий орган объекта — клапан 3, установленный на подводящем трубопроводе. Сочленение поплавка с регулирующим органом выполнено таким образом, что при росте уровня клапан прикрывается, уменьшая поступление жидкости в бак, а при понижении уровня — открывается. Тем самым обеспечивается автоматическая стабилизация уровня  $y$  его заданного значения при всех возможных внешних воздействиях на объект, нарушающих нормальный режим его работы; в частности, одним из таких воздействий является изменение потребления жидкости, возникающее при перемещении потребителем клапана 4 на отводящем трубопроводе.

Установка желаемого значения уровня, который будет поддерживать регулятор, может быть произведена, например, путем соответствующего изменения длины тяги, соединяющей поплавок с рычагом 2.

Выходной величиной в этой системе регулирования может быть любая величина, характеризующая поведение системы с интересующей нас точки зрения, например регулируемая величина  $y(t)$ . Входными воздействиями здесь являются: изменение заданного

значения регулируемой величины, осуществляемое обслуживающим персоналом объекта, и изменение положения клапана потребителя  $\lambda_n(t)$ , осуществляемое потребителем. Соответственно рассматриваемая система может быть условно представлена так, как показано на рис. 1-2,б.

Обратим внимание, что в общем случае входным воздействием рассматриваемой системы регулирования не может считаться величина притока жидкости  $q_{пр}(t)$  или величина ее стока  $q_{ст}(t)$ , несмотря на то что разбаланс между этими потоками является не-

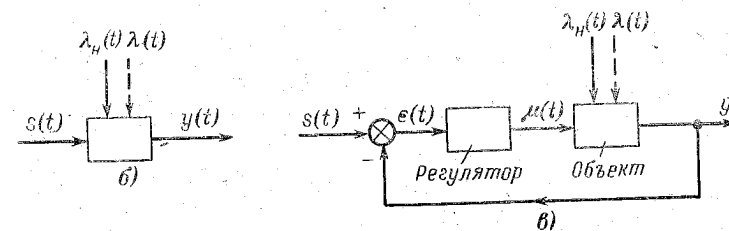
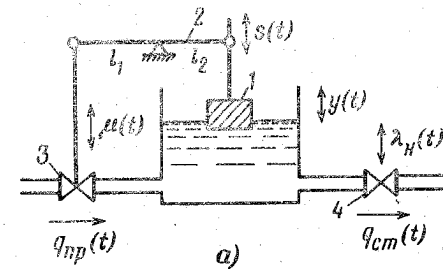


Рис. 1-2.

посредственной причиной изменения уровня жидкости в баке. Обусловлено это тем, что при изменении уровня регулятор оказывает обратное воздействие на приток жидкости. Кроме того, как приток, так и сток может зависеть от уровня за счет того, что при изменении уровня меняется перепад давления на клапанах притока и стока. Заметим также, что число входных воздействий системы может значительно превышать число ее выходных величин. В частности, в рассматриваемой системе с одной выходной величиной входными воздействиями могут быть не только  $s(t)$  и  $\lambda_n(t)$ , но и изменение давления жидкости перед клапаном на притоке и давление после клапана на стоке (при условии, конечно, что эти величины не зависят от изменения уровня), изменение вязкости жидкости и т. п. Некоторые из входных воздействий могут быть вообще недоступными для непосредственного контроля [на рис. 1-2,б все эти воздействия показаны одной пунктирной стрелкой и обозначены  $\lambda(t)$ ].

Для того чтобы в рассмотренной системе автоматического регулирования объект и регулятор могли считаться относительно обо-

собленными элементами, необходимо выполнение следующих условий:

1) площадь поплавка должна быть намного меньше площади бака, так чтобы изменение погружения поплавка в жидкость практически не сказывалось на величине уровня в баке;

2) перемещение регулирующего клапана не должно зависеть от обратной реакции со стороны меняющегося потока жидкости.

В этом случае структурная схема системы может быть представлена в виде, указанном на рис. 1-2, в, откуда следует, что регулируемый объект, помимо ранее рассмотренных входных возмущающих воздействий  $u_n(t)$  и  $u(t)$  (являющихся одновременно и входными воздействиями для всей системы регулирования), имеет еще одно входное воздействие, которое он получает не извне, а от другого элемента системы — автоматического регулятора. Таким воздействием является перемещение регулирующего органа  $u(t)$  (регулирующее воздействие), которое одновременно является выходной величиной регулятора. Входными величинами регулятора являются: изменение задания регулятору  $s(t)$  и изменение регулируемой величины — уровня жидкости в баке  $y(t)$ . В регуляторе эти величины сравниваются между собой, в результате чего вырабатывается разность между желаемым и действительным значениями регулируемой величины, называемая отклонением регулируемой величины или ошибкой регулирования

$$e(t) = s(t) - y(t).$$

Регулирующее воздействие  $u(t)$  формируется регулятором в зависимости от значения ошибки  $e(t)$ .

Обратим внимание, что входной величиной регулятора в рассматриваемом примере следует считать именно значение уровня в баке, а не положение поплавка, так как связь между перемещением поплавка и изменением положения регулирующего органа не односторонняя. Действительно, если отсоединить левый конец рычага от клапана и вручную перемещать его, то будет перемещаться и поплавок. Однако между изменением уровня и перемещением регулирующего органа эта связь (при принятых выше предположениях) становится уже односторонней.

Связь между изменением выходных величин системы и вызвавшими это изменение входными воздействиями определяется законом преобразования или алгоритмом функционирования системы. В зависимости от особенностей закона преобразования системы делятся на детерминированные и стохастические, стационарные и нестационарные, статические и динамические.

Система называется детерминированной, если между ее входными и выходными величинами имеется однозначное соответствие. Иначе говоря, если при соблюдении одних и тех же контролируемых условий на вход детерминированной системы несколько раз подать одно и то же воздействие, на ее выходе всякий раз будет наблюдаться одинаковое изменение выходной величины.

В стохастических системах подача на вход одних и тех же воздействий в одних и тех же условиях может вызывать различные изменения (различные реализации) выходной величины. В таких системах появление каждой возможной реализации выходной величины подчиняется вероятностным законам. Физической причиной подобной неопределенности в поведении стохастических систем обычно является то, что в реальных условиях на системы помимо контролируемых входных величин действуют также неконтролируемые помехи и возмущения, искажающие реакцию системы на контролируемые входные воздействия.

Система называется стационарной, если ее закон преобразования воздействий не зависит от времени; в противном случае система является нестационарной.

Статическими называются системы, значения выходных величин которых в любой момент времени определяются лишь значениями входных воздействий в тот же момент. Системы, значения выходных величин которых в каждый момент времени зависят от того, какие значения принимали входные воздействия не только в текущий, но и предшествующие моменты времени, называются динамическими. Закон преобразования детерминированных статических систем может быть выражен в виде функциональной зависимости текущего значения выходной величины от текущего значения входной; закон преобразования детерминированных динамических систем для каждого момента времени может быть выражен с помощью соответствующих функционалов или дифференциальных уравнений.

Так, автоматический регулятор в рассмотренном ранее примере автоматической системы регулирования (см. рис. 1-2) может считаться статическим элементом (если только на его работу не оказывают заметного влияния силы трения в сочленениях и силы инерции). Однако регулируемый объект этой системы является уже динамическим элементом, так как положение жидкости определяется процессами накопления жидкости в баке за все предыдущее время его работы.

Уравнение регулятора может быть записано в следующем виде:

$$u(t) = \frac{l_1}{l_2} [s(t) - y(t)].$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — величины плеч рычага регулятора 2 (см. рис. 1-2, а).

Для вывода уравнения объекта обратим внимание, что непосредственной причиной изменения уровня в баке является разбаланс

с646605



(разность) между притоком жидкости в бак и ее стоком из бака. Если этот разбаланс остается неизменным и равным величине  $q_{\text{пр}} - q_{\text{ст}}$  ( $q_{\text{пр}}$ ,  $q_{\text{ст}}$  — расходы жидкости на притоке и стоке) в течение некоторого отрезка времени  $\Delta t$ , то за это время количество аккумулярованной в баке воды изменится на величину  $(q_{\text{пр}} - q_{\text{ст}})\Delta t$ . Это вызовет изменение уровня на величину  $\Delta y(t)$ , которая может быть найдена из следующего уравнения материального разбаланса:

$$S\Delta y = (q_{\text{пр}} - q_{\text{ст}})\Delta t$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{S}(q_{\text{пр}} - q_{\text{ст}}),$$

где  $S$  — площадь поверхности воды в баке.

Устремив теперь  $\Delta t$  к нулю, получим уравнение, определяющее изменение уровня при непрерывном изменении притока и стока:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{S}[q_{\text{пр}}(t) - q_{\text{ст}}(t)]. \quad (1-1)$$

Поскольку приток и сток являются некоторыми функциями входных воздействий  $\mu(t)$  и  $\lambda_{\text{н}}(t)$ , а также изменения уровня  $y(t)$ , т. е.

$$q_{\text{пр}} = f_{\text{пр}}(y, \mu); \quad q_{\text{ст}} = f_{\text{ст}}(y, \lambda_{\text{н}}),$$

то после подстановки этих значений в выражение (1-1) получим следующее дифференциальное уравнение объекта:

$$S \frac{dy(t)}{dt} = f_{\text{пр}}[y(t), \mu(t)] - f_{\text{ст}}[y(t), \lambda_{\text{н}}(t)]. \quad (1-2)$$

Для математического описания поведения стохастических систем необходимо использование аппарата теории вероятностей. В частности, поведение статической стохастической системы определяется так называемым одномерным условным законом распределения вероятностей. Этот закон указывает для каждого значения входного воздействия вероятности того, что выходная величина примет то или иное возможное значение. Поскольку в стохастических динамических системах текущее значение выходной величины зависит от всех предыдущих значений выхода, для математического описания таких систем в общем случае приходится прибегать к аппарату бесконечномерных условных законов распределения вероятностей. Нужно, однако, сказать, что этот аппарат является практически малоприменимым для инженерных расчетов. В то же время реальные промышленные объекты регулирования, как правило, относятся к числу динамических стохастических систем. Так, даже в рассмотренном выше

простейшем примере автоматической системы регулирования изменение уровня в баке может происходить не только вследствие изменения положения регулирующего клапана  $\mu(t)$  или клапана потребителя  $\lambda_{\text{н}}(t)$ , но и вследствие случайного изменения давления перед регулирующим клапаном и после клапана потребителя, изменения вязкости жидкости и т. п. Если эти факторы не контролируются, рассмотренный объект представляет собой уже не детерминированную, а стохастическую систему.

## 1-2. Линейные системы преобразования воздействий

Математическую формулировку закона преобразования воздействий системой принято называть математической моделью этой системы.

Качество математической модели, очевидно, определяется тем, насколько точно процессы в реальной системе совпадают с процессами, вычисленными с помощью модели; численно степень точности модели характеризуется величиной критерия приближения, который был принят при построении модели. Но так как критериев приближения можно при желании сформулировать сколь угодно много, то и число математических моделей одной и той же реальной системы может быть крайне велико. Естественно поэтому, что выбор критерия приближения является одной из наиболее ответственных операций при построении модели системы. Особенную осторожность необходимо соблюдать при построении математических моделей отдельных элементов системы, в частности при построении модели объекта регулирования. Как уже отмечалось во введении, в этом случае должен соблюдаться системный принцип подхода к построению моделей элементов, т. е. выбираемая математическая модель элемента системы должна хорошо отражать процессы не только (и не столько) в этом отдельно взятом элементе, но прежде всего во всей исследуемой системе. Опасность здесь заключается в том, что хорошее (с точки зрения выбранного критерия приближения) совпадение процессов в отдельно взятом элементе и его модели вовсе не гарантирует, что полученная в результате объединения моделей элементов модель всей системы будет даже приближенно отражать процессы в действительной системе. Напротив, часто встре-

чаются случаи, когда получить удовлетворительно работающую модель всей системы удается при использовании моделей элементов, каждая из которых, рассмотренная изолированно, может произвести впечатление весьма неточной.

При исследовании автоматических систем регулирования следует по возможности оперировать с так называемыми линейными моделями.

Линейной называется модель (система), которая подчиняется принципу наложения (суперпозиции). Это значит, что реакция линейной модели (системы) на взвешенную сумму (линейную комбинацию) произвольного числа  $n$  входных воздействий  $x_i(t)$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t),$$

( $a_i$  — постоянные коэффициенты) может быть вычислена как соответствующая сумма реакций этой модели (системы)  $y_i(t)$  на каждое из слагаемых  $x_i(t)$ , взятых по отдельности:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t).$$

Интерес к линейным моделям прежде всего объясняется тем, что их поведение описывается линейными дифференциальными уравнениями, для которых разработаны общие и достаточно простые методы решения. Однако это не единственное и, пожалуй, не самое важное достоинство линейных моделей. Для исследования автоматических систем регулирования производственных процессов особое значение имеют также следующие два свойства этих моделей:

1. Входные воздействия реальных систем обычно могут быть представлены в виде взвешенной суммы соответствующим образом подобранных типовых элементарных воздействий одной и той же формы. Поэтому для вычисления реакции линейной системы на любое входное воздействие достаточно располагать лишь реакцией этой системы на указанные типовые воздействия. Иначе говоря, поведение линейной системы при произвольных входных воздействиях может быть описано не только с помощью дифференциальных уравнений, но также и с помощью характеристики, определяющей ее реакцию

на то или иное типовое воздействие, которая по этой причине называется динамической характеристикой системы. Преимущества математического описания систем с помощью аппарата динамических характеристик становятся особенно ощутимыми при построении математических моделей сложных объектов регулирования производственных процессов, вывод дифферен-

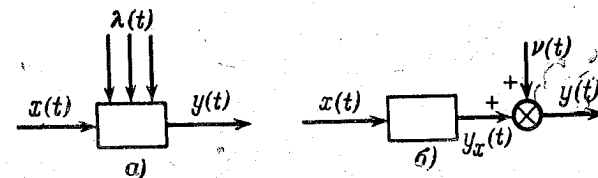


Рис. 1-3.

циальных уравнений которых представляет обычно весьма сложную задачу. В то же время динамические характеристики могут быть получены постановкой сравнительно простых экспериментов на действующем объекте.

2. В линейной стохастической системе, недетерминизм которой обусловлен действием случайных неконтролируемых возмущений  $\lambda(t)$  (рис. 1-3, а), эффект влияния этих возмущений на выходную величину может быть учтен в виде аддитивной случайной помехи, наложенной непосредственно на детерминированную составляющую  $y_x(t)$  выходной величины [помеха  $\nu(t)$  на рис. 1-3, б], т. е. выходная величина такой системы может быть представлена как

$$y(t) = y_x(t) + \nu(t).$$

Соответственно описание поведения системы в этом случае может быть получено в рамках обычного аппарата линейных дифференциальных уравнений (или адекватного ему аппарата динамических характеристик). Правда здесь необходимо располагать дополнительной информацией о вероятностных характеристиках случайной помехи  $\nu(t)$ . Однако определение этих характеристик представляет собой относительно простую задачу, тем более что  $\nu(t)$  доступна для непосредственного контроля [для получения осциллограммы изменения  $\nu(t)$  достаточно, очевидно, зарегистрировать выход системы при  $x(t) = 0$ ].

Эта особенность линейных систем важна при построении математических моделей объектов регулирования,

которые, как это уже отмечалось выше, обычно подвержены большому числу неконтролируемых возмущений и являются поэтому недетерминированными системами.

Уравнение линейной статической системы при надлежащем выборе начала отсчета входной и выходной величин может быть представлено в следующем виде:

$$y(t) = kx(t), \quad (1-3)$$

причем в стационарных системах  $k$  является постоянным коэффициентом, получившим название коэффициента передачи системы. В нестационарных системах  $k$  зависит от времени [но не зависит от входного воздействия  $x(t)$ , так как в этом случае система перестает быть линейной].

Процедура замены действительной функциональной зависимости выходной величины от входной

$$y(t) = F[x(t)] \quad (1-4)$$

приближенной линейной зависимостью (1-3) называется линеаризацией нелинейной функции  $F(x)$ . Для линеаризации могут быть использованы любые подходящие критерии приближения функций (интерполирования, разложения в ряды, метод наименьших квадратов и т. п.), но с учетом высказанных выше замечаний о необходимости системного подхода к решению этой задачи. Если нелинейная зависимость (1-4) непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки исходного режима  $x = x_0$ , линеаризация обычно осуществляется путем ее разложения в ряд Тейлора в точке  $x_0$  с учетом лишь линейного члена разложения:

$$y \approx y_0 + \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 (x - x_0).$$

где  $y_0 = F(x_0)$ . Переносом начала отсчета  $x$  и  $y$  соответственно в точки  $x_0$  и  $y_0$  последнюю формулу можно представить в виде (1-3), где следует положить:

$$k = \left( \frac{dy}{dx} \right)_0. \quad (1-5)$$

В графической интерпретации описанный способ линеаризации соответствует замене графика функции  $F(x)$  прямой линией, представляющей собой касательную к этому графику в точке  $x = x_0$  (рис. 1-4). Очевидно, что линеаризация подобным способом может применяться в том случае, когда в процессе работы системы не ожи-

дается больших отклонений входной и выходной величин от начального состояния равновесия (почему этот метод линеаризации часто называют методом малых отклонений).

Поведение линейных динамических систем описывается линейными дифференциальными уравнениями. Существование в динамических системах «памяти» на прошедшие значения входных воздействий объясняется наличием в таких системах емкостей, в которых аккумулируется вещество или энергия. Уравнение материального или энергетического баланса каждой емкости представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка; соответственно поведение динамической системы, состоящей из некоторого числа  $n$  емкостей, описывается системой из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка, которые в случае нелинейной системы также являются нелинейными. Путем линеаризации функциональных зависимостей в каждом из этих уравнений можно перейти от указанной системы нелинейных уравнений к системе линейных уравнений, которые в свою очередь могут быть сведены в одно линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Для системы с одним входом и одним выходом это уравнение может быть представлено в следующем виде:

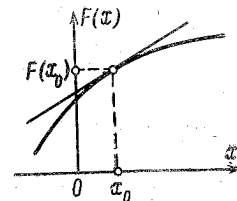


Рис. 1-4.

$$\begin{aligned} T_n^n y^{(n)}(t) + T_{n-1}^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + T_1 y'(t) + y(t) = \\ = k [T_{x,m}^m x^m(t) + T_{x,m-1}^{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + T_{x,1} x'(t) + \\ + x(t)]; \quad (n \geq m). \end{aligned} \quad (1-6)$$

Коэффициенты  $T_1, T_2, \dots$  имеют размерность времени; коэффициент  $k$ , как и в случае статической системы, называется коэффициентом передачи динамической системы.

В установившихся режимах работы системы все производные  $x(t)$  и  $y(t)$  равны нулю и, следовательно, связь между входной и выходной величинами системы определяется уравнением статики вида (1-3).

Следует подчеркнуть, что коэффициенты уравнения (1-6), описывающего линейную динамическую систему, могут быть либо постоянными (для стационарных систем), либо зависеть от времени (для нестационарных систем), но они не могут зависеть от входного воздействия  $x(t)$ , так как такое уравнение будет уже описывать нелинейную систему. В связи с этим полезно заметить, что часто встречающееся определение линейной системы как системы, поведение которой описывается линейными дифференциальными уравнениями, является не совсем верным, поскольку математическое определение линейных дифференциальных уравнений требует независимости их коэффициентов лишь от  $y(t)$  [Л. 5].

Произведем линеаризацию нелинейного дифференциального уравнения объекта (1-3). С этой целью нелинейные функции  $f_{np}(y, \mu)$  и  $f_{ст}(y, \lambda_n)$  в его правой части разложим в ряд Тейлора, ограничившись линейными членами разложения:

$$f_{np}(y, \mu) = f_{np0} + \frac{\partial f_{np}}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f_{np}}{\partial \mu}(\mu - \mu_0);$$

$$f_{ст}(y, \mu) = f_{ст0} + \frac{\partial f_{ст}}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f_{ст}}{\partial \lambda_n}(\lambda_n - \lambda_{n0}).$$

Если начало отсчета  $y, \mu$  и  $\lambda_n$  выбрать в точках разложения  $y_0, \mu_0$  и  $\lambda_{n0}$ , а сами эти точки выбрать так, чтобы они соответствовали равновесному режиму работы бака (когда приток жидкости совпадает со стоком  $f_{np0} = f_{ст0}$ ), после подстановки полученных приближенных выражений для  $f_{np}$  и  $f_{ст}$  в исходное уравнение получим следующее уравнение бака в линейном приближении:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_\mu \mu(t) + k_\lambda \lambda_n(t), \quad (1-7)$$

где

$$T = \left( \frac{S}{\partial f_{ст}/\partial y - \partial f_{np}/\partial y} \right)_0;$$

$$k_\mu = \left( \frac{\partial f_{np}/\partial \mu}{\partial f_{ст}/\partial y - \partial f_{np}/\partial y} \right)_0;$$

$$k_\lambda = - \left( \frac{\partial f_{ст}/\partial \lambda_n}{\partial f_{ст}/\partial y - \partial f_{np}/\partial y} \right)_0.$$

Естественно, что уравнение может быть составлено не только по отношению к изменению уровня, но и по отношению к любой другой переменной; например, может возникнуть необходимость изучения изменения притока жидкости в бак при перемещении клапана на притоке  $\mu(t)$  при неизменном положении клапана на стоке  $\lambda_n(t) =$

$= \lambda_{n0}$ . Выразив зависимость  $y$  от  $q_{np}$  и  $\mu$

$$y = \frac{1}{\left( \frac{\partial f_{np}}{\partial y_0} \right)_0} \left[ q_{np} - \left( \frac{\partial f_{np}}{\partial \mu} \right)_0 \mu \right]$$

и подставив это выражение в уравнение (1-7), можно прийти к следующему уравнению:

$$T \frac{dq_{np}(t)}{dt} + q_{np}(t) = k_q \left[ T_x \frac{d\mu(t)}{dt} + \mu(t) \right]; \quad (1-8)$$

в котором коэффициенты  $T_x$  и  $k_q$  зависят от частных производных  $\partial q_{np}/\partial y, \partial q_{np}/\partial \mu, \partial q_{ст}/\partial y$ .

### 1-3. Особенности решения дифференциальных уравнений линейных динамических систем

Располагая дифференциальным уравнением динамической системы, можно найти реакцию этой системы на конкретное входное воздействие  $x(t)$ . Для этого нужно подставить в правую часть уравнения динамической системы заданное выражение для  $x(t)$ , а затем найти решение этого уравнения при заданных начальных условиях. В частности, если правую часть уравнения (1-6), получаемую после подстановки в нее конкретной функции  $x(t)$ , обозначить через  $f(t)$ , решение поставленной задачи сводится к решению линейного дифференциального уравнения

$$T^n y^{(n)}(t) + T^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + T_1 y'(t) + y(t) = f(t) \quad (1-9)$$

при начальных условиях  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ .

Способы решения подобных уравнений хорошо известны [Л. 5]; напомним, что общее решение неоднородного уравнения (1-9) для случая, когда  $T_1, \dots, T_n$  — постоянные коэффициенты, представляет собой сумму:

$$y(t) = y_{пер}(t) + y_{уст}(t),$$

где  $y_{пер}$  — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$T^n y^{(n)}(t) + T^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + T_1 y'(t) + y(t) = 0, \quad (1-10)$$

а  $y_{уст}(t)$  — частное решение неоднородного уравнения (1-9).

В свою очередь общее решение уравнения (1-10) ищется в виде линейной комбинации частных решений

$$y_{\text{пер}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (1-11)$$

где  $p_i$  — корень характеристического уравнения

$$T_n p^n + T_{n-1} p^{n-1} + \dots + T_1 p + 1 = 0, \quad (1-12)$$

а  $C_i$  — произвольные постоянные, определяемые начальными значениями функции  $y(t)$  и ее производных. Формула (1-10) справедлива, если среди корней характеристического уравнения (1-12) нет кратных.

Частное решение  $y_{\text{уст}}(t)$  неоднородного уравнения (1-9) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, однако для большинства практически важных случаев это решение находится значительно более просто. Если правая часть уравнения (1-9) представляет собой функцию вида

$$f(t) = P(t) e^{\alpha t}, \quad (1-13)$$

где  $P(t)$  — многочлен от  $t$ , а  $\alpha$  не является корнем характеристического уравнения (1-12), частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{уст}}(t) = Q(t) e^{\alpha t}, \quad (1-14)$$

где  $Q(t)$  — многочлен той же степени, что и  $P(t)$ .

Если правая часть уравнения (1-7) имеет вид:

$$f(t) = M \cos \beta t + N \sin \beta t, \quad (1-15)$$

где  $M$  и  $N$  — постоянные числа, а  $j\beta$  не является корнем характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{уст}}(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t, \quad (1-16)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные неопределенные коэффициенты.

Как следует из (1-11), составляющая  $y_{\text{пер}}(t)$  решения уравнения (1-9) может с течением времени либо стремиться к нулю (когда корни характеристического уравнения отрицательны или содержат отрицательные вещественные части), либо беспрестанно увеличиваться (когда среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один положительный или имеющий положитель-

ную вещественную часть корень). Очевидно, что уравнения первой группы соответствуют неработоспособным физическим системам; такие системы получили название неустойчивых. Составляющая  $y_{\text{пер}}(t)$ , со временем исчезающая, называется переходной составляющей решения, а описываемый ею процесс изменения  $y(t)$  — переходным процессом. Соответственно составляющая  $y_{\text{уст}}$  решения (1-9) называется установившейся составляющей решения, которая определяет установившийся процесс изменения  $y(t)$  под влиянием входного воздействия  $x(t)$ .

При практическом использовании изложенного способа отыскания реакции системы на воздействие  $x(t)$  следует иметь в виду некоторые особенности, возникающие в часто встречающемся случае, когда требуется отыскать реакцию системы на воздействие  $x(t)$ , прикладываемое ко входу системы в некоторый момент времени, принимаемый обычно за начало отсчета, т. е. в момент  $t=0$  (при этом до момента  $t=0$  входное воздействие полагается равным нулю). Формула для такого входного воздействия может быть представлена в следующем виде:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ u(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (1-17)$$

Очевидно, что подобная функция или по крайней мере некоторые ее производные должны претерпевать разрыв в точке  $t=0$ , а при подстановке  $x(t)$  в правую часть уравнения системы (1-6) возникает необходимость в дифференцировании таких функций.

Воздействие вида (1-17) может, очевидно, рассматриваться как результат умножения функции  $u(t)$ , существующей на интервале изменения  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , на так называемую единичную ступенчатую функцию:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (1-18)$$

график которой представлен на рис. 1-5. Это позволяет вместо (1-17) записать:

$$x(t) = u(t) 1(t). \quad (1-19)$$

Производная от этой функции формально может быть вычислена обычным порядком, как производная произведения двух функций:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \cdot 1(t) + u(t) \frac{d1(t)}{dt}.$$

Как видим, эта производная будет вычислена, если будет определена производная от единичной ступенчатой функции. Для выполнения этой операции можно ввести в рассмотрение любую непрерывную функцию, имеющую производные любого порядка, но такую, что при соответствующем предельном переходе она стремится к единичной ступенчатой функции [Л. 2]. Можно, например, выбрать функцию

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} at, \quad (1-20)$$

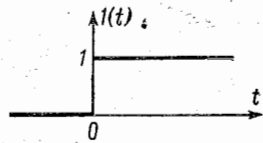


Рис. 1-5.

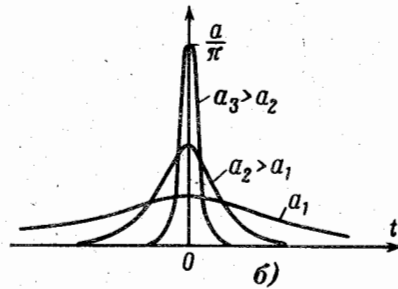
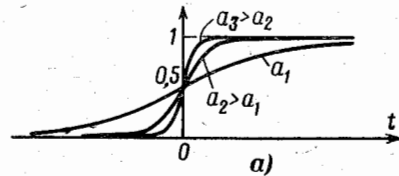


Рис. 1-6.

так как при  $a \rightarrow \infty$  она стремится к единичной ступенчатой функции. Семейство графиков этой функции для нескольких значений  $a$  приведено на рис. 1-6,а. Производная от нее

$$\frac{1}{\pi} \frac{a}{1+a^2 t^2}. \quad (1-21)$$

Ее график представляет собой колоколообразный импульс высотой  $a/\pi$ , площадь которого вне зависимости от величины  $a$  всегда равна единице (рис. 1-6,б). Соответственно производная от единичной ступенчатой функ-

ции есть предел, к которому стремится выражение (1-21) при  $a \rightarrow \infty$ :

$$\frac{d1(t)}{dt} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{a}{1+a^2 t^2}.$$

Очевидно, что она представляет собой бесконечно короткий и бесконечно высокий импульс при  $t=0$ , однако такой, что его площадь равна единице.

Производная от единичной ступенчатой функции получила название дельта-функции. Она обычно обозначается символом

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad (1-22)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1-23)$$

Одно из основных свойств дельта-функции определяется следующим соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \delta(t-t_0) dt = y(t_0), \quad (1-24)$$

где  $\delta(t-t_0)$  — сдвинутая на  $t_0$  вправо дельта-функция ( $t_0$  может быть отрицательным, тогда сдвиг совершается влево). На графиках дельта-функция в дальнейшем будет условно изображаться так, как показано на рис. 1-7. Аналогично вводятся производные от единичной ступенчатой функции более высоких порядков; для этого соответствующее число раз дифференцируется функция (1-20), после чего осуществляется предельный переход, т. е.  $a \rightarrow \infty$ .

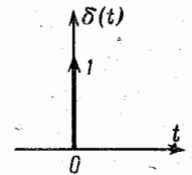


Рис. 1-7.

Итак, если правая часть уравнения динамической системы (1-6) не содержит производных входного сигнала, т. е. равна  $kx(t)$ , то для внезапно приложенного воздействия (1-17) правая часть уравнения (1-9) имеет обычный вид  $ku(t) \cdot 1(t)$ . Если правая часть уравнения (1-6) содержит первую производную от входа  $k[T_x dx(t) dt +$



$+x(t)$ ], то правая часть уравнения (1-9) будет уже определяться выражением

$$f(t) = k \left[ T_x \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right] 1(t) + kT_{xu}(t) \delta(t),$$

т. е. в правой части появляется дополнительная составляющая в виде дельта-функции, умноженной на  $kT_{xu}(0)$ .

В общем случае, когда в правой части уравнения системы имеется  $m$ -я производная от входа, правая часть уравнения (1-9) приобретает следующий вид:

$$f(t) = k \left[ T_{xm}^m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + T_{x1} \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right] 1(t) + f_\delta(t), \quad (1-25)$$

где  $f_\delta(t)$  — линейная комбинация дельта-функции и ее производных различных порядков [до  $(m-1)$ -го включительно] в точке  $t=0$ .

Таким образом, для определения реакции динамической системы на внезапно приложенное воздействие вида (1-17) следует решить уравнение этой системы (1-9) при правой части в виде (1-25) и начальных условиях  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0)$ . Для того, чтобы это решение могло быть осуществлено в рамках приведенной выше схемы, необходимо избавиться от составляющей  $f_\delta(t)$  в правой части уравнения. Эта процедура может быть осуществлена на основе следующих соображений.

Составляющая правой части (1-25)  $f_\delta(t)$  существует лишь бесконечно короткий промежуток времени при  $t=0$ , и ее влияние на выход может проявиться лишь в мгновенном изменении в этот момент начальных значений выходной величины и ее производных. Если до момента появления этого воздействия начальные значения были  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $y^{(n-1)}(0)$ , то в момент, непосредственно следующий за подачей воздействия (этот момент обычно обозначается  $t=+0$ ), значения выходного сигнала и его производных становятся равными некоторым новым значениям, которые можно обозначить как  $y(+0)$ ,  $y'(+0)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(+0)$ . Поэтому при решении уравнения (1-9) можно правую часть брать без составляющей  $f_\delta(t)$ , т. е.

$$f(t) = k \left[ T_{xm}^m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + T_{x1} \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right];$$

но при этом считать начальные условия равными  $y(+0)$ ,  $y'(+0)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(+0)$ . Таким образом, решению самого уравнения (1-9) в этом случае должна предшествовать процедура определения новых начальных условий  $y(+0)$ ,  $y'(+0)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(+0)$ .

Определим, как будет меняться уровень в баке при отключенном регуляторе (см. рис. 1-2,а), если положение клапана на стоке меняется скачком на величину  $u_0$  при условии, что до момента подачи этого воздействия система находилась в состоянии равновесия.

В § 1-2 было найдено линеаризованное уравнение этой системы (1-7):

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_\mu \mu(t).$$

Требуется решить его при  $\mu(t) = u_0 \cdot 1(t)$  и  $y(0) = 0$ . После подстановки  $\mu(t)$  в это уравнение получим:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_\mu u_0.$$

Отсутствие дельта-функции в правой части свидетельствует о том, что при  $t=0$  уровень  $y$  не может измениться скачком, и следовательно,  $y(+0) = y(0) = 0$ .

Характеристическое уравнение системы  $Tp+1=0$  имеет один корень  $p_1 = -1/T$ , и поэтому переходная составляющая решения определяется формулой

$$y_{пер}(t) = C_1 e^{-t/T}.$$

Установившуюся составляющую следует искать в форме правой части, т. е. в виде постоянной величины  $a_0$ . Подставив это значение в исходное уравнение, получим:

$$a_0 = k_\mu u_0.$$

Таким образом, общее решение уравнения определяется формулой

$$y(t) = k_\mu u_0 + C_1 e^{-t/T}.$$

Для определения постоянной  $C_1$  следует подставить в последнее выражение  $t=0$  и  $y(0)=0$ :

$$0 = k_\mu u_0 + C_1,$$

откуда  $C_1 = -k_\mu u_0$ . Окончательно имеем следующее выражение для искомой реакции системы (рис. 1-8):

$$y(t) = k_\mu u_0 (1 - e^{-t/T}).$$

Рассмотрим теперь при тех же условиях процесс изменения притока жидкости в бак. Подставив в уравнение (1-8)  $\mu(t) = u_0 \cdot 1(t)$

и обозначив для общности  $q_{пр}(t) = y(t)$ , получим следующее уравнение:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_q u_0 \cdot 1(t) + k_q T_x u_0 \delta(t),$$

решение которого при нулевом начальном условии  $y(0) = (0)$  дает ответ на поставленную задачу. Если вместо этого уравнения рассматривать уравнение, в правой части которого отсутствует дельта-функция

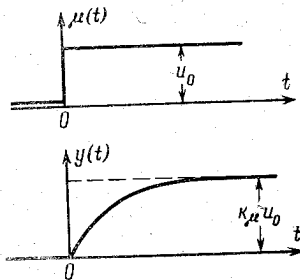


Рис. 1-8.

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_q u_0.$$

то в качестве начального значения должно быть взято значение  $y(+0)$  в момент, непосредственно следующий за посылкой воздействия. Для вычисления  $y(+0)$  проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$T \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dy(t) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t) dt = k_q u_0 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} 1(t) dt + k_q T_x u_0 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt,$$

т. е.

$$\begin{aligned} T y(+\varepsilon) - T y(-\varepsilon) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t) dt &= \\ &= k_q u_0 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} 1(t) dt + k_q T_x u_0. \end{aligned}$$

Устремив теперь  $\varepsilon$  к нулю, получим:

$$T y(+0) - T y(0) = k_q T_x u_0$$

и, следовательно,

$$y(+0) = k_q \frac{T_x}{T} u_0.$$

Общее решение рассматриваемого здесь уравнения было уже найдено в предыдущем примере:

$$y(t) = k_q u_0 + C_1 e^{-t/T}.$$

Подставив  $t = 0$  и  $y(+0) = k_q \frac{T_x}{T} u_0$ , получим:

$$k_q \frac{T_x}{T} u_0 = k_q u_0 + C_1$$

и, следовательно,

$$y(t) = k_q u_0 - \left( k_q u_0 - k_q \frac{T_x}{T} u_0 \right) e^{-t/T} = k_q u_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_x}{T} \right) e^{-t/T} \right].$$

График этого решения приведен на рис. 1-9.

Удобной формой записи дифференциальных уравнений является так называемая операторная форма, когда операция дифференцирования заменяется символом

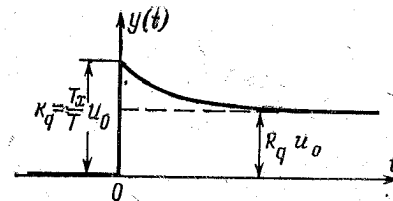


Рис. 1-9.

$d/dt = p$ ,  $d^2/dt^2 = p^2$  и т. д. При такой записи дифференциальное уравнение (1-6) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} T_n^n p^n y(t) + \dots + T_1 p y(t) + y(t) &= \\ &= k [T_{xm}^m p^m x(t) + \dots + T_{x1} p x(t) + x(t)] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} [T_n^n p^n + \dots + T_1 p + 1] y(t) &= \\ &= k [T_{xm}^m p^m + \dots + T_{x1} p + 1] x(t). \end{aligned} \quad (1-26)$$

В свою очередь последняя формула может быть переписана следующим образом:

$$y(t) = W(p) x(t), \quad (1-27)$$

где

$$W(p) = k \frac{T_{xm}^m p^m + \dots + T_{x1} p + 1}{T_n^n p^n + \dots + T_1 p + 1}. \quad (1-28)$$

Эта формула в компактном виде указывает правило, которому необходимо следовать, чтобы получить преобразование сигнала на входе системы в сигнал на выходе, а  $W(p)$  называется оператором динамической

системы. Составление оператора системы по ее дифференциальному уравнению осуществляется в следующем порядке:

1) производные в левой и правой частях уравнения заменяются на  $p$  в степени, равной порядку соответствующей производной;

2) многочлен, полученный из правой части уравнения, представляет собой числитель оператора системы, в многочлен, полученный из левой части, — знаменатель оператора.

Так, дифференциальному уравнению (1-7) по каждому из входных воздействий соответствует оператор

$$W(p) = \frac{k}{T_p + 1} \quad (\text{где } k = k_\mu \text{ или } k_\lambda),$$

а уравнению (1-8) — оператор

$$W(p) = k_q \frac{T_\infty p + 1}{T_p + 1}.$$

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### 2-1. Весовые и переходные характеристики динамических систем

Пусть на вход динамической системы подается произвольное воздействие  $x(t)$  (рис. 2-1,а). Будем интересоваться значением выходной величины этой системы в некоторый произвольный момент времени  $t$ . С этой целью разобьем ось времени на достаточно малые отрезки длительностью  $\Delta\tau$  каждый и построим график новой функции  $\tilde{x}(t)$ , совпадающей с  $x(t)$  в точках разбиения и остающейся постоянной в промежутках между ними (на рис. 2-1,а этот график показан пунктиром). Выбор именно такой аппроксимирующей функции объясняется двумя причинами:

1) замена действительной функции  $x(t)$  приближенной  $\tilde{x}(t)$  может быть осуществлена со сколько угодно высокой точностью, так как при  $\Delta\tau \rightarrow 0$  функция  $\tilde{x}(t)$  стремится к  $x(t)$ :

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = x(t); \quad (2-1)$$

2) приближенная функция  $\tilde{x}(t)$  может рассматриваться как последовательность прямоугольных импульсов длительности  $\Delta\tau$  каждый (это непосредственно видно из рис. 2-1,б), что позволяет вычислить реакцию системы на воздействие  $\tilde{x}(t)$  по известной реакции на прямоугольный импульс.

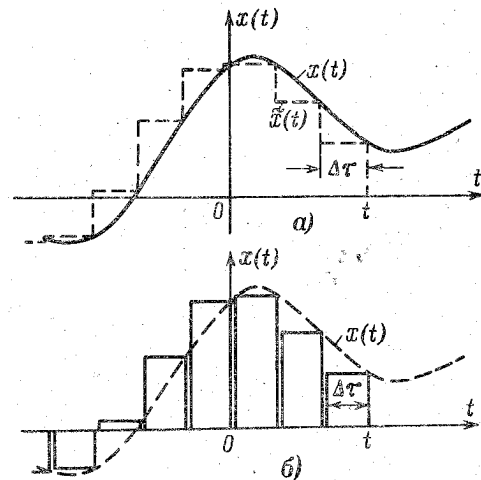


Рис. 2-1.

Значение выходной координаты системы в выбранный момент времени  $t$  может быть приближенно вычислено путем суммирования реакций на отдельные импульсы:

$$y(t) \approx \tilde{w}(0) x(t) \Delta\tau + \tilde{w}(\Delta\tau) x(t - \Delta\tau) \Delta\tau + \dots$$

$$\dots = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{w}(i\Delta\tau) x(t - i\Delta\tau) \Delta\tau,$$

где  $\tilde{w}(t)$  — реакция системы на прямоугольный импульс, имеющий длительность  $\Delta\tau$  и единичную площадь.

Точное решение задачи, очевидно, получим, устремив длительность импульсов к нулю. При таком предельном переходе последовательность прямоугольных импульсов превращается в последовательность дельта-функций площадью  $x(t-\tau) d\tau$  каждая, реакция на прямоугольный

импульс  $\tilde{w}(t)$  — в реакцию на дельта-функцию  $w(t)$ ; интегральная сумма при этом переходит в интеграл

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2-2)$$

Реакция системы  $w(t)$  на воздействие в виде дельта-функции получила название весовой характеристики системы [так как ее значения определяют «веса», с которыми берутся слагаемые в сумме (2-2)].

Весовые характеристики физически реализуемых систем должны удовлетворять очевидному условию:

$$w(t) = 0, \quad t < 0. \quad (2-3)$$

Поэтому значение интеграла (2-2) не изменится, если перенести нижний предел в  $-\infty$  (это часто удобнее при выкладках):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2-4)$$

Операция, определяемая интегралом (2-4), называется сверткой функций  $w(t)$  и  $x(t)$ .

Весовая характеристика динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t).$$

может быть найдена путем решения этого уравнения при  $x(t) = \delta(t)$  и  $y(0) = 0$ , т. е. уравнения

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\delta(t).$$

В соответствии с приведенными в предыдущем параграфе рекомендациями будем решать уравнение

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

при новом начальном условии  $y(+0)$ , значение которого вычислим путем интегрирования обеих частей исходного уравнения в пределах  $\pm \varepsilon$ :

$$T \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dy(t) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t) dt = k \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = k.$$

После предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  найдем  $y(+0) = k/T$ .

Рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет общим решением

$$y(t) = C_1 e^{-t/T}.$$

После подстановки в него  $t=0$  и  $y(+0) = k/T$  найдем  $C_1 = k/T$ . Следовательно, весовая характеристика рассматриваемой системы определяется формулой

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}.$$

График этой характеристики приведен на рис. 2-2,а.

Найдем, используя интеграл (2-4), реакцию рассмотренной системы на воздействие вида

$$x(t) = t \cdot 1(t).$$

График этого воздействия приведен на рис. 2-2,б.

Подставив в интеграл (2-4)  $w(\tau) = \frac{k}{T} e^{-\tau/T}$ ,  $x(t-\tau) = t-\tau$

и учитывая, кроме того, что  $x(t-\tau) = 0$  при  $t-\tau < 0$ , что позволяет положить верхний предел равным  $t$ , получим:

$$y(t) = \frac{k}{T} \int_0^t e^{-\tau/T} (t-\tau) d\tau = \frac{kt}{T} \int_0^t e^{-\tau/T} d\tau - \frac{k}{T} \int_0^t \tau e^{-\tau/T} d\tau = k [t - T(1 - e^{-t/T})] 1(t).$$

График этого решения приведен на рис. 2-2,в.

Дискретно изменяющаяся аппроксимирующая функция  $\tilde{x}(t)$  (рис. 2-1,а) может быть также представлена как сумма ступенчатых функций. Реакция динамической системы на единичное ступенчатое воздействие получила название переходной характеристики системы; в дальнейшем эта характеристика будет обозначаться  $h(t)$ . Между характеристиками  $w(t)$  и  $h(t)$  существует однозначная взаимосвязь, а именно весовая характеристика представляет собой производную от переходной характеристики. Действительно для определения переходной характеристики можно воспользоваться интегралом свертки (2-4), подставив в него  $x(t-\tau) = 1(t-\tau)$ :

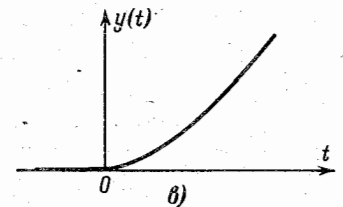
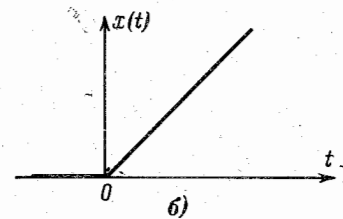
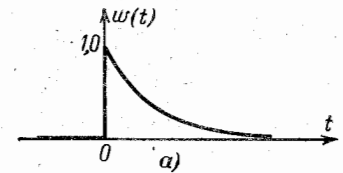


Рис. 2-2.

$$h(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (2-5)$$

а, следовательно,

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2-6)$$

Переходная характеристика рассмотренной в предыдущем примере системы с весовой функцией

$$\omega(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$$

в соответствии с (2-5) будет определяться следующей формулой:

$$h(t) = \frac{k}{T} \int_0^t e^{-\tau/T} d\tau = k(1 - e^{-t/T}).$$

## 2-2. Частотные характеристики динамических систем

Весьма распространенным видом типовых функций, на которые могут быть разложены входные воздействия, являются гармонические колебания.

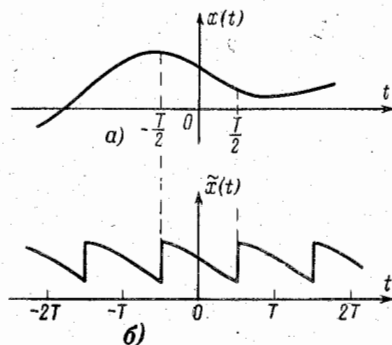


Рис. 2-3.

Пусть функция  $x(t)$  представлена графически (рис. 2-3,а), выберем некоторый интервал времени  $-T/2 < t < T/2$  и периодически продолжим функцию за пределы этого интервала (рис. 2-3,б). Построенная таким образом аппроксимирующая функция  $\tilde{x}(t)$  при выполнении некоторых несущественных для практики

ограничений может быть представлена суммой ряда Фурье:

$$\tilde{x}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \quad (2-7)$$

или

$$\tilde{x}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (2-8)$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2-9)$$

— амплитуда  $k$ -й гармоники;

$$\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k} \quad (2-10)$$

— начальная фаза  $k$ -й гармоники;

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

— основная частота (частота первой гармоники).

Коэффициенты  $c_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) dt; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \cos k\omega_0 t dt; \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \sin k\omega_0 t dt. \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

Таким образом, найти реакцию динамической линейной системы на периодическое воздействие с периодом  $T$  можно по характеристике, определяющей ее реакции на гармонические колебания с частотами  $\omega=0$ ;  $2\pi/T$ ;  $4\pi/T$  и т. д. Поскольку частоты этих колебаний кратны основной частоте  $2\pi/T$ , то при предельном переходе от  $\tilde{x}(t)$  к  $x(t)$ , связанном с беспредельным увеличением  $T$ , интервал между частотами соседних гармоник разложения стремится к нулю. Соответственно для определения реакции системы на произвольное непериодическое воз-

действие  $x(t)$  необходимо располагать характеристиками, позволяющими определять реакцию системы на гармонические воздействия всех частот от  $\omega=0$  до  $\omega \rightarrow \infty$ . Такие динамические характеристики систем получили название частотных характеристик.

Реакция линейной динамической системы на гармоническое колебание является также гармоническим колебанием той же частоты, но другой амплитуды и начальной фазы. При этом следует иметь в виду, что гармоническое колебание, как и всякая периодическая

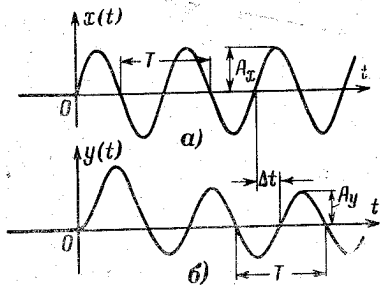


Рис. 2-4.

Амплитудной характеристикой системы называется зависимость амплитуды установившихся колебаний на выходе от частоты, когда на ее вход поданы гармонические колебания единичной амплитуды. Фазовой характеристикой называется зависимость от частоты начальной фазы установившихся колебаний на выходе системы, когда на ее вход поданы гармонические колебания с нулевой начальной фазой.

В дальнейшем амплитудная и фазовая частотные характеристики будут обозначаться соответственно  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

Частотные характеристики динамической системы могут быть определены как экспериментально, так и аналитически по дифференциальному уравнению системы. В первом случае на вход системы, начиная с некоторого момента  $t=0$ , подается воздействие, которое при  $t \geq 0$  совпадает с гармоническими колебаниями некоторой фиксированной частоты  $\omega$  (рис. 2-4,а). Выждав пока

функция времени, не имеет «начала» и, следовательно, в реакции системы на подобного рода воздействие будет отсутствовать переходная составляющая. Соответственно для определения реакции системы на гармоническое колебание произвольной частоты необходимо располагать двумя частотными характеристиками этой системы: амплитудной и фазовой.

на выходе системы закончится переходный процесс (рис. 2-4,б), производят регистрацию амплитуды  $A_y$  выходных колебаний, а также сдвиг по времени  $\Delta t$  между выходными и входными колебаниями. Значения амплитудной и фазовой характеристик системы для частоты, на которой проводился эксперимент, вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{A_y}{A_x}; \\ \varphi(\omega) &= \frac{2\pi}{T} \Delta t = \omega \Delta t. \end{aligned} \right\} (2-12)$$

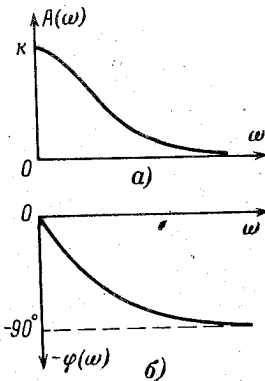


Рис. 2-5.

Для определения частотных характеристик по дифференциальному уравнению достаточно найти установившуюся составляющую решения этого уравнения при  $x(t)$ , заданном в виде гармонического колебания единичной амплитуды и нулевой фазы.

Например, для динамической системы, поведение которой определяется дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

частотная характеристика определяется установившейся составляющей решения уравнения

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cos \omega t,$$

которую следует искать в виде гармоники

$$y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

Для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  подставим это выражение в уравнение и приравняем коэффициенты при синусной и косинусной составляющих

$$\left. \begin{aligned} -T a \omega + b &= 0; \\ T b \omega + a &= k. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$a = k \frac{1}{1 + T^2 \omega^2}; \quad b = k \frac{T \omega}{1 + T^2 \omega^2},$$



т. е. установившиеся колебания на выходе будут определяться выражением

$$y(t) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2} \sin \omega t.$$

Напомним, что существует соотношение

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t,$$

т. е. полученная формула для  $y(t)$  может быть также записана следующим образом:

$$y(t) = A_y(\omega) \cos[\omega t + \varphi_y(\omega)],$$

где

$$A_y(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$$

$$\varphi_y(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} = -\operatorname{arctg} T\omega.$$

Эти формулы определяют амплитудную (рис. 2-5,а) и фазовую (рис. 2-5,б) частотные характеристики системы.

### 2-3. Преобразование Фурье и Лапласа

С разложением функций на сумму элементарных гармоник тесно связано разложение на сумму элементарных комплексных показательных функций вида  $Ae^{j\omega t}$  [Л. 3]. Такое разложение в силу присущих ему практически важных преимуществ получило чрезвычайно широкое применение при инженерных расчетах.

Воспользовавшись известной формулой Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (2-13)$$

из которой следует, что

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \\ \sin \omega t &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

можно переписать ряд Фурье (2-7) в виде

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{X}(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}, \quad (2-15)$$

где

$$\bar{X}(jk\omega_0) = \frac{T}{2} (a_k - jb_k).$$

Подставив в последнюю формулу выражения (2-11) и воспользовавшись формулами (2-14), можно получить:

$$\bar{X}(jk\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (2-16)$$

Если  $\tilde{x}(t)$  представляет собой периодическое продолжение непериодической функции  $x(t)$ , то для получения разложения функции  $x(t)$  следует в формуле (2-15) устремить  $T$  к бесконечности. В результате такого предельного перехода получается интеграл:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2-17)$$

Формула (2-16) с учетом (2-17) приобретает следующий вид:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2-18)$$

Формулы (2-18) и (2-17) определяют прямое и обратное преобразования Фурье функции вещественного переменного (оригинала)  $x(t)$  в функцию комплексного переменного (изображение)  $X(j\omega)$ . Как следует из (2-17), непериодическая функция вещественного переменного может быть представлена в виде суммы элементарных бесконечных малых по модулю комплексных показательных функций вида

$$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega e^{j\omega t}. \quad (2-19)$$

Каждая из этих элементарных функций, взятая отдельно от других, не имеет физического толкования. Однако в разложении (2-17) каждой такой функции можно найти другую, отличающуюся от нее лишь знаком при  $\omega$ . Пара таких функций в сумме образует вещественную гармонику частоты  $\omega$ . Модуль  $X(j\omega)$  характеризует вес амплитуды такой гармоники в общем спектре разложения, а ее аргумент — начальную фазу; поэтому  $X(j\omega)$  называется также комплексным спектром или просто спектром функции  $x(t)$ .

Применяя обозначение  $p=j\omega$ , формулы (2-17) и (2-18) можно представить в другом виде:

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt; \quad (2-20)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (2-21)$$

Формула прямого преобразования Фурье (2-18) непосредственно применима лишь к функциям  $x(t)$ , удовлетворяющим условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (2-22)$$

Однако путем использования специальных вычислительных приемов класс функций, для которых может быть найдено изображение по Фурье, может быть значительно расширен. Достигается это путем предварительного умножения  $x(t)$  на специально подобранный множитель сходимости. После вычисления изображения влияние этого множителя на результат устраняется применением соответствующего предельного перехода. Так, для односторонних функций, т. е. функций, удовлетворяющих условию  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ , в качестве такого множителя обычно выбирается функция  $e^{-\sigma t}$ , где  $\sigma$  — положительное число.

В этом случае формула (2-18) приобретает следующий вид:

$$X_{\sigma}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt. \quad (2-23)$$

После определения  $X_{\sigma}(j\omega)$  изображение по Фурье функции  $x(t)$  отыскивается с помощью предельного перехода:

$$X(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} X_{\sigma}(j\omega). \quad (2-24)$$

Найдем изображение по Фурье односторонней линейной функции  $x(t) = t \cdot 1(t)$  (см. рис. 2-2,б).

Поскольку эта функция не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости (2-22), будем искать вначале изображение функции  $x_{\sigma}(t) = t e^{-\sigma t} \cdot 1(t)$ . Подстановка этой функции в формулу прямого преобразования (2-20) дает:

$$X_{\sigma}(p) = \int_0^{\infty} t e^{-\sigma t} e^{-pt} dt = \frac{1}{(\sigma + p)^2}.$$

Устремив в этом выражении  $\sigma$  к нулю, окончательно получим

$$X(p) = \frac{1}{p^2} \text{ или } X(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2}.$$

Применение подобного приема позволяет вычислить спектры практически всех воздействий, представляющих интерес при исследовании систем автоматического регулирования производственных процессов.

Для того чтобы избежать добавочной операции по вычислению предела (2-23), можно включить  $\sigma$  в ядро преобразования, т. е. обозначить через  $p$  комплексную переменную  $\sigma + j\omega$ . Формула (2-20) в этом случае будет определять прямое преобразование Лапласа. Хотя между преобразованиями Фурье и Лапласа имеются довольно существенные принципиальные различия, формулы и техника вычислений остаются одинаковыми, тем более что при инженерных расчетах вычисление изображений по формуле (2-20) обычно не производится, так как к настоящему времени составлены достаточно полные таблицы соответствий между оригиналами и их изображениями. Поэтому в дальнейшем формула (2-20) будет пониматься как преобразование Фурье. Обусловлено это тем, что преобразование Фурье имеет прозрачный физический смысл (характеризует разложение функции на гармонические составляющие) и поэтому позволяет получать наглядную трактовку целого ряда явлений, протекающих в системах регулирования.

В табл. 2-1 приведены соответствия между оригиналами и их изображениями для нескольких односторонних функций, часто употребляемых при расчетах систем регулирования. Подробные таблицы соответствий можно найти, например, в [Л. 3].

Таблицы преобразований односторонних функций могут быть также использованы и для вычисления изображений двусторонних функций.

Таблица 2-1

$x(t)$	$X(p)$
$1(t) t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$1(t) e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$1(t) e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$1(t) t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 p}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$
$1(t) t \cos \omega_0 t$	$\frac{p^2 - \omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$

Действительно, двусторонняя функция  $x(t)$  может быть представлена в виде суммы двух односторонних функций: левой  $x^-(t)$  и правой  $x^+(t)$ :

$$x(t) = x^-(t) + x^+(t), \quad (2-25)$$

где

$$x^-(t) = \begin{cases} x(t), & t < 0; \\ 0, & t > 0; \end{cases}$$

$$x^+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ x(t), & t > 0. \end{cases}$$

Соответственно изображение двусторонней функции  $x(t)$  может быть представлено следующим образом:

$$X(p) = \int_{-\infty}^0 x^-(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} x^+(t) e^{-pt} dt.$$

Заменим в первом интеграле знак независимой переменной  $t$  на обратный:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x^-(-t) e^{pt} dt + \int_0^{\infty} x^+(t) e^{-pt} dt.$$

Функция  $x^-(-t)$  является зеркальным отражением относительно оси ординат функции  $x^-(t)$ . Обозначив изображение этой функции как  $X^-(p)$ , получим следующую запись последней формулы:

$$X(p) = X^-(-p) + X^+(p), \quad (2-26)$$

где  $X^+(p)$  — изображение правой части  $x(t)$ . Итак, порядок определения изображения двусторонней функции может быть принят следующим:

1) записываются выражения для двух односторонних правых функций  $x^+(t)$  и  $x^-(-t)$ ;

2) определяются односторонние изображения этих функций  $X^+(p)$  и  $X^-(p)$ ;

3) знак  $p$  в  $X^-(p)$  меняется на обратный, после чего  $X^-(-p)$  и  $X^+(p)$  складываются.

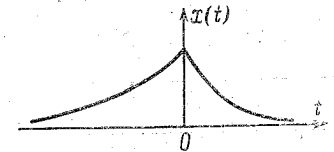


Рис. 2-6.

На практике часто приходится встречаться с двусторонними четными функциями, т. е. функциями, удовлетворяющими условию:

$$x(t) = x(-t). \quad (2-27)$$

Для этих функций  $x^-(-t) = x^+(t)$  и  $X^-(p) = X^+(p)$ , поэтому формула (2-26) может быть переписана:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= X^-(-j\omega) + X^+(j\omega) = \\ &= X^+(-j\omega) + X^+(j\omega) = 2\operatorname{Re} X^+(j\omega), \end{aligned} \quad (2-28)$$

где  $\operatorname{Re}$  — символ вещественной части.

Таким образом, изображение четной функции является не комплексной, а вещественной функцией  $\omega$ .

В качестве примера определим изображение функции (рис. 2-6)

$$x(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t < 0; \\ e^{-2\alpha t}, & t > 0. \end{cases}$$

Для этой функции  $x^-(-t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$  и  $x^+(t) = e^{-2\alpha t} \cdot 1(t)$ .

Поэтому  $X^-(p) = \frac{1}{\alpha + p}$  и  $X^+(p) = \frac{1}{2\alpha + p}$  и, следовательно,

$$X(p) = \frac{1}{\alpha - p} + \frac{1}{2\alpha + p} = \frac{3\alpha}{2\alpha^2 - \alpha p - p^2}.$$

В табл. 2-2 приведены изображения нескольких часто употребляемых при исследовании автоматических систем регулирования двусторонних функций.

Таблица 2-2

$x(t)$	$X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-\alpha t } \cos \omega_0 t$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2}$
$e^{-(\alpha t)^2} \cos \omega_0 t$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[ e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega - \omega_0)^2} + e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega + \omega_0)^2} \right]$

#### 2-4. Амплитудно-фазовые характеристики динамических систем

Поскольку преобразование Фурье позволяет представить входное воздействие динамической системы в виде суммы элементарных комплексных показательных функций (2-19), рассмотрим вычисление реакции линейной динамической системы  $y(t)$  на воздействие вида  $x(t) = e^{pt}$  при фиксированном  $p = j\omega$ . Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{de^{pt}}{dt} &= pe^{pt}; \\ \frac{d^2e^{pt}}{dt^2} &= p^2e^{pt}; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

то правая часть уравнения системы (1-6) после подстановки в нее  $e^{pt}$  будет с точностью до комплексного сомножителя, определяемого видом правой части уравнения, также равна  $e^{pt}$ . Таким образом, отыскание реакции системы на рассматриваемое воздействие сво-

дится к отысканию решения уравнения (1-6), когда его правая часть линейно зависит от  $e^{pt}$ . Заметим, что  $e^{pt}$  при  $p = j\omega$  есть периодическая функция  $t$ . Она описывает процесс, начало которого уходит в бесконечно далекое прошлое, и, следовательно, в решении уравнения будет отсутствовать переходная составляющая. Следовательно, решение следует искать в виде функции

$$\bar{y}(t) = W(p)e^{pt}, \quad (2-30)$$

подстановка которой в уравнение (1-6) обращает его в тождество. Выполнив эту подстановку, получим:

$$W(p) = \frac{T_{x,m}^m p^m + T_{x,m-1}^{m-1} p^{m-1} + \dots + T_{x,1} p + 1}{T_n^n p^n + T_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \dots + T_1 p + 1}. \quad (2-31)$$

Реакция системы на элементарное воздействие (2-19) будет определяться выражением

$$\frac{1}{2\pi j} X_x(p) W(p) e^{pt} dp, \quad (2-32)$$

а полная реакция системы на воздействие  $x(t)$  будет равна сумме этих элементарных реакций, т. е. будет определяться интегралом

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X(p) W(p) e^{pt} dp. \quad (2-33)$$

Функция  $y(t)$  выражается через свой спектр  $Y(p)$  аналогично (2-21)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} Y(p) e^{pt} dp. \quad (2-34)$$

Сравнивая последние два выражения, легко прийти к выводу, что для получения спектра выходной величины системы  $Y(p)$  достаточно умножить спектр входного сигнала  $X(p)$  на  $W(p)$ :

$$Y(p) = W(p)X(p). \quad (2-35)$$

Комплексная функция  $W(p)$  обладает той замечательной особенностью, что она объединяет в себе две рассмотренные ранее частотные характеристики систе-

мы: амплитудную  $A(\omega)$  и фазовую  $\varphi(\omega)$ , а точнее, модуль  $W(p)$  совпадает с амплитудной характеристикой системы, а аргумент — с фазовой:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2-36)$$

Действительно, при подаче на вход системы гармонического воздействия  $\cos \omega t$  ее выходная величина будет определяться через амплитудную и фазовую частотные характеристики системы следующим образом:

$$y(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]. \quad (2-37)$$

С другой стороны, вычисление этой реакции может быть также осуществлено с помощью характеристики  $W(p)$ , для чего следует воспользоваться формулами (2-14) и (2-30):

$$y(t) = \frac{1}{2} [W(j\omega) e^{j\omega t} + W(-j\omega) e^{-j\omega t}]. \quad (2-38)$$

Подставив в (2-38) выражение (2-36), приходим к (2-37).

По указанной причине характеристика  $W(p)$  получила название амплитудно-фазовой характеристики системы.

Удобство использования амплитудно-фазовой характеристики  $W(p)$  не только в том, что она объединяет в себе две характеристики: амплитудную и фазовую, но и в том, что ее вычисление по заданному дифференциальному уравнению осуществляется с помощью предельно простых формальных операций, так как выражение для этой характеристики при  $p = j\omega$  совпадает с выражением для оператора системы (1-28).

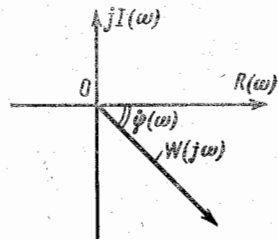


Рис. 2-7.

При фиксированном значении частоты  $\omega$  характеристика  $W(j\omega)$  может быть изображена в комплексной плоскости в виде вектора (рис. 2-7), длина которого равна значению амплитудной характеристики для частоты  $\omega$ , а угол, образованный этим вектором с положительной вещественной полуосью, — фазовой характеристике. При изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  конец вектора вычерчивает кривую, называемую годографом амплитудно-фазовой характеристики.

Следует обратить внимание, что при отрицательных значениях  $\omega$  годограф амплитудно-фазовой характеристики является зеркальным отображением относительно вещественной оси годографа для положительных  $\omega$ . Поэтому при практических расчетах обычно ограничиваются построением ветви годографа амплитудно-фазовой характеристики системы, соответствующей лишь положительным значениям  $\omega$ .

Амплитудно-фазовая частотная характеристика динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

определяется формулой

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tp + 1} \Big|_{p=j\omega} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} e^{-j \arctg T\omega}.$$

Годограф этой характеристики показан на рис. 2-8 (графики амплитудной и фазовой частотных характеристик рассматриваемой системы см. на рис. 2-5).

Амплитудно-фазовая характеристика системы может быть также вычислена по ее весовой характеристике. Поскольку изображение дельта-функции равно единице (т. е. составляющие гармоники, на которые можно разложить дельта-функцию, имеют на всех частотах одинаковую интенсивность), изображение реакции системы на такое воздействие, как это следует из (2-35), будет совпадать с амплитудно-фазовой характеристикой системы. Иначе говоря, амплитудно-фазовая характеристика системы представляет собой изображение по Фурье весовой характеристики этой системы.

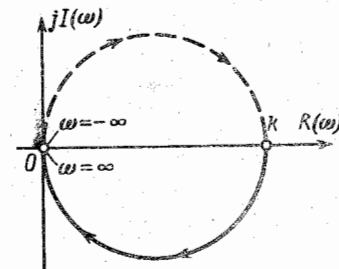


Рис. 2-8.

Весовая характеристика рассмотренной в предыдущем примере системы была найдена в примере § 2-1:

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}.$$

Подставив эту формулу в (2-20), получим выражение для амплитудно-фазовой характеристики системы:

$$W(p) = \frac{k}{T} \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-pt} dt = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика может быть записана не только в показательной форме (2-36), но и в виде суммы вещественной и мнимой составляющих, т. е.

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega). \quad (2-39)$$

Характеристики  $R(\omega)$  и  $I(\omega)$  получили название вещественной и мнимой частотных характеристик системы.

В дальнейшем чаще всего придется иметь дело с амплитудно-фазовыми характеристиками динамических систем; поэтому, если не будет специальных оговорок, эти характеристики будут для сокращения записи называться просто частотными характеристиками систем.

### 2-5. Вычисление реакции системы на заданное воздействие с помощью преобразования Фурье

Из формул (2-34) и (2-35) следует, что для определения реакции динамической системы  $y(t)$  на заданное входное воздействие  $x(t)$  при условии, что она находилась в покое, необходимо выполнить такие операции:

- 1) определить (обычно с помощью таблиц соответствий) изображение входного воздействия  $X(p)$ ;
- 2) определить оператор системы  $W(p)$ ;
- 3) по формуле (2-35) найти изображение выходной величины системы  $Y(p)$ ;
- 4) определить оригинал  $y(t)$ , соответствующий изображению  $Y(p)$ .

Последняя операция также может быть выполнена с помощью таблиц соответствий, но пользоваться ими следует в обратном порядке. Поскольку изображение  $Y(p)$  обычно получается в виде дробно-рациональной функции

$$Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (2-40)$$

(где  $B(p)$  и  $A(p)$  — многочлены от  $p$ ), то, чтобы воспользоваться таблицами соответствий, его необходимо представить в виде суммы простых дробей. В частности, если уравнение

$$A(p) = 0 \quad (2-41)$$

имеет простые корни, выражение (2-40) может быть представлено следующим образом:

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{p - p_k}, \quad (2-42)$$

где  $p_k$  — корень уравнения (2-41);  $C_k$  — постоянный коэффициент, вычисление которого можно производить по формуле

$$C_k = \frac{B(p_k)}{A'(p_k)}, \quad (2-43)$$

в которой

$$A'(p_k) = \left. \frac{dA(p)}{dp} \right|_{p=p_k}. \quad (2-44)$$

В случае невысокого порядка знаменателя  $A(p)$  формулы (2-40) разложение на простые дроби может быть осуществлено путем приведения (2-42) к общему знаменателю с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $p$  в числителе.

Следует подчеркнуть, что при решении дифференциальных уравнений с использованием преобразований Фурье и Лапласа отпадает необходимость в предварительном вычислении начальных скачков выходной величины и ее производных (которые могут иметь место, как об этом уже говорилось ранее, в случае, когда в правой части уравнения имеются производные от входного воздействия).

Найдем, используя преобразование Фурье, реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t),$$

на воздействие  $x(t) = u_0 \cdot 1(t)$ , если до момента приложения этого воздействия система находилась в покое.

Частотная характеристика системы

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

а изображение входного воздействия (см. табл. 2-1):

$$X(p) = \frac{u_0}{p}.$$

Следовательно, изображение выходной величины будет определяться формулой

$$Y(p) = \frac{ku_0}{p(Tp + 1)}.$$



Представим это выражение в виде суммы

$$\frac{ku_0}{p(Tp+1)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{Tp+1}$$

и приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{ku_0}{p(Tp+1)} = \frac{C_1Tp + C_1 + C_2p}{p(Tp+1)}$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях  $p$ , получим:

$$0 = C_1T + C_2; \quad ku_0 = C_1,$$

т. е.

$$C_1 = ku_0; \quad C_2 = -ku_0T.$$

Поэтому выражение для  $Y(p)$  может быть переписано следующим образом:

$$Y(p) = \frac{ku_0}{p} - \frac{ku_0T}{Tp+1} = ku_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/T} \right).$$

Обратившись теперь к табл. 2-1, окончательно получим:

$$y(t) = ku_0 (1 - e^{-t/T}).$$

Найдем, как при тех же условиях будет меняться выход системы, имеющей дифференциальное уравнение, в правой части которого имеется производная от входного воздействия:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[ T_x \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right].$$

Частотная характеристика системы имеет вид:

$$W(p) = k \frac{T_x p + 1}{Tp + 1},$$

и поэтому изображение выходной величины при ступенчатом изменении входного воздействия будет определяться формулой

$$Y(p) = k \frac{(T_x p + 1) u_0}{(Tp + 1) p} = ku_0 \left[ \frac{T_x/T}{p+1/T} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/T} \right].$$

По таблице соответствий находим:

$$y(t) = ku_0 [1 - (1 - T_x/T) e^{-t/T}].$$

Эти результаты совпадают с результатами, которые были получены ранее в примерах § 1-3.

## 2-6. Динамические характеристики элементарных динамических звеньев

Всякая система представляет собой совокупность взаимодействующих элементов, причем в основу расчленения системы на отдельные элементы могут быть положены различные признаки. Если в качестве основного признака такого расчленения принимается условие однонаправленной передачи воздействий вне связи с функциональным назначением каждого элемента и его конструктивными особенностями, то элементы системы принято называть динамическими звеньями системы, а схему взаимодействия звеньев — структурной схемой системы. Основной характеристикой звена, очевидно, является способ преобразования им входных воздействий, определяемый видом его дифференциального уравнения или динамических характеристик.

Среди всего возможного разнообразия звеньев особого внимания заслуживают так называемые элементарные или типовые звенья, т. е. звенья, порядок дифференциальных уравнений которых не превышает двух. Объясняется это тем, что такие звенья оказываются наиболее простыми для технической реализации, и поэтому отдельные конструктивные элементы автоматических регуляторов обычно описываются именно такими уравнениями. Кроме того, путем соответствующих преобразований любая сложная динамическая система может быть представлена как совокупность элементарных звеньев, что широко используется, например, при математическом моделировании. Наконец, с помощью подходящих комбинаций характеристик элементарных динамических звеньев обычно может быть осуществлена приближенная аппроксимация реальных характеристик исследуемых объектов и систем регулирования.

В зависимости от порядка старших производных в левой и правой частях уравнения различают следующие виды линейных элементарных динамических звеньев.

1. Безынерционное (статическое) звено:

$$y(t) = kx(t). \quad (2-45)$$

2. Интегрирующее звено:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_x x(t) \quad (2-46)$$

(заметим, что в размерность коэффициента передачи этого звена  $k_d$  входит время).

3. Дифференцирующее звено:

$$y(t) = k_d \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2-47)$$

Поскольку такая система точно реализована быть не может (из-за того, что порядок производной в правой части ее уравнения превышает порядок производной в левой), при практической реализации операции дифференцирования используется реальное дифференцирующее звено:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kT \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2-48)$$

Это уравнение переходит в (2-47) при  $k \rightarrow \infty$  и  $T \rightarrow 0$ , если  $k_d = kT$ ; в размерность коэффициента передачи  $k_d$  входит время.

4. Инерционное звено первого порядка:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \quad (2-49)$$

5. Интегро-дифференцирующее звено первого порядка:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[ T_b \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right]. \quad (2-50)$$

6. Инерционное звено второго порядка:

$$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \quad (2-51)$$

При  $T_2 > 0,5T_1$  корни характеристического уравнения такой системы становятся сопряженными комплексными и переходная составляющая решения уравнения становится колебательной; соответственно и само звено в этом случае называется колебательным.

Операторы, переходные и частотные характеристики перечисленных элементарных звеньев приведены в табл. 2-3.

В заключение отметим, что обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (1-6) описываются динамические системы с сосредоточенными параметрами. Однако промышленные объекты регулирования зачастую содержат распределенные параметры, что требует

для их математического описания аппарата дифференциальных уравнений в частных производных. Соответственно операторы таких систем представляют собой не дробно-рациональные, а трансцендентные функции  $p$ . В регулируемых объектах часто также наблюдается транспортное запаздывание в передаче воздействий, связанное с конечной скоростью перемещения потоков вещества и энергии. Элементарное звено, реализующее

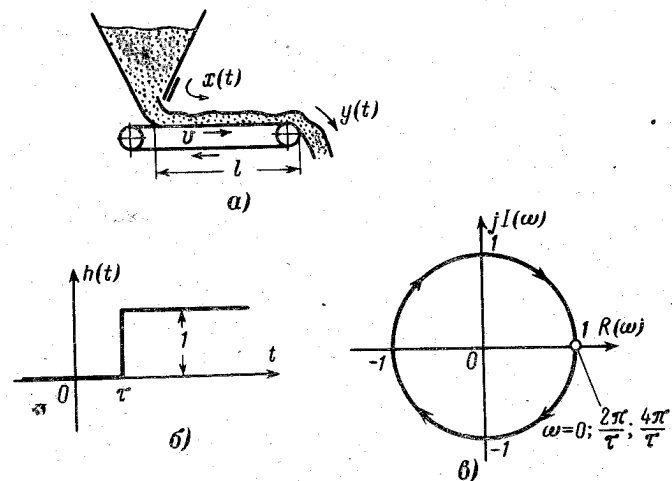


Рис. 2-9.

задержку или запаздывание сигнала на некоторое постоянное время  $\tau$ , называемое временем транспортного запаздывания или просто временем запаздывания, описывается уравнением

$$y(t) = x(t - \tau). \quad (2-52)$$

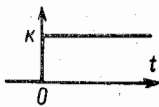
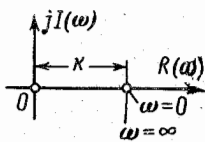

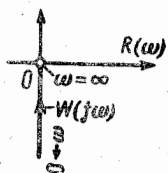
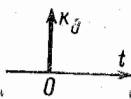
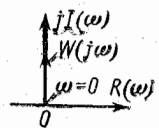
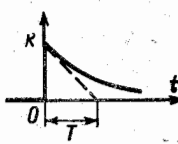
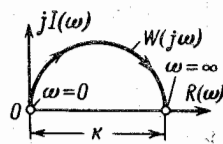
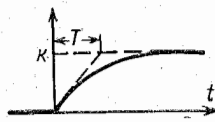
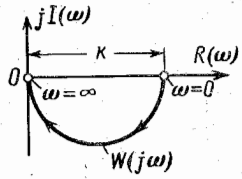
Примером такого звена может служить транспортер для перемещения сыпучего вещества, который схематически изображен на рис. 2-9,а. Очевидно, что изменение количества вещества на выходе транспортера в точности копирует изменение количества на его входе, однако происходит оно с запаздыванием, зависящим от длины транспортера  $l$  и скорости перемещения его ленты  $v$ :

$$\tau = \frac{l}{v}.$$

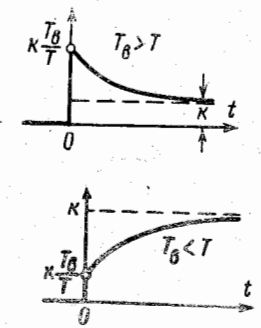
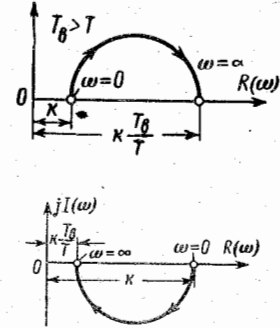
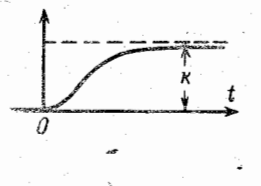
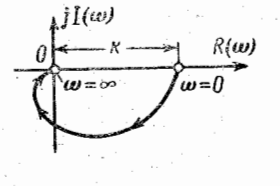
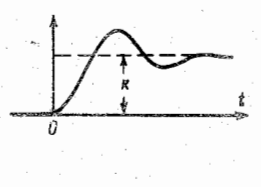
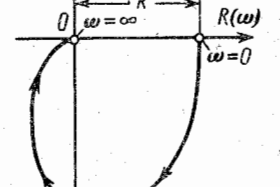
Элементарные

№ п/п.	Наименование звена	Оператор $W(p)$	Переходная харак
			Аналитическое выражение
1	Безынерционное	$k$	$k \cdot 1(t)$
2	Интегрирующее	$\frac{k_{\text{И}}}{p}$	$k_{\text{И}} t \cdot 1(t)$
3	Идеальное дифференцирующее	$k_{\text{Д}} p$	$k_{\text{Д}} \delta(t)$
4	Реальное дифференцирующее	$\frac{kTp}{Tp+1}$	$ke^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$
5	Инерционное (апериодическое первого порядка)	$\frac{k}{Tp+1}$	$k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$

звенья

Характеристика $h(t)$	Амплитудно-фазовая характеристика $A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	
	График	График
	$k$	
	$\frac{k_{\text{И}}}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	
	$k_{\text{Д}} \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$	
	$\frac{kT\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \times e^{-j \arctg \frac{1}{T\omega}}$	
	$\frac{ke^{-j \arctg T\omega}}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	

№ п/п.	Наименование звена	Оператор $W(p)$	Переходная харак	
			Аналитическое выражение	
6	Интегро-дифференцирующее	$k \frac{T_B p + 1}{T p + 1}$	$k \left[ 1 + \left( \frac{T_B}{T} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times e^{-t/T} \right] \cdot 1(t)$	
7	Инерционное (апериодическое) второго порядка	$\frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ $T_2 < 0,5 T_1$	$k \left[ 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 t} \right] \cdot 1(t)$ $\alpha_{1,2} = \frac{T_1}{2T_2} \pm$ $\pm \sqrt{\frac{T_2^2}{4T_2^4} - \frac{1}{T_2^2}}$	
8	Колебательное второго порядка	$\frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ $T_2 > 0,5 T_1$	$k \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \omega t \right) \right] \cdot 1(t)$ $\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \frac{T_1^2}{4T_2^4}}$	

теристика $h(t)$	Амплитудно-фазовая характеристика $A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	
	График	Аналитическое выражение
	$k \sqrt{\frac{1 + T_B^2 \omega^2}{1 + T^2 \omega^2}} \times$ $e^{j \arctg \frac{(T_B - T) \omega}{1 - T_B T \omega^2}}$	
	$\frac{-j \arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}}{k e}$	
	$\frac{1}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}$	

Переходная характеристика запаздывающего звена (рис. 2-9,б) определяется, очевидно, формулой

$$h(t) = 1(t - \tau). \quad (2-53)$$

Подставив производную в формулу прямого преобразования Фурье (2-20), получим следующее выражение для его оператора и частотной характеристики:

$$W(p) = e^{-\tau p}. \quad (2-54)$$

Годограф этой характеристики показан на рис. 2-9,в. Особенностью этой характеристики является ее периодичность (период  $\omega_0 = 2\pi/\tau$ ).

### ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## ЗАМКНУТЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 3-1. Типовые структурные схемы систем

Звенья в системах могут соединяться самым различным образом. Тем не менее среди всего разнообразия их соединений можно указать на относительно небольшое число так называемых типовых соединений.

В зависимости от способа соединения звеньев различаются разомкнутые и замкнутые системы или системы с обратными связями. В первых

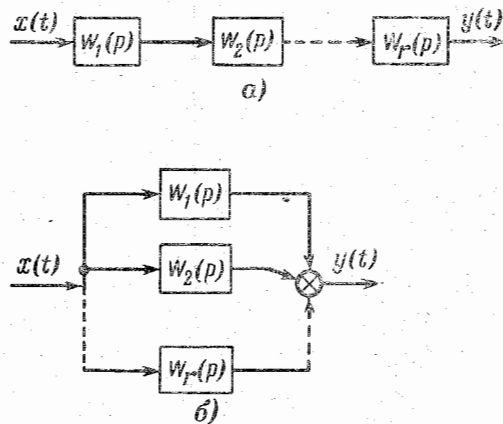


Рис. 3-1.

выход системы не оказывает влияния на ее вход, во вторых через канал обратной связи сигнал с выхода вновь подается на вход системы.

В разомкнутых системах звенья могут соединяться последовательно (рис. 3-1,а) или параллельно (рис. 3-1,б). Естественно, могут встретиться и смешанные случаи, когда используется как последовательное, так и параллельное включение звеньев.

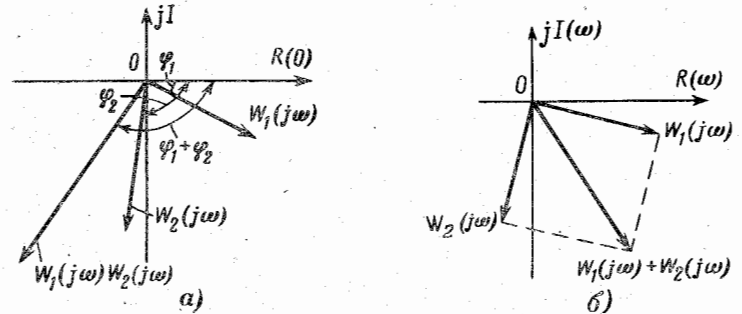


Рис. 3-2.

Как легко видеть, оператор системы из последовательно включенных  $r$  звеньев равен произведению операторов отдельных звеньев

$$W(p) = \prod_{k=1}^r W_k(p). \quad (3-1)$$

а оператор параллельного соединения равен сумме операторов звеньев

$$W(p) = \sum_{k=1}^r W_k(p). \quad (3-2)$$

Соответственно, если частотные характеристики заданы их годографами (аналитическое выражение для которых может оставаться неизвестным), указанные операции могут осуществляться графически: при перемножении векторов модули умножаются, углы складываются (рис. 3-2,а); при суммировании векторов пользуются правилом параллелограмма (рис. 3-2,б).

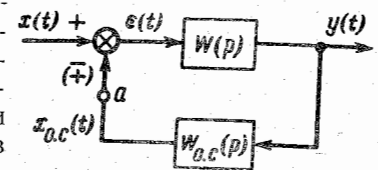


Рис. 3-3.

Структурная схема замкнутой системы с одним каналом обратной связи приведена на рис. 3-3. Здесь выход системы  $y(t)$  через обратную связь, в канале которой может находиться звено обратной связи, осуществляющее то или иное преобразование в соответствии с оператором  $W_{o.c}(p)$ , вновь подается на вход системы и суммируется с входным воздействием  $x(t)$ . В зависимости от знака, с которым входит сигнал обратной связи в эту сумму, различают отрицательную (сигнал вычитается из входного сигнала) и положительную (сигнал складывается с входным) обратные связи.

Для системы с отрицательной обратной связью имеет место следующая система уравнений, определяющая сигналы на выходах ее элементов:

$$y(t) = W(p)[x(t) - x_{o.c}(t)];$$

$$x_{o.c}(t) = W_{o.c}(p)y(t).$$

Исключив отсюда  $x_{o.c}(t)$ , получим:

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)W_{o.c}(p)} x(t),$$

т. е. оператор и частотная характеристика замкнутой системы определяются формулой

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W_{p.c}(p)}, \quad (3-3)$$

где  $W_{p.c}(p) = W(p)W_{o.c}(p)$  — оператор разомкнутой системы, соответствующий последовательному соединению звеньев прямого канала и обратной связи (получаемому при размыкании контура системы, например в точке  $a$ ).

Заметим, что знаменатель последнего выражения при некоторой фиксированной частоте  $\omega$  есть вектор, представляющий собой разность вектора  $W_{p.c}(j\omega)$  и вектора единичной длины, проведенного вдоль отрицательной вещественной полуоси, так как

$$1 + W_{p.c}(j\omega) = W_{p.c}(j\omega) - (-1).$$

Поэтому, если частотные характеристики звеньев системы заданы графически, следует вначале построить характеристику разомкнутого контура как характеристику двух последовательно включенных звеньев  $W(j\omega)$

и  $W_{o.c}(p)$ , после чего разделить вектор  $W(j\omega)$  на вектор, проведенный из точки  $(-1; j0)$  к характеристике разомкнутого контура  $W_{p.c}(j\omega)$  (на рис. 3-4 эти построения показаны для случая  $W_{o.c}(p) = 1$ ).

Замкнутые системы играют важную роль в управлении: практически любая система управления недетерминированным объектом должна относиться именно к этому классу систем (см., например, схему на рис. 1-2, б). Действительно, случайный характер поведения объекта не позволяет заранее рассчитать управляющие воздействия, которые необходимо подавать на его входы, и поэтому систему управления приходится снабжать автоматическими регуляторами, управляющими объектом на основе оперативной информации о текущем значении его регулируемых величин.

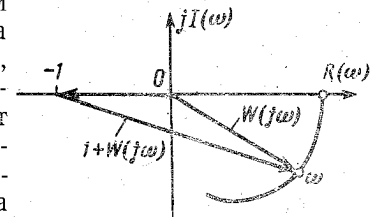


Рис. 3-4.

Обратим внимание на одно замечательное свойство систем с обратными связями. Если оператор звена в прямой цепи передачи воздействий системы с отрицательной обратной связью (см. рис. 3-3) представить в виде произведения

$$W(p) = k_1 W_1(p), \quad (3-4)$$

где  $k_1$  — коэффициент передачи этого звена, то формулу для оператора замкнутой системы (3-3) можно переписать следующим образом:

$$\Phi(p) = \frac{k_1 W_1(p)}{1 + k_1 W_1(p) W_{o.c}(p)} = \frac{W_1(p)}{\frac{1}{k_1} + W_1(p) W_{o.c}(p)}.$$

Устремив теперь коэффициент передачи  $k_1$  к бесконечности, получим:

$$\Phi(p) = \frac{1}{W_{o.c}(p)}, \quad (3-5)$$

т. е. при достаточно большом усилении в прямой цепи свойства системы с отрицательной обратной связью практически полностью определяются лишь свойствами



обратной связи и не зависят от динамических характеристик прямой цепи (естественно, что при этом система должна оставаться устойчивой). Отмеченное свойство систем с отрицательными обратными связями широко используется при построении технических устройств, от которых требуется высокая точность воспроизведения заданных динамических свойств.

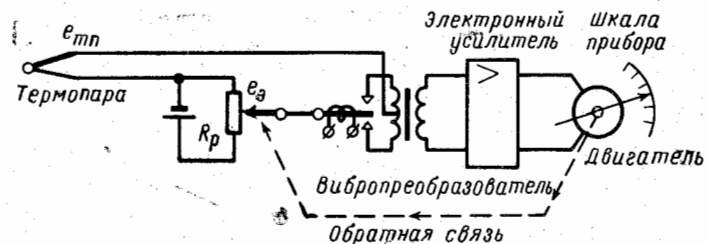


Рис. 3-5.

Известно, что для точных измерений используют компенсационные методы, которые основаны на введении в измерительный прибор отрицательной обратной связи.

На рис. 3-5 в упрощенном виде приведена принципиальная схема автоматического потенциометра, в котором реализуется компенсационный метод измерения температуры. Разность между э. д. с. термопары  $\epsilon_{тп}$  и напряжением  $\epsilon_э$ , снимаемым с потенциометра  $R_p$ , подается на электронный усилитель. К выходу усилителя подключен асинхронный двухфазный электродвигатель, который осуществляет перемещение стрелки прибора; одновременно он осуществляет также и перемещение движка потенциометра  $R_p$ , т. е. имеет место обратная связь с выхода прибора на его вход. Эта обратная связь отрицательна, так как перемещение движка потенциометра приводит к уменьшению разбаланса между э. д. с. термопары и напряжением, снимаемым с  $R_p$ . В момент, когда эта разность будет сведена к достаточно малой величине, двигатель останавливается. Так как коэффициент усиления электронного усилителя обычно выбирается относительно очень большим, разность напряжений, при которой останавливается двигатель, оказывается практически весьма малой, так что, несмотря на наличие существенных искажающих факторов в прямой цепи передачи воздействий в усилителе и двигателе (например, зоны нечувствительности, люфтов в зазорах и т. п.), точность измерений оказывается достаточно высокой. В целом частотная характеристика прибора определяется формулой (3-5)

$$W(p) = \frac{1}{k_{о.с}},$$

где  $k_{о.с}$  — коэффициент передачи обратной связи, определяющий, насколько изменится величина напряжения  $\epsilon_э$  при перемещении стрелки прибора на одно деление.

Выше были получены соотношения, устанавливающие связь между частотными характеристиками системы в целом и частотными характеристиками отдельных ее звеньев. Естественно, можно было бы получить и связь между соответствующими весовыми или переходными характеристиками. Однако если связь между частотными характеристиками определяется относительно простыми алгебраическими соотношениями, легко интерпретирующимися в графиках, то связь между весовыми и переходными характеристиками устанавливается значительно более сложным образом. Так, для последовательного соединения весовая характеристика системы определяется многократным применением интеграла свертки (2-2). Еще более сложно обстоит дело с вычислением весовых и переходных характеристик замкнутых систем (здесь приходится решать системы интегральных уравнений).

Последнее обстоятельство объясняет причину того, что в инженерных расчетах сложных систем автоматического регулирования особенно удобными оказываются методы, основанные на представлении свойств элементов с помощью частотных характеристик.

### 3-2. Устойчивость линейных динамических систем с обратной связью

Важной особенностью замкнутых динамических систем с обратными связями является их склонность к самопроизвольному возбуждению движения даже в условиях, когда на них не оказывают влияния внешние воздействия.

Естественно, что в реальных условиях полностью устранить действие возмущений на систему нельзя. Поэтому исследование поведения реальных систем при отсутствии внешних воздействий в общем случае следует расчленить на две задачи:

1) исследование поведения системы в идеализированном случае в предположении полного отсутствия возмущений (исследование «невозмущенного» движения);

2) исследование поведения системы при «малых» возмущениях.

В результате первого этапа устанавливаются возможные формы «невозмущенного» движения системы,

в результате второго выясняется, насколько сильно будет искажено найденное «невозмущенное» движение действием «малых» возмущений, т. е. будут ли отклонения движения системы от «невозмущенного» состояния в этом случае также малыми или малые начальные отклонения со временем разовьются в большие и даже бесконечно большие по модулю отклонения.

В первом случае невозмущенное движение называется устойчивым; если оно с течением времени стремится к нулю, то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если же с течением времени отклонение растет беспредельно, то невозмущенное движение считается неустойчивым.

В общем случае может рассматриваться также вопрос об устойчивости движения, вызванного некоторым заданным входным воздействием (или воздействиями, принадлежащим к определенному классу функций); задача устойчивости движения в системе может рассматриваться также при условии, что начальные отклонения являются необязательно малыми по модулю [Л. 1]. Однако для линейных систем формулировка условий устойчивости и методы решения возникающих в связи с этим задач существенно упрощаются.

Прежде всего при исследовании поведения линейных систем, на которые не действуют возмущения, по существу не возникает задачи определения их невозмущенного движения, так как в этом случае такие системы обязательно должны находиться в состоянии равновесия (покоя). Это следует из того, что установившаяся составляющая решения дифференциального уравнения линейной системы (1-6) при правой части, равной нулю, также должна быть равной нулю. Соответственно исследование устойчивости линейных систем сводится лишь к изучению тенденции изменения во времени переходной составляющей решения, т. е. к изучению поведения общего решения дифференциального уравнения без правой части (1-9). Как ранее отмечалось (см. § 1-3), необходимое и достаточное условие устойчивости в этом случае сводится к требованию, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения системы (1-12) были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательные вещественные части.

Очевидно, что выполнение этого условия гарантирует устойчивость линейной динамической системы не только

«в малом», но и при больших начальных отклонениях, а также и в случае, когда интересуются устойчивостью движения системы, вызванного любым входным воздействием, а не только устойчивостью состояния равновесия.

Легко показать, что из рассмотренных в предыдущем параграфе трех способов соединения звеньев системы только в системе с обратной связью корни характеристического уравнения системы отличаются от корней характеристических уравнений отдельных звеньев и, следовательно, лишь система с обратной связью, состоящая из устойчивых звеньев, может оказаться неустойчивой.

Действительно, характеристическое уравнение динамической системы может быть получено приравниванием к нулю знаменателя в выражении для ее оператора. Поэтому корни характеристического уравнения системы из последовательно и параллельно соединенных звеньев, как это следует из (3-1) и (3-2), совпадают с корнями характеристических уравнений звеньев, из которых состоит система. Характеристическое же уравнение замкнутой системы с отрицательной обратной связью, как видно из (3-3), определяется выражением

$$1 + W_{p.c}(p) = 0 \quad (3-6)$$

или

$$D(p) + K(p) = 0, \quad (3-7)$$

где  $K(p)$  и  $D(p)$  — числитель и знаменатель оператора разомкнутой системы соответственно. Естественно, что корни уравнения (3-7) отличаются от корней характеристического уравнения разомкнутой системы:

$$D(p) = 0. \quad (3-8)$$

Следовательно, если корни уравнения (3-8) и удовлетворяют условию устойчивости, корни уравнения (3-7) могут этим условиям уже не удовлетворять.

Характерный вид переходного процесса в неустойчивой системе с отрицательной обратной связью приведен на рис. 3-6 (кривая 1). Переходный процесс в неустойчивой системе с положительной обратной связью обычно характеризуется неколебательным лавинообразным нарастанием выходной величины (кривая 2). Следует отметить, что охват системы положительной обратной связью

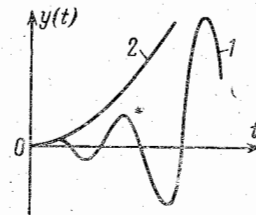


Рис. 3-6.

обычно делает ее значительно более склонной к потере устойчивости, чем охват отрицательной обратной связью.

Рассмотрим, например, устойчивость системы регулирования, приведенной на рис. 1-2. Как непосредственно следует из структурной схемы этой системы (см. рис. 1-2, б), она относится к классу систем с отрицательной обратной связью, причем при размыкании образуется система, представляющая собой последовательное соединение двух звеньев — автоматического регулятора с оператором (см. § 1-1 и 1-2)

$$W_p(p) = k_p,$$

где  $k_p = l_1/l_2$  — коэффициент передачи регулятора, и объекта с оператором

$$W_\mu(p) = \frac{k_\mu}{Tp + 1}.$$

Следовательно, оператор разомкнутой системы будет определяться формулой

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

где  $k = k_p k_\mu$  — коэффициент передачи разомкнутого контура системы.

В соответствии с (3-7) характеристическое уравнение рассматриваемой замкнутой системы с отрицательной обратной связью будет иметь следующий вид:

$$Tp + 1 + k = 0.$$

Корень этого уравнения  $p_1 = -(1+k)/T$  всегда отрицателен, что свидетельствует об устойчивости системы при любых значениях ее параметров.

Иная картина получится, если обратная связь окажется положительной, т. е. если регулятор будет ошибочно подключен так, что при росте уровня он будет увеличивать приток жидкости. В этом случае характеристическое уравнение системы принимает вид:

$$Tp + 1 - k = 0,$$

т. е. система будет устойчива лишь при условии, что коэффициент усиления разомкнутого контура будет меньше единицы:  $k < 1$ .

### 3-3. Критерий устойчивости Найквиста

Для суждения об устойчивости линейной системы нет необходимости знать точное значение корней ее характеристического уравнения, а достаточно лишь уверенности в том, что эти корни располагаются в комплексной плоскости левее мнимой оси (в левой полуплоскости). Поэтому полное решение характеристического уравнения системы здесь представляется явно излишним; для решения этой задачи можно воспользоваться косвенными критериями устойчивости. Так, напри-

мер, можно показать, что для устойчивости системы необходимо (но недостаточно), чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения имели одинаковый знак.

В настоящее время известно несколько критериев, определяющих не только необходимые, но и достаточные признаки устойчивости (критерии Рауса, Гурвица, Михайлова, Найквиста).

Для исследования устойчивости систем автоматического регулирования производственных процессов, по-видимому, наиболее удобным является критерий устойчивости Найквиста. Этот критерий оперирует не с характеристическим уравнением замкнутой системы, а с амплитудно-фазовой характеристикой системы в разомкнутом состоянии и формулируется следующим образом.

Система, устойчивая в разомкнутом состоянии, сохранит устойчивость и после замыкания ее отрицательной обратной связью, если годограф ее амплитудно-фазовой характеристики в разомкнутом состоянии  $W(j\omega)$  не охватывает в комплексной плоскости точки с координатами  $(-1; j0)$ . При этом считается, что годограф характеристики  $W(j\omega)$  «не охватывает» точку  $(-1; j0)$ , если общий угол поворота вектора, проведенного из указанной точки к годографу  $W(j\omega)$  (рис. 3-4) при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega \rightarrow \infty$ , окажется равным нулю.

Если годограф частотной характеристики проходит через точку  $(-1; j0)$  при некоторой частоте  $\omega_R$ , то переходный процесс в замкнутой системе имеет характер незатухающих колебаний с частотой  $\omega_R$ , т. е. система окажется на границе устойчивости. Соответственно условие границы устойчивости может быть записано следующим образом:

$$W(j\omega_R) = -1. \quad (3-9)$$

Доказательство критерия устойчивости Найквиста (как и других названных выше критериев) можно найти в любом пособии по теории автоматического регулирования (например, в [Л. 1]).

Достоинство критерия Найквиста по сравнению с другими критериями заключается прежде всего в том, что для его использования нет необходимости знать характеристическое уравнение системы, а достаточно располагать лишь частотными характеристиками отдельных

ее звеньев. При этом аналитическое выражение для характеристик может оставаться неизвестным, т. е. исходные данные для расчетов могут быть получены экспериментально. Крайне важно также то, что этот критерий в равной степени применим как к системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями,

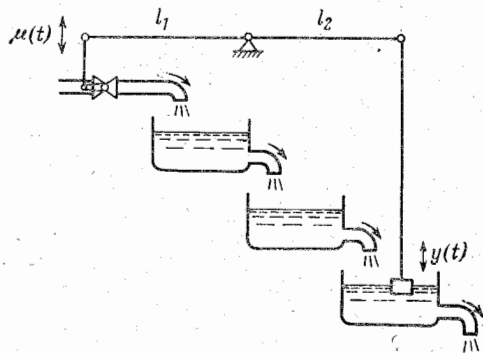


Рис. 3-7.

так и к системам, требующим для своего описания уравнений в частных производных и уравнений с запаздывающим аргументом (системам с запаздыванием).

На рис. 3-7 показана автоматическая система регулирования уровня жидкости, отличающаяся от рассмотренной ранее (см. рис. 1-2) тем, что регулируемый объект состоит из трех (а не одной) последовательно включенных емкостей, причем уровень регулируется в последней по ходу жидкости емкости.

Пусть размеры всех баков одинаковы. Частотная характеристика объекта, связывающая изменение уровня в последнем баке с изменением положения клапана на притоке в первый бак (регулирующего воздействия), будет определяться формулой

$$W_{\mu}(p) = \frac{k_{\mu}}{(T_{\mu}p + 1)^3},$$

частотная характеристика разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{(T_{\mu}p + 1)^3},$$

где  $k = k_p k_{\mu}$  или

$$W(j\omega) = \frac{k}{(T_{\mu}j\omega + 1)^3} = \frac{k}{(1 + T_{\mu}^2\omega^2)^{3/2}} e^{-j3\text{arctg } T_{\mu}\omega}.$$

Годограф этой характеристики приведен на рис. 3-8. Поскольку эта характеристика всегда пересекает отрицательную вещественную ось, при определенных значениях ее параметров она может охватить точку  $(-1; j0)$ .

Подставив последнее выражение в (3-9), получим:

$$\frac{[k_k]}{(T_{\mu}^2\omega_k^2 + 1)^{3/2}} = 1;$$

$$3 \text{arctg } T_{\mu}\omega_k = \pi.$$

Из этой системы уравнений находим:

$$\omega_k = \frac{\sqrt{3}}{T_{\mu}};$$

$$k_k = 8.$$

При  $k > k_k$  годограф частотной характеристики увеличивается по модулю на всех частотах. Поэтому если при  $k=8$  этот годограф проходит через точку  $(-1; j0)$ , то при больших значениях  $k$  он охватит эту точку. Таким образом, условие устойчивости в рассматриваемом случае определяется неравенством:  $k < 8$ .

Заметим, что в отличие от примера, приведенного в предыдущем параграфе, где неустойчивость системы может быть вызвана лишь неправильным включением регулятора, здесь причиной возможной неустойчивости может быть слишком большое усиление сигнала в регуляторе. Иначе говоря, регулятор при появлении отклонения регулируемой величины перемещает регулирующий орган на большую величину, чем это нужно для ликвидации этого отклонения.

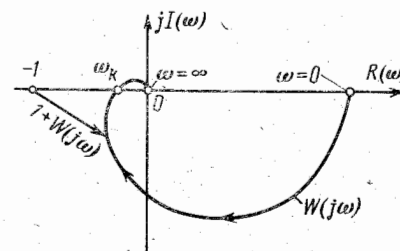


Рис. 3-8.

В заключение следует заметить, что в реальных условиях работы систем может происходить самопроизвольное изменение их параметров (коэффициентов дифференциальных уравнений или динамических характеристик). К тому же и определение численных значений этих коэффициентов всегда сопровождается некоторыми погрешностями. Поэтому устойчивость системы при некоторых расчетных параметрах, вообще говоря, еще не гарантирует устойчивости реальной системы. Здесь необходима дополнительная проверка грубости системы к вариациям параметров, т. е. проверка факта, останется ли система устойчивой при малых отклонениях ее параметров от расчетных.

В частности, система, находящаяся на границе устойчивости, по определению должна бы считаться устойчивой, так как хотя малые возмущения и должны в этом случае привести к появлению незатухающих

колебаний, амплитуда этих колебаний должна быть также малой. Учитывая, однако, возможность вариаций параметров, следует признать такую систему неустойчивой, так как она не является грубой к этим вариациям; действительно, если годограф

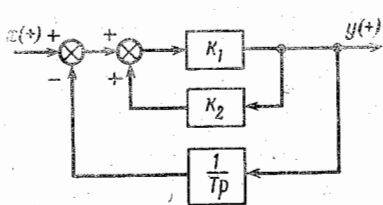


Рис. 3-9.

разомкнутой системы при расчетных параметрах проходит через точку  $(-1; j0)$ , то достаточно сколь угодно малого отклонения параметров от расчетного, для того чтобы эта характеристика охватила указанную точку.

Системы, чувствительные к малым вариациям параметров, обычно появляются в результате стремления устранить нежелательные по тем или иным соображениям члены характеристического уравнения системы. Если это достигнуто, то соответствующие члены становятся «ненаблюдаемыми», (хотя реально они продолжают существовать) и малейшая «раскомпенсация» может привести к неустойчивой работе системы.

В § 2-6 рассматривались два дифференцирующих звена: идеальное с оператором:

$$W(p) = k_{дp};$$

и реальное с оператором:

$$W(p) = \frac{kTp}{Tp + 1}.$$

Как следует из этих формул, для получения идеального дифференцирования необходимо каким-то образом добиться, чтобы постоянная времени  $T$  в знаменателе этого выражения обратилась в нуль.

Поскольку дифференцирование является операцией, обратной интегрированию, то, как следует из формулы (3-5), эта операция может быть реализована с помощью отрицательной обратной связи в виде интегрирующего звена. Для реализации в прямом канале системы большого коэффициента усиления можно применить положительную обратную связь. В результате приходим к структурной схеме системы, показанной на рис. 3-9. Оператор этой системы определяется формулой

$$W(p) = \frac{Tp}{\left(\frac{1}{k_2} - k_1\right)Tp + 1},$$

и при  $k_1 = 1/k_2$  получаем звено идеального дифференцирования.

Однако, как легко видеть, система при таком выборе ее параметров оказывается негрубой к малым вариациям параметров. Действительно, корень характеристического уравнения этой системы в общем случае определяется формулой:

$$p_1 = -\frac{1}{\left(\frac{1}{k_2} - k_1\right)T}$$

и достаточно сколь угодно малого увеличения  $k_1$  по сравнению с  $1/k_2$  для того, чтобы этот корень оказался положительным и система стала неустойчивой.

### 3-4. Автоколебания в замкнутых нелинейных динамических системах

При изучении поведения замкнутых нелинейных динамических систем, изолированных от действия внешних возмущений, приходится решать обе сформулированные в предыдущем параграфе задачи, т. е. исследовать не только устойчивость невозмущенного движения, но и определять возможные формы невозмущенного движения. Обусловлено это тем, что нелинейные замкнутые системы в отсутствие возмущений могут находиться не обязательно в состоянии покоя, но и в состоянии незатухающих колебаний (автоколебаний).

Ниже будет рассмотрена лишь задача определения возможности возникновения в нелинейной замкнутой системе автоколебаний без исследования устойчивости этих колебаний. Нужно сказать, что решение даже такой относительно простой по своей постановке задачи для нелинейных систем в общем случае встречает серьезные трудности. Поэтому ограничимся рассмотрением одного приближенного, но, как показывает практика, достаточно эффективного метода — метода гармонического баланса Л. С. Гольдфарба.

В значительном большинстве практически важных случаев нелинейная замкнутая система может быть представлена состоящей из двух частей: линейной ЛЧ и нелинейной НЧ (рис. 3-10). Зададимся некоторой периодической функцией времени на входе линейной части системы  $x(t)$ . Зная  $x(t)$ , можно отыскать установившиеся колебания на выходе линейной части  $y(t)$  (как вынужденную составляющую решения линейного дифферен-

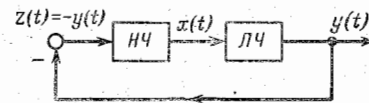


Рис. 3-10.

циального уравнения с правой частью). С другой стороны, рассматривая  $x(t)$  как выход нелинейной части системы, можно, зная дифференциальное уравнение этой части, определить, каково должно быть воздействие на ее выходе  $z(t)$ , для того чтобы на выходе установился процесс в виде функции  $x(t)$ . Если в результате окажется, что  $y(t) = -z(t)$ , то задача может считаться решенной, т. е. можно утверждать, что в системе могут установиться автоколебания, причем на выходе линейной части они будут совершаться по закону  $y(t)$ , а на ее входе или, что то же самое, на выходе нелинейной части — по закону  $x(t)$ .

Поскольку система в целом является нелинейной, каких-либо общих рекомендаций относительно выбора функции  $x(t)$  дать нельзя, за исключением того, что в силу периодичности  $x(t)$  ее можно искать в виде суммы гармоник с кратными частотами. Вычисление частот, амплитуд и фаз гармоник представляет собой в общем случае весьма трудоемкую процедуру.

Имеются, однако, некоторые частные, но важные для практики случаи, когда эта процедура оказывается достаточно простой. В частности, если линейная часть системы является фильтром низких частот, практически не пропускающим высшие гармонические составляющие, то на ее выходе должны устанавливаться колебания, по своей форме близкие к синусоидальным. Но если на выходе линейной системы наблюдаются синусоидальные колебания

$$y(t) = A_y \sin \omega t, \quad (3-10)$$

то это значит, что на ее вход действуют периодические колебания того же периода  $T = 2\pi/\omega$ , причем если проинтегрировать их разложение в ряд Фурье, то высшие гармоники разложения будут подавлены линейной частью. Но так как на вход нелинейной части в рассматриваемом случае будут подаваться лишь синусоидальные колебания, то для ее математического описания в рассматриваемом случае достаточно иметь характеристики, которые позволили бы определить амплитуду и фазу первой гармоники установившихся колебаний на выходе нелинейной части при гармонических колебаниях произвольной частоты, амплитуды и начальной фазы на входе.

Такие характеристики могут быть построены по аналогии с частотными характеристиками линейных систем,

т. е. можно ввести в рассмотрение характеристику нелинейной системы как комплексную функцию частоты и амплитуды  $W_{н.ч}[j(A_x, \omega)]$ , модуль которой равен отношению амплитуды первой гармоники выходных колебаний  $x(t)$  к амплитуде гармонических колебаний на входе  $A_z$ , а аргумент — разности фаз этих колебаний. Эта характеристика получила название эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейной системы. Необходимо обратить внимание, что эта характеристика в общем случае является функцией не только частоты  $\omega$ , но и амплитуды входных колебаний  $A_z$ ; в случае, когда во входных колебаниях имеется постоянная составляющая, эта характеристика будет комплексной функцией трех переменных: частоты, амплитуды и постоянной составляющей входных гармонических колебаний.

Допустим теперь, что в системе на рис. 3-10 возникли автоколебания, причем на входе нелинейной части системы эти колебания близки к синусоидальным вида (3-10), которые, пройдя через нелинейную часть системы, вызовут на ее выходе периодические колебания  $x(t)$ . Первая гармоника этих колебаний будет определяться формулой

$$x_1(t) = A_y A_{н.ч}(A_y, \omega) \sin[\omega t + \varphi_{н.ч}(A_y, \omega) + \pi], \quad (3-11)$$

где  $A_{н.ч}(A_y, \omega)$ ,  $\varphi_{н.ч}(A_y, \omega)$  — модуль и аргумент эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейной части системы.

В свою очередь первая гармоника колебаний  $x_1(t)$ , пройдя через линейную часть системы, вызовет колебания на ее выходе:

$$y(t) = A_y A_{л.ч}(A_y, \omega) A_{л.ч}(\omega) \sin[\omega t + \varphi_{н.ч}(A_y, \omega) + \varphi_{л.ч}(\omega) + \pi], \quad (3-12)$$

где  $A_{л.ч}(\omega)$ ,  $\varphi_{л.ч}(\omega)$  — модуль и аргумент амплитудно-фазовой характеристики  $W_{л.ч}(j\omega)$  линейной части. Для того чтобы определяемое этой формулой изменение  $y(t)$  совпадало в (3-10), необходимо выполнить условия:

$$\left. \begin{aligned} A_y A_{н.ч}(A_y, \omega) A_{л.ч}(\omega) &= 1; \\ \varphi_{н.ч}(A_y, \omega) + \varphi_{л.ч}(\omega) &= -\pi \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

или

$$W_{н.ч}[j(A_y, \omega)] W_{л.ч}(j\omega) = -1. \quad (3-14)$$

Уравнение (3-14) или пара уравнений (3-13) выражают условия баланса амплитуд и фаз первых гармоник колебаний в замкнутом контуре нелинейной системы на рис. 3-10. Если эти уравнения имеют решение, т. е. если можно подобрать такие значения  $A_y$  и  $\omega$ , при которых они обращаются в тождество, в системе возможно возникновение автоколебаний с периодом  $T=2\pi/\omega$  и амплитудой на входе нелинейной части  $A_y$ .

Решение уравнения (3-14) удобно осуществлять графически путем построения в одной комплексной плоскости характеристик  $-1/W_{н.ч.}[j(A_y, \omega)]$  и  $W_{л.ч.}(j\omega)$ . Расчет значительно упрощается, нелинейная часть является безынерционной. В этом случае эквивалентная характеристика нелинейной части не зависит от частоты (как характеристика всякой безынерционной системы), в зависимости лишь от амплитуды входных гармонических колебаний. Если она будет иметь пересечение с амплитудно-фазовой характеристикой линейной части, в системе возможны автоколебания, причем частота этих автоколебаний определяется точкой пересечения на амплитудно-фазовой частотной характеристике линейной части, а амплитуда гармонических колебаний на выходе линейной части — значением параметра  $A_y$  отрицательной обратной эквивалентной характеристики нелинейной части  $-1/W_{н.ч.}(jA)$  в точке пересечения.

В приведенных выкладках предполагалось отсутствие постоянной составляющей в колебаниях, что соответствует симметричной характеристике нелинейной части. Однако в случае необходимости эта составляющая может быть достаточно просто учтена.

В заключение важно подчеркнуть, что найденные указанным способом автоколебательные режимы реально могут и не существовать, так как они могут оказаться неустойчивыми. Определение устойчивости автоколебаний в нелинейной системе — задача намного более сложная, чем рассмотренная задача выявления возможности автоколебаний и возможных их параметров. Примерное представление о соотношении между сложностями этих задач может дать аналогия между этими задачами в линейных системах, где проблема определения невозмущенного движения при отсутствии внешних воздействий попросту не возникала — это движение там заведомо отсутствует.

Практически для определения устойчивости полученных автоколебаний часто используют следующий нестрогий прием, который дает необходимые, но недостаточные условия устойчивости.

Пусть в результате применения метода гармонического баланса найдено, что в нелинейной системе могут возникнуть автоколебания с амплитудой на выходе линейной части  $A_y$ . Из условия (3-14) следует, что в этом случае характеристика  $W_{н.ч.}[j(A_y, \omega)]W_{л.ч.}(j\omega)$  пройдет через точку  $(-1; j0)$ . Дадим найденной амплитуде положительное приращение  $\Delta A_y$  и оценим, как при этом изменится положение этой характеристики относительно точки  $(-1; j0)$ . Если она охватит точку  $(-1; j0)$ , то это свидетельствует о неустойчивости системы, т. е. случайное увеличение амплитуды на небольшую начальную величину приведет к дальнейшему ее нарастанию. Если же указанная характеристика не охватит точку  $(-1; j0)$ , то это может свидетельствовать об устойчивости автоколебаний.

Часто факт устойчивости или неустойчивости автоколебаний может быть установлен из анализа физических процессов в системе.

Обратимся вновь к рассмотренной ранее автоматической системе регулирования (см. рис. 3-7), в которой регулятор при условии достаточно малых отклонений от начального состояния равновесия имеет уравнение

$$\mu(t) = k_p e(t),$$

где  $k_p = l_1/l_2$ .

В реальных условиях работы перемещение регулирующего органа ограничено его предельными положениями  $\mu_{\min}$  и  $\mu_{\max}$ , так что к записанному уравнению регулятора следует ограничение:  $\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}$ . С учетом этого ограничения график зависимости положения регулирующего органа от отклонения регулируемой величины приобретает вид, указанный на рис. 3-11 (положение начала координат этого графика зависит, очевидно, от нагрузки объекта, в окрестности которой исследуется устойчивость системы регулирования). Таким образом, при необходимости учета достаточно больших отклонений система должна рассматриваться как нелинейная. Ее структурная схема может быть приведена к виду, указанному на рис. 3-10, где нелинейной частью системы является регулятор, а линейная часть имеет амплитудно-фазовую характеристику:

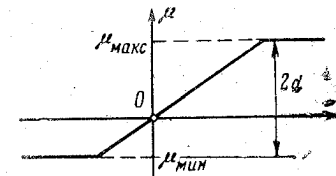


Рис. 3-11.



$$W_{н.ч}(j\omega) = \frac{k_{\mu}}{(1 + T_{\mu}^2 \omega^2)^{3/2}} e^{-j3\text{arctg}T_{\mu}^2 \omega}$$

Найдем эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику регулятора для случая, когда его характеристика симметрична, т. е. когда исходная нагрузка, в окрестности которой исследуется устойчивость системы регулирования, такова, что регулирующий орган при равновесии системы должен находиться посередине между своими крайними положениями  $\mu_{\text{мин}}$  и  $\mu_{\text{макс}}$ . На рис. 3-12 приведены графики изменения выходной величины регулятора  $\mu(t)$  при синусоидальном изменении его входного воздействия  $\varepsilon(t) = A_{\varepsilon} \sin \omega t$ . Естественно, что эти колебания при  $k_p A_{\varepsilon} > d$  [где  $d = (\mu_{\text{макс}} - \mu_{\text{мин}})/2$ ] оказались несинусоидальными. Коэффициенты первой гармоники разложения в ряд Фурье (2-11) определяются здесь следующим образом:

$$a_1 = 0;$$

$$b_1 = \frac{8}{T} \left[ \int_0^{\tau} k_p A_{\varepsilon} \sin^2 \omega t dt + \int_{\tau}^{T/4} d \sin \omega t dt \right] =$$

$$= \frac{4k_p A_{\varepsilon}}{T} \left[ \tau - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega\tau + \frac{2d}{\omega k_p A_{\varepsilon}} \cos \omega\tau \right];$$

и, имея в виду, что

$$d = k_p A_{\varepsilon} \sin \omega\tau,$$

можно записать:

$$b_1 = \frac{4k_p A_{\varepsilon}}{T} \left[ \tau - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega\tau + \frac{2}{\omega} \sin \omega\tau \cos \omega\tau \right] =$$

$$= \frac{k_p A_{\varepsilon}}{\pi} [2\alpha + \sin 2\alpha],$$

где

$$\alpha = \arcsin \frac{d}{k_p A_{\varepsilon}}.$$

Соответственно эквивалентная фазовая характеристика рассматриваемого нелинейного звена равна нулю, а эквивалентная амплитудная характеристика определяется формулой

$$A_{н.ч}(A_{\varepsilon}) = \begin{cases} k_p; & \frac{k_p A_{\varepsilon}}{d} < 1; \\ \frac{k_p}{\pi} (2\alpha + \sin 2\alpha); & \frac{k_p A_{\varepsilon}}{d} > 1. \end{cases} \quad (3-15)$$

График этой характеристики в зависимости от относительной амплитуды гармонических колебаний  $k_p A_{\varepsilon}/d$  приведен на рис. 3-13.

Годографы характеристик  $W_{н.ч}(j\omega)$  и  $-\frac{1}{s} 1/W_{н.ч}(jA_{\varepsilon})$  показаны на рис. 3-14. Как видим, эти характеристики пересекаются, если значение модуля характеристики  $W_{н.ч}(j\omega)$  при ее пересечении с отрицательной вещественной полуосью окажется большим, чем  $1/k_p$ . Как было показано в примере предыдущего параграфа, частота этого пересечения равна  $\sqrt{3}/T_{\mu}$ , а модуль характеристики при этой частоте равен  $k/8$ . Таким образом, при выполнении условия  $k_p k_{\mu} > 8$  в системе возможны автоколебания с частотой первой гармоники  $\sqrt{3}/T_{\mu}$ . Для определения амплитуды автоколебаний на входе нелинейного звена (амплитуды колебаний уровня в последнем баке) следует решить уравнение (3-14), которое в рассматриваемом случае принимает вид:

$$W_{н.ч}(A_{\varepsilon}) \frac{k_{\mu}}{8} = 1.$$

Так, если коэффициент передачи регулятора равен  $k_p = 16/k_{\mu}$ , то имеем  $W_{н.ч}(A_{\varepsilon})/k_p = 0,5$ . Из графика на рис. 3-13 для этого значения ординаты находим  $A_{\varepsilon} k_p/d = 2,6$ , т. е.  $A_{\varepsilon} = 0,163 k_{\mu} d$ .

В заключение необходимо оценить устойчивость автоколебаний. Если какие-либо случайные флюктуации выведут систему из найденного автоколебательного режима и амплитуда автоколебаний увеличится, то это, в соответствии с рис. 3-13, приведет к уменьшению по модулю эквивалентной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы на всех частотах, т. е. она перестанет охватывать точку  $(-1; j0)$ , а следовательно, амплитуда автоколебаний начнет уменьшаться. Наоборот, при случайном уменьшении амплитуды автоколебаний эквивалентная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы охватит точку  $(-1; j0)$ , система станет не-

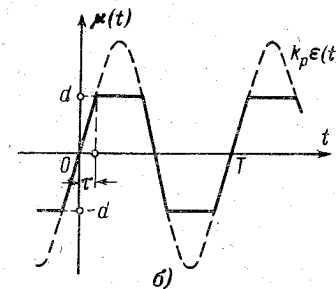
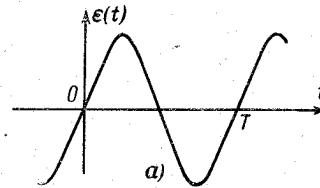


Рис. 3-12.

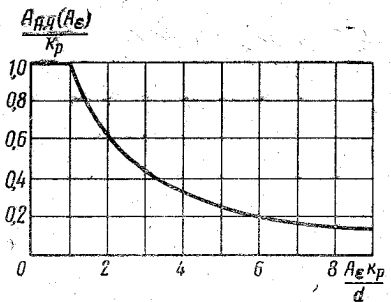


Рис. 3-13.



**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ  
ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**4-1. Случайные величины**

Одна из основных особенностей систем автоматического регулирования заключается в случайном характере действующих на них возмущений, а также в случайном характере преобразования этих воздействий в объектах регулирования. Поэтому математическое описание поведения таких систем требует использования аппарата теории вероятностей [Л. 6, 9, 41].

Если детерминированная функция времени может рассматриваться как последовательность ее значений, каждое из которых для любого момента времени точно определено, то случайная функция времени, называемая обычно случайным процессом, может рассматриваться как последовательность случайных величин, т. е. таких величин, которые в зависимости от случая могут принимать то или иное конкретное значение.

В свою очередь, чтобы описать случайную величину, необходимо указать все возможные значения, которые она может принять, а также указать вероятность появления каждого из этих значений. Такая информация о случайной величине (выраженная в виде формулы, графика, таблицы) называется законом распределения случайной величины.

Появление того или иного возможного значения случайной величины должно рассматриваться как случайное событие. Вероятность появления случайного события оценивается относительной частотой его появления в конечном числе  $n$  опытов (наблюдений), проводимых в одних и тех же контролируемых условиях.

Обозначим через  $A$  интересующее нас случайное событие, которое может произойти в некотором эксперименте, и пусть после проведения  $n$  независимых повторений этого эксперимента в одних и тех же условиях было зафиксировано  $l$  появлений этого события. Тогда частота событий  $A$  определяется следующим образом:

$$\tilde{P}(A) = \frac{l}{n}.$$

Если практический опыт или какие-либо другие достаточно веские соображения позволяют считать, что при

устойчивой и амплитуда автоколебаний начнет увеличиваться, вновь приближаясь к исходному значению. Таким образом, исходя из такого критерия устойчивости, найденные автоколебания в системе следует считать устойчивыми.

Итак, рассматриваемая система при отсутствии внешних воздействий может работать в двух режимах:

- 1) если коэффициент усиления мал и не превышает величины  $k_p k_\mu = 8$ , система имеет устойчивое состояние покоя;
- 2) при  $k_p k_\mu \geq 8$  состояние покоя становится неустойчивым и система входит в устойчивый режим автоколебаний с частотой  $\sqrt{3}/T_\mu$ , не зависящей от величины  $k_p$ . Амплитуда этих автоколебаний на входе регулятора изменяется от  $A_\epsilon = 0,125dk_\mu$  при  $k_p k_\mu = 8$  до  $A_\epsilon = 0,159dk_\mu$  при  $k_p k_\mu \rightarrow \infty$ . При  $k_p \rightarrow \infty$  перемещения регулирующего органа принимают характер прямоугольных колебаний (рис. 3-15). Первая гармоника этих колебаний имеет амплитуду

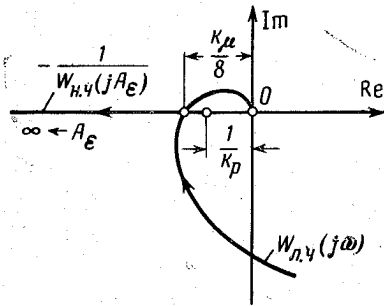


Рис. 3-14.

$$b_1 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} d \sin \omega_0 t dt = \frac{4d}{\pi},$$

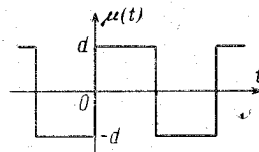


Рис. 3-15.

и, следовательно, эквивалентная амплитудно-фазовая характеристика регулятора определяется формулой

$$W_{н.ч}(A_\epsilon) = \frac{4d}{\pi A_\epsilon}. \quad (3-16)$$

В этом случае условие автоколебаний приобретает вид:

$$\frac{4d}{\pi A_\epsilon} \frac{k_\mu}{8} = 1,$$

т. е. амплитуда автоколебаний

$$A_\epsilon = \frac{4dk_\mu}{8\pi} = 0,159dk_\mu.$$

Заметим, что в последнем случае регулятор называется двухпозиционным. В системе регулирования с таким регулятором регулируемый орган может занимать лишь два положения  $\mu_{мин}$  и  $\mu_{макс}$ , причем положение  $\mu_{мин}$  имеет место, когда регулируемая величина больше ее заданного значения, а положение  $\mu_{макс}$  — когда регулируемая величина меньше заданного значения.

беспредельном увеличении числа  $n$  вычисленная указанным способом частота события стабилизируется у некоторого постоянного числа  $P(A)$ , то рассматриваемое событие имеет устойчивую вероятность появления, равную этому числу  $P(A)$ .

Подчеркнем, что реальные интересующие нас случайные события могут иметь, а могут и не иметь устойчивую вероятность своего появления. Теория вероятностей имеет дело лишь с событиями, имеющими устойчивую вероятность появления, однако наличие устойчивой вероятности лишь постулируется, принимается как одна из исходных аксиом.

Непосредственно выразить указанным выше способом закон распределения можно лишь для случайных величин, которые могут принимать счетные, дискретные значения.

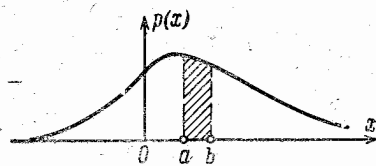


Рис. 4-1.

На практике же очень часто встречаются также непрерывные случайные величины, возможные значения которых могут оказаться любыми числами, принадлежащими некоторому отрезку. Так как число возможных значений случайной величины здесь оказывается бесконечно большим, вероятность появления каждого такого отдельно взятого значения будет бесконечно малой. Чтобы обойти эту трудность, закон распределения представляется функцией плотности распределения — такой функцией возможных значений случайной величины, что интеграл от нее в пределах некоторого произвольного отрезка равен вероятности попадания случайной величины на этот отрезок.

Условимся в дальнейшем обозначать случайные величины строчными буквами, а их возможные значения — прописными, т. е. возможные значения  $X$  обозначаются как  $x_1, x_2, x_3 \dots$ . Тогда из определения плотности распределения  $p(x)$  следует:

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x) dx. \quad (4-1)$$

В графической интерпретации площадь под графиком плотности распределения в пределах произвольного отрезка  $a < x < b$  (на рис. 4-1 заштрихована) равна веро-

ятности попадания случайной величины на этот отрезок.

Плотность распределения пригодна для характеристики не только непрерывных, но и дискретных случайных величин, для которых она представляет собой совокупность дельта-функций при возможных значениях случайной величины; площадь каждой такой дельта-функции равна вероятности появления соответствующего значения случайной величины.

В ряде случаев оказывается более удобным оперировать не с плотностью распределения случайной величины, а с интегралом от нее, вычисленным в пределах от  $-\infty$  до  $x$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx. \quad (4-2)$$

Функция  $F(x)$  называется интегральной функцией распределения; ее значение для любого  $x$  определяет вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее  $x$ :

$$F(x) = P(X < x). \quad (4-3)$$

#### 4-2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

На практике чаще всего нет необходимости знать столь исчерпывающую характеристику случайной величины, какой является закон ее распределения. Обычно достаточно располагать средним значением случайной величины, т. е. значением, в окрестности которого группируются возможные значения случайной величины, а также средней мерой разброса случайной величины относительно этого среднего значения.

Аналогом среднего значения случайной величины является среднее арифметическое. Пусть произведено  $n$  независимых наблюдений за результатами эксперимента, результат которого характеризуется случайной величиной  $X$ , принимающей  $s$  возможных значений  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Если в результате таких наблюдений установлено, что значение  $x_1$  наблюдалось  $l_1$  раз, значение  $x_2$  —  $l_2$  раз и т. д., то среднее арифметическое зафиксированных значений  $X$  определяется очевидной формулой

$$\bar{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^s l_k x_k = \sum_{k=1}^s x_k \frac{l_k}{n} = \sum_{k=1}^s x_k \tilde{P}(x_k). \quad (4-4)$$

Переходя теперь от частот  $\bar{P}(x_k)$  к вероятностям  $P(x_k)$ , получим формулу для определения среднего значения (или, как его часто называют, математического ожидания) рассматриваемой случайной величины

$$m_x = \sum_{k=1}^s x_k P(x_k). \quad (4-5)$$

Соответственно для непрерывной случайной величины эта сумма переходит в интеграл, а вероятность появления значения  $x$  будет величиной бесконечно малой  $p(x)dx$ :

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx. \quad (4-6)$$

Операцию вычисления среднего значения случайной величины в дальнейшем будем обозначать:

$$m_x = M\{X\}. \quad (4-7)$$

Часто отсчет случайной величины удобно производить от ее математического ожидания; соответственно случайная величина

$$\bar{X} = X - m_x \quad (4-8)$$

называется *центрированной случайной величиной*.

В качестве меры разброса отдельных значений случайной величины относительно ее математического ожидания удобно выбрать среднее значение квадрата центрированной случайной величины (предварительное возведение в квадрат исключает влияние знака каждого отклонения на результат усреднения). Эта характеристика получила название *дисперсии* случайной величины  $\sigma_x^2$ . В соответствии с определением она вычисляется путем применения формул для математического ожидания (4-5) и (4-6) к квадратам возможных отклонений:

$$\sigma_x^2 = M\{(X - m_x)^2\} = \sum_{k=1}^s (x_k - m_x)^2 P(x_k) \quad (4-9)$$

или

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx. \quad (4-10)$$

Для приведения размерности меры разброса случайной величины к размерности самой случайной величины необходимо извлечь корень квадратный из дисперсии. Положительное значение этого корня получило название *среднеквадратичного отклонения* случайной величины  $\sigma_x$ .

Если каждое возможное значение центрированной случайной величины отнести к ее среднеквадратичному отклонению, получим *нормированную центрированную случайную величину*:

$$V = \frac{X - m_x}{\sigma_x}. \quad (4-11)$$

Очевидно, что математическое ожидание нормированной случайной величины равно нулю, а среднеквадратичное отклонение — единице.

Операция определения дисперсии случайной величины обычно обозначается следующим образом:

$$\sigma_x^2 = D\{X\} = M\{(X - m_x)^2\}. \quad (4-12)$$

### 4-3. Нормальный закон распределения

Для практического использования наиболее важным является так называемый *нормальный закон распределения*, которому подчинено большое количество непрерывных случайных величин, описывающих исходы реальных физических экспериментов.

Плотность нормального распределения определяется следующей формулой:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (4-13)$$

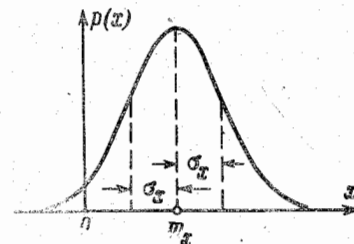


Рис. 4-2.

где  $m_x$  и  $\sigma_x$  — математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение. График этой функции приведен на рис. 4-2. Математическое ожидание определяет координату максимума плотности распределения; расстояние от точки перегиба до точки максимума равно среднеквадратичному отклонению.

Подставив в формулу (4-1) выражение для плотности распределения (4-13), получим формулу, позволяющую

определить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина попадет на интервал, заключенный между значениями  $a$  и  $b$ :

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

или, произведя в этой формуле замену переменной  $v = (x - m_x)/\sigma_x$ ,

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m_x}{\sigma_x}}^{\frac{b-m_x}{\sigma_x}} e^{-v^2/2} dv = \Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right), \quad (4-14)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-v^2/2} dv. \quad (4-15)$$

Интеграл  $\Phi(z)$  (он называется обычно интегралом вероятности) в конечном виде через элементарные функции не выражается. В специальных таблицах приведены значения этого интеграла, но лишь для положительных  $z$ , так как, очевидно,

$$\Phi(-z) = -\Phi(z). \quad (4-16)$$

На практике обычно интересуются вероятностью того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по модулю не будет превышать некоторой наперед заданной величины  $\Delta x$ . В этом случае  $a = m_x - \Delta x$ , а  $b = m_x + \Delta x$  и поэтому формула (4-15) здесь принимает следующий вид:

$$P(m_x - \Delta x < X < m_x + \Delta x) = \Phi\left(\frac{\Delta x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi(\beta), \quad (4-17)$$

где  $\beta = \Delta x/\sigma_x$  — число, показывающее, скольким среднеквадратичным отклонениям равно интересующее нас отклонение  $\Delta x$ .

Таблица 4-1

$\beta$	0,0	0,5	1,0	1,5
$\Phi(\beta)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332

*Продолжение*

$\beta$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\Phi(\beta)$	0,4772	0,4938	0,4987	0,4998	0,5000

В табл. 4-1 приведены значения интеграла вероятности для нескольких  $\beta$  (с точностью до четырех десятичных знаков).

Из табл. 4-1 следует сделать вывод, что отклонение от математического ожидания нормально распределенной случайной величины, превышающее одно среднеквадратичное значение, появляется в среднем в трех испытаниях из десяти; отклонения, превышающие два среднеквадратичных, в среднем встречаются лишь в четырех испытаниях из ста, а отклонения свыше трех среднеквадратичных — примерно в двух испытаниях из тысячи. В статистике поэтому существует так называемое «правило трех сигм», которое гласит, что отклонение случайной величины, превышающее три среднеквадратичных отклонения, может считаться событием практически невероятным.

Нормальному закону распределения подчинена любая случайная величина, представляющая собой результат совместного действия большого числа независимых случайных величин, причем закон распределения каждого слагаемого может быть любым. Доказательство этого принципиально важного утверждения является содержанием так называемых центральных предельных теорем теории вероятностей.

Поскольку элемент случайности в физических процессах обусловлен чаще всего как раз действием большого числа мелких неучитываемых факторов, многие реальные случайные величины имеют закон распределения, практически очень мало отличающийся от нормального.

Нормальный закон распределения является не только наиболее распространенным на практике, но и одним из самых простых для исследования, в частности, потому, что он полностью определяется лишь двумя ранее рассмотренными числовыми характеристиками случайной величины: ее средним значением  $m_x$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma_x$ .

#### 4-4. Функции случайной величины

Как известно, величина  $y=f(x)$  называется функцией переменной  $x$ , если каждому значению  $x$  можно поставить в соответствие определенное значение  $y$ . Аналогично случайную величину  $Y=f(X)$  называют функцией случайной величины  $X$ , если каждому возможному значению  $x$  можно поставить в соответствие определенное значение  $y$ . Так, функция

$$Y = \sin X$$

есть случайная величина такая, что при появлении какого-либо возможного значения  $x$  случайной величины  $X$  случайная величина  $Y$  примет значение  $y = \sin x$ .

Основная задача, возникающая при исследовании функций случайных величин, заключается в определении закона распределения вероятности функции по заданному закону распределения независимой случайной величины.

Очевидно, что вероятность  $P_y(y)$  появления значения  $y$  равна вероятности  $P_x(x)$  появления  $x$ . Поэтому если дискретная случайная величина  $X$  может принимать значения  $x_1, x_2, \dots$  с вероятностями  $P_x(x_1), P_x(x_2), \dots$  соответственно, то функция  $Y=f(X)$  будет принимать значения  $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \dots$  с теми же вероятностями  $P_y(y_1)=P_x(x_1), P_y(y_2)=P_x(x_2), \dots$

Подобным же образом эта задача решается для функции непрерывной случайной величины  $X$ .

Порядок определения плотности распределения для этого случая рассмотрим на примере функции:

$$Y = X^2 \quad (4-18)$$

при нормально распределенной  $X$ , т. е.

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

График этой функции приведен на рис. 4-3. Вероятность того, что  $Y$  окажется меньше некоторого значения  $y$ , равна вероятности попадания  $X$  на отрезок

$-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}$ , т. е.

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y p_y(y) dy = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p_x(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx.$$

Продифференцировав теперь обе части этого равенства по  $y$ , получим:

$$\begin{aligned} p_y(y) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d(\sqrt{y})}{dy} \frac{d}{d(\sqrt{y})} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2} \quad (y > 0). \end{aligned} \quad (4-19)$$

Найденное распределение вероятности играет важную роль в математической статистике и получило специальное название распределения «хи-квадрат с одной степенью свободы».

Подставив в формулу (4-6) выражение (4-19), найдем математическое ожидание рассматриваемой функции:

$$m_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{1/2} e^{-y/2} dy.$$

Функция, определяемая формулой

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \xi^{n-1} e^{-\xi} d\xi, \quad (4-20)$$

называется гамма-функцией; вычисление ее значений удобно производить с помощью рекуррентного соотношения

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1), \quad (4-21)$$

причем  $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$  и  $\Gamma(1) = 1$ .

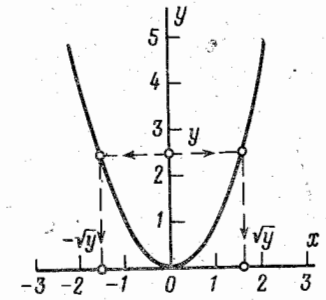


Рис. 4-3.

Произведем в формуле для  $m_y$  замену переменной:

$$\xi = y/2; \quad d\xi = \frac{1}{2} dy,$$

в результате чего получим:

$$m_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2\xi)^{1/2} e^{-\xi} \cdot 2d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \xi^{1/2} e^{-\xi} d\xi$$

или

$$m_y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1,5) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} 0,5\Gamma(0,5) = 1. \quad (4-22)$$

Для определения дисперсии подставим (4-19) в (4-10)

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (y-1)^2 y^{-1/2} e^{-y/2} dy.$$

Раскрыв скобки и произведя ту же замену переменной, можно легко получить:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [4\Gamma(2,5) - 4\Gamma(1,5) + \Gamma(0,5)] = 2, \quad (4-23)$$

т. е.

$$\sigma_y = \sqrt{2} = 1,41.$$

Следует отметить, что если требуется определить лишь математическое ожидание и дисперсию произвольной функции случайной величины, то нет необходимости предварительно определять ее закон распределения. Для этого можно сразу воспользоваться следующими формулами, вытекающими из (4-6) и (4-10):

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_x(x) dx; \quad (4-24)$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - m_y]^2 p_x(x) dx. \quad (4-25)$$

Для рассмотренной в предыдущем примере функции имеем:

$$\begin{aligned} m_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2\xi)^{1/2} e^{-\xi} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1,5) = 1; \end{aligned}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 1)^2 e^{-x^2/2} dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} (2\xi)^{3/2} e^{-\xi} d\xi - 2 \int_0^{\infty} (2\xi)^{1/2} e^{-\xi} d\xi + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} (2\xi)^{-1/2} e^{-\xi} d\xi \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ 2\Gamma(2,5) - 2\Gamma(1,5) + \frac{1}{2}\Gamma(0,5) \right] = 2. \end{aligned}$$

Частным, но важным для практики случаем является линейная функция

$$Y = c + kX, \quad (4-26)$$

график которой приведен на рис. 4-4.

Если случайная переменная  $X$  распределена нормально, то и случайная величина  $Y$ , связанная с ней такой зависимостью, будет распределена нормально. Действительно, как следует из рис. 4-4

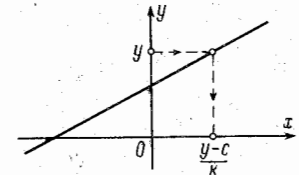


Рис. 4-4.

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-c}{k}} p_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_{-\infty}^{\frac{y-c}{k} - \frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Продифференцировав это выражение по  $y$ , получим:

$$\begin{aligned} p_y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k \sigma_x}} e^{-\frac{(y-c-km_x)^2}{2k^2\sigma_x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}; \end{aligned}$$

где

$$m_y = c + km_x; \quad \sigma_y = k\sigma_x.$$

Кроме того, для определения математического ожидания и дисперсии линейной функции нет необходимости знать закон распределения вероятности независимой переменной, а достаточно знать ее математическое ожида-

ние и дисперсию. Действительно, подставив в (4-6) и (4-10) выражение (4-26), получим:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} (c + kx) p_x(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx + k \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x) dx = c + km_x; \quad (4-27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (c + kx - c - km_x)^2 p_x(x) dx = \\ &= k^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_x(x) dx = k^2 \sigma_x^2. \end{aligned} \quad (4-28)$$

#### 4-5. Функции нескольких случайных величин

Случайная величина  $Z=f(X, Y, \dots)$  является функцией нескольких случайных величин  $X, Y, \dots$ , если каждой комбинации возможных значений этих случайных величин  $x_i, y_j, \dots$  ставится в соответствии определенное значение случайной величины  $Z, z_{ij} \dots = f(x_i, y_j, \dots)$ .

Определение закона распределения функции многих случайных переменных может рассматриваться как обобщение аналогичной задачи для функции одной переменной, которая была рассмотрена в предыдущем параграфе. Вероятность  $P(z_{ij} \dots)$  значения  $z_{ij} \dots$ , очевидно, равна вероятности  $P(x_i, y_j, \dots)$  совместного появления значений  $x_i, y_j, \dots$  случайных величин  $X, Y, \dots$ .

Поэтому для операций с несколькими случайными величинами необходимо располагать законом распределения этой совокупности случайных величин, который характеризовал бы вероятность появления каждой возможной комбинации их значений.

Для конкретного выражения закона распределения одной случайной величины  $X$  используется функция плотности распределения  $p(x)$ , которая была определена как функция возможных значений случайной величины  $x$  такая, что интеграл от этой функции в пределах некоторого отрезка на оси  $x$  оказывается равным вероятности попадания случайной величины  $X$  на этот отрезок.

Подобным же образом совместная плотность распределения  $p_{xy}(x, y)$  двух случайных величин  $X$  и  $Y$ , определяемая как функция двух переменных  $x$  и

$y$ , такова, что двойной интеграл, взятый по некоторой области  $G$  в пространстве возможных значений  $x$  и  $y$ , равен вероятности совместного попадания  $X$  и  $Y$  в эту область, т. е.

$$P(X, Y \in G) = \iint_G p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (4-29)$$

Совместная плотность распределения двух случайных величин изображается в трехмерном пространстве поверхностью (рис. 4-5) такой, что если в плоскости  $x, y$  указать некоторую область  $G$  (на рис. 4-5 эта область заштрихована) и построить на этой области как на основании цилиндр до пересечения с поверхностью  $p_{xy}(x, y)$ , то объем полученного цилиндрического тела будет как раз равен вероятности совместного попадания  $X$  и  $Y$  в заштрихованную область.

Естественно, что каждая из случайных величин может рассматриваться изолированно от других случайных величин и в этом случае ее свойства будут определяться ее индивидуальным законом распределения. В этой связи возникает вопрос о соотношении между совместным законом распределения совокупности случайных величин, с одной стороны, и индивидуальными законами распределения каждой случайной величины — с другой. Иначе говоря, здесь возникают две задачи:

1) зная совместный закон распределения, определить законы распределения каждой из случайных величин, входящих в рассматриваемую совокупность;

2) зная индивидуальные законы распределения отдельных случайных величин, определить их совместный закон распределения.

Оказывается, что первая задача имеет решение, а вторая может быть решена далеко не всегда. Для того чтобы ее решение было возможным, необходимо, чтобы входящие в систему случайные величины были статистически независимыми. Иначе говоря, совмест-

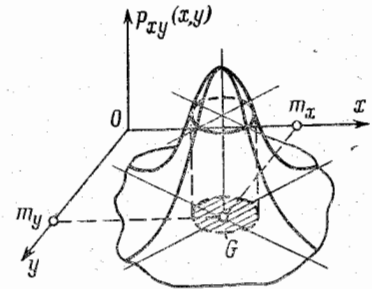


Рис. 4-5.

ный закон распределения совокупности случайных величин содержит в себе, вообще говоря, больше информации об этой совокупности, чем все вместе взятые индивидуальные законы распределения случайных величин, входящих в данную совокупность.

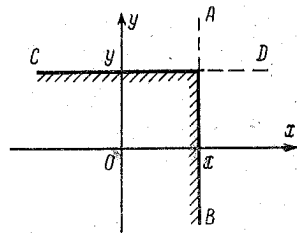


Рис. 4-6.

$$F_{xy}(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (4-30)$$

Эта функция определяет вероятность того, что две случайные величины  $X$  и  $Y$  одновременно примут значения, меньшие  $x$  и  $y$  соответственно (эта область на рис. 4-6 заштрихована). Из рис. 4-6 видно, что безусловная вероятность того, что  $X < x$ , рассматриваемая вне зависимости от значения  $y$ , равна вероятности попадания в область, расположенную слева от оси  $AB$ . С учетом (4-30) эта вероятность определяется формулой

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (4-31)$$

Продифференцировав это выражение по  $x$ , получим формулу для безусловной плотности распределения  $p_x(x)$  случайной величины  $X$ , выраженную через совместную плотность распределения системы:

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dy. \quad (4-32)$$

Аналогично может быть получено выражение для безусловной плотности распределения второй случайной величины

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx. \quad (4-33)$$

Для решения обратной задачи — определения совместного закона распределения вероятности системы по заданным безусловным законам распределения отдельных случайных величин — обратимся вначале к относительным частотам.

Пусть проделано  $n$  повторений опыта, исход которого характеризуется двумя случайными величинами  $X$  и  $Y$ . Допустим, что в результате указанных  $n$  повторений случайная величина  $X$  получила некоторое значение  $x_i$   $l_x$  раз, случайная величина  $Y$  получила значение  $y_j$   $l_y$  раз, а одновременно значения  $x_i$  и  $y_j$  появились  $l_{xy}$  раз. Тогда совместная частота появлений  $x_i$  и  $y_j$  определяется формулой

$$\tilde{P}_{xy}(x_i, y_j) = \frac{l_{xy}}{n}. \quad (4-34)$$

Для того чтобы выразить эту совместную частоту через безусловную частоту появления  $x_i$

$$\tilde{P}(x_i) = \frac{l_x}{n},$$

умножим и разделим правую часть формулы (4-34) на  $l_x$ :

$$\tilde{P}_{xy}(x_i, y_j) = \frac{l_x}{n} \frac{l_{xy}}{l_x}.$$

Легко видеть, что отношение  $l_{xy}/l_x$  определяет частоту появления  $y_j$  при условии, что появилось  $x_i$ . Обозначим эту условную частоту следующим образом:

$$\tilde{P}_{y/x}(y_j/x_i) = \frac{l_{xy}}{l_x}.$$

Тогда

$$\tilde{P}_{xy}(x_i, y_j) = \tilde{P}_x(x_i) \tilde{P}_{y/x}(y_j/x_i).$$

После перехода от относительных частот к вероятностям получим:

$$P_{xy}(x_i, y_j) = P_x(x_i) P_{y/x}(y_j/x_i). \quad (4-35)$$

Точно так же, умножив и разделив обе части равенства (4-34) на  $l_y$ , можно показать, что

$$P_{xy}(x_i, y_j) = P_y(y_j) P_{x/y}(x_i/y_j). \quad (4-36)$$

Таким образом, совместная вероятность появления двух значений  $x_i$  и  $y_j$  случайных величин  $X$  и  $Y$  равна произведению безусловной вероятности появления  $x_i$



на условную вероятность появления  $y_j$  при условии, что появилось  $x_i$ . Это правило называют правилом умножения вероятностей.

Для непрерывных случайных величин можно записать  $P_x(x) = p_x(x)dx$ ,  $P_{y/x}(y/x) = p_{y/x}(y/x)dy$ ,  $P_{xy}(x, y) = p_{xy}(x, y)dxdy$  и, следовательно,

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_{y/x}(y/x) = p_y(y)p_{x/y}(x/y), \quad (4-37)$$

т. е. совместная плотность распределения вероятностей двух случайных величин равна произведению безусловной плотности распределения одной случайной величины на условную плотность распределения другой.

То обстоятельство, что закон распределения вероятности одной случайной величины оказывается зависимым от того, какое значение приняла другая величина, свидетельствует о вероятностной (статистической) зависимости между этими случайными величинами. Однако это не обычная функциональная зависимость — здесь каждому значению одной величины ставится в соответствие не определенное значение другой, а лишь закон распределения этой другой величины.

Если между двумя случайными величинами системы вероятностная зависимость отсутствует, такие величины называются статистически независимыми. Очевидно, что условная плотность распределения вероятности каждой случайной величины в этом случае равна безусловной плотности распределения вероятности:

$$p_{y/x}(y/x) = p_y(y). \quad (4-38)$$

Соответственно формула (4-37) для плотности распределения вероятности системы в этом случае принимает следующий вид:

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y), \quad (4-39)$$

т. е. плотность распределения системы равна произведению индивидуальных плотностей распределения отдельных случайных величин.

Понятие совместной плотности распределения естественным путем обобщается на систему из произвольного числа  $n$  случайных величин как функция  $n$  переменных — возможных значений случайных величин системы —  $n$ -кратный интеграл от которой, взятый по произ-

вольной области  $G$ , равен вероятности совместного попадания всех случайных величин системы в эту область:

$$P(X, Y \dots \in G) = \int \int \dots \int \overbrace{\dots}^n p_{xy \dots}(x, y \dots) dxdy \dots \quad (4-40)$$

Если плотность распределения системы случайных величин  $p_{xy \dots}(x, y \dots)$  задана, вычисление плотности распределения функции  $Z = f(X, Y \dots)$  этих случайных величин может осуществляться по той же схеме, что и определение плотности распределения функции одной случайной величины (см. § 4-4). Вначале определяется интегральная функция распределения:

$$F_z(z) = \int \int \dots \int \overbrace{\dots}^n p_{xy \dots}(x, y \dots) dxdy \dots, \quad (4-41)$$

где  $G$  — область в пространстве возможных значений  $X, Y \dots$ , в которой  $f(X, Y \dots) < z$  [границы этой области определяются видом функциональной зависимости  $f(X, Y \dots)$ ]. После этого дифференцированием  $F_z(z)$  по  $z$  находится плотность распределения  $p_z(z)$ .

В качестве примера найдем плотность распределения суммы квадратов двух независимых нормально распределенных центрированных и нормированных случайных величин

$$Y = V_1^2 + V_2^2. \quad (4-42)$$

Совместная плотность распределения этих случайных величин равна произведению их индивидуальных плотностей распределения:

$$p_{v_1 v_2}(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)}.$$

В трехмерном пространстве график этой функции (приведен на рис. 4-5) представляет собой „купол“, симметричный относительно оси  $p_{v_1 v_2}(v_1, v_2)$  такой, что его сечения плоскостями  $p_{v_1 v_2}(v_1, v_2) = \text{const}$  являются окружностями.

Будем интересоваться вероятностью того, что случайная величина  $Y$  окажется меньше некоторого фиксированного значения  $y$ . Это событие может произойти лишь при выполнении условия

$$Y < v_1^2 + v_2^2.$$

т. е. его вероятность равна вероятности попадания случайных величин  $V_1$  и  $V_2$  одновременно в область  $G$ , ограниченную окружностью  $y = v_1^2 + v_2^2$  и представляющую собой круг с центром в начале коор-

динат и радиусом, равным  $\sqrt{y}$ . Таким образом, интегральная функция распределения  $Y$  определяется формулой

$$F_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(G)} e^{-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)} dv_1 dv_2.$$

Этот двойной интеграл определяется объемом цилиндрического тела, основанием которого является круг  $G$ , ограниченного сверху графиком совместной плотности распределения. Выделим в этом теле цилиндрическую «трубку» с внутренним радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ . Объем стенок этой трубки будет равен:

$$2\pi r dr \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} = r e^{-r^2/2} dr.$$

Для вычисления объема всего тела цилиндра необходимо просуммировать объемы стенок всех таких трубок, т. е. проинтегрировать последнее выражение в пределах от  $r=0$  до  $r=\sqrt{y}$ :

$$F_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}} r e^{-r^2/2} dr.$$

Продифференцировав полученную формулу по  $y$ , получим выражение для искомой плотности распределения:

$$p_Y(y) = \frac{d\sqrt{y}}{dy} \frac{d}{d\sqrt{y}} \int_0^{\sqrt{y}} r e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{2} e^{-y/2} \quad (y > 0). \quad (4-43)$$

Эта формула определяет плотность распределения, получившую в статистике название «хи-квадрат с двумя степенями свободы».

#### 4-6. Математическое ожидание и дисперсия линейной функции нескольких случайных величин

Для приложений особенно важное значение имеет линейная функция нескольких случайных величин (в частности, выходная величина линейной динамической системы в любой момент времени является линейной функцией предшествующих значений входного воздействия). Линейная функция  $Z$  двух случайных величин  $X$  и  $Y$  (при соответствующем выборе начала отсчета  $Z$ ) определяется следующим выражением:

$$Z = aX + bY. \quad (4-44)$$

Для вычисления математического ожидания этой функции необходимо просуммировать все возможные ее значения  $z = ax + by$  с весами, равными вероятностям появления каждого из них  $p_{xy}(x, y) dx dy$ , т. е. вычислить двойной интеграл

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (4-45)$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$m_z = a \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dy + b \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx$$

или, учитывая (4-32) и (4-33),

$$m_z = a \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy = am_x + bm_y \quad (4-46)$$

Таким образом, математическое ожидание линейной функции равно значению той же линейной функции от математических ожиданий аргументов.

Дисперсия линейной функции двух аргументов определяется по обычной формуле (4-12):

$$\sigma_z^2 = M\{(Z - m_z)^2\}.$$

После подстановки сюда выражений (4-44) и (4-46) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= M\{(aX + bY)^2\} = \\ &= M\{a^2 X^2 + b^2 Y^2 + 2abXY\} = \\ &= a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2abr_{xy}, \end{aligned} \quad (4-47)$$

где через  $r_{xy}$  обозначено математическое ожидание произведения центрированных случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$r_{xy} = M\{XY\}. \quad (4-48)$$

Эта новая числовая характеристика двух случайных величин характеризует вероятностную связь между ними и называется корреляционным моментом случайных величин.

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю. Так как корреляционный момент является математическим ожиданием произведения случайных величин  $X$  и  $Y$ , для вычисления этой характеристики необходимо просуммировать все возможные значения  $x$  и  $y$  с весами, равными совместной вероятности появления значений  $x$  и  $y$ , т. е. вычислить интеграл:

$$r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (4-49)$$

Если случайные величины независимы, то, подставив в (4-49) (4-39), получим:

$$r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy.$$

Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy$  представляет собой математическое ожидание центрированной случайной величины  $Y$ , которое (по самому определению центрированной случайной величины) должно быть равным нулю. Аналогичное заключение следует сделать и по отношению к интегралу  $\int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx$ , представляющему собой математическое ожидание  $X$ . Таким образом, для независимых случайных величин корреляционный момент (4-49) обращается в нуль. Следует, однако, отметить, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. равенство нулю корреляционного момента двух случайных величин, связанных нелинейной зависимостью, еще не является достаточным основанием для того, чтобы считать эти случайные величины статистически независимыми. Таким образом, корреляционный момент является менее полной характеристикой вероятностной связи между двумя случайными величинами, чем совместный закон распределения. Тем не менее в нем заключена достаточная информация об этой взаимосвязи для того, чтобы можно было определить дисперсию линейной функции соответствующих случайных величин.

Полученные формулы (4-46) и (4-47) могут быть обобщены на линейную функцию произвольного числа  $n$  случайных величин:

$$Z = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i. \quad (4-50)$$

Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия этой функции определяются формулами:

$$m_z = a + \sum_{i=1}^n b_i m_{xi}; \quad (4-51)$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_{xi}^2 + 2 \sum_{j < i} b_i b_j r_{x_i x_j}, \quad (4-52)$$

причем суммирование распространяется на все возможные парные сочетания случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

#### 4-7. Вероятностная зависимость

Нарушение жесткой функциональной связи, имеющее место при случайной вероятностной зависимости между переменными величинами, может быть интерпретировано как наложение случайной неконтролируемой помехи на обычную (детерминированную) функциональную зависимость. В результате переменная  $y$  зависит не только от контролируемой переменной  $x$ , но и от одной или нескольких неконтролируемых случайных величин (помех)  $v$ , т. е. она становится функцией многих переменных:

$$y = F(x, v_1, \dots, v_n). \quad (4-53)$$

Но так как аргументы  $v_1, \dots, v_n$  не контролируются и меняются случайным образом, то приходится считать  $Y$  связанным с одной переменной  $x$  вероятностной зависимостью, характеризуемой условным законом распределения  $p(y/x)$ . При этом аргумент  $x$  необязательно должен быть случайной величиной; в то же время  $Y$  всегда величина случайная.

Вместо условного закона распределения на практике для описания вероятностной связи чаще применяются более простые, хотя и менее полные, характеристики: условное математическое ожидание случайной величины  $Y$ , обозначаемое  $m_{y/x}$ , и условная дисперсия  $\sigma_{y/x}^2$ .

Условное математическое ожидание случайной величины  $Y$  представляет собой неслучайную (детерминированную) зависимость математического ожидания  $m_y$  от возможных значений  $x$ ; условное математическое ожидание в статистике часто называют также регрессией случайной величины  $Y$  на  $x$ . Соответственно условная дисперсия  $\sigma_{y/x}^2$  есть зависимость дисперсии  $\sigma_y^2$  от  $x$ .

Вероятностная зависимость является линейной, если линейная функция (4-53), т. е. когда

$$Y = c + kx + N, \quad (4-54)$$

где  $N$  — эквивалентная центрированная случайная величина, учитывающая общий эффект действия помех  $v_1, \dots, v_n$ .

Условное математическое ожидание в этом случае выражается линейной зависимостью и называется линейной регрессией:

$$m_{y/x} = c + kx, \quad (4-55)$$

а условная дисперсия

$$\sigma_{y/x}^2 = \sigma_v^2 \quad (4-56)$$

постоянна; коэффициент  $k$  в приведенных формулах называется коэффициентом регрессии.

Если две случайные величины  $X$  и  $Y$  связаны между собой линейной вероятностной зависимостью и каждая распределена по нормальному закону, то для полного описания совокупности этих двух случайных величин достаточно располагать математическими ожиданиями и дисперсиями этих величин  $m_x, m_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ , а также корреляционным моментом  $r_{xy}$ . Иначе говоря, в рассматриваемом случае корреляционный момент является исчерпывающей характеристикой статистической взаимосвязи между случайными величинами.

Подставив в (4-54) случайную величину  $X$

$$Y = c + kX + N, \quad (4-57)$$

легко найти математическое ожидание и дисперсию  $Y$ :

$$m_y = c + km_x; \quad \sigma_y^2 = k^2 \sigma_x^2 + \sigma_v^2, \quad (4-58)$$

а также корреляционный момент  $X$  и  $Y$ :

$$r_{xy} = M\{XY\} = M\{X(kX + N)\} = k\sigma_x^2. \quad (4-59)$$

Из полученных уравнений могут быть по заданным  $m_x, m_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, r_{xy}$  легко определены искомые коэффициенты  $c, k$  и  $\sigma_v^2$ .

Линейную статистическую связь между случайными величинами  $X$  и  $Y$  удобно характеризовать относительной долей участия в дисперсии  $\sigma_y^2$  случайной величины  $Y$  составляющей  $k^2 \sigma_x^2$ , обусловленной влиянием  $X$ :

$$r_{xy}^2 = \frac{k^2 \sigma_x^2}{\sigma_y^2}$$

или, учитывая (4-59),

$$r_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4-60)$$

Коэффициент  $r_{xy}$  получил название коэффициента корреляции системы случайных величин  $X$  и  $Y$ . Из самого определения этого коэффициента следует, что его величина должна быть заключена между нулем и единицей.

Если индивидуальные законы распределения каждой из случайных величин  $X$  и  $Y$  нормальны, а статистическая взаимосвязь между ними линейна, то, очевидно, совокупность характеристик  $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$  и  $r_{xy}$  (или  $\rho_{xy}$ ) столь же полно характеризуют вероятностные свойства системы этих двух случайных величин, как и ее совместный закон распределения  $p_{xy}(x, y)$ . Найдем выражение для совместной плотности распределения, которая имеет место в этом случае, для чего вначале определим условную плотность распределения  $p_{y/x}(y/x)$ . Очевидно, что эту плотность распределения имеет случайная величина  $Y$  (4-57), когда  $X$  принимает постоянное фиксированное значение  $x = x_0$ :

$$Y = c + kx_0 + N.$$

Эта случайная величина будет распределена нормально с математическим ожиданием и дисперсией, определяемыми формулами (4-55), (4-56), т. е.

$$p_{y/x}(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(y-c-kx)^2}{2\sigma_v^2}}$$

Воспользовавшись теперь формулой (4-37), получим:

$$p_{xy}(x, y) = p_{y/x}(y/x)p_x(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_v} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y-c-kx)^2}{\sigma_v^2} + \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}\right]},$$

или, заменив  $\sigma_v, k, c$  их выражениями через  $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho_{xy}$  (4-58), (4-59):

$$p_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy}\frac{x-m_x}{\sigma_x}\frac{y-m_y}{\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}. \quad (4-61)$$

Совместный закон распределения системы из двух случайных величин, плотность распределения которого определяется полученной формулой, называется двумерным нормальным законом распределения. Соответственно система случайных величин, имеющая такой закон распределения, называется нормально распределенной системой случайных величин.

График двумерной нормальной плотности распределения представляет собой поверхность в виде «купола» (типа приведенной на рис. 4-5), координаты вершины которого равны математическим

ожиданиям  $m_x$ ,  $m_y$ . В сечении этой поверхности плоскостями, параллельными плоскости  $p_{xy} = \text{const}$ , получаются эллипсы, называемые эллипсами рассеивания. Ориентация осей этих эллипсов зависит от величины коэффициента корреляции  $\rho_{xy}$ . Если случайные величины системы независимы, оси эллипсов рассеивания оказываются параллельными координатным осям. Если дисперсии обеих случайных величин системы одинаковы, эллипсы рассеивания обращаются в окружности.

#### 4-8. Характеристики случайных процессов

С понятием случайной величины можно связать эксперимент, результаты которого характеризуются некоторым числом, причем при повторении этого эксперимента в одинаковых контролируемых условиях получаются различные результаты, обусловленные влиянием случайных неконтролируемых факторов. С понятием случайной функции времени (обычно называемой случайным процессом) можно связать эксперимент, результат которого характеризуется некоторой функцией времени, причем при повторении эксперимента в одинаковых условиях эта функция может принимать различный вид. Так, нагрузка электростанции в какой-то фиксированный момент суток (например, в 6 ч) является случайной величиной, так как она характеризуется числом, величина которого в каждые последующие сутки может случайным образом отличаться от значения, имевшего место в тот же момент времени предыдущих суток. Однако изменение нагрузки электростанции в течение одного часа работы (например, между шестью и семью часами) уже будет случайным процессом. Конкретный вид, который может принять случайный процесс в результате эксперимента, называется реализацией этого процесса. Совокупность всех реализаций, которые могут возникнуть в результате эксперимента, называется ансамблем реализаций данного случайного процесса. Обычно случайный процесс обозначается прописными буквами [например,  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и т. д.], а возможные реализации случайного процесса — строчными буквами с соответствующими индексами [например, реализации случайного процесса  $X(t)$  обозначаются  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ...].

Случайный процесс  $X(t)$  в конкретный момент времени  $t=t_1$  представляет собой случайную величину  $X(t_1)$ , называемую сечением случайного процесса для выбранного момента.

Пусть нас интересует вероятность появления одной из возможных реализаций  $x_h(t)$  случайного процесса  $X(t)$  (рис. 4-7), заданного на конечном отрезке времени  $0 \leq t \leq T$ . Разобьем этот отрезок на  $n$  достаточно малых отрезков; тогда рассматриваемая реализация приближенно определяется совокупностью чисел  $x_1(\Delta t)$ , ...,  $x_1(n\Delta t)$ , причем каждое из этих чисел является возможным значением случайных величин сечений  $X(\Delta t)$ , ...,  $X(n\Delta t)$  соответственно. Отсюда следует, что для задания такого случайного процесса достаточно указать закон распределения системы из  $n$  случайных величин.

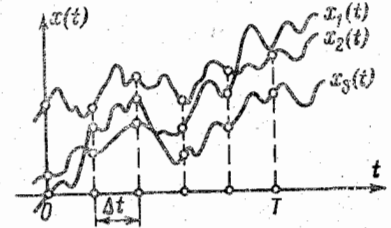


Рис. 4-7.

Для точного описания случайного процесса необходимо интервалы разбиения  $\Delta t$  устремить к нулю;

при этом число сечений на любом конечном отрезке изменения времени окажется бесконечно большим. Соответственно для описания вероятностных свойств случайного процесса необходимо задать закон распределения бесконечно большой совокупности случайных величин (бесконечномерный закон распределения). Естественно поэтому, что при практических операциях со случайными процессами приходится ограничиваться менее полным, зато значительно более простым набором характеристик этого процесса — математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией.

Математическим ожиданием (средним значением) случайного процесса называется неслучайная (детерминированная) функция времени  $m_x(t)$ , значение которой в любой момент времени равно математическому ожиданию сечения случайного процесса для этого момента времени:

$$m_x(t) = M\{X(t)\}. \quad (4-62)$$

Дисперсией случайного процесса называется неслучайная функция времени  $\sigma_x^2(t)$ , значение которой в любой момент времени равно дисперсии сечения случайного процесса для этого момента.

Корреляционной функцией случайного процесса называется неслучайная функция  $r_{xx}(t', t'')$

двух переменных  $t'$  и  $t''$ , значение которой для любой пары  $t'$  и  $t''$  равно корреляционному моменту (4-48) для сечений случайного процесса  $X(t')$  и  $X(t'')$ :

$$r_{xx}(t', t'') = M\{[X(t') - m_x(t')][X(t'') - m_x(t'')]\}. \quad (4-63)$$

Очевидно, что дисперсия случайного процесса может рассматриваться как частный случай его корреляционной функции, когда  $t' = t''$ .

Если математическое ожидание случайного процесса представляет собой постоянную, не зависящую от времени величину  $m_x$ , а корреляционная функция  $r_{xx}(\tau)$  яв-

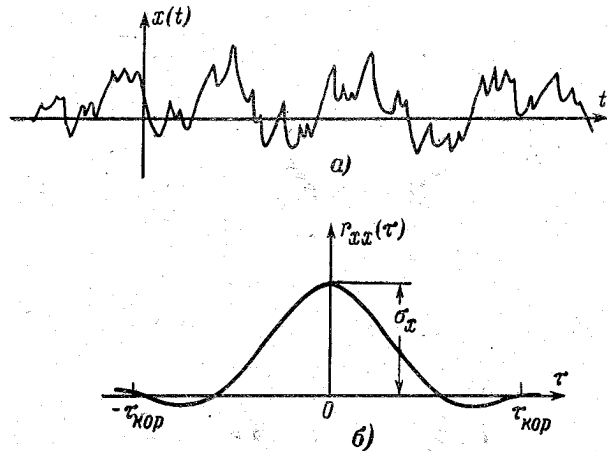


Рис. 4-8.

ляется функцией лишь одного переменного — сдвига по времени между сечениями  $\tau = t'' - t$ , то такой процесс называется стационарным.

Реализации стационарного случайного процесса имеют характер стабильных флуктуаций вокруг постоянного уровня, причем величина этих отклонений имеет в среднем также постоянную величину (рис. 4-8,а).

Стационарные случайные процессы обычно обладают свойством эргодичности. Это значит, что вычисление характеристик такого процесса может осуществляться не только усреднением по ансамблю реализаций, но и усреднением по времени при оперировании лишь одной произвольной реализацией. Так, математическое

ожидание эргодичного стационарного процесса может быть вычислено по формуле

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (4-64)$$

а корреляционная функция

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt. \quad (4-65)$$

Если вероятностная связь между сечениями случайного процесса уменьшается с увеличением сдвига  $\tau$  между ними (что обычно имеет место в реальных процессах), корреляционная функция имеет убывающий (монотонно или колебательно) характер (рис. 4-8,б). Корреляционная функция стационарного процесса, очевидно, должна быть четной функцией  $\tau$ , т. е.

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau). \quad (4-66)$$

При  $\tau = 0$  значение корреляционной функции равно дисперсии процесса, которая для стационарных процессов является постоянной, не зависящей от времени величиной; при  $\tau \rightarrow \infty$  обычно  $r_{xx}(\tau) \rightarrow 0$ .

Стационарный случайный процесс, в котором полностью отсутствует корреляция между сколь угодно близкими сечениями, называется белым шумом. Корреляционная функция такого процесса представляет собой дельта-функцию  $r_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$ . Дисперсия белого шума является величиной бесконечно большой.

Специальный класс случайных процессов составляют процессы, для которых известно их аналитическое выражение, но коэффициенты которого являются случайными величинами. Примером подобного процесса является случайное гармоническое колебание частоты  $\omega$

$$X(t) = A \cos(\omega t + \psi), \quad (4-67)$$

если амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\psi$  этого колебания (или один из этих коэффициентов) являются случайными величинами.

В отличие от рассмотренных ранее случайных процессов характер изменения реализаций подобных процессов может быть предсказан заранее, неизвестными являются лишь численные значения коэффициентов этих реализаций. Если наблюдение реализации процесса началось, то дальнейшее изменение рассматриваемого процесса уже является predetermined. Естественно, что корреляционная функция таких процессов может не стремиться к нулю при

увеличении  $\tau$ . Можно показать, что корреляционная функция случайного гармонического колебания (4-67) в случае, когда его начальная фаза является случайной величиной, появление любого значения которой (в пределах  $\psi$  от 0 до  $2\pi$ ) равновероятно, является косинусоидой вида

$$r_{xx}(\tau) = C \cos \omega\tau, \quad (4-68)$$

амплитуда которой  $C$  определяется формулой

$$C = M \left\{ \frac{A^2}{2} \right\}. \quad (4-69)$$

#### 4-9. Преобразование случайных воздействий линейными динамическими системами

Анализ поведения динамических систем, находящихся под воздействием случайных процессов, сводится к определению вероятностных характеристик реакции системы на такого рода воздействия. Обычно задача ограничивается определением наиболее простых характеристик — математического ожидания и корреляционной функции выходной величины. Однако и в такой ограниченной постановке решение задачи для нелинейных систем (даже для систем с одним входом и одним выходом) оказывается весьма сложным, а иногда и практически невыполнимым. Вызывается это тем, что для решения этой задачи необходимо, вообще говоря, располагать исчерпывающей вероятностной характеристикой входного случайного воздействия — его бесконечномерным законом распределения. Задача еще более усложняется, если система оказывается недетерминированной. В этом случае математическое описание системы с помощью аппарата дифференциальных уравнений становится непригодным; необходимо располагать бесконечномерным условным законом распределения, который указывал бы вероятность появления того или иного значения выходной величины в зависимости от всех возможных реализаций входного воздействия.

Поставленная задача имеет достаточно простое решение лишь в случае, когда динамическая система является стационарной и линейной. Для детерминированной стационарной линейной системы значение выходной величины в любой момент времени определяется формулой (2-2).

Соответственно, если на вход такой системы действует случайный процесс  $X(t)$ , на ее выходе возникает

случайный процесс, связанный с входным процессом соотношением

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) X(t - \xi) d\xi. \quad (4-70)$$

Эту формулу следует понимать в том смысле, что появление на входе системы одной из возможных реализаций  $x(t)$  случайного процесса  $X(t)$  вызовет на ее выходе реализацию  $y(t)$  случайного процесса  $Y(t)$ , которая связана с  $x(t)$  соотношением (2-2).

Математическое ожидание случайного процесса на выходе определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) X(t - \xi) d\xi \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) M \{ X(t - \xi) \} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) m_x(t - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4-71)$$

а его корреляционная функция

$$\begin{aligned} r_{yy}(t', t'') &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) X(t' - \xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) X(t'' - \right. \\ &\quad \left. - \eta) d\eta \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) M \{ X(t' - \xi) X(t'' - \\ &\quad - \eta) \} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{xx}(t' - \xi, t'' - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (4-72)$$

Для стационарного входного воздействия формулы (4-71) и (4-72) принимают следующий вид:

$$m_y = k m_x; \quad (4-73)$$

$$r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta, \quad (4-74)$$

где

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \quad (4-75)$$

есть коэффициент передачи системы.

Чтобы получить выражение для дисперсии выходной величины, достаточно в (4-74) положить  $\tau=0$ :

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta. \quad (4-76)$$

В частности, если на вход системы подается белый шум, последняя формула приобретает следующий вид:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(t)]^2 dt. \quad (4-77)$$

Вычисления, которые приходится выполнять по формуле (4-74), существенно упрощаются при использовании преобразования Фурье, т. е. при оперировании не с корреляционными функциями входа и выхода, а со спектрами этих функций, определяемыми по обычной формуле преобразования (2-18):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4-78)$$

Так как корреляционная функция является четной функцией, ее спектр является вещественной функцией частоты (см. § 2-3). В дальнейшем спектр корреляционной функции стационарного случайного процесса будет называться спектром мощности этого процесса.

Можно показать (см., например, [Л. 6, 9]), что случайный стационарный процесс может быть разложен на сумму элементарных случайных гармоник вида (4-67) с бесконечно малыми амплитудами, корреляционные функции которых определяются выражением (4-68). Спектр мощности стационарного случайного процесса как раз и определяет амплитуды этих корреляционных функций для каждой частоты или определяет, как это следует из (4-69), математическое ожидание квадрата амплитуд гармоник разложения самого процесса. Но так как в электротехнике с квадратом электрического тока обычно связывается понятие выделяемой в проводнике мощности, то отсюда и следует название спектра корреляционной функции как спектра мощности процесса.

Для эргодичных стационарных случайных процессов вычисление спектра мощности, выполненное по различным реализациям, должно давать один и тот же резуль-

тат. Это значит, что разложение каждой реализации такого процесса состоит из гармонических составляющих, которые отличаются тем свойством, что гармоники одинаковой частоты в каждой из реализаций имеют одну и ту же амплитуду. Различный вид отдельных реализаций обусловлен только различной начальной фазой гармонических составляющих каждой реализации. Это обстоятельство полезно иметь в виду, например, при моделировании эргодичных стационарных случайных процессов.

Спектр случайного белого шума (как изображение дельта-функции) равен единице на всех частотах. Это значит, что в разложении такого процесса присутствуют гармоники частот от  $\omega=0$  до  $\omega \rightarrow \infty$ , причем амплитуды этих гармоник одинаковы.

Подставим в формулу (4-78) выражение для  $r_{yy}(\tau)$ , взятое из соотношения (4-74). Это приведет к следующему результату:

$$G_{yy}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta.$$

Если правую часть полученного выражения умножить и разделить на  $e^{(\xi-\eta)p}$  и изменить порядок интегрирования, то можно записать:

$$G_{yy}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) e^{\xi p} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) e^{-\eta p} \times \\ \times d\eta \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau + \xi - \eta) e^{-(\tau + \xi - \eta)p} d(\tau + \xi - \eta).$$

Легко видеть, что правая часть этого выражения состоит из спектра мощности входа

$$G_{xx}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\rho) e^{-\rho p} d\rho,$$

и амплитудно-фазовой характеристики системы

$$W(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) e^{-\eta p} d\eta,$$

т. е.

$$G_{yy}(p) = W(p) W(-p) G_{xx}(p). \quad (4-79)$$



Это выражение может быть также переписано следующим образом:

$$G_{yy}(\omega) = |W(j\omega)|^2 G_{xx}(\omega). \quad (4-80)$$

После определения спектра мощности выхода корреляционная функция выходной величины может быть получена обычным порядком — применением к  $G_{yy}(\omega)$  обратного преобразования:

$$r_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4-81)$$

Положив в последней формуле  $\tau=0$ , получим выражение для определения дисперсии выхода:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) d\omega. \quad (4-82)$$

Определим среднеквадратичное значение выхода динамической системы, имеющей оператор:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

когда на ее вход подается случайный сигнал с корреляционной функцией

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

„Правая“ часть этой функции определяется выражением

$$r_{xx}^+(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau}.$$

Изображение этой части

$$G_{xx}^+(p) = \frac{\sigma_x^2}{\alpha + p}.$$

Используя (2-28), получаем следующее выражение для спектра мощности входного сигнала:

$$G_{xx}(p) = \frac{\sigma_x^2}{\alpha + p} + \frac{\sigma_x^2}{\alpha - p} = \frac{2\alpha\sigma_x^2}{(\alpha + p)(\alpha - p)},$$

т. е.

$$G_{xx}(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Имея в виду, что модуль частотной характеристики рассматриваемой системы

$$|W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}},$$

и используя формулу (4-80), получаем следующее выражение для спектра мощности выходной величины

$$G_{yy}(\omega) = \frac{2\alpha k^2 \sigma_x^2}{(1 + T^2\omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Вычислив теперь интеграл (4-82), находим дисперсию выходной величины:

$$\sigma_y^2 = \frac{k^2 \sigma_x^2}{1 + T\alpha}.$$

#### 4-10. Преобразование случайных воздействий линейной стохастической системой

В линейной стохастической системе эффект действия случайных неконтролируемых помех  $\lambda(t)$  (см. рис. 1-3,а) может быть учтен в виде одного случайного воздействия  $v(t)$  (аддитивной помехи), наложенного непосредственно на выходную величину системы (см. рис. 1-3,б), так что случайный процесс на выходе такой системы может быть определен следующим образом:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) x(t - \xi) d\xi + N(t). \quad (4-83)$$

Найдем выражение для корреляционной функции выходной величины системы, ограничившись случаем стационарных процессов  $X(t)$  и  $N(t)$ . Умножив  $Y(t)$  на  $Y(t + \tau)$  и усреднив результат, получим:

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= M \{Y(t) Y(t + \tau)\} = \\ &= M \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) X(t - \xi) d\xi + N(t) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) X(t + \tau - \eta) d\eta + N(t + \tau) \right] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \omega(\eta) r_{xx}(\xi - \eta + \tau) d\xi d\eta + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) r_{yy}(\tau + \xi) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{yy}(\tau - \eta) d\eta + r_{yy}(\tau). \end{aligned} \quad (4-84)$$

В формуле (4-84) через  $r_{yy}(\tau)$  обозначена корреляционная функция помехи  $N(t)$ , а через  $r_{xy}(\tau)$  и  $r_{yx}(\tau)$  — взаимные корреляционные функции процессов  $X(t)$  и  $N(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= M \{ \overset{0}{X}(t) \overset{0}{N}(t+\tau) \}; \\ r_{yx}(\tau) &= M \{ \overset{0}{N}(t) \overset{0}{X}(t+\tau) \}. \end{aligned} \right\} \quad (4-85)$$

Подобно тому, как корреляционная функция отдельно взятого процесса характеризует линейную статистическую связь между сечениями этого процесса, взаимная корреляционная функция характеризует статистическую связь сечений двух различных процессов. В отличие от корреляционной функции отдельно взятого процесса (такие корреляционные функции часто называют автокорреляционными функциями) взаимная корреляционная функция не является четной функцией  $\tau$ ; т. е. для нее оказывается недействительным условие (4-66); можно, однако, показать, что взаимная корреляционная функция двух произвольных стационарных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  удовлетворяет следующему условию:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau). \quad (4-86)$$

Если взаимная корреляционная функция двух стационарных процессов не зависит от времени, а зависит лишь от сдвига  $\tau$ , то такие процессы называются стационарно связанными.

В случае, когда аддитивная помеха в линейной стохастической системе оказывается статистически независимой от входного воздействия, формула (4-84) приобретает следующий вид:

$$r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \omega(\eta) r_{xx}(\xi - \eta + \tau) d\xi d\eta + r_{yy}(\tau). \quad (4-87)$$

Вычисления, которые необходимо выполнять по формуле (4-84), упрощаются, если перейти в область изображений. Аналогично тому, как это было сделано при выводе формулы (4-79), можно показать, что спектр

мощности в рассматриваемой стохастической системе будет определяться следующим образом:

$$G_{yy}(p) = W(p) W(-p) G_{xx}(p) + W(p) G_{yx}(p) + W(-p) G_{xy}(p) + G_{yy}(p), \quad (4-88)$$

где  $G_{xy}(p)$  и  $G_{yx}(p)$  — изображения взаимных корреляционных функций  $r_{xy}(\tau)$  и  $r_{yx}(\tau)$  соответственно, называемые взаимными спектрами мощности процессов  $X(t)$  и  $N(t)$ .

Вычислим взаимную корреляционную функцию входа и выхода линейной стохастической системы:

$$r_{xy}(\tau) = M \{ \overset{0}{X}(t) \overset{0}{Y}(t+\tau) \}. \quad (4-89)$$

Подставив сюда выражение для  $\overset{0}{Y}(t)$ , получим:

$$r_{xy}(\tau) = M \left\{ \overset{0}{X}(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \overset{0}{X}(t+\tau-\xi) d\xi + \overset{0}{N}(t+\delta) \right] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) r_{xx}(\tau-\xi) d\xi + r_{xy}(\tau). \quad (4-90)$$

В частном случае, если статистическая связь между входным воздействием  $X(t)$  и помехой  $N(t)$  отсутствует и  $r_{xy}(\tau) = 0$ , это выражение приобретает следующий вид:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) r_{xx}(\tau-\xi) d\xi, \quad (4-91)$$

т. е. в этом случае взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов линейной стохастической системы связана с автокорреляционной функцией входного воздействия точно такой же зависимостью, как выходная величина связана с входной в детерминированных линейных системах (2-2).

Формула (4-91) является фундаментальной для процедуры получения математического описания линейных динамических систем, выход которых искажен случайными неконтролируемыми помехами. Действительно, записав реализации входного воздействия и выходной величины системы и вычислив по ним автокорреляцион-

ную функцию  $r_{xx}(\tau)$  и взаимную корреляционную функцию  $r_{xy}(\tau)$ , можно затем, рассматривая соотношение (4-91) как интегральное уравнение, найти по заданным  $r_{xx}(\tau)$  и  $r_{xy}(\tau)$  весовую характеристику системы  $w(t)$ .

Перейдя в область изображений, формулу (4-91) можно также представить в следующем виде:

$$G_{xy}(p) = W(p) G_{xx}(p). \quad (4-92)$$

Соответственно, если по данным наблюдения за входом и выходом системы определены спектр мощности входного воздействия  $G_{xx}(p)$  и взаимный спектр мощности входа и выхода  $G_{xy}(p)$ , отношение этих спектров даст амплитудно-фазовую характеристику системы.

#### 4-11. Синтез оптимальных динамических систем, минимизирующих среднеквадратичную ошибку

В предыдущих параграфах рассматривалась задача анализа системы со случайным воздействием на входе. Целью расчета было определение вероятностных характеристик выходной величины по известным вероятностным характеристикам входного воздействия и известным динамическим характеристикам системы. Часто встречается задача, обратная сформулированной, когда отыскивается оптимальная система, т. е. система, наилучшим образом осуществляющая требуемое преобразование входного сигнала. Решение подобных задач получило название синтеза оптимальных систем.

Одной из наиболее распространенных задач синтеза является следующая. Имеются два случайных стационарных сигнала  $X(t)$  и  $Z(t)$  с известными корреляционными функциями  $r_{xx}(\tau)$ ,  $r_{zz}(\tau)$ ,  $r_{xz}(\tau)$ . Один из этих сигналов  $X(t)$  преобразуется в линейной стационарной динамической системе с весовой характеристикой  $w(t)$  (рис. 4-9,а), причем весовая характеристика системы должна удовлетворять естественному условию физической реализуемости

$$w(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (4-93)$$

Это условие обозначает, что в любой физической реальной системе реакция на входное воздействие не может возникнуть до появления самого воздействия. В более общем случае в синтезируемой системе может быть неустранимое транспортное запаздывание в пере-

даче воздействия  $\tau_0$ . В этом случае последнее условие следует заменить более общим:

$$w(t) = 0 \text{ при } t < \tau_0. \quad (4-94)$$

Требуется так подобрать эту характеристику, чтобы среднеквадратичное отклонение преобразованного сигнала на выходе системы  $Y(t)$  от сигнала  $Z(t)$  было минимально возможным.

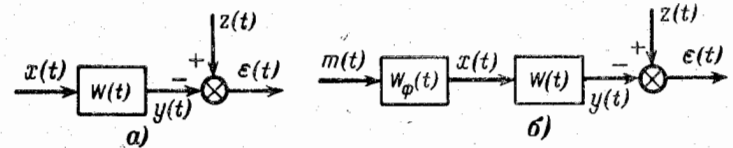


Рис. 4-9.

Ошибка воспроизведения сигнала в рассматриваемой схеме определяется следующим выражением:

$$\varepsilon(t) = Z(t) - \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) X(t - \xi) d\xi.$$

Возведя в квадрат

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = & Z^2(t) - 2Z(t) \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) X(t - \xi) d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) X(t - \xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) X(t - \eta) d\eta \end{aligned}$$

и усреднив по времени, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon}^2 = & \sigma_z^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) r_{zx}(-\xi) d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (4-95)$$

Весовую характеристику системы  $w(t)$  можно представить следующим образом:

$$w(t) = w_{\text{опт}}(t) + ba(t),$$

где  $w_{\text{опт}}(t)$  — оптимальная характеристика, при подстановке которой в выражение (4-95) получим минимально возможное значение дисперсии ошибки  $\sigma_e^2 = \sigma_{e \text{ мин}}^2$ ;  $a(t)$  — произвольная функция  $t$ , не зависящая от  $w_{\text{опт}}(t)$ ;  $b$  — постоянный коэффициент, могущий принимать любое, как положительное, так и отрицательное, значение.

После подстановки этого выражения в (4-95) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 = & \sigma_z^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\text{опт}}(\xi) + ba(\xi)] \times \\ & \times r_{zx}(-\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\text{опт}}(\xi) + \\ & + ba(\xi)] d\xi \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\text{опт}}(\eta) + ba(\eta)] r_{xx}(\xi - \eta) d\eta \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 = & \sigma_{e \text{ мин}}^2 - 2b \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \left[ r_{zx}(-\xi) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta \right] d\xi \right\} + \\ & + b^2 \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} a(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (4-96)$$

Очевидно, что вычисленная по этой формуле дисперсия ошибки должна быть больше  $\sigma_{e \text{ мин}}^2$  при любом сколь угодно малом значении  $b$ , как положительном, так и отрицательном; но, как легко видеть, это оказывается возможным лишь при обращении выражения в квадратных скобках в нуль, т. е. при выполнении условия

$$r_{zx}(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta = 0. \quad (4-97)$$

Это условие может рассматриваться как интегральное уравнение, решение которого определяет искомую оптимальную весовую характеристику системы  $w_{\text{опт}}(t)$ . Следует обратить внимание, что  $a(t)$  должно удовлетворять условию физической осуществимости (4-94). По-

этому для обращения квадратной скобки в выражении (4-96) в нуль достаточно, чтобы уравнение (4-97) удовлетворялось лишь при  $\xi \geq \tau_0$  [при  $\xi < \tau_0$  квадратная скобка будет равна нулю, поскольку равна нулю  $a(\xi)$ ].

Обратим внимание на то, что решение уравнения (4-97) находилось бы предельно просто, если бы входное воздействие представляло собой белый шум. Действительно, так как корреляционная функция белого шума представляет собой дельта-импульс, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\eta) \delta(\xi - \eta) d\eta = w_{\text{опт}}(\xi). \quad (4-98)$$

Следовательно, весовая функция оптимальной системы в этом случае определяется формулой

$$w_{\text{опт}}(t) = r_{zx}(t) \text{ при } t \geq \tau_0, \quad (4-99)$$

т. е. она при  $t \geq \tau_0$  просто совпадает с взаимной корреляционной функцией  $r_{xz}(t)$ . Поэтому расчетную схему синтезируемой системы (рис. 4-9,а) целесообразно дополнить формирующим фильтром (рис. 4-9,б), подобранном таким образом, чтобы при подаче на вход фильтра белого шума  $m(t)$  на его выходе имел место случайный процесс  $X(t)$  с заданной корреляционной функцией  $r_{xx}(\tau)$ . Так как спектр мощности белого шума

$$G_{mm}(p) = 1, \quad (4-100)$$

то очевидно, что частотная характеристика формирующего фильтра должна определяться формулой

$$W_{\Phi}(p) = G^*_{xx}(+p), \quad (4-101)$$

где  $G^*_{xx}(+p)$  — множитель в выражении для спектра мощности  $X(t)$ , зависящий лишь от  $+p$ :

$$G_{xx}(p) = G^*_{xx}(+p) G^*_{xx}(-p). \quad (4-102)$$

Соответственно оптимальная весовая характеристика  $w_{1\text{опт}}(t)$  полученной новой системы с частотной характеристикой

$$W_1(p) = G^*_{xx}(+p) W(p) \quad (4-103)$$

будет определяться формулой, аналогичной (4-99),

$$w_{1\text{опт}}(t) = r_{mz}(t) \text{ при } t \geq \tau_0. \quad (4-104)$$

Определив затем по  $w_{1\text{опт}}(t)$  соответствующую ей частотную характеристику  $W_{1\text{опт}}(p)$ , можно найти, ис-

пользуя (4-103), искомую оптимальную частотную характеристику системы

$$W_{\text{опт}}(p) = \frac{W_{\text{опт}}(p)}{G_{xx}^*(+p)}. \quad (4-105)$$

Естественно, что взаимная корреляционная функция  $r_{mz}(\tau)$  между входом формирующего фильтра  $m(t)$  и желаемым выходом  $Z(t)$  будет отличаться от  $r_{xz}(\tau)$ . Для определения зависимости между этими взаимными корреляционными функциями в общее выражение для взаимной корреляционной функции

$$r_{xz}(\tau) = M\{X(t)Z(t+\tau)\} \quad (4-106)$$

подставим значение  $X(t)$ , выраженное через  $m(t)$  и весовую характеристику формирующего фильтра  $\omega_{\Phi}(t)$ :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\Phi}(\xi) m(t-\xi) d\xi. \quad (4-107)$$

В результате получим:

$$r_{xz}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\Phi}(\xi) r_{mz}(\xi+\tau) d\xi \quad (4-108)$$

или после перехода к спектрам

$$G_{mz}(p) = \frac{G_{xz}(p)}{G_{xx}^*(-p)}. \quad (4-109)$$

Итак, процедура синтеза оптимальной системы может осуществляться в следующем порядке:

1) по заданному выражению спектра мощности входного сигнала  $G_{xx}(p)$  определяется сомножитель этого выражения  $G_{xx}^*(+p)$ , зависящий лишь от  $+p$ ;

2) по заданному взаимному спектру мощности  $G_{xz}(p)$  с помощью (4-109) определяются спектр мощности  $G_{mz}(p)$  и соответствующая ему корреляционная функция  $r_{mz}(\tau)$ ;

3) по формуле (4-104) находятся оптимальная весовая функция  $\omega_{\text{опт}}(t)$  и соответствующая ей частотная характеристика  $W_{\text{опт}}(p)$ ;

4) по формуле (4-105) находится искомая оптимальная частотная характеристика системы  $W_{\text{опт}}(p)$ .

Дисперсия ошибки, которая будет иметь место на выходе действительной системы (см. рис. 4-9) при оптимальной частотной характеристике  $W(p) =$

$= W_{\text{опт}}(p)$ , будет минимально возможной. Ее значение может быть найдено по формуле, аналогичной формуле (4-95), которая с учетом (4-97) и (1-24) может быть представлена следующим образом:

$$\sigma_{\text{мин}}^2 = \sigma_z^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\text{опт}}(\xi) r_{mz}(-\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\text{опт}}^2(\xi) d\xi, \quad (4-110)$$

а с учетом (4-104)

$$\sigma_{\text{мин}}^2 = \sigma_z^2 - \int_{\tau_0}^{\infty} r_{mz}^2(\tau) d\tau. \quad (4-111)$$

Заметим, что для определения дисперсии ошибки по этой формуле нет необходимости в предварительном определении оптимальной весовой характеристики системы  $\omega_{\text{опт}}(t)$ , а достаточно лишь определить взаимную корреляционную функцию  $r_{mz}(\tau)$  по взаимному спектру мощности  $G_{mz}(p)$ , который находится непосредственно по исходным данным для расчетов с помощью формулы (4-109).

## СИНТЕЗ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ОБЪЕКТА

### ГЛАВА ПЯТАЯ

#### ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

##### 5-1. Обыкновенные и экстремальные системы регулирования

Критерием эффективности работы промышленных объектов обычно является некоторый сводный технико-экономический показатель (прибыль, себестоимость продукции и т. п.), который следует поддерживать на экстремальном (максимально или минимально возможном) значении в пределах ограничений, определяемых требованиями к качеству вырабатываемой продукции, надежностью и безопасностью работы оборудования и т. п. В соответствии с этим для регулирования подобных объектов в общем случае может понадобиться применение двух видов автоматических систем регулирования — обыкновенных и экстремальных. Первые из них осуществляют регулирование величин, которые являются ограничениями и для которых заранее известно, на каких значениях их следует поддерживать или по каким законам изменять; экстремальная система регулирования осуществляет поиск и поддержание наибольшего или наименьшего значения технико-экономического показателя. Так, при регулировании режима работы энергоблока на электростанции обыкновенные системы регулирования поддерживают на заданных значениях параметры (давление и температуру) пара, уровень воды в барабане парогенератора, разрежение в его топке и т. д. На долю экстремальной системы здесь должно было бы приходиться обеспечение наиболее экономичной работы энергоблока, например работу с максимальным к. п. д.

В обычной системе регулирования, простейший пример которой был уже рассмотрен в § 1-1 на рис. 1-2, на вход регулятора подаются текущее изменение регулируемой величины  $y(t)$  и ее заданное значение (управляющее воздействие)  $s(t)$ . В измерительном блоке регулятора выявляется отклонение регулируемой величины от заданного значения — ошибка регулирования  $\varepsilon(t) = s(t) - y(t)$ , возникающая вследствие изменения заданного значения  $s(t)$  или вследствие действия на регулируемую величину возмущений  $\lambda(t)$ . Вычислительное устройство регулятора на основании полученной информации о характере изменения  $\varepsilon(t)$  формирует требуемое для устранения этого отклонения регулирующее воздействие  $\mu(t)$ .

Основной особенностью экстремальной системы является то, что требуемое значение регулируемой величины здесь остается неизвестным (известно лишь, что оно должно быть максимально или минимально возможным). Соответственно экстремальный регулятор работает в режиме поиска экстремума, связанном с подачей на объект специальных «пробных» воздействий [Л. 23, 25]. Процесс регулирования в этом случае может осуществляться следующим образом. При некотором начальном значении регулирующего воздействия в регуляторе запоминается соответствующее ему значение экстремальной регулируемой величины, после чего регулирующее воздействие устанавливается на некотором новом значении. Определив соответствующее новое значение регулируемой величины, регулятор оценивает правильность выбранного направления изменения положения регулирующего органа: если новое значение экстремальной регулируемой величины оказалось более близким, чем прежнее, к экстремуму (например, произошло увеличение к. п. д.), то регулятор меняет регулирующее воздействие в прежнем направлении, вновь осуществляя оценку приращения регулируемой величины. Такое движение происходит до тех пор, пока не будет достигнут экстремум. Дальнейшее изменение регулирующего воздействия в прежнем направлении вызовет, очевидно, ухудшение значения экстремальной регулируемой величины и регулятор изменит знак регулирующего воздействия. После отыскания точки экстремума работа регулятора будет продолжаться в режиме «рысканья» в окрестности этой точки.

К настоящему времени по проблеме экстремального регулирования имеется обширная литература. Однако практические достижения в использовании экстремального регулирования при управлении производственными процессами вряд ли могут считаться удовлетворительными. Попытки объяснить создавшуюся ситуацию техническими трудностями построения экстремальных регуляторов и связанные с этим надежды на использование в качестве оптимизаторов режимов мощных цифровых вычислительных управляющих машин, стоящих на более высоком иерархическом уровне управления, также по-видимому, не оправдались. Накопленный к настоящему времени опыт применения таких машин скорее всего свидетельствует о том, что область применения этих машин при их использовании непосредственно для управления технологическими процессами целесообразно ограничить сбором и систематизацией оперативной информации о текущем состоянии объекта, вычислением сводных технико-экономических показателей, оценкой текущей математической модели системы, а также (при достаточно высокой надежности машины) поручением ей функций регулирования. При этом вычисляемое текущее значение технико-экономических показателей, как правило, не используется непосредственно для организации процедуры поиска экстремума, а служит для оперативного учета и анализа экономичности работы объекта.

По-видимому, трудности внедрения экстремального регулирования экономичности работы промышленных объектов обусловлены не столько техническими трудностями, сколько определенными принципиальными недостатками, присущими таким системам.

Экстремальный регулятор может рассматриваться как обычный регулятор, поддерживающий на заданном (нулевом) значении производную зависимости экстремальной регулируемой величины от регулирующего воздействия. Необходимость введения пробных воздействий при этом связана с необходимостью иметь независимые приращения регулирующего воздействия для определения знака приращения производной. Как будет показано в дальнейшем, практически всякая система регулирования может поддерживать регулируемую величину на заданном значении лишь с некоторой погрешностью, причем для каждой конкретной системы имеется предел

возможного уменьшения этой погрешности. Наличие такого предела обусловлено двумя причинами: запаздыванием, с которым регулируемая величина откликается на регулирующее воздействие, и влиянием случайных помех в канале передачи текущего значения регулируемой величины на регулятор. Экстремальная регулируемая величина в системах регулирования производственных процессов — это сводный технико-экономический показатель, который невозможно непосредственно измерить, а необходимо предварительно осуществить формирование этого показателя в специальном вычислительном устройстве. Из-за того, что технико-экономический показатель обычно является функционалом от случайно меняющихся потоков вырабатываемой в объекте продукции и потоков исходного сырья, процесс его вычисления обычно сопряжен с усреднением этих потоков за относительно большой интервал времени [Л. 15, 16]. Так, по опубликованным данным при регулировании оптимального режима работы парогенераторов современных электростанций, когда в качестве технико-экономического показателя используется величина их к. п. д., для надежного вычисления этого показателя требуется интервал усреднения порядка 15—30 мин. Но поскольку текущее усреднение случайного процесса на некотором интервале времени эквивалентно введению в контур регулирования соответствующего запаздывания, предельно достижимая точность работы экстремальной системы при указанном выше порядке величины интервала усреднения оказывается, как правило, недопустимо низкой.

Кроме того, случайные возмущения, действующие на объект во время работы системы регулирования, искажают вычисленное значение производной от экстремальной регулируемой величины по регулирующему воздействию, что также уменьшает порог достижимой точности регулирования (в обычных системах регулирования действие этих возмущений хотя и приводит к изменению регулируемых величин, но это изменение отражает действительное состояние объекта и, следовательно, не искажает информации, получаемой регулятором).

Наконец, наличие пробных воздействий, непрерывно посылаемых на объект в процессе функционирования экстремальных систем, обычно неблагоприятно сказывается на режиме эксплуатации промышленных объектов.



Указанные трудности регулирования оптимального технико-экономического режима работы промышленных объектов практически удается преодолеть путем более полного использования имеющейся в распоряжении информации о текущем изменении входных и выходных переменных объекта, изучением закономерностей, присутствующих протекающим в объекте процессам, и их использовании при формировании регулирующих воздействий. При этом в первую очередь учитывается то обстоятельство, что между переменными, от которых непосредственно или косвенно зависит величина технико-экономического показателя, как правило, существует по крайней мере статистическая связь, соответствующая экстремальному значению этого показателя. Знание этой связи позволяет построить обычную систему регулирования указанных величин, которая немедленно вслед за их изменением осуществляет регулирующие воздействия так, чтобы технико-экономический показатель в среднем находился на его экстремальном значении. Естественно, что подобного рода регулирование будет сопровождаться ошибкой, обусловленной отклонением действительно существующих в объекте закономерностей от заложенных в системе регулирования. Именно наличие такой ошибки, а также трудности оценки необходимой математической модели объекта и явились причинами многочисленных попыток использовать для этой цели экстремальное регулирование. Но при этом следует принимать во внимание то обстоятельство, что и экстремальное регулирование обладает ошибкой регулирования, причем эта ошибка в силу изложенных выше причин может оказаться даже большей, чем ошибка, возникающая в обычных системах регулирования косвенных неэкстремальных показателей. Практически поэтому совершенствование систем регулирования технико-экономических показателей промышленных объектов в настоящее время в основном осуществляется путем усовершенствования обычных схем регулирования, в частности введением в эти схемы косвенных регулируемых величин, которые могут даже не входить в формулу для вычисления технико-экономического показателя, но связаны с его экстремальным значением достаточно тесной зависимостью. Если подобные косвенные регулируемые величины реагируют на регулирующие воздействия с малым запаздыванием, то их введение гарантирует получение более своевременной

информации о текущем состоянии объекта и, следовательно, позволяет существенно улучшить точность регулирования.

Автоматические оптимизаторы режимов, выполненные на базе цифровых управляющих машин, в этих условиях по существу превращаются в устройства для автоматического уточнения математической модели объекта, заложенной в систему косвенного регулирования экономичности, которая связывает между собой экстремальное значение технико-экономического показателя с заданными значениями косвенных регулируемых величин.

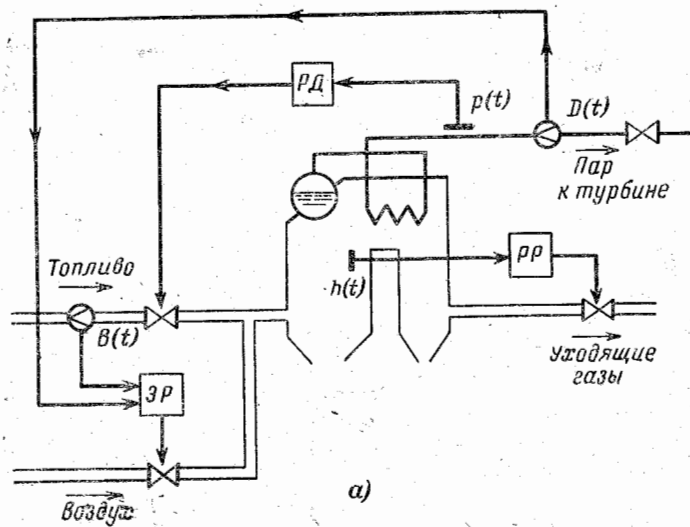
Обычно математическую модель объекта невозможно получить простым наблюдением за его поведением в процессе нормального функционирования, а почти всегда требуется постановка активных экспериментов, когда на объект помимо регулирующих воздействий подаются добавочные пробные воздействия. Поэтому в случаях, когда имеет место относительно медленное изменение свойств объекта (а такая ситуация чаще всего встречается на практике), целесообразно отказаться от непрерывной оценки модели объекта, а проводить ее периодически, через относительно большие интервалы времени.

В качестве примера на рис. 5-1 показаны некоторые возможные варианты схемы регулирования горения топлива парогенератора электростанции. Регулируемыми величинами, которые входят в критерий оптимальности работы этого участка объекта в виде ограничений, являются давление перегретого пара  $p$  и разрежение в топке  $h$ . Эти регулируемые величины необходимо поддерживать на постоянных, заранее заданных уровнях. Регулирование давления пара осуществляется регулятором  $РД$ , воздействующим на подвод топлива в топку; регулирование разрежения — регулятором  $РР$ , воздействующим на расход уходящих газов из топки. Технико-экономическим показателем работы парогенератора может быть выбрана величина удельного расхода топлива на тонну выработанного пара. Соответственно при использовании для минимизации этого показателя экстремального регулятора  $ЭР$  (рис. 5-1,а) необходимо осуществлять непрерывное измерение расходов топлива  $V$  и пара  $D$  и после усреднения этих переменных за определенный интервал времени вычислять их отношение. Минимизация удельного расхода топлива достигается организацией надлежащего качества сгорания подводимого в топку топлива, т. е. зависит от расхода воздуха в топку, воздействие на который и должен осуществлять экстремальный регулятор.

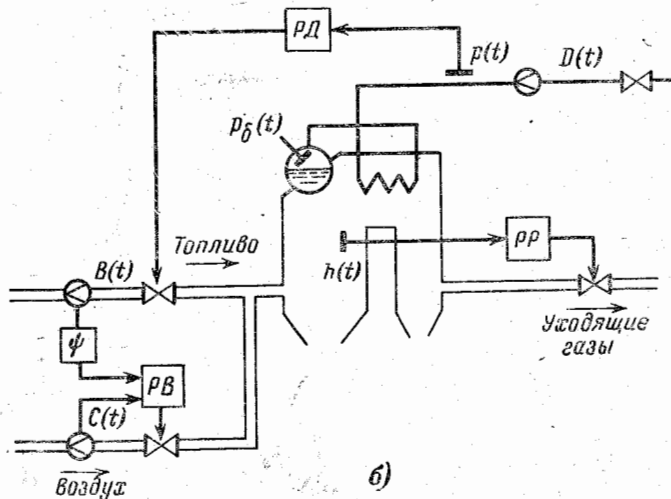
Практически, однако, для целей регулирования экономичности работы парогенераторов применяются обычные системы регулирования специально подобранных косвенных регулируемых величин. На



рис. 5-1,б показан вариант подобной схемы, известный под названием схемы «топливо — воздух». Основная идея, положенная в основу работы этой схемы, заключается в том, что, поскольку минимум удельного расхода топлива зависит от правильного соотношения между расходами подводимых в топку топлива и воздуха, то регу-



а)



б)

Рис. 5-1.

лирование экономичности можно возложить на обычную схему регулирования расхода воздуха (регулятор РВ), заданное значение которого должно меняться в зависимости от текущего значения расхода топлива В в соответствии с заранее найденной зависимостью  $\psi(B)$ .

Эта схема, очевидно, может работать лишь при возможности измерения расхода топлива на парогенератор. Кроме того, ее использование предполагает сжигание топлива достаточно стабильного качества. Если эти условия не выполняются (например, в парогенераторах, работающих на твердых низкосортных топливах), вместо рассмотренной схемы «топливо — воздух» может применяться так называемая схема «пар — воздух». Она отличается от рассмотренной только тем, что регулятор экономичности поддерживает расход воздуха не в зависимости от расхода топлива, а в зависимости от расхода пара из парогенератора  $D(t)$  (т. е. в схеме на рис. 5-1,б следует подать на вход регулятора РВ не величину  $B(t)$ , а величину  $D(t)$ ). Возможность такой замены воздействий обусловлена тем обстоятельством, что благодаря работе регулятора давления пара РД изменение расхода топлива следует за изменением расхода пара. Более тщательный анализ работы такой системы показывает однако, что изменение расхода воздуха, осуществляемое в ней регулятором РВ, может запаздывать по отношению к изменению подачи топлива, что приводит к нарушению оптимального режима горения в переходных режимах. Для устранения этого недостатка можно ввести на вход регулятора еще одну величину — изменение давления пара в барабане парогенератора  $p_6(t)$ . Чтобы эта дополнительная косвенная величина не оказывала мешающего влияния в установившихся режимах, ее предварительно дифференцируют. Полученная таким образом схема регулирования экономичности получила название схемы «тепло — воздух».

Наряду с рассмотренными схемами регулирования соотношения на практике применяются также схемы регулирования экономичности только по косвенным регулируемым величинам, таким как содержание кислорода в уходящих газах, температура факела в топке и т. п. [Л. 17].

Учитывая приведенные замечания относительно организации регулирования режимов работы промышленных объектов, в дальнейшем будут рассмотрены лишь вопросы, связанные с построением обыкновенных систем автоматического регулирования.

## 5-2. Динамическая точность систем регулирования

Практически во всякой системе регулирования регулятор может поддерживать регулируемую величину на ее заданном значении лишь с некоторой погрешностью, называемой динамической ошибкой регулирования. Специфика этой погрешности заключается в том, что ее появление обусловлено не столько неточностью измерений регулируемых величин, сколько несовершенством самого процесса регулирования. Посколь-

ку наличие динамической ошибки регулирования всегда нежелательно, возникает проблема построения систем регулирования, минимизирующих эту ошибку.

В свою очередь для того, чтобы можно было приступить к решению подобной задачи, необходимо прежде всего условиться о способе количественного измерения динамической ошибки регулирования.

При выборе способа такого измерения необходимо иметь в виду, что в соответствии с самим определением понятия «регулирование» динамическая ошибка, регулирования, представляющая собой реакцию системы регулирования на входные случайные возмущающие и управляющие воздействия, также является случайным процессом. Поэтому и количественная оценка динамической ошибки должна, вообще говоря, формулироваться в терминах теории случайных процессов. В системах автоматического регулирования длительно функционирующих объектов динамическая ошибка может считаться стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием (так как случайные колебания регулируемой величины в среднем происходят вокруг ее заданного значения), и поэтому наиболее простой и доступной для расчетов мерой отклонения такого процесса от его желаемого изменения является его среднее квадратичное отклонение или дисперсия.

По-видимому, среднее квадратичная ошибка является достаточно удовлетворительной мерой точности работы системы при регулировании величин, которые определяют технико-экономический показатель работы объекта, так как здесь важно, чтобы отклонение регулируемой величины было небольшим в среднем за относительно большой промежуток времени; кратковременные же выбросы регулируемой величины, пусть и сравнительно большие, в этом случае могут не приниматься во внимание. Так, подобные требования целесообразно предъявить к системе регулирования расхода воздуха в топку парогенератора (см. рис. 5-1, б). Кроме того, в относительно небольшой окрестности от экстремума зависимость технико-экономического показателя от отклонений косвенных регулируемых величин экономичности обычно может рассматриваться как квадратичная, так что минимуму среднее квадратичного отклонения этих величин соответствует и наименьшее отклонение этого показателя от его экстремального значения.

Требования к точности регулирования величин, входящих в критерий оптимальной работы объекта в виде ограничений, чаще всего сводятся к тому, что они не должны даже кратковременно выходить за пределы заранее заданных границ, так как это может грозить браком продукции или даже аварией. К сожалению, среднее квадратичное отклонение случайного процесса (в отличие от среднее квадратичного отклонения случайной величины) не может служить вероятностной характеристикой возможных отклонений этого процесса от его математического ожидания на конечном интервале времени  $T$ .

Можно показать [Л. 10], что для нормально распределенного стационарного случайного процесса вероятность того, что за время  $T$  не появится ни одного выброса за достаточно большие пределы  $\pm \Delta$  (при условии, что эти выбросы будут достаточно редкими и поэтому статистически независимыми), определяется формулой

$$P\{|\varepsilon(t)| < \Delta\} = e^{-a}, \quad (5-1)$$

где  $a$  — математическое ожидание числа пересечений границ указанной зоны за время  $T$ , которое может быть определено следующим образом:

$$a = \frac{T \sigma_v}{\pi \sigma_\varepsilon} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}. \quad (5-2)$$

Здесь  $\sigma_v$  представляет собой среднее квадратичное отклонение производной  $v(t)$  случайного процесса  $\varepsilon(t)$ , причем корреляционная функция производной  $r_{vv}(\tau)$  связана с корреляционной функцией самого процесса  $r(\tau)$  соотношением

$$r_{vv}(\tau) = -\frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2}, \quad (5-3)$$

т. е.

$$\sigma_v^2 = -\left. \frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (5-4)$$

Таким образом, для оценки возможных отклонений нормально распределенного стационарного случайного процесса недостаточно знать только его дисперсию, т. е. необходимо располагать корреляционной функцией этого процесса.

Только при этом условии можно, задавшись достаточно большой, так называемой «доверительной» вероятностью  $P_{дов}$  с помощью формулы (5-1) оценить пределы  $\pm \Delta$ , в которых практически достоверно будет находиться реализация случайного процесса в течение времени  $T$ .

Системы регулирования производственных процессов обычно функционируют в течение относительно очень больших интервалов времени  $T$ , во много раз превышающих время существования корреляции между сечениями процесса  $\varepsilon(t)$ . Но, как следует из при-

веденных формул, при достаточно большом времени  $T$  вне зависимости от принятой величины доверительной вероятности выбросы регулируемой величины, обладающей конечным среднеквадратичным отклонением, могут превзойти любые наперед заданные границы.

К такому же выводу можно прийти, основываясь на следующих простых рассуждениях. Рассмотрим несколько последовательных сечений стационарного нормально распределенного случайного процесса, причем интервал между сечениями выберем достаточно большим, так чтобы между отдельными сечениями практически отсутствовала корреляция. Для каждого из этих сечений, взятых в отдельности, вероятность того, что его значение останется, например, в пределах трех среднеквадратичных отклонений, близка к единице, точнее, равна 0,997. Однако вероятность того, что ни одно из  $n$  выбранных сечений не выйдет за указанные пределы будет в соответствии с правилом умножения вероятностей равным  $0,997^n$ . Так, уже при  $n=20$  эта вероятность окажется равной 0,949, т. е. вероятность выброса, превышающего три среднеквадратичных отклонения, оказывается не такой уж малой, для того чтобы возможностью такого отклонения можно было пренебречь. На практике промышленные системы автоматического регулирования функционируют в течение времени, в сотни и тысячи раз превышающего интервал корреляции ошибки регулирования (т. е. интервал, соответствующий сдвигу  $\tau$ , при котором корреляционная функция процесса практически не будет отличаться от нуля), и, следовательно, возможные выбросы регулируемой величины могут быть во много раз больше среднеквадратичного значения ошибки регулирования.

### 5-3. Принцип накопления возмущений

В реальных длительно функционирующих системах регулирования выбросы регулируемой величины обычно оказываются существенно меньше тех, которые следовало бы ожидать, исходя из формулы (5-1). Объясняется это тем, что действующие на объект возмущения всегда ограничены по модулю и, кроме того, при больших отклонениях начинают сказываться нелинейные зависимости, приводящие к ограничению отклонений регулируемой величины. Соответственно распределение ошибки регулирования может считаться нормальным лишь в некотором ограниченном диапазоне ее возможных значений. Однако это не облегчает задачу оценки возможной величины выбросов, так как определение закона распределения в каждом конкретном случае и вывод соответствующих зависимостей между вероятностью выбросов и среднеквадратичным значением представляют собой очень сложную задачу.

Поэтому для практической оценки наибольших возможных выбросов регулируемых величин приходится ориентироваться на отклонение, которое возникает при

действии на вход системы наиболее тяжелой (с точки зрения величины этого отклонения) из всех возможных реализации входного воздействия.

Определение наиболее тяжелой формы входного воздействия для линейных систем основывается на принципе накопления возмущений [Л. 11].

Напомним, что значение выходной величины линейной динамической системы в любой момент времени может быть определено с помощью интеграла наложения (2-2)

$$y(t_0) = \int_0^{t_0} w(\xi) x(t_0 - \xi) d\xi,$$

смысл которого заключается в том, что значение выходной величины в рассматриваемый момент времени  $t_0$  равно сумме всех предыдущих значений входного воздействия  $x(t)$ , взятых с весами, определяемыми весовой характеристикой системы  $w(t)$ . При этом вес, с которым необходимо взять значение входного воздействия в момент времени  $t_1$ , отстоящий от интересующего нас момента  $t_0$  на интервал  $\xi$  (рис. 5-2, а), равен значению весовой характеристики в момент  $t = \xi$  (рис. 5-2, б).

Допустим, что до момента начала отсчета времени  $t=0$  система находилась в покое, а начиная с этого момента на нее действует возмущение произвольного вида, но величина которого, естественно, в реальных системах должна быть ограничена по модулю: положительные значения некоторой величиной  $a_+$  и отрицательные значения величиной  $a_-$ , причем будем считать для определенности  $a_+ \geq a_-$ . Если интересующий нас момент времени  $t_0$  наступает раньше момента  $t_1$ , в который весовая характеристика системы пересекает нулевой уровень, то для того, чтобы в момент  $t_0$  отклонение достигло наибольшего возможного значения, необходимо, чтобы возмущение на интервале от 0 до  $t_0$  не меняло знака и было наибольшим из возможных:

$$y_{\max}(t_0) = \int_0^{t_0} w(\xi) a_+ d\xi = a_+ h(t_0), \quad (5-5)$$

где  $h(t)$  — переходная характеристика системы.

Если интересующий нас момент времени  $t_0$  расположен между моментами первого  $t_1$  и второго  $t_2$  пересечений импульсной переходной характеристикой оси абсцисс, простое ступенчатое возмущение уже не будет наиболее опасным. Действительно, все значения

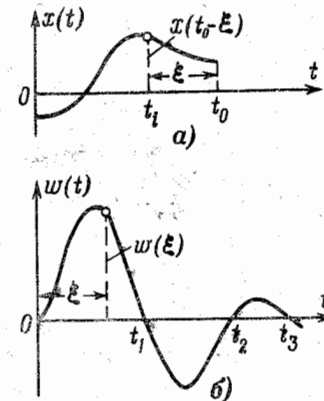


Рис. 5-2.

этого воздействия на интервале от  $t_0 - t_1$  до  $t_0$ , суммируясь, будут увеличивать выходную величину; однако значения входного воздействия, расположенные на интервале от 0 до  $t_0 - t_1$  будут уже уменьшать сумму, так как эти значения умножаются на отрицательные веса импульсной характеристики. Для того чтобы возмущение и на интервале от 0 до  $t_0 - t_1$  способствовало увеличению отклонения, необходимо, чтобы на этом отрезке оно имело противоположный знак, т. е. определялось формулой:

$$x(t) = \begin{cases} -a_-, & 0 < t < t_0 - t_1; \\ a_+, & t_0 - t_1 < t < t_0. \end{cases}$$

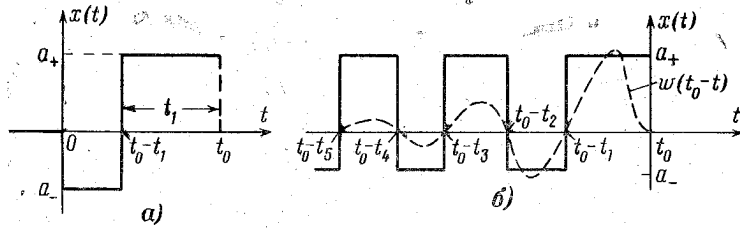


Рис. 5-3.

График такого воздействия показан на рис. 5-3,а. Максимальное отклонение выходной величины системы в этом случае при  $t = t_0$ :

$$y_{\text{макс}}(t_0) = \int_0^{t_1} a_+ w(\xi) d\xi - \int_{t_1}^{t_0} a_- w(\xi) d\xi = a_+ h(t_1) - a_- \int_{t_1}^{t_0} w(\xi) d\xi.$$

Наибольшее отклонение при такого рода воздействии в момент времени  $t_0 = t_2$  будет равно:

$$y(t_2) = a_+ h(t_1) - a_- h(t_2) + a_- h(t_1),$$

где  $h(t_1)$  и  $h(t_2)$  — первый и второй экстремумы переходной характеристики системы.

Рассуждая подобным же образом для более поздних моментов времени  $t_0$ , можно прийти к выводу, что максимально возможное отклонение выходной величины растет по мере удаления начала подачи воздействия от интересующего нас момента времени  $t_0$ . В пределе наибольшее возможное отклонение (рис. 5-3,б) при  $t_0 \rightarrow \infty$  определяется, очевидно, формулой

$$y_{\text{макс}} = (a_+ + a_-) [h(t_1) - h(t_2) + h(t_3) - \dots], \quad (5-6)$$

где  $h(t_1), h(t_2) \dots$  — экстремумы переходной характеристики системы.

Соответственно наиболее тяжелым возмущением, вызывающим такое отклонение выходной величины в момент времени  $t_0$ , является знакопеременное возмущение максимально возможного размаха, меняющее свой знак в моменты, когда зеркальное отражение  $w(t_0 - t)$  весовой характеристики системы пересекает ось времени.

С физической точки зрения опасность подобного возмущения заключается в том, что оно раскачивает систему, действует в резонанс с ее собственными колебаниями.

Автоматические системы регулирования производственных процессов обычно (по технологическим соображениям) настраиваются таким образом, что возникающие в них переходные процессы имеют слабоколебательный характер или даже вообще протекают без колебаний. Типичный график переходной характеристики системы в по-

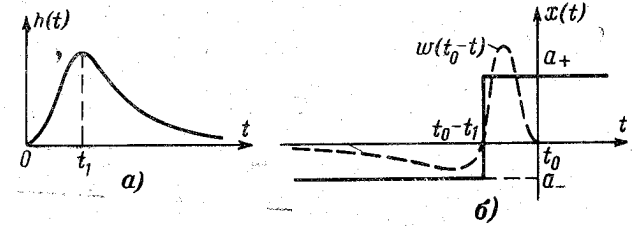


Рис. 5-4.

следнем случае имеет вид, указанный на рис. 5-4,а. Соответственно наиболее тяжелой формой ограниченного по модулю возмущения для такой системы будет возмущение, график которого приведен на рис. 5-4,б, т. е. ступенчатое возмущение наибольшей возможной величины  $a_+ + a_-$ .

Таким образом, при расчете автоматических систем регулирования производственных процессов, относительно которых априори известно, что их переходные характеристики имеют неколебательную форму, в качестве расчетного наиболее тяжелого для системы возмущения следует принять ступенчатое возмущение. Практически ступенчатое возмущение может быть принято в качестве наиболее тяжелого расчетного возмущения и в случае, когда переходная характеристика системы имеет колебательный характер, но эти колебания достаточно интенсивно затухают. Целесообразность выбора для такой системы ступенчатого возмущения как наиболее тяжелого оправдывается также тем, что вероятность появления действительно наиболее тяжелого для системы возмущения, меняющего свой знак точно в моменты обращения весовой характеристики в нуль, очевидно, пренебрежимо мала.

Процесс изменения выходной величины системы регулирования — ошибки регулирования, вызванный детерминированным (в частности, ступенчатым) воздействием, может быть охарактеризован некоторым числом

показателей, получивших название показателей качества процесса регулирования. Помимо максимального отклонения в число таких показателей могут входить длительность процесса регулирования (время, по истечении которого отклонение регулируемой величины станет пренебрежимо малым), остаточное (статическое) отклонение (если оно имеет место), показатель, характеризующий каким-либо образом колебательность процесса регулирования, и т. д. К сожалению, очень трудно установить связь между численными значениями указанных показателей качества, с одной стороны, и параметрами системы (например, коэффициентами ее дифференциального уравнения) — с другой, что, естественно, затрудняет выбор системы, обеспечивающий заданные требования к качеству процесса регулирования. Эту трудность в какой-то мере удается преодолеть введением специально подобранных косвенных показателей качества, в частности так называемых интегральных показателей [Л. 1]. Использование таких показателей, естественно, не позволяет оценить непосредственно численную величину того или иного прямого показателя качества (например, наибольшего отклонения регулируемой величины). Обычно в этом случае производят выбор системы, исходя из условия минимума косвенного критерия, предполагая, что минимизация этого показателя в какой-то мере соответствует и минимуму отклонения регулируемой величины. Для окончательного определения истинного значения этого отклонения необходимо производить поверочное построение графиков процесса регулирования в найденной системе регулирования.

Дополнительные трудности возникают, когда на объект в процессе его работы действуют одновременно по разным входам несколько возмущений. Раздельный синтез системы по каждому из возмущений, как правило, приводит к различным результатам. Поэтому здесь в принципе необходимо было бы рассматривать поведение системы регулирования при одновременном действии всех возмущений. В частности, принимая по-прежнему предположение о том, что наиболее тяжелой реализацией возмущения по каждому из входов является реализация в виде ступенчатой функции времени, можно определить, в какие моменты времени должен наступить скачок каждого из возмущений, для того чтобы откло-

нение регулируемой величины было наибольшим. Исходя из такой комбинации реализаций возмущений, можно было бы осуществлять синтез системы регулирования. Однако вероятность возникновения подобной комбинации воздействий слишком мала, чтобы ориентировать на нее расчет. Один из возможных способов преодоления этого затруднения заключается в следующем.

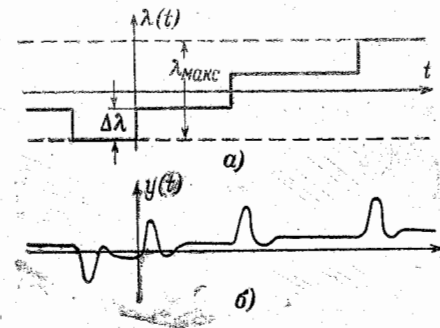


Рис. 5-5.

Реально ступенчатые возмущения возникают вследствие спорадических резких изменений режима работы объекта (например, при изменениях его нагрузки), так что в качестве расчетного возмущения может быть выбрана стационарная случайная функция времени, меняющая скачком на максимально возможную величину  $\Delta\lambda$  свое значение в случайные моменты времени, а в интервалах между скачками остающаяся неизменной. Пример реализации такой функции приведен на рис. 5-5,а. Интервал между соседними скачками должен быть достаточно большим, чтобы всегда превышать длительность переходных процессов в системе (рис. 5-5,б).

Можно показать [Л. 1], что корреляционная функция такого случайного процесса может быть определена следующей формулой:

$$r_{\lambda\lambda}(\tau) = \sigma_{\Delta\lambda}^2 e^{-\frac{|\tau|}{t_0}}, \quad (5-7)$$

где  $t_0$  — средняя длина интервала между двумя соседними скачками.

Таким образом, в качестве косвенной меры отклонения выходной величины системы может быть выбрано ее среднеквадратичное значение при действии на входы объекта возмущений, корреляционные функции которых определяются выражением типа (5-7).

#### 5-4. Обыкновенные и самонастраивающиеся регуляторы

Поскольку автоматический регулятор должен минимизировать величину выбранного показателя динамической ошибки регулирования (например, дисперсию ошибки регулирования), функциональная схема регулятора

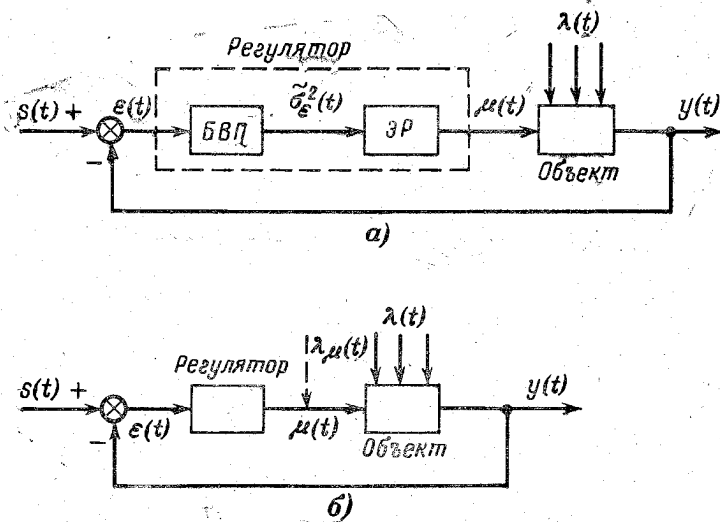


Рис. 5-6.

должна состоять в общем случае из двух блоков (рис. 5-6,а): блока вычисления текущего значения показателя динамической ошибки *БВП* и экстремального регулирующего блока *ЭР*, осуществляющего формирование регулирующего воздействия на объект с целью отыскания экстремума этого показателя. В частности, если в качестве показателя динамической точности выбирается текущее значение дисперсии ошибки регулирования, а изменение ошибки регулирования во времени представляет собой реализацию стационарного эргодич-

ного случайного процесса, вход и выход блока вычисления показателя должны быть связаны соотношением

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2(t) = \frac{1}{T} \int_{t_1-T}^{t_1} [\varepsilon(t)]^2 dt, \quad (5-8)$$

где  $T$  — время усреднения текущего значения показателя.

Таким образом, мы вновь (см. § 5-1) пришли к экстремальной системе регулирования, но уже не самой выходной величины объекта (ее заданное значение здесь известно), а к экстремальному регулированию показателя динамического отклонения регулируемой величины от ее заданного значения.

Экстремальный регулятор показателя динамической точности принципиально является универсальным, пригодным для регулирования самого широкого класса объектов. Для своей работы он по существу не требует никакой начальной информации, кроме сведений о показателе динамической точности регулирования. В то же время такой универсальный экстремальный регулятор, очевидно, оказывается совершенно непригодным для работы в производственных условиях из-за чрезвычайно низкой достижимой точности регулирования, которую он может обеспечить. Обусловлено это в первую очередь тем, что время усреднения  $T$ , которое необходимо для надежной оценки дисперсии ошибки регулирования по формуле (5-8), оказывается очень большим (например, для основных регулируемых величин парогенераторов тепловых электростанций оно составляет величину порядка нескольких часов и даже нескольких суток). В то же время такое усреднение по своему действию эквивалентно введению в контур регулирования запаздывания, наличие которого требует (во избежание потери устойчивости) осуществления крайне медленных воздействий регулирующим органом.

Здесь по существу возникла такая же ситуация, как и при регулировании технико-экономического показателя объекта; соответственно и пути решения этой проблемы остаются прежними. Они сводятся к использованию системы косвенного регулирования показателя динамической точности, что достигается в первую очередь формированием регулирующего воздействия  $\mu(t)$  непосредственно в зависимости от текущего значения ошибки

регулирования  $\epsilon(t)$  (величины, входящей в формулу для показателя динамической точности) так, чтобы в конечном счете это заведомо привело к минимизации этого показателя (например, дисперсии ошибки, вычисленной на достаточно большом интервале усреднения).

В схеме системы в этом случае вместо экстремального регулятора (рис. 5-6,а) используется обычный регулятор (рис. 5-6,б). Очевидно, что переход от экстремального к обычному регулятору возможен лишь тогда, когда в регулятор может быть заранее заложен алгоритм расчетов, с помощью которого можно определять значение регулирующего воздействия  $\mu(t)$  в каждый момент времени в зависимости от текущего значения ошибки регулирования (а возможно, и ее прошедших значений, которые могут храниться в памяти регулятора), чтобы была достигнута указанная цель. Естественно, что подобный алгоритм может быть составлен далеко не всегда; практически приемлемое решение этой задачи пока удалось найти лишь применительно к линейным объектам регулирования. Для построения системы регулирования в этом случае необходимо располагать начальной информацией о динамических характеристиках объекта регулирования, а также статистических характеристиках входных воздействий. Алгоритм, в соответствии с которым регулятор осуществляет выработку регулирующего воздействия в зависимости от сигналов о текущем состоянии объекта, подаваемых на его входы, называется алгоритмом функционирования или законом регулирования регулятора.

Если начальная информация о динамике объекта и статистических характеристиках воздействий не может быть задана в достаточно полном объеме или если эти характеристики могут с течением времени непредвиденным образом меняться, систему регулирования целесообразно дополнить устройством адаптации. Процесс адаптации с целью ускорения процедуры поиска обычно сопровождается идентификацией системы, т. е. определением ее текущих динамических свойств и статистических характеристик возмущений; с этой целью устройство адаптации, как правило, должно подавать на основной регулирующей контур дополнительные пробные воздействия или осуществлять пробные изменения алгоритма функционирования регулятора.

Изменение динамических свойств промышленных систем автоматического регулирования, как показывает опыт, происходит относительно медленно (сравнительно со скоростью переходных процессов в контуре регулирования). Соответственно процессы в контуре регулирования и в контуре адаптации характеризуются спектрами, расположенными в резко различных диапазонах частот: изменение настройки регулятора происходит намного медленнее, чем оперативное изменение положения регулирующего органа, с помощью которого система борется с действующими на регулируемую величину возмущениями. Это обстоятельство позволяет рассматривать процессы в обоих указанных контурах в значительной степени независимо.

### 5-5. Динамические характеристики систем регулирования

Промышленные объекты в общем случае являются недетерминированными нестационарными нелинейными динамическими системами.

Случайный характер преобразования объектами воздействий обусловлен двумя причинами:

- 1) непредвиденным постепенным изменением их параметров вследствие старения материалов, загрязнения поверхностей нагрева теплообменников, старения катализаторов и т. п.;
- 2) действием неконтролируемых случайных возмущений.

Как уже отмечалось, изменение параметров объекта происходит относительно медленно (по крайней мере, сравнительно с длительностью переходных процессов в системе регулирования объекта), так что объект как элемент системы регулирования может считаться стационарным по крайней мере на интервале длительности переходных процессов в системе регулирования.

Действующие на объект возмущения имеют также нестационарный характер. Однако изменение во времени выходной величины системы регулирования — ошибки регулирования — представляет собой (по самому смыслу работы системы регулирования) случайный процесс с постоянным математическим ожиданием, т. е. это стационарный (по крайней мере, с точки зрения математического ожидания) процесс. Поэтому каждое из входных возмущающих воздействий может быть разде-



лено на две составляющие: медленно меняющуюся нестационарную и центрированную стационарную. При этом на выход системы оказывает влияние лишь стационарная составляющая возмущений, а нестационарная составляющая полностью подавляется регулятором и поэтому может не приниматься во внимание.

Таким образом, промышленные объекты регулирования при их работе в контуре системы регулирования могут рассматриваться как стационарные динамические системы, причем случайный характер преобразования ими регулирующих воздействий обусловлен главным образом влиянием стационарных случайных неконтролируемых возмущений.

Нелинейные зависимости промышленных объектов обычно допускают линеаризацию по методу малых отклонений. Поэтому при небольших уровнях возмущающих воздействий выходная величина объекта с одной регулируемой величиной может быть представлена следующим образом:

$$y(t) = W_{\mu}(p)\mu(t) + \sum_{k=1}^n W_{\lambda_k}(p)\lambda_k(t) + n(t), \quad (5-9)$$

где  $y(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\lambda_k(t)$ ,  $n(t)$  — регулируемая величина, регулирующее воздействие, контролируемые и неконтролируемые возмущения соответственно;  $W_{\mu}(p)$ ,  $W_{\lambda_k}(p)$  — операторы объекта по каналам регулирующего воздействия и возмущающих воздействий. Это выражение может быть также представлено в следующем виде:

$$y(t) = W_{\mu}(p)\mu(t) + v(t), \quad (5-10)$$

где

$$v(t) = \sum_{k=1}^n W_{\lambda_k}(p)\lambda_k(t) + n(t)$$

есть эквивалентное возмущение, приведенное к выходу объекта, определяющее действие на регулируемую величину всех возмущений, как контролируемых, так и неконтролируемых.

С учетом полученных соотношений схема системы регулирования (рис. 5-6, б) может быть представлена в виде рис. 5-7, а.

Поскольку в каналах передачи воздействий промышленных регулируемых объектов могут наблюдаться транспортные запаздывания, операторы этих каналов обычно могут быть записаны в следующем виде:

$$W(p) = W^0(p)e^{-\tau p}, \quad (5-11)$$

где  $\tau$  — время «чистого» (или транспортного) запаздывания;  $W^0(p)$  — характеристика объекта без учета запаздывания.

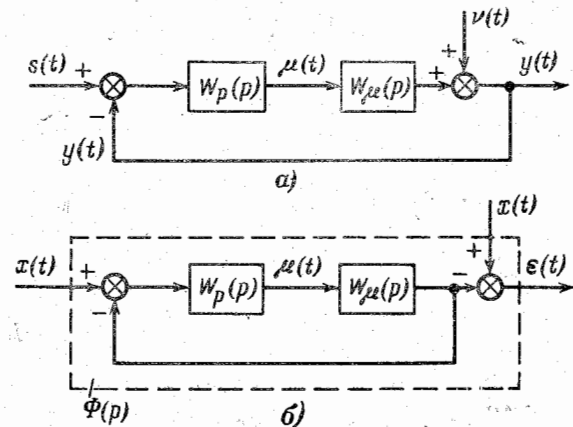


Рис. 5-7.

Заметим, что неконтролируемые возмущения  $n(t)$  не следует считать небольшими флюктуационными помехами, наложенными на основные возмущения, например на возмущения, обусловленные изменением нагрузки объекта. Напротив, неконтролируемые возмущения могут составлять основную массу возмущений, причем возмущение нагрузкой также может быть неконтролируемым. Так, нагрузка парогенератора электростанции (см. рис. 5-1), т. е. расход пара из парогенератора в единицу времени  $D(t)$ , в общем случае не может считаться возмущающим воздействием по отношению к регулируемой величине — давлению пара  $p(t)$ , заданное значение которого обычно поддерживается воздействием на подвод топлива в точку  $B(t)$ . Действительно, изменение давления, вызванное, например, изменением подачи топлива, приведет и к изменению расхода пара из парогенератора, и, следовательно, здесь не выполняется принцип односторонней передачи воздействий. Возмущающим воздействием по нагрузке могло бы быть перемещение клапанов турбины. Однако, когда турбина участвует в регулировании частоты энергосистемы, изменение расхода пара посредством систе-



мы регулирования скорости вращения вала турбины также будет оказывать влияние на положение клапанов турбины, так что и перемещение клапанов не может считаться в этих условиях возмущающим воздействием. Фактически в этом случае возмущающими воздействиями по нагрузке следует считать непосредственные воздействия самих потребителей электроэнергии, влияние которых на давление пара в рассматриваемом котлоагрегате зависит от свойств энергосистемы и места, занимаемого в ней потребителем, т. е. практически может быть определено лишь в виде случайной помехи, наложенной на регулируемую величину (естественно, если рассматривается линейная модель объекта).

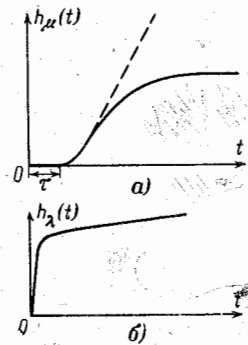


рис. 5-8.

Подчеркнем также, что динамические характеристики объектов по отношению к наиболее важным возмущениям, в первую очередь по отношению к нагрузке, как правило, весьма резко отличаются от динамических характеристик по каналу регулирующего воздействия. Так, в рассмотренном примере при ступенчатом изменении подачи топлива в топку парогенератора (регулирующего воздействия) изменение регулируемой величины — давления пара имеет характер плавного (после более или менее длительного запаздывания) нарастания с постепенной стабилизацией на некотором новом значении, как это показано на рис. 5-8,а. Такой вид переходной характеристики по каналу регулирующего воздействия может считаться вообще достаточно типовым для промышленных объектов. При резком же сбросе нагрузки турбины происходит столь же быстрое, практически без всякого запаздывания, изменению давления пара (соответствующая переходная характеристика имеет вид, указанный на рис. 5-8,б). На это обстоятельство приходится специально обращать внимание из-за того, что в литературе очень часто возмущение нагрузкой на схеме системы регулирования указывается приложенным в одной точке с регулирующим воздействием (как показано на рис. 5-6,б пунктиром), т. е. предполагается, что динамические свойства канала возмущения по нагрузке совпадают со свойствами канала регулирующего воздействия. Естественно, что такое предположение не может не привести к существенным ошибкам в расчетах, тем более что, как показывает опыт (в частности, рассмотренный пример с парогенератором), динамические свойства промышленных объектов по каналам действия возмущения нагрузкой обычно оказываются значительно менее благоприятными с точки зрения регулирования, чем динамические свойства по регулирующим каналам. Обусловлено это тем, что возмущение по нагрузке влияет на регулируемую величину со значительно меньшей инерцией и меньшим запаздыванием, чем такое же возмущение, приложенное к входу объекта со стороны регулирующего воздействия.

В зависимости от того, что рассматривается в качестве входной и выходной величины системы регулирования (рис. 5-7,а), связь между динамической характе-

ристикой этой системы и динамическими характеристиками объекта может определяться различными формулами.

Если входным воздействием является изменение заданного значения регулируемой величины  $s(t)$ , а выходной величиной — изменение регулируемой величины  $y(t)$ , то, используя результаты, полученные в § 3-1, а также принимая во внимание формулу (5-10), можно получить следующее выражение для оператора системы регулирования:

$$\Phi_{sy}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad (5-12)$$

где

$$W(p) = W_p(p) W_\mu(p) \quad (5-13)$$

— оператор системы в разомкнутом состоянии;  $W_p(p)$  — оператор регулятора.

Если выходной величиной является изменение ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$ , а входным воздействием — изменение заданного значения  $s(t)$ , то оператор системы определяется формулой

$$\Phi_{\varepsilon s}(p) = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (5-14)$$

Очевидно, такой же вид (но с обратным знаком) имеет оператор, определяющий изменение ошибки  $\varepsilon(t)$  при действии эквивалентного возмущения  $v(t)$ .

Если выходной величиной выбрано изменение регулируемой величины  $y(t)$  в результате действия того или иного отдельно взятого возмущения  $\lambda(t)$ , оператор системы регулирования определяется выражением

$$\Phi_{\lambda y}(p) = \frac{W_\lambda(p)}{1 + W(p)}, \quad (5-15)$$

где  $W_\lambda(p)$  — оператор объекта по каналу действия возмущения  $\lambda(t)$ .

## 5-6. Предельная динамическая точность регулирования

Величина динамической ошибки в любой автоматической системе регулирования зависит как от объема получаемой регулятором текущей информации о состоянии объекта, так и от того, насколько регулятор полно и совершенно использует получаемую информацию

(т. е. от алгоритма функционирования регулятора). Верхняя граница достижимой динамической точности регулирования, которую можно было бы получить в системе при самом совершенном из физически возможных алгоритме функционирования регулятора, характеризует предельную динамическую точность системы.

Предельная динамическая точность может рассматриваться как количественная мера ценности информации, которую в процессе работы получает регулятор о состоянии объекта регулирования.

Знание предельной динамической точности системы полезно также и с других точек зрения. Так, эта величина определяет предельные возможности системы, и поэтому ее значение позволяет сразу определить, насколько реальными являются предъявляемые к системе требования. Кроме того, знание алгоритма функционирования «идеального» регулятора, обеспечивающего предельную достижимую точность регулирования, позволяет ориентироваться в направлении, в котором следует вести поиск алгоритма работы реального регулятора.

Понятие предельной динамической точности приобретает особо важное значение при исследовании и построении систем регулирования промышленных объектов. Как показывает опыт, в таких системах требуемая точность регулирования часто не может быть достигнута простым усложнением алгоритма регулятора. В этом случае приходится вводить в схему добавочные каналы, с помощью которых регулятор может получать более своевременную и эффективную информацию о текущем состоянии объекта.

В настоящее время существует несколько подходов к определению понятия количества и ценности информации [Л. 12, 13, 24, 37]. Для рассматриваемых здесь целей в наибольшей степени соответствует так называемый прагматический подход, в основу которого положена практическая выгода, получаемая от использования того или иного сообщения. Количественно ценность информации, заключенной в каком-либо сообщении, в общем случае может быть охарактеризована улучшением показателя качества функционирования системы, использующей заключенную в этом сообщении информацию, при условии, что использование этой информа-

ции система осуществляет наилучшим достижимым способом.

Выбор показателя качества, характеризующего ценность получаемой информации, естественно зависит от конкретных задач, поставленных перед системой. В частности, приведенное выше определение меры ценности информации может быть распространено и на меру количества информации, принятой в статистической теории информации [Л. 24]. В самом деле, для систем связи критерием эффективности функционирования является быстрота передачи текстов, которая зависит от того, сколько в среднем двоичных знаков требуется для передачи буквы текста. Известная формула Шеннона для определения количества информации, заключенной в одной букве

$$H = \sum_{i=1}^N P_i \log P_i \quad (5-16)$$

(где  $N$  — число букв в алфавите языка, на котором передается текст, а  $P_i$  — вероятность появления  $i$ -й буквы), как раз и определяет минимально возможное число двоичных знаков, в среднем необходимых для передачи буквы текста при наилучшем из физически возможных способе кодирования.

Для других систем критерием эффективности, а следовательно, и мерой ценности информации может служить увеличение вероятности достижения цели после получения сообщения [Л. 12], уменьшение средних потерь [Л. 13] и т. д.

Чтобы придать формуле для вычисления ценности информации свойство аддитивности, можно оперировать с логарифмом отношения:

$$J = -\log \frac{\sigma_{\text{емин}}^{\text{пр}}}{\sigma_0}, \quad (5-17)$$

где  $\sigma_{\text{емин}}^{\text{пр}}$  — минимально возможная величина среднеквадратичной ошибки регулирования, характеризующая предельную динамическую точность системы;  $\sigma_0$  — среднеквадратичное значение отклонения регулируемой величины при отсутствии регулирования.

В такой записи эта формула совпадает с формулой для приращения энтропии процесса регулирования при нормально распределенном процессе, т. е. совпадает с мерой количества информации при использовании статистической теории информации [Л. 25]. Следует только подчеркнуть, что при определении ценности информации следует оперировать не с общей величиной ошибки регулирования, а с ее предельно достижимой минимальной величиной, так как только таким способом можно выделить составляющую

уменьшения ошибки регулирования, достигнутую за счет получения информации о состоянии объекта, из общего уменьшения ошибки регулирования, величина которой определяется не только ценностью получаемой информации, но и способом ее использования. Таким образом, последнее условие (хотя оно часто и не принимается во внимание) имеет по существу главное определяющее значение в формулировке понятия ценности информации.

Рассмотрим порядок определения минимальной среднеквадратичной ошибки регулирования в схеме на рис. 5-7,а, достигаемой при использовании наилучшего из физически осуществимых регулятора, а также найдем алгоритм функционирования такого оптимального регулятора.

Условие физической осуществимости регулятора определяется следующим образом:

$$\omega_p(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (5-18)$$

где  $\omega_p(t)$  — весовая характеристика регулятора.

Схему системы на рис. 5-7,а преобразуем к виду, показанному на рис. 5-7,б, где обозначено:

$$x(t) = s(t) - v(t). \quad (5-19)$$

Полученная структурная схема оказалась частным случаем схемы, которая рассматривалась при определении оптимальной динамической системы в § 4-11 (см. рис. 4-9) при  $z(t) = x(t)$ . Для определения оптимальной характеристики  $\Phi(p)$  можно непосредственно воспользоваться полученными там результатами. Из-за возможного наличия в регулирующем канале объекта запаздывания  $\tau_\mu$  такое же запаздывание должно наблюдаться и в замкнутой системе регулирования. Поэтому задача синтеза оптимальной системы регулирования сводится к решению уравнения (4-97), которое для рассматриваемого здесь случая приобретает следующий вид:

$$r_{xx}(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\text{опт}}(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta = 0 \text{ при } \xi \geq \tau_\mu. \quad (5-20)$$

Последовательность расчетов, рекомендованная в § 4-11, в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

1) по заданным корреляционным функциям задающего воздействия эквивалентной помехи определяется корреляционная функция воздействия  $x(t)$ . В частности, если  $s(t)$  и  $v(t)$  статистически независимы, то

$$r_{xx}(\tau) = r_{ss}(\tau) + r_{vv}(\tau), \quad (5-21)$$

после чего может быть найден соответствующий спектр мощности  $G_{xx}(p)$ .

2) находится выражение для сомножителя  $G^*_{xx}(+p)$  в составе  $G_{xx}(p)$ , зависящего лишь от  $+p$ , после чего применением обратного преобразования Фурье найдется соответствующее этому сомножителю  $r_{mx}(t)$ ;

3) по формуле (4-104), приобретающей здесь следующий вид:

$$\omega_{\text{опт}}(t) = r_{mx}(t) \text{ при } t \geq \tau_\mu, \quad (5-22)$$

определяются  $\omega_{\text{опт}}(t)$  и соответствующий ей оператор  $W_{\text{опт}}(p)$ ;

4) по формуле (4-105) находится искомый оператор оптимальной системы регулирования  $\Phi_{\text{опт}}(p)$ .

После определения оптимальной частотной характеристики  $\Phi_{\text{опт}}(p)$ , используя формулу (5-12), можно определить и оператор оптимального регулятора:

$$W_{p,\text{опт}}(p) = \frac{\Phi_{\text{опт}}^0(p)}{1 - \Phi_{\text{опт}}^0(p) e^{-\tau_\mu p}} \frac{1}{W_\mu^0(p)}, \quad (5-23)$$

где  $\Phi^0(p)$  — оператор оптимальной системы без учета запаздывания.

Дисперсия ошибки регулирования при использовании такого регулятора в соответствии с (4-111) будет определяться формулой

$$\sigma_{\text{емин}}^2 = \sigma_x^2 - \int_{\tau_\mu}^{\infty} r_{mx}^2(t) dt. \quad (5-24)$$

Заметим, что дисперсия  $\sigma_x^2$  может быть также определена через весовую характеристику формирующего фильтра  $r_{mx}(t)$ , если воспользоваться формулой (4-77), т. е.

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} r_{mx}^2(t) dt. \quad (5-25)$$

Формула для дисперсии ошибки (5-24) может быть переписана также в следующем более удобном для использования виде:

$$\sigma_{\epsilon_{\text{мин}}}^2 = \int_0^{\tau_{\mu}} r_{\text{мс}}^2(t) dt. \quad (5-26)$$

Таким образом, предельная точность регулирования системы зависит лишь от статистических характеристик входных воздействий и величины запаздывания в регулирующем канале объекта.

Процесс изменения во времени отклонения регулируемой величины при отсутствии регулирования, очевидно, совпадает с процессом  $x(t)$ .

Соответственно дисперсия отклонения в этом случае будет равна сумме дисперсий управляющего воздействия и эквивалентного возмущения  $\sigma_x^2 = \sigma_s^2 + \sigma_v^2$ , а ценность получаемой регулятором информации может быть вычислена подстановкой в формулу (5-17)  $\sigma_0 = \sigma_x$ .

Найдем оптимальный алгоритм функционирования регулятора и определим предельную динамическую точность системы регулирования, которая должна поддерживать постоянное заданное значение регулируемой величины  $\{s(t)=0\}$ , если корреляционная функция приведенного к выходу объекта возмущения  $v(t)$  определяется формулой

$$r_{vv}(\tau) = r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (5-27)$$

а оператор объекта по регулирующему каналу:

$$W_{\mu}(p) = \frac{k_{\mu} e^{-\tau_{\mu} p}}{T_{\mu} p + 1}. \quad (5-28)$$

В § 4-9 было найдено выражение для спектра мощности, соответствующего указанной корреляционной функции:

$$G_{xx}(p) = \frac{2\alpha\sigma_x^2}{(\alpha + p)(\alpha - p)}. \quad (5-29)$$

Таким образом, множитель в этом выражении, зависящий лишь от  $+p$ , определяется формулой

$$G_{xx}^*(+p) = \frac{\sqrt{2\alpha}\sigma_x}{\alpha + p}, \quad (5-30)$$

а соответствующий ему оригинал

$$r_{\text{мс}}(t) = \sqrt{2\alpha}\sigma_x e^{-\alpha t} \cdot 1(t).$$

График этой функции приведен на рис. 5-9. Следовательно, весовая характеристика (5-22) здесь имеет следующий вид:

$$\omega_{\text{опт}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_{\mu}; \\ \sqrt{2\alpha}\sigma_x e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq \tau_{\mu}, \end{cases}$$

(ее график приведен на рис. 5-9 пунктиром), а оператор

$$W_{\text{опт}}(p) = \sqrt{2\alpha}\sigma_x \frac{e^{-\alpha\tau_{\mu}} e^{-\tau_{\mu} p}}{\alpha + p}.$$

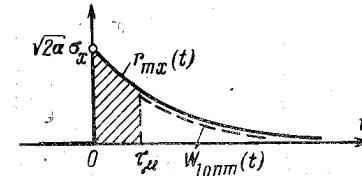


Рис. 5-9.

Таким образом, оператор оптимальной системы определяем по формуле (4-93):

$$\Phi_{\text{опт}}(p) = \frac{W_{\text{опт}}(p)}{G_{xx}^*(+p)} = e^{-\alpha\tau_{\mu}} e^{-\tau_{\mu} p}, \quad (5-31)$$

а оператор оптимального регулятора

$$W_{\text{р. опт}}(p) = \frac{e^{-\alpha\tau_{\mu}}}{1 - e^{-\alpha\tau_{\mu}} e^{-\tau_{\mu} p}} \frac{1}{k_{\mu}} (T_{\mu} p + 1). \quad (5-32)$$

Дисперсия ошибки регулирования в найденной оптимальной системе, т. е. предельная динамическая точность, определяется формулой

$$\sigma_{\epsilon_{\text{мин}}}^2 = 2\alpha\sigma_x^2 \int_0^{\tau_{\mu}} e^{-2\alpha\tau} d\tau = \sigma_x^2 (1 - e^{-2\alpha\tau_{\mu}}), \quad (5-33)$$

а ценность информации

$$I = -\log \sqrt{1 - e^{-2\alpha\tau_{\mu}}}. \quad (5-34)$$

**АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ**

**6-1. Системы высокой предельной динамической точности регулирования**

Формула (5-26) позволяет дать наглядную интерпретацию предельной динамической точности систем регулирования. Соотношение между дисперсиями ошибки регулирования при работе оптимального регулятора и отсутствии всякого регулирования равно отношению площади под графиком квадрата характеристики  $r_{mx}(t)$  от  $t=0$  до  $t=\tau_\mu$  [эта площадь была бы равна заштрихованной на рис. 5-9, если бы на этом рисунке был изображен график квадрата  $r_{mx}(t)$ ] к общей площади под графиком квадрата этой характеристики в пределах от  $t=0$  до  $t \rightarrow \infty$  [так как эта площадь в соответствии с (5-25) определяет величину  $\sigma_x^2$ ].

Очевидно, что предельная точность регулирования будет тем выше, чем меньше время запаздывания  $\tau_\mu$  (так как при этом уменьшается  $\sigma_{\text{в. мин}}^2$ ) и чем больше общая площадь под характеристикой, т. е. чем медленнее происходит спад корреляционной функции входного воздействия [или, что то же самое, чем меньшую полосу частот занимает спектр мощности воздействия  $x(t)$ ]. Иначе говоря, для того чтобы регулятор работал с достаточно высокой точностью, он должен прогнозировать изменение  $x(t)$  на время  $\tau_\mu$  вперед (так как только спустя это время его действия смогут оказать влияние на регулируемую величину), а это возможно лишь тогда, когда за время  $\tau_\mu$  случайный процесс не успеет слишком сильно непредвиденным образом измениться, т. е. если в составе этого сигнала не будет случайных высокочастотных составляющих.

При регулировании промышленных объектов обычно требуется, чтобы величина ошибки регулирования была существенно меньше отклонения регулируемой величины, которое имело бы место при отсутствии регулирования (не только автоматического, но и ручного), т. е. должно выполняться условие

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_x} \ll 1, \quad (6-1)$$

Обусловлено это не только требованием малости абсолютного значения ошибки регулирования  $\sigma_e$ , но и тем обстоятельством, что отклонение регулируемой величины при отсутствии регулирования  $\sigma_x$  обычно оказывается весьма большим (еще раз подчеркнем, что речь идет об отклонении, которое возникло бы при устранении всякого регулирования с объекта, в том числе и ручного, на все время его работы).

Системы регулирования, в которых величина динамической ошибки по сравнению с отклонением регулируемой величины при отсутствии регулирования является достаточно малой, в дальнейшем будут называться системами высокой динамической точности. Учитывая, что системы регулирования промышленных объектов должны относиться к этому типу систем, найдем, к какому выражению стремится частотная характеристика оптимального регулятора (5-23) по мере уменьшения отношения  $\sigma_e/\sigma_x$ .

Очевидно, что в этом случае частотная характеристика замкнутой системы становится близкой к единице:

$$\Phi(p) \approx 1. \quad (6-2)$$

Кроме того, поскольку высокая динамическая точность может быть достигнута лишь при относительно очень малых значениях времени запаздывания  $\tau_\mu$  и относительно узкой полосе частот воздействия  $x(t)$ , то это позволяет функцию  $e^{-\tau_\mu p}$  представить в виде ряда Тейлора, ограничившись в разложении лишь двумя первыми членами:

$$e^{-\tau_\mu p} \approx 1 - \tau_\mu p. \quad (6-3)$$

Подстановка полученных выражений в (5-23) приводит к следующей приближенной формуле для оптимального оператора регулятора:

$$W_{p. \text{ опт}}(p) \approx \frac{1}{\tau_\mu p W_\mu^0(p)}. \quad (6-4)$$

Потребуем, чтобы минимальная среднеквадратичная ошибка регулирования в системе, рассмотренной в примере § 5-6, была не менее чем в 20 раз меньше отклонения, имеющего место без регулирования, т. е. чтобы

$$\sigma_{\text{в. мин}}^2 \leq 400 \sigma_x^2.$$

Подставив в эту формулу выражение (5-33) для  $\sigma_{\text{емин}}^2$ , полученное в указанном примере, найдем, что это условие может быть выполнено лишь в случае, когда удовлетворяется неравенство

$$\alpha\tau_{\mu} \leq 0,051.$$

Будем считать, что время спада корреляционной функции (интервал корреляции) равно такому значению  $\tau_{\text{кор}}$ , что при  $\tau > \tau_{\text{кор}}$  корреляционная функция удовлетворяет условию

$$r_{xx}(\tau) < 0,05 r_{xx}(0).$$

Из формулы (5-27) для корреляционной функции  $r_{xx}(\tau)$  легко находится:

$$\alpha\tau_{\text{кор}} = 3,00.$$

Подставив это выражение в (5-33), получим, что требуемая точность регулирования может быть реализована лишь при условии, что время запаздывания  $\tau_{\mu}$  по крайней мере в 60 раз меньше времени спада корреляционной функции  $\tau_{\text{кор}}$ .

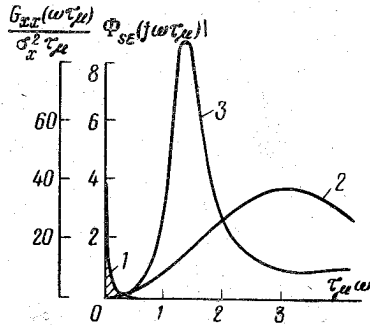


Рис. 6-1.

Легко также заметить, что полученный результат эквивалентен требованию, чтобы спектральная плотность мощности  $G_{xx}(\omega)$  воздействия  $x(t)$  занимала полосу частот намного уже, чем полоса пропускания системы регулирования. Это утверждение иллюстрирует рис. 6-1, где приведены график спектральной плотности  $G_{xx}(\omega)$  входного воздействия,  $x(t)$ , построенный в функции безразмерной частоты  $\tau_{\mu}\omega$  (кривая 1):

$$G_{xx}(\tau_{\mu}\omega) = \frac{2\alpha\sigma_x^2\tau_{\mu}^2}{\alpha^2\tau_{\mu}^2 + \tau_{\mu}^2\omega^2} = \frac{0,102\sigma_x^2\tau_{\mu}}{0,0026 + \tau_{\mu}^2\omega^2}$$

при предельном значении  $\alpha\tau_{\mu} = 0,051$ , а также графики квадрата модуля частотной характеристики замкнутой оптимальной системы, когда выходом является ошибка регулирования (кривая 2):

$$|\Phi_{se}(j\omega\tau_{\mu})|^2 = |1 - \Phi_{онт}(j\omega)|^2 = |1 - 0,95e^{-j\tau_{\mu}\omega}|^2,$$

где  $\Phi_{онт}(p)$  определяется формулой (5-31).

Это обстоятельство позволяет использовать вместо оптимального регулятора с оператором (5-23) приближенно оптимальный регулятор с оператором (6-4), который для рассматриваемого здесь объекта с характеристикой (5-28) принимает следующий вид:

$$W_{p,онт}(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{np}p} \right),$$

где  $k_p = T_{\mu}/\tau_{\mu}k_{\mu}$  и  $T_{np} = T_{\mu}$ .

Уравнение регулятора, соответствующее полученному оператору, имеет следующий вид:

$$\mu(t) = k_p \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_{np}} \int_0^t \varepsilon(t_1) dt_1 \right],$$

т. е. регулятор в каждый момент времени формирует регулирующее воздействие, пропорциональное взвешенной сумме отклонения и интеграла от отклонения регулируемой величины.

На рис. 6-1 (кривая 3) приведен график квадрата модуля частотной характеристики замкнутой системы регулирования с таким регулятором, полученный подстановкой в формулу (5-14) выражений (5-28) и (6-4):

$$|\Phi_{se}(j\omega)|^2 = \left| \frac{j\omega\tau_{\mu}}{j\omega\tau_{\mu} + e^{-j\omega\tau_{\mu}}} \right|^2.$$

Несмотря на общее весьма сильное различие графиков квадратов модулей оптимальной (кривая 2) и приближенно оптимальной (кривая 3) систем, в полосе частот, занимаемых возмущающим воздействием, они оказываются достаточно близкими.

Обратим внимание, что, как это следует из формулы (6-4), оптимальный алгоритм функционирования регулятора в случае, когда в системе может быть достигнута относительно высокая предельная точность регулирования, т. е. когда время запаздывания регулирующего канала объекта  $\tau_{\mu}$  оказывается намного меньше интервала корреляции воздействия  $x(t)$ , перестает зависеть от статистических характеристик воздействий и целиком определяется лишь динамической характеристикой регулирующего канала объекта. Соответственно, если априори известно, что точность работы системы регулирования будет достаточно высокой, определение оптимального алгоритма функционирования регулятора может быть осуществлено без знания статистических характеристик возмущений и управляющего воздействия. Эти характеристики здесь могут понадобиться лишь для уточнения величины среднеквадратичной ошибки регулирования при найденном алгоритме функционирования регулятора.

В заключение обратим внимание, что полученные выше алгоритмы функционирования регулятора (5-23) и (6-4) могут считаться также близкими к оптимальным и в случае, когда регулятор должен обеспечить наименьшее среднеквадратичное отклонение регулируемой величины при спорадических ступенчатых воздействиях. Это утверждение следует из того, что указанные алгоритмы

обеспечивают наибольшую точность регулирования при низкочастотных воздействиях; в то же время параметр  $t_0$  в корреляционной функции расчетного наиболее тяжелого воздействия (5-7) имеет (относительно) очень большую величину, превышающую время переходных процессов в системе, а следовательно, и спектр мощности этого воздействия занимает полосу частот значительно более узкую, чем полоса пропускаемых системой частот.

В связи со сказанным необходимо сделать замечание, относящееся к применению нелинейных алгоритмов функционирования регуляторов, синтез которых осуществлен на основе оптимизации показателей качества переходных процессов при ступенчатых детерминированных воздействиях. Таковы регуляторы с переменной структурой [Л. 21], регуляторы с переменными параметрами, зависящими от текущего отклонения регулируемой величины [Л. 25], и т. п. Вопрос о целесообразности перехода от линейных (5-23) и (6-4) алгоритмов к нелинейным при регулировании линейных объектов регулирования должен решаться с учетом того, что ступенчатое возмущение остается наиболее тяжелым для системы регулирования лишь до тех пор, пока эта система в целом остается линейной. Применение нелинейного регулятора превращает такую систему в нелинейную, для которой уже становится неверным утверждение, что ступенчатое возмущение является для нее наиболее тяжелым.

Соответственно использование таких регуляторов для регулирования объектов, подверженных действию случайных возмущений, без дополнительной постановки расчетов или экспериментов для анализа точности регулирования при возмущениях другой, возможной в условиях эксплуатации формы, очевидно, недопустимо, так как не исключена возможность, что в условиях действия случайных возмущений такие регуляторы потеряют все свои преимущества.

## 6-2. Типовые законы регулирования

При попытке практического использования формулы (6-4) для технической реализации оптимального регулятора сразу же возникает трудность в моделировании оператора объекта  $W_{\mu}^0(p)$ . Этот оператор выражается обычно весьма сложными (как правило, трансцендентными) математическими зависимостями, а в случае, когда характеристики объекта получены экспериментально, они вообще задаются таблично или в виде графиков. В этой связи возникает проблема аппроксимации реальной характеристики объекта  $W_{\mu}(p)$  некоторой специально подобранной по возможности простой математической моделью  $W_{\mu a}(p)$ .

Аппроксимация характеристик объектов регулирования имеет свою специфику, на которую обычно не обращается должного внимания. Напомним, что процедура аппроксимации одной функции другой состоит в том, что составляется некоторый функционал, зависящий от ошибки аппроксимации, т. е. от разности аппроксимируемой и аппроксимирующей функций. Из условия минимума этого функционала определяются наилучшие значения коэффициентов аппроксимирующей функции. С первого взгляда может показаться, что подобную процедуру можно без всяких изменений применить и при аппроксимации динамических характеристик объекта. Так, приближение частных характеристик объекта по методу наименьших квадратов можно было бы осуществлять из условия минимизации функционала:

$$\int_0^{\infty} |W_{\mu}(j\omega) - W_{\mu a}(j\omega)|^2 d\omega = \min.$$

Подобным же образом может быть осуществлена аппроксимация и других характеристик объекта, например аппроксимация его переходной характеристики  $h_{\mu}(t)$  подходящей характеристикой  $h_{\mu a}(t)$ :

$$\int_0^{\infty} [h_{\mu}(t) - h_{\mu a}(t)]^2 dt = \min.$$

Очевидно, однако, что функционалы, с помощью которых осуществляется приближение, могут строиться самыми разнообразными способами. Каждый из них будет давать свою оптимальную аппроксимирующую характеристику, а следовательно, и свою оптимальную характеристику регулятора. Остается неясным вопрос о том, насколько малой в каждом случае должна быть погрешность приближения, для того чтобы можно было считать результаты аппроксимации удовлетворительными.

Чтобы показать насколько различными могут получаться результаты аппроксимации, рассмотрим следующий пример.

Пусть регулируемый объект имеет оператор

$$W_{\mu}(p) = \frac{k_{\mu}}{T_{\mu}p + 1}.$$

Произведем аппроксимацию свойств этого объекта безынерционным элементом с запаздыванием

$$W_{\mu a}(p) = k_{\mu a} e^{-\tau_{\mu a} p}.$$

Используя метод наименьших квадратов к переходным характеристикам, получаем следующее выражение для погрешности аппроксимации:

$$\int_0^{\infty} [k_{\mu} (1 - e^{-\frac{t}{T_{\mu}}}) 1(t) - k_{\mu a} \cdot 1(t - \tau_{\mu a})]^2 dt = \\ = \tau_{\mu a} + 2T_{\mu} e^{-\frac{\tau_{\mu a}}{T_{\mu}}} - 1,5T_{\mu} \text{ при } k_{\mu} = k_{\mu a}.$$



Дифференцируя его по  $\tau_{\mu a}$  и приравнявая результат к нулю, получаем следующее условие минимума ошибки аппроксимации:  $e = 0,5$  или  $\tau_{\mu a} = 0,6065T_{\mu}$ .

Если попытаться применить тот же метод, но по отношению к частотным характеристикам, т. е. минимизировать интеграл:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{k_{\mu}}{T_{\mu}j\omega + 1} - k_{\mu a} e^{-T_{\mu} a \omega} \right|^2 d\omega,$$

придем к совершенно иному результату, а именно к утверждению, что рассматриваемая аппроксимация невозможна, так как вне зависимости от параметров аппроксимирующей характеристики погрешность аппроксимации всегда будет бесконечно большой.

Поэтому в основу критерия приближения при аппроксимации динамических характеристик объекта должна быть положена конечная цель аппроксимации, а именно получение системы регулирования, в минимальной степени отличающейся от оптимальной системы. При этом критерий приближения должен быть подчинен показателю точности оптимальной системы. В частности, для принятого выше показателя оптимальности системы регулирования — минимума среднеквадратичной ошибки регулирования задача оптимального приближения при аппроксимации динамической характеристики объекта должна формулироваться следующим образом.

По заданной динамической характеристике объекта  $W_{\mu}(p)$  выбрать структуру и параметры аппроксимирующей характеристики  $W_{\mu a}(p)$  так, чтобы среднеквадратичная ошибка системы регулирования с регулятором, частотная характеристика которого определяется формулой (6-4) при замене в ней  $W_{\mu}(p)$  на  $W_{\mu a}(p)$

$$W_p(p) = \frac{1}{\tau_{\mu a} p W_{\mu a}^0(p)}, \quad (6-5)$$

отличалась от среднеквадратичной ошибки оптимальной системы на минимально возможную величину. В этом отражается необходимость использования системного подхода при построении математической модели объекта.

Соответственно решение задачи синтеза реального регулятора, в наименьшей степени отличающегося от регулятора, обеспечивающего предельную динамическую

точность регулирования, может осуществляться в такой последовательности.

1. Исходя из общего вида характеристики  $W_{\mu}(p)$ , подбирается достаточно простая структура аппроксимирующей динамической характеристики  $W_{\mu a}(p)$  и по формуле (6-5) определяется соответствующая ей структура оператора регулятора  $W_p(p)$ .

2. По характеристике объекта  $W_{\mu}(p)$  и спектру мощности  $G_{xx}(p)$  входного воздействия  $x(t)$  (5-19) отыскиваются численные значения оптимальных коэффициентов оператора регулятора (эти коэффициенты обычно называются параметрами настройки регулятора), минимизирующих дисперсию ошибки регулирования. Вычисление дисперсии ошибки для каждой комбинации параметров настройки осуществляется по формуле

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{se}(j\omega)|^2 G_{xx}(\omega) d\omega, \quad (6-6)$$

где  $\Phi_{se}(j\omega)$  — частотная характеристика системы регулирования, определяемая по формуле (5-14).

Эти расчеты могут быть, очевидно, выполнены и в том случае, когда частотная характеристика объекта  $W_{\mu}(p)$  задана таблично или графически, а аналитическое выражение для нее неизвестно. Построение характеристики замкнутой системы регулирования  $\Phi_{se}(p)$  по характеристикам объекта и регулятора, а также вычисление интеграла (6-6) в этом случае могут быть легко выполнены графическими или численными методами.

При выборе структуры аппроксимирующей характеристики  $W_{\mu a}(p)$ , необходимо следить, чтобы характеристическое уравнение регулятора не имело корней в правой полуплоскости. В противном случае, полученная система может оказаться не грубой к вариациям параметров.

Опыт показывает, что переходные характеристики подавляющего большинства встречающихся на практике промышленных объектов регулирования имеют неколебательный вид (типа характеристики, показанной на рис. 5-8,а). Такие характеристики обычно достаточно



хорошо аппроксимируются инерционной системой второго порядка с запаздыванием:

$$W_{\mu a}(p) = \frac{k_{\mu a} e^{-\tau_{\mu a} p}}{T_{\mu 2}^2 p^2 + T_{\mu 1} p + 1}, \quad (6-7)$$

а в случаях, когда может быть допущена большая динамическая ошибка регулирования — инерционной системой первого порядка с запаздыванием [характеристика которой получается из (6-7) при  $T_{\mu 2} = 0$ ] или даже просто безынерционной системой с запаздыванием, характеристика которой получается из (6-7) при

$$T_{\mu 1} = T_{\mu 2} = 0.$$

Подстановка указанных аппроксимирующих характеристик в общее выражение (6-5) приводит к следующим трем типам регулятора, которые в настоящее время обычно реализуются в серийной аппаратуре регулирования и считаются типовыми.

1) ПИД-алгоритм, частотная характеристика которого определяется формулой:

$$W_p(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_n p} + T_d p \right), \quad (6-8)$$

где  $k_p$  — коэффициент передачи;  $T_n$  — постоянная интегрирования;  $T_d$  — постоянная дифференцирования регулятора, являющиеся параметрами его настройки. Они связаны с параметрами аппроксимирующей характеристики объекта (6-7) соотношениями:

$$k_p = \frac{T_{\mu 1}}{k_{\mu a} \tau_{\mu a}}; \quad T_n = T_{\mu 1}; \quad T_d = \frac{T_{\mu 2}^2}{T_{\mu 1}}. \quad (6-9)$$

Регулятор с таким алгоритмом работы осуществляет перемещение регулирующего органа в каждый момент времени пропорционально отклонению регулируемой величины, интегралу и производной отклонения:

$$\mu(t) = k_p \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_n} \int \varepsilon(t) dt + T_d \varepsilon'(t) \right]. \quad (6-10)$$

2) ПИ-алгоритм, частотная характеристика и уравнение которого определяются формулами:

$$W_p(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_n p} \right); \quad (6-11)$$

$$\mu(t) = k_p \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_n} \int \varepsilon(t) dt \right]. \quad (6-12)$$

Регулятор с таким алгоритмом осуществляет перемещение регулирующего органа пропорционально отклонению регулируемой величины и интегралу от отклонения (этот алгоритм уже рассматривался в примере § 6-1).

3) И-алгоритм, частотная характеристика и уравнение которого определяются формулами:

$$W_p(p) = \frac{k_n}{p}, \quad (6-13)$$

$$\mu(t) = k_n \int \varepsilon(t) dt, \quad (6-14)$$

где  $k_n = 1/k_{\mu a} \tau_{\mu a}$ . Регулятор осуществляет перемещение регулирующего органа пропорционально интегралу от отклонения регулируемой величины, а скорость перемещения регулирующего органа в каждый момент времени пропорциональна отклонению регулируемой величины в тот же момент.

Особенностью характеристики, показанной на рис. 5-8, является то, что регулируемая переменная объекта с течением времени стабилизируется на некотором новом значении; объекты с такими переходными характеристиками получили название объектов с саморегулированием. На практике могут также встретиться объекты без саморегулирования, типичный вид таких характеристик приведен на рис. 5-8,а пунктиром. Частотная характеристика таких объектов при  $\omega=0$  уходит в бесконечность, а характеристическое уравнение имеет один нулевой корень. Такие характеристики достаточно хорошо аппроксимируются характеристикой вида

$$W_{\mu a}(p) = \frac{k_{\mu a} e^{-\tau_{\mu a} p}}{p(T_{\mu 1} p + 1)} \quad (6-15)$$

или даже более простой характеристикой

$$W_{\mu a}(p) = \frac{k_{\mu a} e^{-\tau_{\mu a} p}}{p} \quad (6-16)$$

Подстановка последних выражений в формулу для оптимального регулятора (6-5) приводит еще к двум типовым алгоритмам регуляторов.

4) ПД-алгоритм, частотная характеристика и уравнение которого имеют вид:

$$W_p(p) = k_p(1 + T_d p); \quad (6-17)$$

$$\mu(t) = k_p[e(t) + T_d e'(t)], \quad (6-18)$$

где  $k_p = 1/\tau_{\mu a} k_{\mu a}$ ;  $T_d = T_{\mu}$ .

Такой регулятор осуществляет перемещение регулирующего органа пропорционально отклонению и производной от отклонения регулируемой величины.

5) П-алгоритм, частотная характеристика и уравнение которого имеют вид:

$$W_p(p) = k_p; \quad (6-19)$$

$$\mu(t) = k_p e(t), \quad (6-20)$$

где  $k_p = 1/\tau_{\mu a} k_{\mu a}$ .

Этот регулятор осуществляет перемещение регулирующего органа пропорционально отклонению регулируемой величины.

Особенностью регуляторов, работающих по ПД- и П-алгоритмам, является то, что изменение положения регулирующего органа они могут осуществить за счет изменения поддерживаемого значения регулируемой величины. Поэтому в стационарных режимах работы объекта регулятор поддерживает регулируемую величину при разных нагрузках на разных значениях. Такое явление получило название остаточной неравномерности регулирования.

В табл. 6-1 приведены переходные и частотные характеристики наиболее распространенных законов регулирования; там же показаны соответствующие каждому закону переходные характеристики аппроксимирующей модели объекта.

Таблица 6-1

Тип регулятора	Переходные характеристики	Частотные характеристики	Переходные характеристики аппроксимирующей модели
П	$h(t) = k_p \cdot 1(t)$ 	$W(j\omega) = k_p$ 	$h_{\mu a}(t)$ 
И	$h(t) = k_u t \cdot 1(t)$ 	$W(j\omega) = -j \frac{k_u}{\omega}$ 	$h_{\mu a}(t)$ 
ПИ	$h(t) = k_p [1 + \frac{t}{T_d}] \cdot 1(t)$ 	$W(j\omega) = k_p [1 - j \frac{1}{T_d \omega}]$ 	$h_{\mu a}(t)$ 
ПИД	$h(t) = k_p T_D \delta(t) + k_p [1 + \frac{t}{T_d}] \cdot 1(t)$ 	$W(j\omega) = k_p [1 - j(\frac{1}{T_d \omega} - T_D \omega)]$ 	$h_{\mu a}(t)$ 

### 6-3. Техническая реализация регуляторов

Автоматические регуляторы являются специализированными вычислительными машинами, особенностью которых является наличие оперативной связи с объектом управления. Эта связь осуществляется с помощью чувствительных элементов измерительных устройств, посредством которых регулятор получает информацию о текущем значении регулируемых величин и исполнительных устройств, с помощью которых он оказывает регулирующие воздействия на объект. В зависимости от принятого способа вычислений регуляторы делятся на аналоговые и цифровые.

В аналоговых регуляторах формирование требуемого алгоритма регулирования осуществляется с помощью специальных корректирующих динамических звеньев. Эти звенья часто выполняются

в виде отрицательных обратных связей, охватывающих отдельные каскады расположенных в цепи прохождения сигналов от измерительного к исполнительному устройству регулятора усилителей. При выборе этих обратных связей широко пользуются сформулированным в § 3-1 свойством систем с отрицательными обратными связями, которое сводится к тому, что при достаточно большом коэффициенте усиления прямой цепи свойства регулятора в целом определяются лишь динамическими характеристиками обратной связи.

В качестве примера рассмотрим электронный регулятор с релейным выходом на электрический исполнительный механизм постоянной скорости.

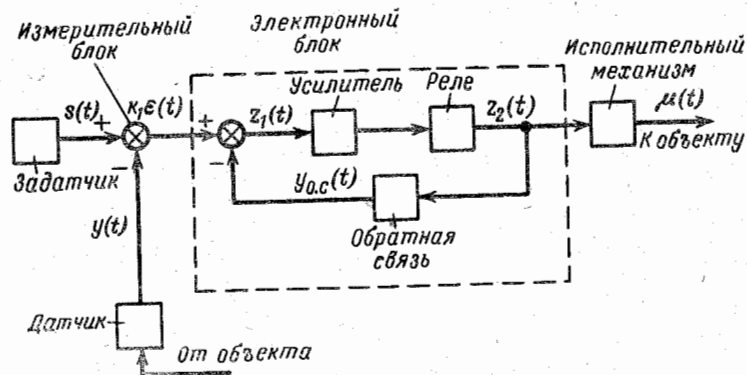


Рис. 6-2.

Подобные регуляторы серийно выпускаются Московским заводом тепловой автоматики; они предназначены для регулирования переменных самой разнообразной физической природы (температуры, давления, расходов и т. п.). В зависимости от характера регулируемой величины меняются датчики и измерительный блок регулятора, в котором осуществляется выявление отклонения регулируемой величины от ее заданного значения. Электронный блок регулятора и исполнительный механизм (трехфазный асинхронный электродвигатель с редуктором, концевыми ограничителями, указателем положения регулирующего органа и т. п.) остаются одинаковыми.

Структурная схема регулятора приведена на рис. 6-2; формирование требуемого алгоритма функционирования осуществляется в электронном блоке регулятора с помощью отрицательной обратной связи.

Надо сказать, что за более чем двадцатилетний период существования рассматриваемых регуляторов (первые их образцы были разработаны во Всесоюзном теплотехническом институте) их конструкция непрерывно совершенствовалась и прошла через несколько модификаций. Тем не менее основные принципы работы их по существу остались неизменными. Представляется целесообразным поэтому остановиться на относительно ранних, сравнительно простых

конструкциях, где эти принципы проявляются в наиболее прозрачном виде.

Принципиальная схема электронного блока одного из простейших в конструктивном отношении образцов такого регулятора-регулирующего прибора типа РПИК приведена на рис. 6-3. Этот блок предназначен для усиления сигнала, поступающего от измерительного блока, и формирования закона функционирования регулятора. Он состоит из двухкаскадного электронного усилителя, выполненного на лампах  $L_1$  и  $L_2$ , выходных электромагнитных реле  $P_1$  и  $P_2$  и устройства обратной связи.

Первый каскад электронного усилителя постоянного тока выполнен на двойном триоде лампы  $L_1$  по балансной схеме. Каскад является фазочувствительным, т. е. знак выходного напряжения зависит от знака входного. Сигнал от измерительного блока подается на сетку левой половины лампы (с клемм 14—15), которая работает в режиме катодного повторителя. Нагрузка этого триода (резистор  $R_4$  и соответствующая доля потенциометра  $R_3$ , играющего роль «нуль-корректора») включена в катодную цепь. Напряжение с нагрузки левого триода поступает на сетку правого триода последовательно с напряжением сигнала от устройства обратной связи.

Правый триод работает в режиме усилителя. Хотя его нагрузка (резистор  $R_5$  и соответствующая ему доля «корректора»  $R_3$ ) включена, как и у левого триода, в катодную цепь лампы, напряжение с нагрузки его сетке не подводится.

Питание обоих триодов производится напряжением переменного тока от отдельных обмоток IV и V силового трансформатора  $Tr_1$ . Сеточное смещение обеспечивается дополнительным источником, питаемым через выпрямитель  $B_1$  от отдельной обмотки III трансформатора  $Tr_1$ .

Усиленное первым каскадом напряжение подается на вход второго каскада, который является усилителем мощности. Усилитель выполнен по схеме баланса токов. Два триода лампы  $L_2$  включены последовательно и питаются напряжением постоянного тока, источником которого являются выпрямители  $B_4$  и  $B_5$ , подключенные к обмотке VI трансформатора  $Tr_1$ . Верхний (по схеме) триод управляется напряжением, развиваемым на резисторе  $R_{13}$ , которое является частью анодной нагрузки для нижнего триода. Потенциометр  $R_{12}$  предназначен для регулирования зоны нечувствительности прибора, т. е. границ изменения напряжения на его входе, в пределах которых не происходит включения реле. Минимальная зона нечувствительности соответствует крайнему верхнему положению движка  $R_{12}$ , максимальная — крайнему нижнему.

Нагрузкой каскада служат два электромагнитных реле. Селективность срабатывания реле в зависимости от направления тока в цепи нагрузки обеспечивается включением последовательно с их обмотками выпрямителей  $B_2$  и  $B_3$ . Каждое реле имеет по одной паре нормально разомкнутых контактов, посредством которых напряжение постоянного тока подается на вход обратной связи и в обмотки магнитного пускателя исполнительного механизма.

При замыкании контактов одного из двух реле к одной из обмоток магнитного пускателя через клеммы 7—8 или 9—8, а также на вход обратной связи поступает напряжение постоянного тока от силового выпрямителя электронного блока  $B_6$ , питающегося от силового трансформатора  $Tr_2$ .

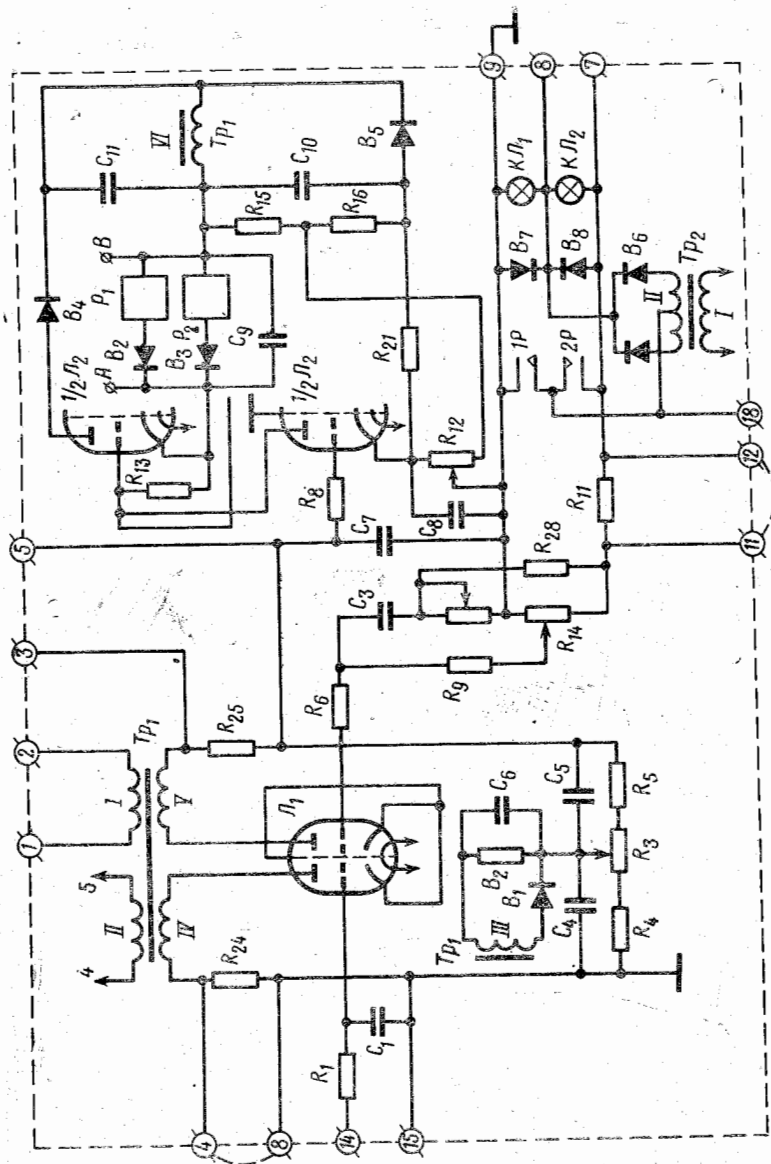


Рис. 6-3.

Параллельно обмоткам магнитного пускателя (внутри электронного блока) включены индикаторные лампочки  $KЛ_1$  (больше) и  $KЛ_2$  (меньше), сигнализирующие о включении двигателя исполнительного механизма. Выпрямители  $B_7$  и  $B_8$  являются искрогасящими для контактов реле.

Устройство обратной связи электронного блока состоит из потенциометра  $R_{14}$ , резистора  $R_{11}$ , конденсатора  $C_3$ , сменных резисторов  $R_7$  и  $R_9$ . В момент срабатывания одного из реле на потенциометре  $R_{14}$  появляется напряжение, являющееся входным воздействием для устройства обратной связи. Полярность его подобрана таким образом, чтобы воздействие обратной связи было всегда направлено навстречу воздействию напряжения сигнала, вызвавшего срабатывание реле, (т. е. обратная связь является отрицательной). Выходным сигналом устройства обратной связи является напряжение на конденсаторе  $C_3$  и резисторе  $R_7$ , подаваемое через защитный резистор  $R_6$  на сетку правого триода лампы  $L_1$ .

Резистор  $R_{11}$  нормально замкнут переключением между клеммами 11 и 12; он служит для уменьшения (в случае необходимости) коэффициента усиления устройства обратной связи примерно в 10 раз.

Регулятор работает следующим образом.

Пока регулируемая величина находится на своем заданном значении, сигнал на входе электронного блока отсутствует, оба реле обесточены, двигатель исполнительного механизма находится в неподвижном состоянии, конденсатор  $C_3$  обратной связи разряжен. При появлении отклонения регулируемой величины на входе электронного блока появляется напряжение, пропорциональное величине этого отклонения, что приводит к включению одного из реле. Двигатель начинает с постоянной скоростью перемещать регулирующий орган в направлении, соответствующем ликвидации отклонения регулируемой величины. Одновременно с этим подается напряжение на вход обратной связи, начинается заряд конденсатора  $C_3$  и постепенный рост напряжения на выходе обратной связи. Напряжение на сетке правого триода лампы  $L_1$  складывается из напряжения, пропорционального отклонению регулируемой величины, и напряжения цепи отрицательной обратной связи (при этом второе

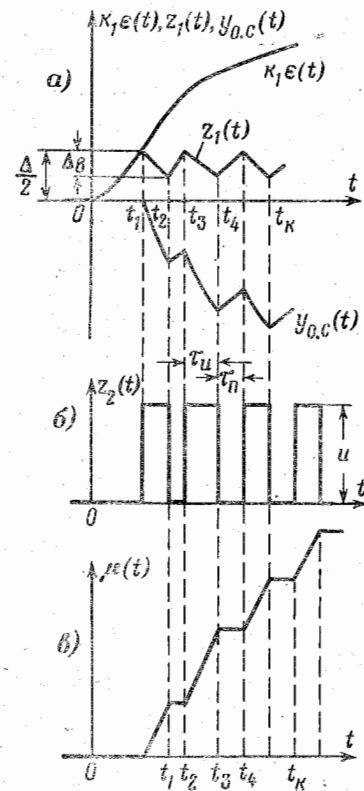


Рис. 6-4.

напряжение всегда вычитается из первого); поэтому спустя некоторое время напряжение на правой сетке уменьшается до величины, при которой реле размыкает свои контакты.

Сказанное иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 6-4, где  $k_1 e(t)$  — изменение напряжения на левой сетке лампы  $L_1$ , обусловленное изменением регулируемой величины ( $k_1$  — коэффициент усиления измерительного блока и левого триода лампы  $L_1$ );  $y_{o.c}(t)$  — изменение напряжения на выходе обратной связи;  $z_1(t) = k_1 e(t) - y_{o.c}(t)$  — изменение напряжения на сетке правого триода;  $z_2(t)$  — напряжение на выходе реле, подаваемое на вход обратной связи и магнитный пускатель двигателя исполнительного механизма;  $\mu(t)$  — перемещение двигателя исполнительного механизма. Включение реле происходит в момент времени  $t_1$ , когда отклонение регулируемой величины начинает превышать половину зоны нечувствительности регулятора  $\Delta$  (приведенную к сетке правого триода). В этот момент начинается движение регулирующего органа и рост в отрицательную сторону напряжения на выходе обратной связи. Реле выключается в момент  $t_2$ , когда напряжение на сетке правого триода уменьшится до величины  $\Delta/2 - \Delta_n$  (напомним, что выключение всякого электромагнитного реле происходит при напряжении несколько меньшем, чем напряжение включения; разность напряжений включения и выключения, обозначенная на графике как  $\Delta_n$ , обычно называется зоной возврата реле). После этого момента двигатель останавливается, однако процесс регулирования не оканчивается.

Заряженный до напряжения  $\sqrt{k_1 e(t_2) - \left[ \frac{\Delta}{2} - \Delta_n \right]}$  конденсатор  $C_3$

начинает разряжаться, напряжение на выходе обратной связи начинает падать, что приводит к росту напряжения на сетке правого триода  $z_1(t)$ . В результате этого в момент времени  $t_3$  вновь сра-

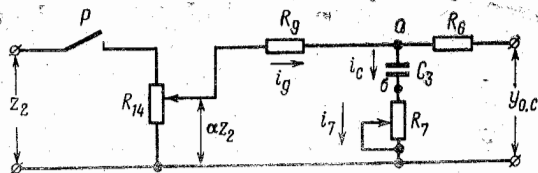


Рис. 6-5.

батывает реле, снова включается двигатель и начинается рост напряжения на выходе обратной связи. Процесс изменения напряжений повторяется и реле вновь замыкает свои контакты в момент времени  $t_4$ . Описанный процесс включений и выключений повторяется многократно, до тех пор пока регулируемая величина не будет приведена к своему заданному значению.

Рассмотренный режим работы регуляторов с релейными элементами, при котором перемещение регулирующего органа происходит короткими включениями в одну и ту же сторону, получил название пульсирующего или скользящего режима.

Схема обратной связи отдельно показана на рис. 6-5. В точках  $a$  и  $b$  этой схемы имеем следующие уравнения токов:

$$i_9 = i_c; \quad i_7 = i_c,$$

причем

$$i_9 = \frac{\alpha z_2 - y_{o.c}}{R_9}; \quad i_7 = \frac{y_{o.c} - u_C}{R_7}; \quad i_c = C \frac{du_C}{dt}.$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий положение ручки потенциометра  $R_{14}$ ;  $u_C$  — напряжение на конденсаторе  $C_3$ , т. е.

$$\frac{\alpha z_2(t) - y_{o.c}(t)}{R_9} = C \frac{du_C(t)}{dt};$$

$$\frac{y_{o.c}(t) - u_C(t)}{R_7} = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Исключив отсюда  $u_C(t)$ , получим:

$$(R_7 + R_9) C_3 \frac{dy_{o.c}(t)}{dt} + y_{o.c}(t) = \alpha \left[ R_7 C_3 \frac{dz_2(t)}{dt} + z_2(t) \right]$$

или, обозначив  $(R_7 + R_9) C_3 = T_{o.c}$ ;  $R_7 C_3 = T_n$ ,

$$T_{o.c} \frac{dy_{o.c}(t)}{dt} + y_{o.c}(t) = \alpha \left[ T_n \frac{dz_2(t)}{dt} + z_2(t) \right]. \quad (6-21)$$

Таким образом, обратная связь в регуляторе выполнена в виде интегро-дифференцирующего звена. Практически величина  $R_7$  всегда оказывается намного меньшей, чем величина  $R_9$  (относительно небольшое сопротивление резистора  $R_7$  вводится по конструктивным соображениям для более четкого срабатывания реле и повышения устойчивости внутреннего контура регулятора, образованного рассматриваемой обратной связью). Если пренебречь величиной сопротивления резистора  $R_7$ , то вместо уравнения (6-21) получим:

$$T_{o.c} \frac{dy_{o.c}(t)}{dt} + y_{o.c}(t) = \alpha z_2(t), \quad (6-22)$$

где  $T_{o.c} = C_3 R_9$ , т. е. обратная связь может считаться выполненной в виде аperiodического звена.

Рассматриваемый регулятор содержит в своем составе существенно нелинейное звено с нелинеаризуемой характеристикой — реле, которое не позволяет получить уравнение регулятора из уравнений его звеньев обычным порядком. Поэтому будем рассматривать состояние регулятора на дискретных интервалах времени, каждый из которых состоит из времени посылки импульса и паузы, следующей за этим импульсом (на рис. 6-4 эти интервалы заключены между моментами времени  $t_1 - t_3$ ,  $t_3 - t_5$ ,  $t_5 - t_7$  и т. д.). Средняя скорость перемещения регулирующего органа за произвольный  $k$  интервал, очевидно, определяется формулой

$$\mu'_{cp}(t_k) = \frac{S_{чн}}{\tau_{чн} + \tau_{пн}}, \quad (6-23)$$

где  $S$  — скорость перемещения регулирующего органа при включенном двигателе;  $\tau_{ик}$  и  $\tau_{пк}$  — длительности импульса и паузы.

Длительность импульса определяется временем изменения на ширину зоны возврата реле  $\Delta_B$  напряжения на сетке правой лампы при включенном реле:  $z_1(t) = k_1 \varepsilon(t) - y_{o.c.вкл}(t)$ , где  $y_{o.c.вкл}(t)$  — изменение напряжения на выходе обратной связи при включенном реле. Обычно зона возврата реле невелика, что позволяет считать изменение  $\varepsilon(t)$ ,  $y_{o.c.вкл}(t)$ ,  $y_{o.c.выкл}(t)$  в пределах одного интервала происходящим с постоянной скоростью. Соответственно условие для определения длительности импульса может быть записано следующим образом:

$$-\Delta_B = z'_1(t_k) \tau_{ик} = [k_1 \varepsilon'(t_k) - y'_{o.c.вкл}(t_k)] \tau_{ик},$$

где  $\varepsilon'(t_k)$  — скорость изменения ошибки регулирования на  $k$ -м интервале;  $y'_{o.c.вкл}(t_k)$  — скорость изменения сигнала обратной связи на этом же интервале при включенном реле.

Из последней формулы получаем выражение для длительности импульса на  $k$ -м интервале:

$$\tau_{ик} = \frac{-\Delta_B}{k_1 \varepsilon'(t_k) - y'_{o.c.вкл}(t_k)}. \quad (6-24)$$

Точно таким же образом может быть получена формула для длительности паузы  $k$ -го интервала:

$$\tau_{пк} = \frac{\Delta_B}{k_1 \varepsilon'(t_k) - y'_{o.c.выкл}(t_k)}, \quad (6-25)$$

где  $y'_{o.c.выкл}(t_k)$  — скорость изменения сигнала обратной связи на этом интервале при выключенном реле.

Подставив (6-24) и (6-25) в (6-23), получим:

$$\mu'_{ср}(t_k) = S \frac{k_1 \varepsilon'(t_k) - y'_{o.c.выкл}(t_k)}{y'_{o.c.вкл}(t_k) - y'_{o.c.выкл}(t_k)}. \quad (6-26)$$

Уравнение обратной связи (6-22) при включенном и выключенном реле приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{o.c} y'_{o.c.вкл} + y_{o.c.вкл}(t) &= \alpha z_{20}; \\ T_{o.c} y'_{o.c.выкл}(t) + y_{o.c.выкл}(t) &= 0, \end{aligned}$$

где  $z_{20}$  — постоянное напряжение, подаваемое на потенциометр  $R_{14}$  при включенном реле.

Из этих уравнений определяется значение скорости изменения напряжения на выходе обратной связи в зависимости от уровня этого напряжения:

$$\begin{aligned} y'_{o.c.вкл}(t) &= \frac{\alpha z_{20} - y_{o.c.вкл}(t)}{T_{o.c}}; \\ y'_{o.c.выкл}(t) &= -\frac{y_{o.c.выкл}(t)}{T_{o.c}}. \end{aligned}$$

Подставив теперь эти выражения в (6-26) и учтя при этом, что сигнал обратной связи с точностью до половины зоны нечувствительности совпадает с сигналом  $k_1 \varepsilon(t)$  и поэтому (считаем зону

нечувствительности достаточно малой)  $y_{o.c.вкл} = y_{o.c.выкл} = k_1 \varepsilon(t)$ , получим:

$$\mu'_{ср}(t_k) = \frac{k_1 T_{o.c} S}{\alpha z_{20}} \left[ \varepsilon'(t_k) + \frac{1}{T_{o.c}} \varepsilon(t_k) \right]. \quad (6-27)$$

При достаточно частых включениях реле вместо дискретных интервалов времени можно рассматривать непрерывное изменение времени, т. е. записать последнюю формулу в виде

$$\mu'(t) = \frac{k_1 T_{o.c} S}{\alpha z_{20}} \left[ \varepsilon'(t) + \frac{1}{T_{o.c}} \varepsilon(t) \right]. \quad (6-28)$$

Проинтегрировав это выражение и обозначив

$$T_{п} = T_{o.c}; \quad k_{р} = \frac{k_1 T_{o.c} S}{\alpha z_{20}}, \quad (6-29)$$

придем к следующему уравнению регулятора:

$$\mu(t) = k_{р} \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_{п}} \int \varepsilon(t) dt \right]. \quad (6-30)$$

Таким образом, в пульсирующем режиме работы рассматриваемый регулятор работает как линейный с ПИ-законом регулирования (6-12). Постоянная интегрирования  $T_{п}$  этого регулятора равна постоянной времени устройства обратной связи, а коэффициент передачи  $k_{р}$  зависит от большого числа факторов (коэффициента усиления измерительного блока, постоянной времени обратной связи, скорости перемещения регулирующего органа при включенном двигателе, положения движка потенциометра  $R_{14}$ , напряжения, подаваемого на этот потенциометр). Для возможности установки требуемых для регулирования каждого конкретного объекта параметров настройки  $T_{п}$  и  $k_{р}$  в регуляторе предусмотрены специальные органы настройки. Установка постоянной интегрирования осуществляется путем подбора соответствующей величины сопротивления резистора  $R_9$ . С этой целью этот резистор выполнен съемным и клеммы его вынесены на переднюю панель электронного блока. Установка желаемого коэффициента передачи регулятора может быть осуществлена путем изменения положения движка потенциометра  $R_{14}$ , ручка которого вынесена на переднюю панель электронного блока. Грубое изменение коэффициента передачи может быть осуществлено с помощью переключки между клеммами 11—12 (см. рис. 6-3).

Дальнейшим развитием регулирующего прибора РПИК является прибор типа РПИБ. В нем осуществлена замена оконечного лампового каскада с электромеханическими реле на выходе на бесконтактный транзисторный усилитель, что повысило надежность регулятора. Кроме того, с целью достижения независимой настройки параметров в цепь контура обратной связи введен нелинейный элемент — неоновая лампа, в результате чего постоянная времени обратной связи при посылке импульса (заряде конденсатора) оказывается меньше постоянной времени при разряде. Для анализа поведения регулятора при такого рода нелинейной обратной связи может быть без всякого изменения использован изложенный выше

способ получения уравнения регулятора. Следует только строить графики отдельных экспонент, из которых состоит сигнал  $y_{o.c.}(t)$  на рис. 6-4, с учетом указанного изменения постоянных времени. Можно показать [Л. 38], что в пульсирующем режиме работы этот регулятор по-прежнему реализует линейный ПИ-закон регулирования, причем постоянная интегрирования и коэффициент передачи регулятора могут быть определены по следующим формулам:

$$T_{\text{И}} = T_{\text{выкл}}; \quad k_{\text{P}} = \frac{k_1 S T_{\text{вкл}}}{\alpha Z_{\text{P}0}},$$

где  $T_{\text{вкл}}$  и  $T_{\text{выкл}}$  — постоянные времени обратной связи при за-  
ряде и разряде конденсатора.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ОБЪЕКТА

#### 7-1. Критерии оптимальной настройки регуляторов

Автоматические системы регулирования, являясь замкнутыми динамическими системами с обратными связями, могут при неправильном выборе алгоритма функционирования регулятора или неправильном выборе его параметров настройки потерять устойчивость. Правда при определении оптимальных параметров настройки из условия минимума среднеквадратичной ошибки регулирования (см. § 6-2) такое явление не наблюдается, однако, так показывает опыт, переходные процессы в такой системе все же имеют характер затухающих колебаний, интенсивность затухания которых, как правило, оказывается явно недостаточной для того, чтобы систему можно было признать пригодной к эксплуатации.

Поэтому в критерий оптимального функционирования системы регулирования приходится обычно вводить дополнительные ограничения, с помощью которых можно целенаправленно влиять на возникающие в ней переходные процессы. Введение таких ограничений производится либо путем соответствующего усложнения показателя оптимальности (в этом случае минимизируется не просто среднее значение квадрата ошибки регулирования, а более сложная функция ошибки, например, взвешенная сумма квадратов ошибки и производной ошибки), либо при неизменном минимизируемом функционале в критерий оптимальности вводятся добавочные ограничения на показатели, характеризующие затухание переходного

процесса. Первый способ удобен тем, что в принципе позволяет оставить неизменной процедуру поиска оптимума, лишь в той или иной степени усложняя ее. Однако при его практическом использовании возникают определенные затруднения в формулировке критерия оптимальности в каждом конкретном случае. Например, если в критерий вводится производная от ошибки регулирования, трудно выбрать конкретную величину коэффициента веса при этой составляющей. Поэтому в настоящее время при практических расчетах предпочтение чаще всего отдают второму способу ввода ограничений на затухание переходных процессов.

Практически наиболее удобными способами введения такого рода ограничений могут считаться следующие:

- 1) задание в плоскости корней характеристического уравнения системы области, за пределы которой не должен выходить ни один из этих корней;
- 2) задание в плоскости частотной характеристики разомкнутой системы регулирования области, включающей в себя «опасную» точку  $(-1; j0)$ , внутрь которой не должна заходить эта характеристика.

Использование первого метода сопряжено с предварительным вычислением так называемых расширенных частотных характеристик объекта и регулятора [Л. 7]. При использовании вторым методом расчеты могут осуществляться непосредственно по обычным частотным характеристикам объекта [Л. 1, 8], причем расчеты, проведенные для определения допустимых по соображениям запаса устойчивости параметров регулятора, могут быть затем использованы для окончательного выбора оптимальных параметров, а в случае необходимости и для контрольного построения графиков процессов регулирования.

Достаточно полное изложение методов расчетов с использованием первого способа задания ограничения на затухание переходных процессов имеется, например, в [Л. 7, 36]. Здесь мы остановимся только на втором способе задания этих ограничений и рассмотрим подробно соответствующую методику выбора оптимальных параметров регулятора.

Напомним, что в соответствии с критерием Найквиста (см. § 3-3) динамическая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, после замыкания ее отрицательной обратной связью становится неустойчивой, если частот-

ная характеристика этой системы в разомкнутом состоянии  $W(j\omega)$  охватывает точку с координатами  $(-1; j0)$ . Можно поэтому считать, что переходные процессы в системе имеют тем большее затухание, чем на большем удалении от указанной «опасной» точки располагается частотная характеристика разомкнутой системы, не охватывая ее, т. е. чем большим запасом устойчивости обладает система.

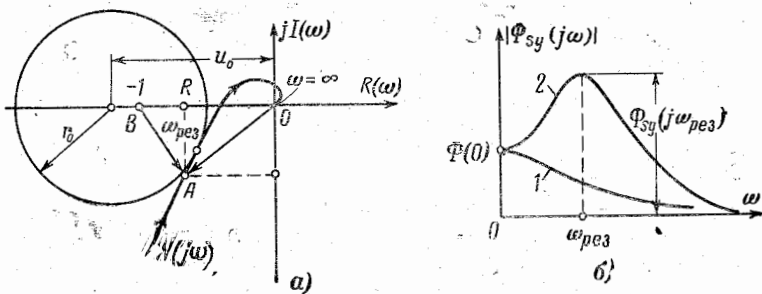


Рис. 7-1.

В свою очередь степень удаления частотной характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$  от указанной точки определяет величину резонансного пика модуля амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы  $\Phi(j\omega)$  (5-12).

Действительно [Л. 1], модуль характеристики  $\Phi(j\omega)$  может быть выражен следующим образом:

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{|W(j\omega)|}{|1 + W(j\omega)|}. \quad (7-1)$$

Числитель этого выражения для некоторой фиксированной частоты  $\omega = \omega_1$  равен длине вектора  $\vec{OA}$  характеристики  $W(j\omega)$  (рис. 7-1,а), а знаменатель — длине вектора  $\vec{BA}$ , проведенного к характеристике  $W(j\omega)$  из точки  $(-1; j0)$  (см. § 3-1). Поэтому значение модуля частотной характеристики замкнутой системы может быть найдено графическим путем как отношение длин отрезков  $OA$  и  $BA$ :

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{OA}{BA}. \quad (7-2)$$

Использование интегральной составляющей от ошибки приводит к тому, что при  $\omega \rightarrow 0$  частотная характе-

ристика регулятора стремится к бесконечности. Поэтому частотная характеристика разомкнутой системы, представляющая собой произведение частотных характеристик регулирующего канала объекта и регулятора, при  $\omega \rightarrow 0$  также уходит в бесконечность, а отношение (7-2) стремится к единице. С ростом частоты концы векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{BA}$  перемещаются вдоль частотной характеристики  $W(j\omega)$  вверх по стрелке, так что отношение  $OA/BA$  становится отличным от единицы и в пределе при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к нулю (так как отрезок  $OA$  стремится к нулю, а отрезок  $BA$  — к единице). Однако характер изменения этого отношения при изменении  $\omega$  может быть различным в зависимости от степени удаления характеристики разомкнутой системы от точки  $(-1; j0)$ .

Если характеристика  $W(j\omega)$  располагается достаточно далеко от точки  $(-1; j0)$ , длина отрезка  $BA$  все время остается больше длины отрезка  $OA$ , так что их отношение с ростом частоты монотонно уменьшается от единицы до нуля (кривая 1 на рис. 7-1,б). Если же характеристика  $W(j\omega)$  проходит сравнительно близко к точке  $(-1; j0)$ , то в некотором диапазоне частот  $0 < \omega < \omega_{рез}$  отношение  $OA/BA$  не убывает, а наоборот, возрастает и только при  $\omega > \omega_{рез}$  начинает уменьшаться (кривая 2 на рис. 7-1,б). Таким образом, при достаточно близком расположении частотной характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$  к «опасной» точке  $(-1; j0)$  модуль частотной характеристики замкнутой системы  $\Phi(j\omega)$  приобретает резонансный пик при некоторой резонансной частоте  $\omega_{рез}$ . Чем ближе проходит характеристика  $W(j\omega)$  от точки  $(-1; j0)$ , тем большим оказывается ордината этого пика. В пределе, когда характеристика  $W(j\omega)$  проходит через точку  $(-1; j0)$  и, следовательно, замкнутая система находится на границе устойчивости, резонансный пик характеристики замкнутой системы  $|\Phi(j\omega)|$  становится бесконечно большим.

Из сказанного следует, что величина резонансного пика модуля частотной характеристики замкнутой системы  $|\Phi(j\omega_{рез})|$  может служить практически удобной мерой запаса устойчивости системы регулирования.

Из соотношения (7-2) можно установить, какие ограничения на расположение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$  накладывает ограничение на величину резонансного пика  $\Phi(j\omega)$ . Для этого прежде всего найдем геометрическое место



точек на плоскости характеристики  $W(j\omega)$ , удовлетворяющее условию

$$\frac{OA}{BA} = M = \text{const.} \quad (7-3)$$

Из рис. 7-1, а непосредственно следует:

$$OA = \sqrt{R^2 + I^2};$$

$$BA = \sqrt{(1-R)^2 + I^2},$$

т. е.

$$\frac{R^2 + I^2}{(1-R)^2 + I^2} = M^2.$$

После некоторых очевидных преобразований эта формула принимает следующий вид:

$$\left(R - \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + I^2 = \left(\frac{M}{M^2 - 1}\right)^2. \quad (7-4)$$

Полученное уравнение является уравнением окружности с радиусом

$$r_0 = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad (7-5)$$

центр которой расположен на отрицательной вещественной полуоси на расстоянии

$$u_0 = \frac{M^2}{M^2 - 1} \quad (7-6)$$

от начала координат.

Таким образом, чтобы резонансный пик модуля частотной характеристики замкнутой системы не превышал величины  $M$ , необходимо, чтобы частотная характеристика разомкнутой системы

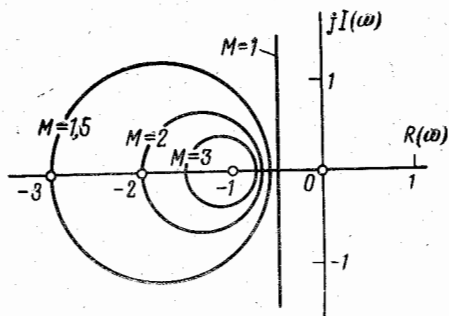


Рис. 7-2.

$W(j\omega)$  не заходила внутрь «запретной» области, ограниченной окружностью с параметрами  $u_0$  и  $r_0$ . На рис. 7-2 приведено семейство окружностей для нескольких значений  $M$ .

В свою очередь, зная величину резонансного пика, а также резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$ , можно, по крайней мере в первом прибли-

жении, оценить частоту колебаний переходного процесса в системе и их затухание.

Действительно, график модуля частотной характеристики замкнутой системы регулирования  $\Phi(j\omega)$  (см. рис. 7-1, б) имеет вид, подобный графику модуля частотной характеристики колебательного звена (см. табл. 2-3):

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}}, \quad (7-7)$$

а для такого звена существует однозначная связь между максимумом модуля частотной характеристики, отнесенным к ее значению при нулевой частоте, с одной стороны, и затуханием переходного процесса — с другой.

Обычно степень затухания переходного процесса в системе второго порядка определяют относительным уменьшением амплитуды колебаний за один период (рис. 7-3):

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}, \quad (7-8)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — ординаты двух соседних экстремумов колебаний одного знака.

Зависимость между степенью затухания и резонансным пиком модуля частотной характеристики такой системы приведена в табл. 7-1.

Таблица 7-1

$\psi$	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
$\left  \frac{\Phi(j\omega_{\text{рез}})}{\Phi(j0)} \right $	3,09	2,70	2,38	2,09	1,80	1,55	1,29

Отношение  $|\Phi(j\omega_{\text{рез}})/\Phi(j0)|$  получило название показателя колебательности системы. При  $\Phi(j0)=1$  показатель колебательности совпадает с величиной  $M$ .

Частота собственных колебаний инерционной системы второго порядка  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  ( $T_0$  — период собственных колебаний), равная мнимой составляющей корней ее характеристического уравнения, при  $M > 1,5$  практически совпадает с резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$ , т. е. частотой, при которой модуль частотной характеристики  $\Phi(j\omega)$  достигает наибольшего значения.

Естественно, что применять формулу (7-8) для определения степени затухания переходного процесса непосредственно по графику этого

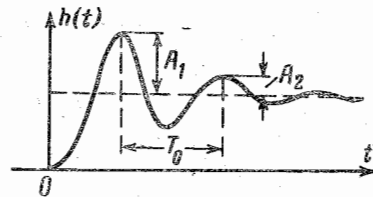


Рис. 7-3.

процесса следует с большой осторожностью, если система описывается дифференциальным уравнением выше второго порядка (хотя бы потому, что в таких системах не сохраняется постоянной разность соседних амплитуд колебаний). Тем не менее, как показывает опыт расчетов, с практической точки зрения системы с одинаковыми показателями колебательности имеют в целом сходные по затуханию переходные процессы, даже если эти системы описываются совершенно различными дифференциальными уравнениями.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим две системы автоматического регулирования с одним и тем же И-регулятором, но с существенно различными объектами регулирования. Первый из этих объектов представляет собой инерционное звено первого порядка с частотной характеристикой

$$W_{\mu,1}(p) = \frac{1}{1,45p + 1},$$

а второй — запаздывающее звено с характеристикой

$$W_{\mu,2}(p) = 0,36e^{-p}.$$

Соответствующие переходные характеристики объектов показаны на рис. 7-4. Как видно из этих графиков, свойства объектов, действительно, резко различаются. Однако они выбраны такими,

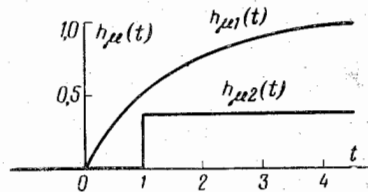


Рис. 7-4.

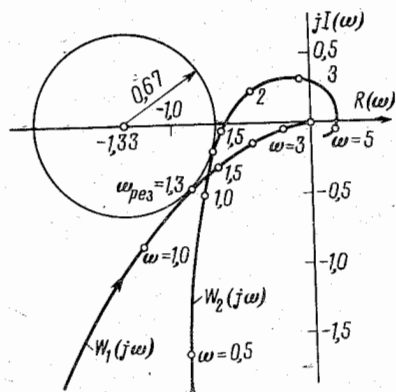


Рис. 7-5.

$$W_p(p) = \frac{2,63}{p}$$

амплитудно-фазовые характеристики систем регулирования в разомкнутом состоянии (рис. 7-5) касаются одной и той же окружности для  $M=2$  при одной и той же частоте  $\omega_{рез}=1,3$  (хотя в целом эти характеристики также весьма существенно отличаются друг от друга). Этого оказалось достаточно для того, чтобы амплитудные частотные характеристики соответствующих замкнутых систем почти полностью совпали (рис. 7-6,а); близкими по затуханию оказались и переходные характеристики обеих замкнутых систем (рис. 7-6,б).

Попутно этот пример иллюстрирует ранее высказанное утверждение о том, что при построении математической модели объекта необходимо учитывать, какой регулятор предполагается использовать для

регулирования этого объекта, т. е. учитывать близость характеристик всей системы регулирования в целом, а не отдельно взятого объекта и его модели. Действительно, поскольку аппроксимирующей характеристикой при построении И-регулятора по формуле (6-5) должна быть характеристика запаздывающего звена, то характеристика  $h_{\mu 2}(t)$  на рис. 7-4 как раз и дает наилучшую аппроксимацию характеристики  $h_{\mu 1}(t)$ . Между тем, если эти характеристики рассматривать в отрыве от характеристик системы регулирования, предположение о том, что характеристика  $h_2(t)$  наилучшим образом отражает динамические свойства системы с характеристикой  $h_1(t)$ , вряд ли покажется правдоподобным, настолько непохожими являются эти характеристики.

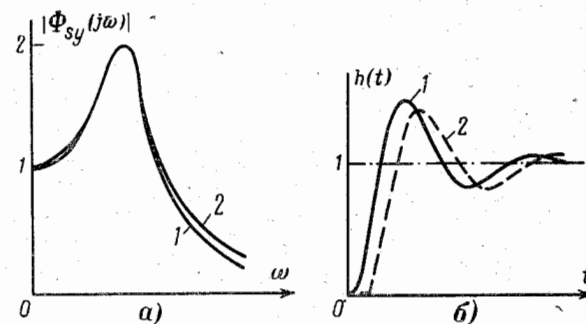


Рис. 7-6.

Таким образом, можно сформулировать следующий критерий оптимальной настройки регулятора: параметры настройки регулятора могут считаться оптимальными, если среднеквадратичная ошибка регулирования достигает минимального значения при дополнительном условии, что показатель колебательности системы не превышает заранее заданной величины  $M < M_{доп}$ .

## 7-2. Выбор параметров регуляторов в системах с высокой предельной динамической точностью при наличии ограничения на запас устойчивости

Ограничение запаса устойчивости системы позволяет существенно упростить процедуру поиска точки в пространстве параметров настройки регулятора, соответствующей минимуму среднеквадратичной ошибки регулирования при низкочастотном характере возмущений.

Напомним, что в системах регулирования производственных процессов среднеквадратичное значение ошибки регулирования  $\sigma_s$ , как правило, должно быть намного меньшим среднеквадратичного отклонения при отсут-

ствии всякого регулирования, т. е. среднеквадратичного значения воздействия  $x(t)$ .

В графической интерпретации это значит, что площадь под графиком спектра мощности ошибки регулирования  $G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$  должна быть в  $(\sigma_x/\sigma_\varepsilon)^2$  раз меньше площади под графиком спектра мощности  $G_{xx}(\omega)$ . Но так как спектр мощности ошибки получается в результате умножения спектра мощности  $x(t)$  на квадрат модуль частотной характеристики  $\Phi_{se}(j\omega)$  замкнутой системы регулирования, то это значит, что в пределах существенных частот помехи  $|\Phi_{se}(j\omega)|^2$  должен быть достаточно малым (намного меньше единицы).

Типичный вид графиков спектров мощности  $\varepsilon(t)$  и  $x(t)$ , а также модуля частотной характеристики системы  $\Phi_{se}(j\omega)$

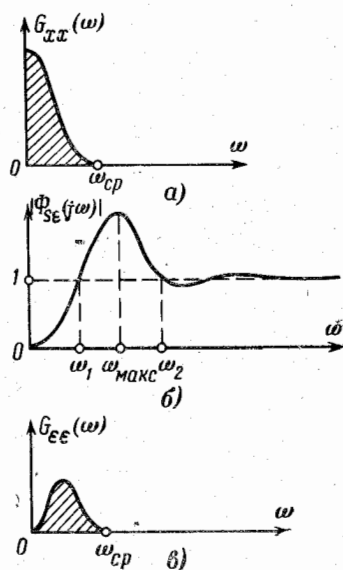


Рис. 7-7.

приведен на рис. 7-7. Эта характеристика с увеличением частоты растет от нулевого значения при  $\omega=0$  (а при отсутствии интегральной составляющей в законе регулирования — от достаточно малого значения  $|\Phi_{se}(j0)| \approx 0$ ) до некоторого большего единицы максимального значения  $|\Phi_{se}(j\omega_{\max})|$ , наступающего при частоте  $\omega_{\max}$ , близкой к резонансной  $\omega_{\text{рез}}$ , после чего постепенно стремится к единице. Такой вывод следует, например, из рассмотрения характера изменения длины вектора  $BA$  (см. рис. 7-1,а), проведенного из точки  $(-1; j0)$  к характеристике разомкнутой системы.

182

ет еще достаточно малое значение. Этот вывод совпадает с ранее высказанным заключением о том, что относительно высокая точность регулирования вообще может быть достигнута лишь при условии, что возмущающие воздействия имеют сравнительно низкочастотный характер.

Обратим внимание, что уменьшение площади под графиком спектральной плотности мощности ошибки  $G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$  сравнительно с площадью под графиком спектральной плотности  $G_{xx}(\omega)$  пропорционально не самому уменьшению среднеквадратичного отклонения, а квадрату этого уменьшения. Так, при требуемом уменьшении отклонения всего в 10 раз (на практике обычно требуется намного более высокая относительная точность работы системы) площадь под графиком спектра мощности  $G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$  должна быть меньше площади под графиком  $G_{xx}(\omega)$  в сто раз.

Таким образом, основное значение для точности работы системы регулирования имеет начальный участок ее характеристики  $|\Phi_{se}(j\omega)|$  в относительно близкой окрестности нулевой частоты. Но в пределах такой узкой области частотная характеристика системы  $\Phi_{se}(j\omega)$  может быть с достаточной степенью точности представлена первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора:

$$\Phi_{se}^-(p) \approx C_0 + C_1 p, \quad (7-9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \Phi_{se}(p) \Big|_{p=0}; \\ C_1 &= \frac{d\Phi_{se}(p)}{dp} \Big|_{p=0}. \end{aligned} \right\} \quad (7-10)$$

Подставив в последние формулы выражение для  $\Phi_{se}(p)$  (5-14), которое при учете (6-5) определяется выражением

$$\Phi_{se}(p) = \frac{\tau_{\mu a} p W_{\mu a}^0(p)}{\tau_{\mu a} p W_{\mu a}^0(p) + W_{\mu}(p)}, \quad (7-11)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 0; \\ C_1 &= \frac{\tau_{\mu a} k_{\mu a}}{k_{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (7-12)$$

Следовательно, частотная характеристика замкнутой системы в области низких частот может быть представлена следующим образом:

$$\Phi_{se}(p) = \frac{\tau_{\mu a} k_{\mu a}}{k_{\mu}} p, \quad (7-13)$$

а дисперсия ошибки регулирования в системах высокой динамической точности может быть определена по формуле

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau_{\mu a}^2 k_{\mu a}^2}{k_{\mu}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_{xx}(\omega) d\omega. \quad (7-14)$$

В частности, для типовых ПИ- и ПИД-законов регулирования, для которых в соответствии с (6-9)  $k_{\mu a} \tau_{\mu a} = T_n / k_p$ , имеем:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{T_n^2}{k_p^2 k_{\mu}^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(\omega) \omega^2 d\omega, \quad (7-15)$$

а для И-закона регулирования (6-13)

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k_{\mu}^2 k_{\mu}^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(\omega) \omega^2 d\omega_0. \quad (7-16)$$

Таким образом, из полученных формул следует, что при низкочастотных воздействиях оптимальные параметры настройки регуляторов практически [с точностью до влияния отбрасываемых членов в (7-9)] не зависят от статистических характеристик входных воздействий. Минимум среднеквадратичной ошибки регулирования здесь соответствует точка в области допустимых из условия заданного запаса устойчивости системы параметров настройки, в которой произведение параметров аппроксимирующей модели объекта  $k_{\mu a} \tau_{\mu a}$  в формуле (6-5)

оказывается минимальным. Для систем с ПИ- и ПИД-регуляторами это условие сводится к требованию максимизации отношения  $k_p / T_n$ , а в системах с И- и П-регу-

ляторами — к максимизации коэффициентов передачи этих регуляторов  $k_p$  и  $k_{\mu}$ . Как и прежде, знание спектров мощностей воздействий может понадобиться лишь для определения действительной величины среднеквадратичной ошибки при найденной оптимальной настройке, причем это определение может осуществляться по формулам (7-15) и (7-16).

Применяя к выражению для корреляционной функции  $r_{vv}(\tau)$  производной  $v(t)$  стационарного случайного процесса  $x(t)$  (5-3) преобразование Фурье, получаем:

$$G_{vv}(\omega) = \omega^2 G_{xx}(\omega). \quad (7-17)$$

Таким образом, интегралы в формулах (7-14) — (7-16) представляют не что иное, как дисперсию производной входного воздействия системы  $\sigma_v^2$ , т. е.

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau_{\mu a}^2 k_{\mu a}^2}{k_{\mu}^2} \sigma_v^2. \quad (7-18)$$

В свою очередь, воспользовавшись формулой для математического ожидания числа пересечений случайным стационарным процессом своего среднего значения на интервале времени  $T$  [которая получается из (5-2) при  $\Delta=0$ ]

$$m_e = \frac{T \sigma_v}{\pi \sigma_x}, \quad (7-19)$$

можно также записать:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau_{\mu a} k_{\mu a}}{\tau_{cp} k_{\mu}} \sigma_x, \quad (7-20)$$

где  $\tau_{cp} = T / m_e$  — средний интервал между соседними пересечениями процессом  $x(t)$  своего среднего значения.

Последняя формула удобна в том отношении, что не требует знания спектра мощности входного воздействия; средний же интервал пересечения случайным процессом своего среднего значения достаточно просто может быть оценен непосредственно по реализации этого процесса.

### 7-3. Графо-аналитический расчет оптимальных параметров регуляторов

В § 6-2 уже отмечалась противоречивость постановки задачи аппроксимации динамических характеристик регулируемых объектов и указывалось, что лучше всего выбор алгоритма функционирования регулятора осуществлять непосредственно по характеристике объекта без ее предварительной аппроксимации. В то же время указанные характеристики обычно получаются экспери-

ментально и бывают заданы для расчета в виде таблиц или графиков, а аналитическое выражение для них неизвестно.

Ниже рассматривается возможный способ расчета оптимальных параметров настройки регуляторов непосредственно по графикам частотной характеристики объекта и спектра мощности возмущений. В случае необходимости вся расчетная процедура может быть легко запрограммирована для выполнения расчетов на цифровых вычислительных машинах.

В соответствии с принятым выше критерием оптимальности (см. § 7-1) расчет оптимальных параметров настройки регулятора может быть расчленен на два этапа.

На первом этапе в пространстве варьируемых параметров настройки регулятора определяется область, в которой замкнутая система регулирования будет обладать запасом устойчивости не ниже заданного [для любой точки этой области удовлетворяется условие  $|\Phi_{sy}(j\omega_{рез})| < M$ ].

На втором этапе в найденной области отыскивается точка, соответствующая минимуму ошибки регулирования.

Выполнение первого этапа удобно производить графо-аналитическим путем: по заданной характеристике объекта  $W_{\mu}(j\omega)$  умножением ее на характеристику регулятора  $W_p(j\omega)$  строится характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega) = W_p(j\omega)W_{\mu}(j\omega)$  и находятся такие параметры настройки регулятора, при которых эта характеристика касается окружности с выбранным индексом  $M$ . Величину  $M$  целесообразно выбирать в пределах 1,3—2,0 (для колебательного звена второго порядка такой выбор  $M$  соответствует степени затухания  $\psi$  в пределах 0,95—0,80).

Процедура определения предельного значения коэффициента передачи регулятора  $k_p$  (являющегося одним из варьируемых параметров настройки), при котором характеристика разомкнутой системы  $W(j\omega)$  окажется касающейся окружности с заданным  $M$ , может быть существенно упрощена, если обратить внимание, что изменение этого коэффициента приводит лишь к пропорциональному изменению длины векторов характеристики  $W(j\omega)$ . С другой стороны, подобное изменение характеристики  $W(j\omega)$  может быть учтено без ее перестройки путем изменения масштаба откладываемых по осям координат характеристи-

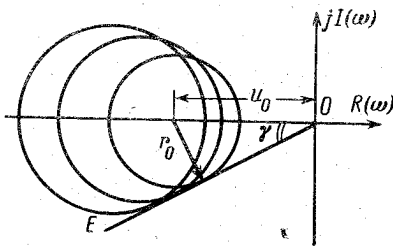


Рис. 7-8.

ки  $W(j\omega)$  величин. Очевидно, что это изменение масштаба должно быть обратно пропорциональным величине изменения коэффициента передачи регулятора  $k_p$ .

При указанном изменении масштаба, естественно, смещается и окружность с заданным  $M$  — меняется как положение ее центра  $u_0$ , так и ее радиус  $r_0$ . Однако легко заметить, что при таком смещении эта окружность продолжает касаться прямой  $OE$  (рис. 7-8), проведенной из начала координат под углом:

$$\gamma = \arcsin \frac{r_0}{u_0} = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (7-21)$$

С учетом отмеченного обстоятельства определение предельного значения коэффициента передачи регулятора  $k_p$ , которое приведет к касанию характеристикой  $W(j\omega)$  окружности с заданным  $M$  при фиксированных значениях прочих параметров настройки, может производиться в следующем порядке.

1. Характеристика регулятора записывается в виде  $k_p W_{p1}(j\omega)$ , где  $W_{p1}(j\omega)$  — характеристика регулятора при единичном коэффициенте передачи  $k_p=1$ . По заданной характеристике объекта  $W_{\mu}(j\omega)$  строится характеристика разомкнутой системы для единичного коэффициента передачи регулятора и некоторых фиксированных значений других параметров настройки регулятора:

$$W_1(j\omega) = W_{p1}(j\omega) W_{\mu}(j\omega).$$

2. Из начала координат проводится прямая  $OE$  под углом  $\gamma$ , определяемым по (7-21).

3. С помощью циркуля вычерчивается окружность с центром на отрицательной вещественной полуоси, касающаяся одновременно как характеристики  $W_1(j\omega)$ , так и прямой  $OE$  (центр этой окружности и ее радиус  $r$  находятся подбором).

4. Отношение требуемого радиуса окружности  $r_0$ , определяемое формулой (7-5), к полученному его значению  $r$  показывает, во сколько раз необходимо изменить единичный коэффициент передачи регулятора для того, чтобы характеристика  $W(j\omega)$  касалась окружности с заданным  $M$  при обычном масштабе величин, откладываемых по координатным осям, т. е. предельно допустимое значение коэффициента передачи регулятора следует определить по формуле

$$k_{p.пр} = \frac{r_0}{r} = \frac{M}{M^2 - 1} \frac{1}{r}. \quad (7-22)$$

Вместо радиуса окружности при подсчете  $k_p$  можно оперировать координатой центра  $u$  полученной окружности:

$$k_{p.пр} = \frac{u_0}{u} = \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{1}{u}. \quad (7-23)$$

Так, для системы с ПИ-регулятором последовательность расчетов может быть следующей.

1. По частотной характеристике объекта  $W_{\mu}(j\omega)$  строится семейство характеристик разомкнутой системы для единичного значения коэффициента передачи регулятора и нескольких значений постоянной интегрирования  $T_{и}$ :

$$W_1(j\omega) = \left(1 - j \frac{1}{T_{и}\omega}\right) W_{\mu}(j\omega). \quad (7-24)$$

Для этого следует начертить несколько векторов характеристики объекта  $W_\mu(j\omega)$  (векторы  $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2 \dots$  на рис. 7-9) и к их концам пристроить векторы  $\vec{A}_1\vec{C}_1, \vec{A}_2\vec{C}_2 \dots$ , повернутые на угол  $-90^\circ$  по отношению к векторам  $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2 \dots$ , выбрав их длины в соответствии с соотношением

$$AC = \frac{|\vec{A}_\mu(\omega)|}{T_n \omega}, \quad (7-25)$$

где  $|\vec{A}_\mu(\omega)|$  — длина соответствующего вектора характеристики объекта.

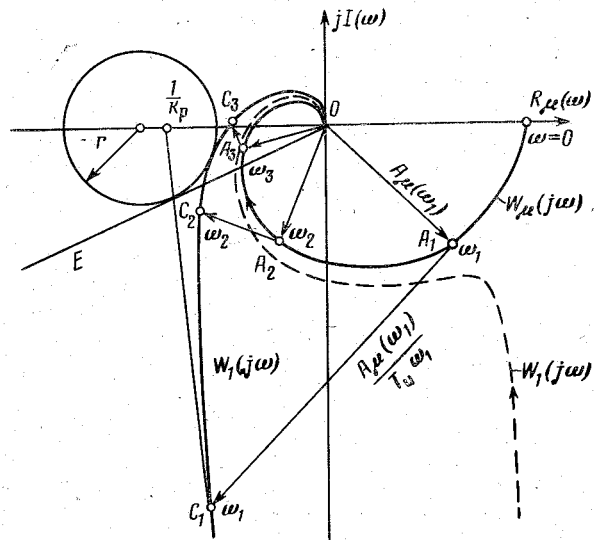


Рис. 7-9.

Построения целесообразно производить без всяких промежуточных таблиц. Измерив непосредственно по чертежу длину вектора  $\vec{A}_\mu(\omega_1)$  (например, в миллиметрах) для одной из выбранных частот  $\omega_1$ , устанавливают визир логарифмической линейки на делении, равном частному  $|\vec{A}_\mu(\omega_1)|/\omega_1$ , после чего делят это число на ряд значений  $T_n$ , откладывая немедленно получаемый результат (в выбранных единицах длины) на перпендикуляре, восстановленном из конца вектора  $\vec{A}_\mu(\omega_1)$ . В результате получают точки семейства характеристик  $W_1(j\omega)$  для различных  $T_n$  при частоте  $\omega_1$ .

Подобные же построения производятся для нескольких других частот, после чего через точки, соответствующие одинаковым  $T_n$ ,

проводятся плавные кривые, которые и являются характеристиками  $W_1(j\omega)$  для выбранных значений  $T_n$ .

2. Проводится луч под углом  $\gamma$  (7-21) к вещественной оси и вычерчиваются окружности, каждая из которых касается одновременно этого луча и одной из характеристик  $W_1(j\omega)$ . По формулам (7-22) или (7-23) находится предельное значение коэффициента передачи регулятора для соответствующего значения  $T_n$ . В результате построений, в плоскости параметров настройки регулятора  $T_n$  и  $k_p$  может быть построена граница области заданного запаса устойчивости, типичный вид которой приведен на рис. 7-10.

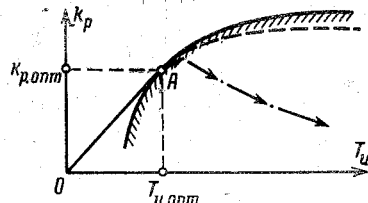


Рис. 7-10.

Максимум отношения  $k_p/T_n$ , определяющий оптимальную настройку регулятора при низкочастотных возмущениях, соответствует точке касания касательной к границе заданного запаса устойчивости, проведенной через начало координат (точка A на рис. 7-10). Действительно, эта касательная представляет собой геометрическое место точек с постоянной величиной отношения  $k_p/T_n$  (которая определяет угловой коэффициент ее наклона). Любая другая прямая, выходящая из начала координат с большим угловым коэффициентом, не будет проходить через область допустимого запаса устойчивости, и поэтому большую величину отношения  $k_p/T_n$  в данной системе нельзя реализовать без уменьшения запаса устойчивости ниже допустимой величины.

3. Для определения дисперсии ошибки регулирования при найденной оптимальной настройке, а также для проверки принятой гипотезы низкочастотности воздействий следует воспользоваться формулой (6-6).

Спектр мощности ошибки регулирования  $G_{ee}(\omega)$  можно вычислить графически, используя построения, которые уже были выполнены при определении границы области заданного запаса устойчивости (рис. 7-9). Для этого достаточно заметить, что знаменатель квадрата модуля частотной характеристики замкнутой системы  $|1 + W_\mu(j\omega)W_p(j\omega)|^2$  графически представляет собой квадрат длины вектора, проведенного к частотной характеристике разомкнутой системы из точки  $(-1; j0)$ . Поскольку при определении границы области заданного запаса устойчивости осуществлялось построение частотных характеристик разомкнутой системы для единичного коэффициента передачи регулятора  $W_1(j\omega)$ , формулу для спектра мощности ошибки целесообразно представить в следующем виде:

$$G_{ee}(\omega) = \frac{1}{k_p^2} \frac{G_{xx}(\omega)}{\left| \frac{1}{k_p} + W_1(j\omega) \right|^2}. \quad (7-26)$$

Знаменатель этой формулы представляет собой квадрат длины вектора, проведенного к характеристике  $W_1(j\omega)$  для оптимального  $T_n$  из точки  $(-1/k_p; j0)$  (см. рис. 7-9).

Для вычисления интеграла от  $G_{\text{вв}}(\omega)$ , определяющего с точностью до постоянного множителя  $1/2\pi$  дисперсию ошибки регулирования, можно воспользоваться любым методом численного интегрирования. Поскольку обычно график  $G_{\text{вв}}(\omega)$  имеет вид, указанный на рис 7-11,

вычисления удобно осуществлять, например, с помощью квадратурной формулы Ньютона (правила трех восьмых) [Л. 19], примененной раздельно к интервалам изменения частоты от  $\omega=0$  до  $\omega=\omega_m$  и от  $\omega=\omega_m$  до  $\omega=\omega_{\text{ср}}$  [ $\omega_{\text{ср}}$  — наибольшая частота, выше которой можно считать  $G_{\text{вв}}(\omega)=0$ ]:

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{3}{8\pi} [(3G_1 + 3G_2 + G_3) \Delta\omega_1 + (G_3 + 3G_4 + 3G_5) \Delta\omega_2], \quad (7-27)$$

где  $\Delta\omega_1 = \omega_m/3$ ;  $\Delta\omega_2 = (\omega_{\text{ср}} - \omega_m)/3$ ;  $G_1, G_2 \dots$  — значения  $G_{\text{вв}}(\omega)$  в узловых точках.

Если спектр воздействия  $x(t)$  перестает удовлетворять гипотезе низкочастотности, то это свидетельствует о том, что регулятор перестает работать в режиме, для которого он может считаться оптимальным. Тем не менее при не слишком сильном нарушении этой гипотезы этот регулятор все же может обеспечить приемлемую точность регулирования, но, естественно, при неизменных (сравнительно с условием максимума отношения  $k_p/T_n$ ) параметрах его настройки. Опыт расчетов показывает, что по мере расширения полосы частот воздействия точка оптимума в плоскости параметров настройки смещается вправо от точки А (рис. 7-10), причем вначале это

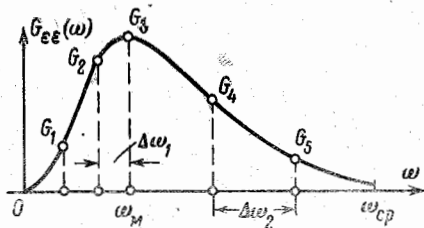


Рис. 7-11.

смещение идет вдоль границы заданного запаса устойчивости, а затем при достаточно высокочастотных воздействиях она уходит в глубь области заданного запаса устойчивости. Иначе говоря, с ростом частоты воздействий ПИ-регулятор должен все более приближаться к П-регулятору, коэффициент передачи которого также имеет тенденцию к уменьшению (на рис. 7-10 характер указанного изменения положения точки оптимума показан штрих-пунктирной линией). Этот процесс сопровождается ухудшением эффективности регулирования, т. е. достижимый минимум среднеквадратичной ошибки регулирования приближается к среднеквадратичному отклонению регулируемой величины, которое имело бы место при отсутствии регулятора. В пределе при достаточно высокочастотных возмущениях оптимальное значение коэффициента передачи регулятора приближается к нулю. Это значит, что при таких условиях лучше вообще отказаться от какого-либо регулирования объекта, чем использовать рассматриваемую здесь одноконтурную схему (см. рис. 5-6,б) с регуляторами, характеристики которых определяются формулой (6-5).

Объяснение этого с первого взгляда неожиданного вывода легко получить, рассматривая амплитудную частотную характеристику

замкнутой системы  $|\Phi_{\text{вв}}(j\omega)|$  (см. рис. 7-1,0), которая может быть разбита на три частотных диапазона:

- 1) низкочастотный  $0 < \omega < \omega_1$ , в пределах которого частотная характеристика меньше единицы;
- 2) диапазон резонансных частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , в пределах которого частотная характеристика больше единицы;
- 3) высокочастотный диапазон  $\omega > \omega_2$ , в пределах которого частотная характеристика близка к единице.

Подчеркнем, что такой вид модуля частотной характеристики  $\Phi_{\text{вв}}(j\omega)$  следует считать типовым практически для всех систем регулирования, в которых используется приближенно оптимальный закон регулирования (6-5) и его частные случаи — типовые законы регулирования. Действительно, превышение этой характеристикой единичного значения должно иметь место тогда, когда частотная характеристика системы в разомкнутом состоянии  $W(j\omega) = W_{\mu}(j\omega) W_p(j\omega)$  заходит в круг единичного радиуса с центром в точке  $(-1; j0)$  (на рис. 7-12 этот круг заштрихован), так как длина вектора, проведенного из точки  $(-1; j0)$  в любую точку круга, равная обратному значению модуля характеристики  $\Phi_{\text{вв}}(j\omega)$ , будет меньше единицы.

Годограф частотной характеристики разомкнутой системы обязательно заходит внутрь круга, если объект обладает даже незначительным запаздыванием, так как даже при идеальной реализации закона регулирования (6-4) эта характеристика определяется формулой

$$W(p) = \frac{e^{-\tau_{\mu} p}}{\tau_{\mu} p}. \quad (7-28)$$

Годограф такой характеристики показан на рис. 7-12. Неточность реализации закона регулирования (6-4) приводит в большинстве случаев к тому, что годограф характеристики попадает в круг даже при отсутствии запаздывания. Если частотная характеристика объекта является дробно-рациональной функцией:

$$W_{\mu}(p) = \frac{K(p)}{D(p)} \quad (7-29)$$

[где  $K(p)$  и  $D(p)$  — полиномы степени  $m$  и  $n$ , причем  $m \leq n$ ], то частотная характеристика регулятора (6-4) должна иметь вид:

$$W_{\text{р.отт}}(p) = k_n \frac{D(p)}{pK(p)}. \quad (7-30)$$

Однако такая характеристика не может быть точно реализована при  $n > m + 1$ , так как порядок числителя характеристики любой

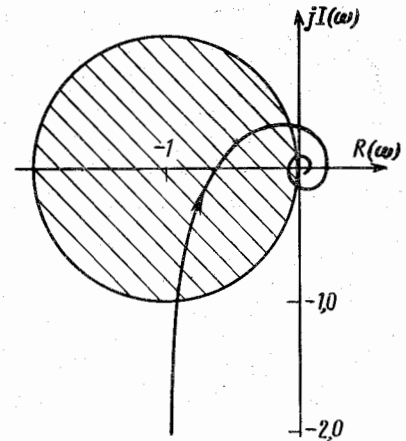


Рис. 7-12.

физически реализуемой системы, не может превышать порядка знаменателя. В действительности вместо этой характеристики будет получена другая:

$$W_p(p) = k_n \frac{D(p)}{pK(p)N(p)}, \quad (7-31)$$

где  $M(p)$  — полином степени  $l \geq n - (m+1)$ , числитель и знаменатель в которой в лучшем случае будут иметь одинаковый порядок  $n$ . Следовательно, частотная характеристика разомкнутой системы будет определяться формулой

$$W(p) = \frac{k_n}{pN(p)}, \quad (7-32)$$

порядок знаменателя которой равен  $l+1 \geq n-m$ , так что при  $n-m > 1$  она обязательно пройдет через заштрихованную на рис. 7-12 область.

Практически же при реализации формулы (6-4) применяются значительно более грубые аппроксимации. В частности, для ПИ-закона регулирования характеристика разомкнутой системы пройдет через указанную область уже при  $n-m > 0$ .

Наличие в частотной характеристике замкнутой системы диапазона резонансных частот свидетельствует о том, что гармонические составляющие воздействия  $x(t)$  с частотами этого диапазона системой не только не подавляются, но, наоборот, усиливаются. Это свидетельствует о том, что при определенных соотношениях между частотной характеристикой системы и спектром мощности  $X(f)$  включения регулятора может привести только к увеличению ошибки регулирования. Соответственно проблема построения оптимальной системы может с этой точки зрения рассматриваться как проблема построения системы с частотной характеристикой, показанной на рис. 7-7,б, но такой, что диапазон ее резонансных частот располагался бы при значениях частот, достаточно превышающих наивысшую частоту в спектре входного воздействия  $\omega_{ер}$  так, чтобы это воздействие могло считаться для системы низкочастотным.

Рассмотренные закономерности позволяют в общих чертах объяснить отмеченную выше миграцию оптимальных параметров ПИ-регулятора при расширении спектра воздействия  $x(t)$ . Чтобы это воздействие оставалось для данной системы низкочастотным, необходимо сместить диапазон резонансных частот системы в более высокочастотную область. Но, как это непосредственно видно из построений, показанных на рис. 7-9, такое смещение может быть осуществлено лишь путем увеличения  $T_n$ . К сожалению, возможности здесь оказываются относительно небольшими даже при бесконечном увеличении постоянной интегрирования, когда ПИ-регулятор переходит в П-регулятор. Дальнейшее усиление фильтрующих свойств системы на частотах, близких к резонансным, может быть достигнуто уменьшением  $k_p$  (что приводит к уменьшению резонансного пика частотной характеристики  $|\Phi_{sy}(j\omega)|$ ). Однако как увеличение  $T_n$ , так и уменьшение  $k_p$  приводит к ухудшению фильтрующих свойств системы на низких частотах. В результате может возникнуть ситуация, при которой установка регулятора может вообще оказаться бесполезной и даже вредной.

Следует обратить также внимание на то обстоятельство, что при больших значениях постоянной времени интегрирования  $T_n$  (когда ПИ-регулятор приближается к П-регулятору и годограф частотной характеристики разомкнутой системы при единичном коэффициенте передачи регулятора принимает форму, представленную на рис. 7-9 пунктиром) модуль частотной характеристики замкнутой системы  $\Phi_{sy}(j\omega)$  в низкочастотном диапазоне может оказаться меньше единицы и график этой характеристики приобретает вид, указанный на рис. 7-13 (сплошная кривая). В пределе при  $T_n \rightarrow \infty$ , когда ПИ-регулятор превращается в П-регулятор, модуль частотной характеристики замкнутой системы  $\Phi_{sy}(p)$  при нулевой частоте принимает значение, меньшее единицы:

$$\Phi_{\Pi}(0) = \frac{k_{\mu}k_p}{1 + k_{\mu}k_p}. \quad (7-33)$$

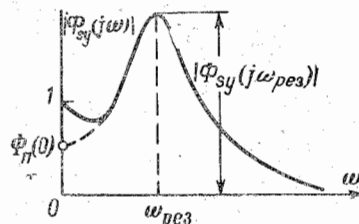


Рис. 7-13.

Это свидетельствует о том, что показатель колебательности системы здесь уже не совпадает с величиной частотной характеристики  $M$  и, следовательно, граница области заданного запаса устойчивости оказывается при больших  $T_n$  несколько ниже рассчитанной по величине резонансного пика (на рис. 7-10 она показана пунктиром). В результате требуется введение коррекции в предельное значение коэффициента передачи регулятора (в меньшую сторону). Впрочем, обычно эта коррекция оказывается достаточно малой, так что ею можно пренебречь.

Пример расчета оптимальных параметров ПИ-регулятора приведен в приложении.

#### 7-4. Особенности расчетов систем с ПИД-регулятором

Общая схема расчетов оптимальных параметров ПИД-регулятора в принципе ничем не отличается от расчета параметров ПИ-регулятора. Однако объем расчетов здесь, вообще говоря, увеличивается, так как он имеет не два, а три варьируемых параметра настройки.

Частотная характеристика разомкнутой системы с ПИД-регулятором при его единичном коэффициенте передачи может быть определена формулой

$$W_1(j\omega) = \left[ 1 - j \left( \frac{1}{T_n\omega} - aT_n\omega \right) \right] W_{\mu}(j\omega), \quad (7-34)$$

где  $a = T_d/T_n$ .

Построение этой характеристики при фиксированном  $a$  производится так же, как и для системы с ПИ-регулятором, только длина вектора, откладываемого от конца соответствующего вектора частотной характеристики



объекта под углом  $-90^\circ$ , должна вычисляться по формуле

$$AC = \left( \frac{1}{T_n \omega} - \alpha T_n \omega \right) A_\mu(\omega), \quad (7-35)$$

и, следовательно, при  $T_n \omega > 1/\sqrt{\alpha}$  этот вектор должен строиться под углом  $+90^\circ$ . Построения границы области заданного запаса устойчивости в плоскости  $k_p, T_n$  проводятся для выбранного ряда фиксированных значений  $\alpha$ . В каждой из полученных таким образом областей определяется точка, соответствующая минимуму среднеквадратичной ошибки регулирования. Оптимальная настройка определяется комбинацией  $k_p, T_n, \alpha$ , при которой имеет место наименьшее из пайдешных минимальных значений среднеквадратичной ошибки.

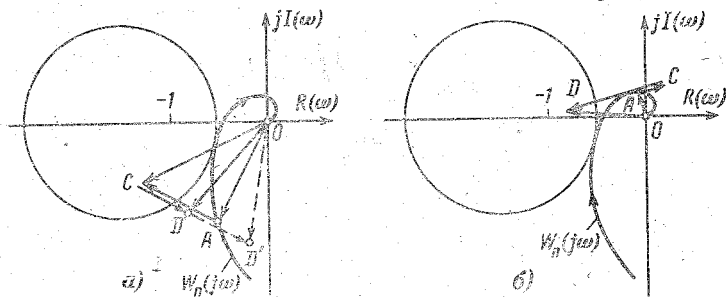


Рис. 7-14.

Если возмущения имеют относительно низкочастотный характер, то минимум среднеквадратичной ошибки для каждой из областей по-прежнему определяется точкой касания границы этой области прямой, проведенной через начало координат. Оптимальная настройка в этом случае определяется точкой касания касательной, проведенной к геометрическому месту указанных точек.

Роль производной от ошибки регулирования в ПИД-регуляторе, в частности, заключается в том, что она позволяет в определенной степени скомпенсировать нежелательное влияние на запас устойчивости системы регулирования интегральной составляющей в законе регулирования. Рассмотрим, например, вектор частотной характеристики разомкнутой системы с П-регулятором, имеющей необходимый запас устойчивости на некоторой частоте  $\omega_1$ , расположенной в III квадранте координатной плоскости, как показано на рис. 7-14,а (вектор  $OA$ ). Переход к ПИ-закону регулирования, т. е. введение интегральной составляющей (с постоянной интегрирования  $T_n$ ), приводит к изменению этого вектора. Для определения этого вектора

к вектору  $OA$  следует добавить вектор  $AC$  длины  $OA/T_n \omega_1$ , повернутый относительно  $OA$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Легко видеть, что вектор частотной характеристики разомкнутой системы с ПИ-регулятором располагается ближе к «опасной» точке  $(-1; j0)$ , чем соответствующий вектор системы с П-регулятором. Таким образом, введение интеграла в закон регулирования при прочих равных условиях ухудшает запас устойчивости системы. Чтобы восстановить требуемый запас устойчивости в системе с ПИ-регулятором, приходится соответственно уменьшить коэффициент передачи, что, вообще говоря, нежелательно по соображениям точности регулирования (напомним, что величина среднеквадратичной ошибки регулирования при низкочастотных воздействиях пропорциональна отношению  $T_n/k_p$ ).

Эффект компенсации отставания по фазе, вносимого интегральной составляющей (по крайней мере на определенных частотах) может быть достигнут введением в закон регулирования производной от ошибки без изменения коэффициента передачи регулятора. Действительно, для определения вектора частотной характеристики разомкнутой системы для частоты  $\omega_1$  необходимо вычесть из вектора  $AC$  вектор  $CD = \alpha T_n \omega_1 OA$ , направленный в противоположную сторону (рис. 7-14,а), в результате чего вектор  $OD$  характеристики разомкнутой системы с ПИД-регулятором удаляется от «опасной» точки. Усиливая роль производной в законе регулирования (которая характеризуется величиной коэффициента  $\alpha$ ), можно не только скомпенсировать отставание по фазе, но и ввести опережение (вектор  $OD'$ ).

Однако воздействие по производной приводит к удалению частотной характеристики разомкнутой системы от точки  $(-1; j0)$  лишь в пределах третьего квадранта комплексной плоскости. В пределах же второго квадранта, как это видно непосредственно из рис. 7-14,б, опережение по фазе, вносимое воздействием по производной, приводит к снижению запаса устойчивости системы (буквенные обозначения векторных составляющих на рис. 7-14,б те же, что и на рис. 7-14,а). Следует подчеркнуть, что модули частотной характеристики объекта на участке в пределах второго квадранта комплексной плоскости обычно оказываются очень малыми, особенно в сравнении с модулями на участке четвертого квадранта. Это иногда приводит к тому, что при экспериментальном или аналитическом определении частотной характеристики объекта основное внимание обращают на наиболее «заметный» участок этой характеристики в четвертом квадранте, в меньшей степени — в пределах третьего, а участок характеристики во втором квадранте из-за его «незначительности» попросту пренебрегают. Между тем как раз участок характеристики объекта в четвертом квадранте практически не играет никакой роли при расчете параметров регуляторов (за исключением может быть И-регулятора, редко применяемого при автоматизации современных объектов). Для расчета параметров наиболее употребительного на практике ПИ-регулятора необходимо по возможности более точно знать характеристику объекта в третьем квадранте комплексной плоскости, а для расчета параметров ПИД-регулятора — в пределах третьего и второго квадрантов. Несмотря на то что частотная характеристика объекта на относительно высоких частотах в пределах второго квадранта оказывается,

как правило, малой по модулю, модули частотной характеристики разомкнутой системы с ПИД-регулятором в соответствующем диапазоне могут быть достаточно большими, поскольку длина вектора

$\vec{CD} = \alpha T_n \omega \vec{OA}$  (рис. 7-14,б) даже при очень малых значениях

модуля вектора  $\vec{OA}$  может оказаться весьма большой.

Указанные особенности деформации характеристик с ПИД-регулятором приводят к тому, что частотная характеристика разомкнутой системы приобретает (даже при монотонно меняющихся по модулю характеристик объекта) довольно сложный вид. Типичный вид этих характеристик для двух значений  $T_n$  и одним и тем же значением параметра  $\alpha$  показан на рис. 7-15. Их особенностью является

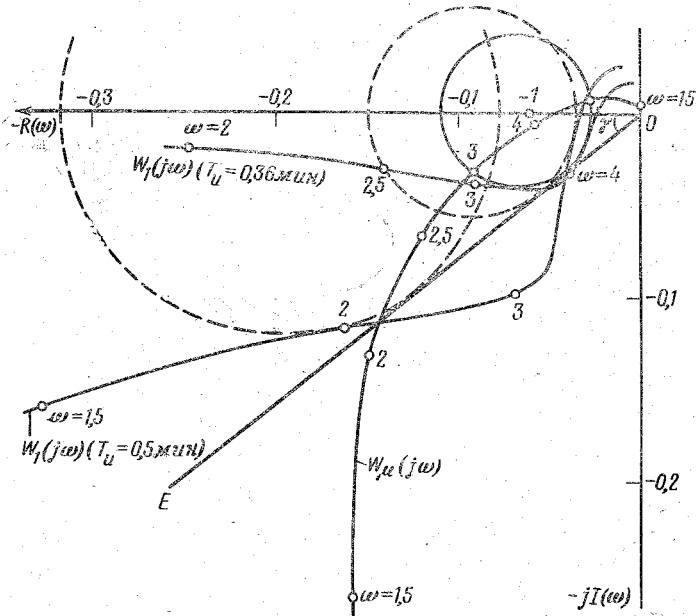


Рис. 7-15.

то, что они располагаются дальше от «опасной» точки  $(-1; j0)$  по сравнению с соответствующей характеристикой системы с П-регулятором, совпадающей при  $k_p=1$  с характеристикой объекта  $W_p(j\omega)$  лишь в некотором диапазоне средних частот. Вне пределов этого диапазона характеристика разомкнутой системы с ПИД-регулятором располагается ближе к точке  $(-1; j0)$ . В области низких частот это объясняется недокомпенсацией отставания по фазе, а в области высоких частот тем, что опережение по фазе оказывает уже вредное влияние на запас устойчивости системы. При этом кодовой и той же характеристике разомкнутой системы с ПИД-регулятором можно провести две окружности, касающиеся одновременно характеристики и линии  $OE$ , проведенной из начала координат под

углом  $\gamma$  (7-21) [на рис. 7-15 эти две окружности, проведенные к характеристике  $W_1(j\omega)$  для  $T_n=0,5$  мин, показаны пунктиром], т. е. одной паре значений постоянной интегрирования  $T_n$  и отношения постоянных времени регулятора  $\alpha$  соответствуют два предельных значения коэффициента передачи регулятора  $k_{p,пр.}$ , вычисляемых по формуле (7-22) или (7-23). Заданный запас устойчивости соответствует значениям коэффициента передачи, ограниченными указанными предельными значениями  $k_{p,пр.мин} < k_p < k_{p,пр.макс}$ , т. е. система те-

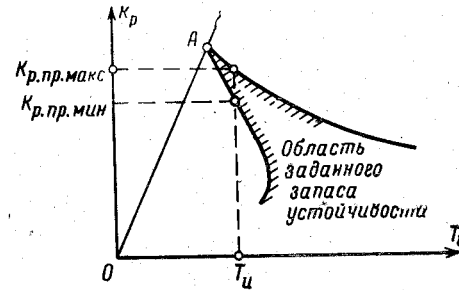


Рис. 7-16.

ряет запас устойчивости не только при увеличении коэффициента передачи сверх предельного  $k_{p,пр.макс}$ , но и при уменьшении этого коэффициента ниже величины  $k_{p,пр.мин}$ . Область заданного запаса устойчивости системы с ПИД-регулятором в плоскости параметров настройки  $k_p, T_n$  при фиксированном  $\alpha$  имеет вид, представленный на рис. 7-16.

Интересными свойствами может обладать также точка, соответствующая максимуму отношения  $k_p/T_n$  (точка оптимума настройки для фиксированного  $\alpha$  при низкочастотных возмущениях). При достаточно большом  $\alpha$  этой точке соответствует частотная характеристика разомкнутой системы  $W_1(j\omega)$ , для которой две окружности, касающиеся этой характеристики, сливаются в одну. Иначе говоря, окружность, касающаяся частотной характеристики  $W_1(j\omega)$  и прямой  $OE$ , касается этой характеристики сразу в двух точках (как это имеет место в случае характеристики  $W_1(j\omega)$  на рис. 7-15 для  $T_n=0,36$  мин). Но это должно означать, что соответствующая частотная характеристика замкнутой системы имеет два одинаковых максимума на двух резонансных частотах (рис. 7-17).

Ранее (в § 7-1) указывалось на подобие переходных процессов в системах регулирования, частотные характеристики которых  $|\Phi_{sy}(j\omega)|$  имеют резонансный пик, переходному процессу в колебательном звене второго порядка. Соответственно можно говорить о подобии переходных процессов в системах регулирования с ПИД-регулятором, амплитудно-частотные характеристики которых  $|\Phi_{sy}(j\omega)|$  имеют два резонансных пика, процессу на выходе цепочки двух последовательно включенных инерционных колебательных звеньев второго порядка с теми же резонансными частотами. Параметры этих звеньев должны быть выбраны таким образом, что произведение их частотных характеристик совпадает с частотной характеристикой системы регулирования по крайней мере в трех точках:

при нулевой и резонансных частотах (на рис. 7-17 эти характеристики показаны пунктиром). Качественно переходные процессы в системах с двумя резонансными пиками частотных характеристик отличаются той особенностью, что в их составе имеются составляющие с двумя различными частотами.

Структурные и конструктивные особенности серийных ПИД-регуляторов приводят к тому, что диапазон настройки параметра  $\alpha$  ограничен сверху некоторым предельным значением  $\alpha_{пр}$  (обычно меньшим 0,25). В то же время оптимальная величина  $\alpha$ , как пра-

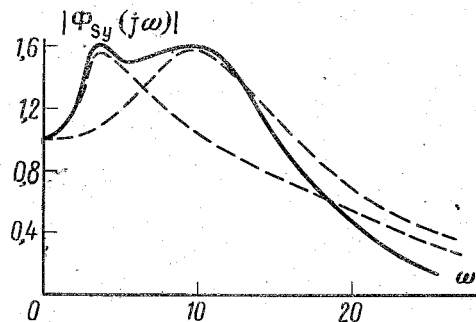


Рис. 7-17.

вило, значительно превышает это значение. В этих условиях можно производить расчет, принимая в качестве оптимального значения  $\alpha$  его предельное значение  $\alpha_{пр}$ . Легко видеть, что в этом случае процедура расчета оптимальных параметров настройки ПИД-регулятора мало отличается от процедуры расчета параметров ПИ-регулятора. Отличие заключается лишь в построении частотных характеристик разомкнутой системы при единичном значении коэффициента передачи регулятора. Если при расчете ПИ-регулятора длины векторов

АС (см. рис. 7-9) рассчитывается по формуле (7-25), то теперь их следует рассчитывать по формуле (7-35) при  $\alpha = \alpha_{пр}$ .

Пример расчета параметров ПИД-регулятора дан в приложении.

### 7-5. Анализ процессов регулирования при детерминированных воздействиях

Если к автоматической системе регулирования предъявляется требование, чтобы регулируемая величина даже кратковременно не выходила за определенные границы, расчет системы не может быть ограничен определением параметров настройки, минимизирующих среднеквадратичную ошибку, так как величина среднеквадратичной ошибки по существу ничего не говорит о возможных максимальных выбросах случайного процесса. Поэтому заключительным этапом расчета системы в этом случае должен быть поверочный расчет процессов регулирования при входном детерминированном воздействии наиболее тяжелой формы.

Из разработанного к настоящему времени довольно большого числа методов построения переходных процессов по заданной частотной характеристике системы остановимся лишь на одном, основанном на возможности приближенной замены однократного входного воздействия периодическим. Этот метод удобен в том отношении, что для его использования достаточно располагать графиками частотных характеристик, а расчеты производятся по относительно простым формулам, удобным как при ручных вычислениях, так и при использовании цифровых вычислительных машин.

Допустим, что на вход исследуемой системы с частотной характеристикой  $W(j\omega)$  действует возмущение, представляющее собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис. 7-18, а), причем величина периода колебаний  $T$  настолько велика, что за время одного полупериода  $T/2$  переходные процессы в системе успевают практически полностью затухнуть. В этом случае в пределах каждого полупериода колебаний график изменения выходной величины системы будет практически совпадать с графиком ее изменения при ступенчатом воздействии (рис. 7-18, б). Рассмотренная последовательность импульсов с помощью ряда Фурье может быть представлена как сумма гармоник:

$$x(t) = \frac{d}{2} + \frac{2d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k \frac{2\pi}{T} t. \quad (7-36)$$

В свою очередь реакция системы на каждую из этих гармоник может быть определена непосредственно по амплитудно-фазовой частотной характеристике системы  $W(j\omega)$ . Напомним, что эта характеристика непосредственно определяет реакцию системы на комплексную функцию времени  $e^{j\omega t}$  и  $y(t)$  может быть записана в виде

$$y(t) = W(j\omega) e^{j\omega t}.$$

Подставив в эту формулу соотношения

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t;$$

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega),$$

получим:

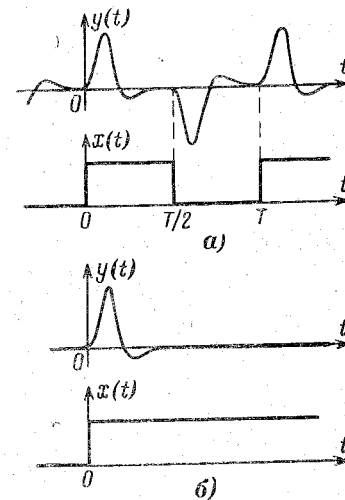
$$y(t) = [R(\omega) \cos \omega t - I(\omega) \sin \omega t] + j[I(\omega) \cos \omega t + R(\omega) \sin \omega t]. \quad (7-37)$$


Рис. 7-18.

В соответствии с принципом наложения вещественная составляющая этой формулы

$$\operatorname{Re} y(t) = R(\omega) \cos \omega t - I(\omega) \sin \omega t \quad (7-38)$$

есть реакция на вещественную составляющую входного воздействия, т. е. на воздействие  $\cos \omega t$ , а мнимая

$$\operatorname{Im} y(t) = I(\omega) \cos \omega t + R(\omega) \sin \omega t \quad (7-39)$$

есть реакция на мнимую составляющую, т. е. на воздействие  $\sin \omega t$ . Но поскольку в разложении последовательности прямоугольных импульсов (7-36) имеются лишь слагаемые с синусами, реакция системы на такую последовательность импульсов может быть записана в следующем виде:

$$y(t) = \frac{R(0)d}{2} + \frac{2d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [I(\omega_k) \cos \omega_k t - R(\omega_k) \sin \omega_k t] \quad (7-40)$$

(при этом учитывается, что постоянная составляющая входа  $d/2$  может рассматриваться как косинусоида нулевой частоты с амплитудой  $d/2$ ).

При построении графика переходного процесса достаточно ограничиться дискретными значениями, разделенными достаточно малым постоянным интервалом времени  $\Delta t$ . В практических расчетах достаточно определить 24 точки графика, т. е. значения выхода достаточно определять последовательно в моменты времени  $0, T/48, T/24, T/16, \dots$ , а интервал  $\Delta t$  принимать равным  $T/48$ . Для указанных дискретных моментов времени формула (7-40) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{R_0 d}{2} + \frac{2d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} j_k; \\ y_1 &= \frac{R_0 d}{2} + \frac{2d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (r_k \sin k \cdot 7,5^\circ + j_k \cos k \cdot 7,5^\circ); \\ y_2 &= \frac{R_0 d}{2} + \frac{2d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (r_k \sin k \cdot 15^\circ + j_k \cos k \cdot 15^\circ); \\ y_m &= \frac{R_0 d}{2} + \frac{2d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (r_k \sin km \cdot 7,5^\circ + j_k \cos km \cdot 7,5^\circ); \\ & \quad m = 1, 2, \dots, 24, \end{aligned} \right\} (7-41)$$

где  $R_0 = R(0)$ ;  $r_k = R(\omega_k)/k$ ;  $j_k = I(\omega_k)/k$ .

В частности, если ограничить суммы в этих формулах шестью слагаемыми (т. е. ограничиться одиннадцатой гармоникой разложе-

ния), то последние формулы записываются следующим образом (при  $d=1$ ):

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 0,5R_0 + 0,637(j_1 + j_3 + j_5 + j_7 + j_9 + j_{11}); \\ y_1 &= 0,5R_0 + 0,083(r_1 + j_{11}) + 0,244(r_3 + j_9) + \\ & \quad + 0,388(r_5 + j_7) + 0,505(r_7 + j_5) + 0,587(r_9 + j_3) + \\ & \quad + 0,632(r_{11} + j_1); \\ y_2 &= 0,5R_0 + 0,165(r_1 + j_5 - j_7 + r_{11}) + 0,450(r_3 + \\ & \quad + j_3 + r_9 - j_9) + 0,616(j_1 + r_5 + r_7 - j_{11}); \\ y_3 &= 0,5R_0 + 0,244(r_1 + r_7 - r_9 + j_3 - j_5 - j_{11}) + \\ & \quad + 0,587(r_3 + r_5 - r_{11} + j_1 - j_7 - j_9); \\ y_4 &= 0,5R_0 + 0,318(r_1 + r_5 - r_7 - r_{11}) + 0,552(j_1 - j_5 - \\ & \quad - j_7 + j_{11}) + 0,637(r_3 - r_9); \\ y_5 &= 0,5R_0 + 0,388(r_1 + j_{11}) + 0,587(r_3 + j_9) + \\ & \quad + 0,083(-r_5 - j_7) + 0,632(-r_7 - j_5) + 0,244(-r_9 - \\ & \quad - j_3) + 0,505(r_{11} + j_1); \\ y_6 &= 0,5R_0 + 0,450(r_1 + j_1 + r_3 - j_3 - r_5 - j_5 - r_7 + \\ & \quad + j_7 + r_9 + j_9 + r_{11} - j_{11}); \\ y_7 &= 0,5R_0 + 0,505(r_1 - j_{11}) + 0,244(r_3 - j_9) + \\ & \quad + 0,632(-r_5 + j_7) + 0,083(r_7 - j_5) + 0,587(r_9 - j_3) + \\ & \quad + 0,388(-r_{11} + j_1); \\ y_8 &= 0,5R_0 + 0,318(j_1 + j_5 + j_7 + j_{11}) + 0,552(r_1 - r_5 + \\ & \quad + r_7 - r_{11}) + 0,637(-j_3 - j_9); \\ y_9 &= 0,5R_0 + 0,587(r_1 + r_7 + j_{11} - r_9 - j_3 + j_5) + \\ & \quad + 0,244(-r_3 - r_5 + r_{11} + j_1 - j_7 - j_9); \\ y_{10} &= 0,5R_0 + 0,165(j_1 + r_5 + r_7 - j_{11}) + \\ & \quad + 0,450(-r_3 - [r_9 - j_3 + j_9] + 0,616(r_1 + r_{11} + j_5 - j_7); \\ y_{11} &= 0,5R_0 + 0,632(r_1 - j_{11}) + 0,587(-r_3 + j_9) + \\ & \quad + 0,505(r_5 - j_7) + 0,388(-r_7 + j_5) + 0,244(r_9 - j_3) + \\ & \quad + 0,083(-r_{11} + j_1); \\ y_{12} &= 0,5R_0 + 0,637(r_1 - r_3 + r_5 - r_7 + r_9 - r_{11}) \end{aligned} \right\} (7-42)$$

и т. д.

При выборе периода  $T$  необходимо учитывать, что при слишком большом значении его расстояния между отдельными точками графика ( $\Delta t = T/48$ ) могут оказаться недостаточными для надежной интерполяции между этими точками; слишком же малая величина  $T$  может привести к тому, что за время  $T/2$  переходный процесс не закончится и поэтому вычисленный график изменения выходной координаты (рис. 7-18,а) не будет достаточно хорошо совпадать с искомым графиком переходного процесса (рис. 7-18,б). Косвенно длительность переходного процесса может быть оценена по резонансной частоте системы  $\omega_{рез}$ . При показателе колебательности  $M < 2$  можно считать, что переходный процесс практически оканчивается через три периода колебаний, т. е. можно выбрать  $T/2 \approx 3T_{рез}$ . Поэтому выбор первой гармоники колебаний в приведенных выше формулах может быть осуществлен по известной после расчета

оптимальной настройки регулятора резонансной частоте  $\omega_{\text{рез}}$  с помощью формулы

$$\omega_1 = \frac{\{2\pi\}}{T} \approx \frac{\pi}{3T_{\text{рез}}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{6}. \quad (7-43)$$

При таком выборе  $\omega_1$  интервал  $\Delta t$  определяется формулой

$$\Delta t = \frac{T}{48} \approx \frac{T_{\text{рез}}}{8} = \frac{\pi}{4\omega_{\text{рез}}}. \quad (7-44)$$

Для расчета частотной характеристики замкнутой системы относительно возмущения  $\lambda(t)$  (5-15) целесообразно использовать частотную характеристику разомкнутой системы при единичном коэффициенте передачи регулятора  $W_1(j\omega)$ , построение которой производилось при определении оптимальной настройки регулятора. Чтобы не производить перестроения этих характеристик для оптимального коэффициента передачи  $k_{\text{р.опт}}$ , можно несколько изменить запись формулы (5-15):

$$\Phi_\lambda(j\omega) = \frac{1}{k_{\text{р.опт}}} \frac{W_\lambda(j\omega)}{\frac{1}{k_{\text{р.опт}}} + W_1(j\omega)}. \quad (7-45)$$

Легко видеть, что знаменатель этой формулы определяется вектором, проведенным к характеристике  $W_1(j\omega)$  из точки с координатами  $\left(-\frac{1}{k_{\text{р.опт}}}; j0\right)$  (см. рис. 7-9).

В заключение следует отметить, что при использовании рассмотренного здесь метода предполагалось, что частотная характеристика  $\Phi_\lambda(j\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  по модулю стремится к нулю. Если это условие не выполняется (что имеет место в случае, когда выходная величина системы в момент нанесения ступенчатого воздействия меняется скачком), из характеристики  $\Phi_\lambda(j\omega)$  следует вычесть ее значение, к которому она стремится при  $\omega \rightarrow \infty$ . Соответственно в полученном графике процесса на выходе появится дополнительная постоянная составляющая (равная вычитаемому значению), которая может быть легко затем учтена.

Пример расчета приведен в приложении.

## 7-6. Выбор алгоритмов функционирования регуляторов при неточном задании свойств объекта

В предыдущем изложении предполагалось, что перед началом расчетов имеется в распоряжении полная информация о динамических характеристиках объекта и статистических характеристиках приведенных возмущений. Предполагалось также, что найденные параметры настройки регулятора могут быть точно установлены в его реальной конструкции. В действительности же аналитическое получение математического описания объекта регулирования всегда сопряжено с введением ряда упрощающих предположений, которые, естественно, не могут не оказать влияния на точность получаемого результата. При экспериментальном определении динамических ха-

рактеристик промышленных объектов на результаты опытов оказывают влияние случайные возмущения и помехи, действующие на объект во время проведения экспериментов, а также погрешности измерительной аппаратуры. В результате оказывается, что истинная характеристика объекта остается неизвестной — могут быть заданы лишь границы зоны, в пределах которой с достаточно большой степенью вероятности эта характеристика должна находиться.

Изменение показателей функционирования системы регулирования, вызванное изменением параметров системы (в том числе и изменением параметров объекта), получила название чувствительности системы к вариациям параметров. Количественными характеристиками чувствительности могут быть коэффициенты чувствительности системы. Каждый из таких коэффициентов равен отношению соответствующего показателя качества работы системы (например, среднеквадратичной ошибки регулирования, показателя колебательности и т. п.) к вызвавшему это изменение приращению того или иного параметра (например, коэффициента передачи объекта, времени запаздывания и т. д.), когда это приращение достаточно мало по абсолютной величине.

Поскольку изменение свойств системы по сравнению с расчетными обычно приводит к ухудшению качества ее работы, возникла проблема построения систем регулирования, малочувствительных к вариациям параметров [Л. 22].

Следует, однако, иметь в виду, что стремление к получению систем, малочувствительных к вариациям параметров, не должно превращаться в самоцель, так как не исключена возможность, что система, обладающая большей чувствительностью, все же обеспечит более высокую точность регулирования, чем система с меньшей чувствительностью. В частности, как показывает опыт расчетов, именно такая ситуация обычно возникает при сравнении систем с ПИ и ПИД-регуляторами. Несмотря на то что система с ПИД-регулятором обычно оказывается намного более чувствительной к вариациям параметров, чем система с ПИ-регулятором, все же выигрыш в точности, обеспечиваемой ПИД-регулятором по сравнению с ПИ-регулятором, может оказаться настолько значительным, что следует отдать предпочтение ПИД-регулятору.

Исходя из сказанного, выбор оптимальных алгоритмов работы регуляторов и их параметров настройки при неточно заданных характеристиках объекта целесообразно осуществлять без введения каких-либо новых критериев, осуществляя его с помощью соответствующим образом обобщенных методов, рассмотренных выше для решения той же задачи при точно заданных характеристиках объекта [Л. 63]. Прежде всего заметим, что неточное задание параметров объекта практически не меняет структуры оптимальной частотной характеристики регулятора; она по-прежнему определяется формулой (6-5). Поэтому речь здесь должна идти лишь о соответствующем изменении оптимальных параметров настройки регулятора, так чтобы при всех возможных изменениях характеристик объекта получаемая система регулирования оставалась в пределах области заданного запаса устойчивости и обладала при этом наибольшей достижимой точностью. Очевидно, последовательность расчетов должна быть следующей.

Для определения области в пространстве параметров настройки регулятора, в которой система будет заведомо обладать необходимым запасом устойчивости, следует построить области задан-

ного запаса устойчивости для каждой из этих возможных характеристик объекта. Искомая область представляет собой пересечение всех найденных таким образом областей (т. е. иными словами, любая точка этой области должна одновременно принадлежать и всем указанным областям).

Сказанное иллюстрирует рис. 7-19, где показаны области заданного запаса устойчивости, построенные по двум частотным характеристикам одного и того же объекта, соответствующим двум предельным значениям погрешности оценки истинной частотной характеристики этого объекта.

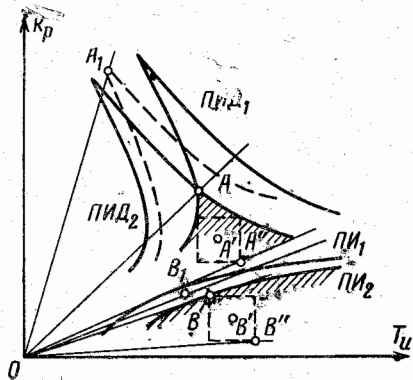


Рис. 7-19.

ния границы общей области прямой, проведенной из начала координат плоскости  $k_p, T_d$ . На рис. 7-19 оптимальная настройка ПИД-регулятора определяется точкой  $A$ , а оптимальная настройка ПИ-регулятора — точкой  $B$ . Оптимальная настройка ПИД-регулятора, соответствующая истинной характеристике объекта, определяется точкой  $A_1$ , а соответствующая настройка ПИ-регулятора — точкой  $B_1$ . Как видим, отсутствие точной начальной информации о динамических свойствах объекта приводит к необходимости устанавливать в регуляторах параметры настройки, обеспечивающие значительно более низкую точность регулирования, чем это имело бы место при точно известных характеристиках объекта (напомним, что величина среднеквадратичной ошибки регулирования обратно пропорциональна угловому наклону касательной, проведенной к границе области допустимого запаса устойчивости из начала координат). Особенно существенная потеря точности (т. е. особенно высокая чувствительность) имеет место в системе с ПИД-регулятором, что обусловлено характерной формой области заданного запаса устойчивости для систем с таким регулятором (имеющей обычно вид вытянутого острого «языка»). Тем не менее применение ПИД-регулятора в рассмотренном случае более предпочтительно по сравнению с ПИ-регулятором, так как система с ПИД-регулятором позволяет получить меньшую среднеквадратичную ошибку регулирования (угловой коэффициент наклона линии  $OA$  на рис. 7-13 остается большим угловым коэффициентом наклона линии  $OB$ ).

Ухудшение точности регулирования будет иметь место также при

источной градуировке органов настройки в регуляторе. Пусть, например, оптимальные значения параметров  $k_p$  и  $T_d$  ПИД-регулятора (соответствующим точке  $A$  на рис. 7-19) устанавливаются в реальной конструкции регулятора с некоторой погрешностью  $\pm \Delta k_p$  и  $\pm \Delta T_d$ . Тогда, очевидно, оптимальные значения параметров настройки, которые реально следует установить в регуляторе, будут определяться на рис. 7-19 точкой  $A'$ , расположенной в центре прямоугольника со сторонами  $2\Delta k_p$  и  $2\Delta T_d$  (на рис. 7-19 он обозначен пунктиром). Этот прямоугольник построен внутри заштрихованной области допустимого запаса устойчивости так, чтобы угловой коэффициент наклона прямой  $OA'$  был максимальным. Аналогично определяется оптимальная настройка ПИ-регулятора (точка  $B'$  на рис. 7-19). Следует обратить внимание, что и здесь из-за характерной конфигурации границ областей заданного запаса устойчивости потери, вызванные неточностью установки оптимальных параметров, в системах с ПИД-регулятором оказываются, как правило, большими, чем в системах с ПИ-регулятором.

При этом величина среднеквадратичной ошибки регулирования лишь в среднем обратно пропорциональна угловому коэффициенту наклона прямой  $OA'$  или  $OB'$ . Не исключена возможность, что среднеквадратичная ошибка окажется еще больше, так как действительное значение установленных параметров регулятора может определяться точками  $A''$  и  $B''$ .

Таким образом, неполнота начальной информации о свойствах объекта и регулятора принципиально приводит к снижению динамической точности регулирования.

## 7-7. Определение алгоритмов функционирования регуляторов, работающих в широком диапазоне нагрузок объекта

При работе промышленных регулируемых объектов в широком диапазоне нагрузок их необходимо рассматривать как нелинейные динамические системы.

Хотя общих методов синтеза регуляторов для нелинейных объектов, подверженных действию случайных возмущений не существует [Л. 72], широкое распространение получило одно из направлений синтеза, которое в целом ряде случаев может привести к вполне удовлетворительному решению этой задачи. Известно [Л. 6], что при воспроизведении нормально распределенного случайного сигнала оптимальным по критерию минимума среднеквадратичной погрешности динамическим фильтром является линейный фильтр. Отсюда следует, что при автоматизации объекта с высоким уровнем возмущений можно идти по пути разработки алгоритма, который предусматривал бы компенсацию нелинейностей объекта. Естественно, что сделать это в общем случае далеко не просто и даже не всегда возможно. Тем не менее во многих практически важных случаях такой подход может быть реализован. Действительно, глубокие возмущения в системах регулирования обычно связаны с изменением режима работы объекта (например, с изменением нагрузки электростанций в определенные часы суток) и имеют, как правило, весьма низкочастотный характер. Эти соображения согласуются также и с полученными выше выводами об ограниченных возможностях систем эффективного регулирования, которые сводятся к тому, что

чем большим по модулю являются случайные возмущения, тем меньшей полосой частот должны они обладать для того, чтобы система смогла уменьшить эффект их действия на регулируемую величину до допустимого уровня.

Если изменение режимных условий происходит настолько медленно, что в течение времени собственных переходных процессов в системе регулирования параметры объекта могут считаться приближенно постоянными, то математическое описание объекта может быть представлено в виде нескольких линейных динамических моделей (динамических характеристик для малых отклонений) объекта, составленных для нескольких фиксированных режимов объекта (например, для минимальной, максимальной и средней нагрузок), а также закона распределения вероятностей величин, характеризующих режим работы объекта.

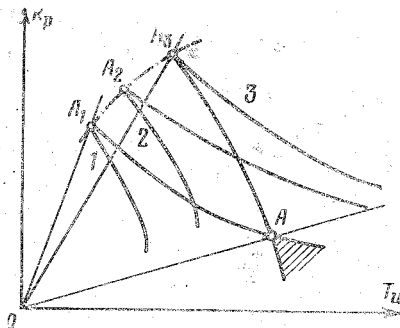


Рис. 7-20.

Соответственно регулирование подобных нелинейных объектов может осуществляться линейными регуляторами, но с переменными параметрами настройки, меняющимися в зависимости от изменения режимных величин. Так, например, если схема регулирования давления пара парогенератора, приведенная на рис. 5-1, предназначена для работы в широком диапазоне изменения его нагрузок, в регулятор давления РД целесообразно ввести добавочное воздействие от изменения расхода пара  $D(t)$ , в зависимости от которого осуществляется изменение параметров настройки этого регулятора.

Расчет оптимальных параметров настройки регулятора для различных режимов работы объекта производится обычным порядком.

Обозначим переменную величину, в зависимости от изменения которой меняются динамические свойства объекта регулирования, через  $c$  (в общем случае  $c$  может быть вектором, т. е. включать в себя несколько переменных), и пусть границы областей заданного запаса устойчивости для нескольких возможных значений  $c$  определяются кривыми 1—3 (рис. 7-20). Соответственно при низкочастотных воздействиях изменение параметров  $k_p$  и  $T_n$  должно происходить по кривой, проходящей через точки  $A_1$ — $A_3$ . Дисперсия ошибки системы при этом будет также величиной переменной, зависящей от  $c$ , и для оценки динамической точности можно воспользоваться средним значением дисперсии  $M\{\sigma_e^2(c)\}$ . Если переменная  $c$  имеет плотность распределения вероятности  $p(c)$ , то математическое ожидание дисперсии ошибки регулирования может быть вычислено по формуле

$$M\{\sigma_e^2(c)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_n(c)}{k_p(c)k_\mu(c)} \sigma_v^2(c) p(c) dc, \quad (7-46)$$

где

$$\sigma_v^2(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_{xx}(\omega, c) d\omega.$$

Естественно, что регулирование рассматриваемого класса объектов может осуществляться и обычными регуляторами с неизменными параметрами настройки. Выбор численных значений этих параметров следует производить, считая возможные изменения динамических характеристик объекта просто как дополнительную неопределенность в задании этих характеристик.

Оптimum настройки регулятора в этом случае определяется точкой  $A$  на рис. 7-20, а математическое ожидание дисперсии ошибки регулирования определяется формулой

$$M\{\sigma_e^2(c)\} = \frac{T_n}{k_p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_v^2(c)}{k_\mu(c)} p(c) dc. \quad (7-47)$$

Если при использовании регулятора с переменной настройкой касательная к границе области допустимого запаса устойчивости на рис. 7-20, меняясь при изменении режима, остается между линиями  $OA_1$  и  $OA_3$ , то при использовании регулятора с постоянными параметрами она определяется линией  $OA$ . Уменьшение углового коэффициента наклона касательной характеризует потерю динамической точности, вызванной отказом от использования регулятора с переменными параметрами.

Может оказаться, что оптимальные параметры настройки регулятора связаны с режимными величинами объекта не детерминированной, а вероятностной зависимостью. В этом случае для каждого из режимов расчет осуществляется при ориентировке на условное математическое ожидание динамических характеристик объекта, но с учетом возможных отклонений характеристик от их математического ожидания. Для этой цели можно без всяких изменений воспользоваться порядком расчетов, изложенным в предыдущем параграфе.

Наконец, для рассматриваемых систем регулирования необходима проверка качества переходных процессов при резких и глубоких изменениях режимов работы (при ступенчатых возмущениях большой амплитуды со стороны нагрузки объекта). Поскольку система в рассматриваемом случае оказывается нелинейной, то для построения этих процессов приходится прибегать к помощи вычислительных средств.

Рассмотренные методы могут быть также непосредственно применены и для выбора оптимальных алгоритмов функционирования регуляторов нестационарных объектов, т. е. объектов, динамические свойства которых меняются во времени или в зависимости от изменения каких-либо других процессов (старения конструктивных материалов объекта, постепенного загрязнения поверхностей нагрева, выгорания катализаторов и т. п.). Возможность применения этих методов обусловлена тем обстоятельством, что указанные процессы протекают, как правило, крайне медленно во времени. Например, если некоторый химический объект работает с использованием периодически заменяемого или регенерируемого катализатора, то



обычно изменение динамических свойств объекта, обусловленное старением катализатора, остается от цикла к циклу достаточно стабильным. В этом случае имеется возможность экспериментально определить характер изменения динамики объекта в пределах каждого цикла и после соответствующих расчетов ввести в схему регулирования программное устройство, которое автоматически будет менять параметры настройки регулятора в течение цикла, поддерживая их в каждый момент времени на их оптимальных значениях. Естественно, в этом случае могут применяться и регуляторы с постоянными параметрами настройки.

В заключение следует заметить, что рассмотренные здесь системы регулирования с коррекцией параметров регулятора, осуществляемой в зависимости от изменения режимных условий работы объекта или от времени в литературе часто относят к классу самонастраивающихся или адаптивных (самоприспосабливающихся) систем [Л. 26]. В действительности, конечно, это не так. Самонастройка имела бы место, если бы регулятор самостоятельно в процессе своей работы уточнял неизвестные заранее или меняющиеся непредвиденным образом динамические характеристики объекта и в соответствии с получаемой таким образом информацией менял свои параметры настройки. Здесь же начальная информация об объекте заранее задана, требуемое изменение параметров настройки регулятора рассчитано по заранее известной зависимости от нагрузки или других величин, информация о текущих значениях которых также вводится в регулятор. Иначе говоря, здесь имеет место заранее заданный и в дальнейшем не меняющийся, в общем случае нелинейный, алгоритм функционирования регулятора, особенностью которого является зависимость коэффициентов уравнения регулятора от текущего состояния объекта (например, от его нагрузки).

Некоторые вопросы применения адаптивных систем регулирования производственных процессов будут рассмотрены в третьей части.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЦИФРОВЫМИ И ИМПУЛЬСНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

#### 8-1. Системы с цифровыми регуляторами

В последнее время в связи с использованием для управления производством цифровых вычислительных машин все более широкое распространение начинает получать цифровое регулирование промышленных объектов. Формирование регулирующих воздействий в таких системах осуществляется цифровыми вычислительными устройствами, которые оперируют не с непрерывными сигналами, а с дискретными числовыми последовательностями. В отличие от непрерывных сигналов числовые последовательности характеризуются определенными значениями лишь в отдельные дискретные моменты времени.

В отличие от графика непрерывной функции  $x(t)$  (рис. 8-1,а) график числовой последовательности представляет собой последовательность отдельных точек  $x[kT_s]$  (рис. 8-1,б). Обычно в цифровых управляющих машинах используются дискретные последовательности чисел с постоянным интервалом следования  $T$ .

Схема системы регулирования с цифровым регулятором приведена на рис. 8-2. Цифровой регулятор состоит из аналого-цифрового преобразователя АЦП, вычислительного устройства ВУ и цифро-аналогового преобразователя ЦАП.

В аналого-цифровом преобразователе осуществляется преобразование непрерывного сигнала ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$  в числовую последовательность  $\varepsilon[kT]$ , эта операция называется квантованием непрерывного сигнала по времени, а интервал следования чисел  $T$  — периодом квантования. Кроме того, здесь же значение непрерывного сигнала в моменты посылки округляется до ближайшей значащей цифры или, иначе

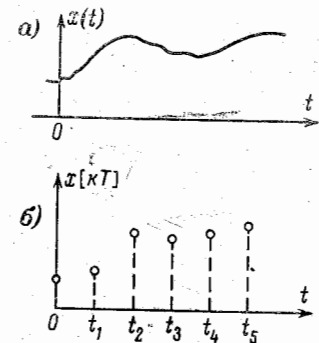


Рис. 8-1.

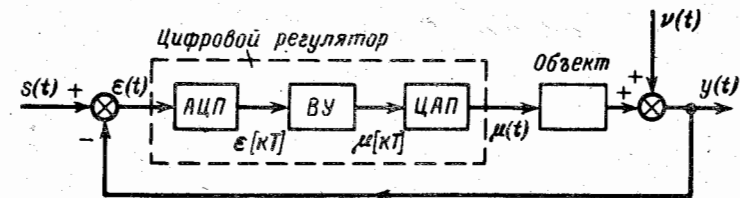


Рис. 8-2.

говоря, осуществляется квантование сигнала по уровню; однако шаг квантования по уровню в современных вычислительных машинах, применяемых для управления производственными процессами, обычно выбирается настолько малым, что им в нормальных режимах работы системы регулирования можно пренебречь.

В вычислительном устройстве ВУ, как уже указывалось, осуществляется вычисление текущего значения ре-



Регулирующего воздействия для каждого очередного шага, т. е. осуществляется преобразование по некоторому закону последовательности чисел ошибки регулирования  $\varepsilon[kT]$  в последовательность чисел  $\mu[kT]$ , определяющих текущее значение регулирующего воздействия.

Наконец, цифро-аналоговый преобразователь ЦАП осуществляет преобразование числовой последовательности  $\mu[kT]$  в непрерывное перемещение регулирующего органа  $\mu(t)$ .

Преобразование воздействий дискретными динамическими системами описывается не дифференциальными, а разностными уравнениями. Линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} A_n y[(k-n)T] + \dots + A_1 y[(k-1)T] + \\ + A_0 y(kT) = B_m x[(k-m)T] + \dots \\ \dots + B_1 x[(k-1)T] + B_0 x(kT), \end{aligned} \quad (8-1)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — постоянные коэффициенты.

Из этого уравнения непосредственно следует рекуррентная формула для определения членов выходной последовательности  $y(kT)$  при заданной входной последовательности  $x(kT)$ :

$$\begin{aligned} y(kT) = \frac{B_0}{A_0} x(kT) + \frac{B_1}{A_0} x[(k-1)T] + \dots \\ \dots + \frac{B_m}{A_0} x[(k-m)T] - \frac{A_1}{A_0} y[(k-1)T] - \dots \\ \dots - \frac{A_n}{A_0} y[(k-n)T]. \end{aligned} \quad (8-2)$$

Как видим, для вычисления выходной последовательности должна быть задана входная последовательность, а также  $n$  значений выходного сигнала  $y(-T)$ ,  $y(-2T)$ , ...,  $y(-nT)$ , предшествующих моменту появления входного воздействия, т. е. должны быть заданы начальные условия.

Пусть разностное уравнение дискретной системы имеет следующий вид:

$$10y(kT) - 9y[(k-1)T] = x(kT).$$

Рекуррентная формула для вычисления текущих значений выходной величины (8-2) здесь соответственно записывается следующим образом:

$$y(kT) = 0,100x(kT) + 0,900y[(k-1)T].$$

Если ищется реакция этой системы на последовательность одинаковых чисел  $x(kT) = 1(kT)$ , возникающих в некоторый начальный момент времени  $kT = 0$  (рис. 8-3) при условии, что система до этого находилась в покое (при нулевом начальном условии  $y(-T) = 0$ ), то, применяя эту формулу последовательно для моментов времени  $0, T, 2T, 3T$ , и т. д. получаем:

$$y(0) = 0,100x(0) + 0,900y(-T) = \\ = 0,100;$$

$$y(T) = 0,100x(T) + 0,900y(0) = \\ = 0,190;$$

$$y(2T) = 0,100x(2T) + 0,900y(T) = \\ = 0,271 \text{ и т. д.}$$

График полученного решения приведен на рис. 8-3.

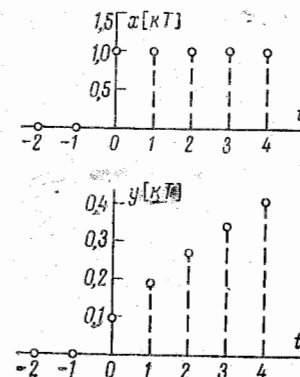


Рис. 8-3.

## 8-2. Модулированные последовательности дельта-импульсов

К дискретным числовым последовательностям не могут быть непосредственно применены интегральные преобразования Фурье и Лапласа, так как по отношению к таким последовательностям вообще лишено смысла понятие интеграла. Соответственно числовые последовательности не могут быть представлены в виде суммы гармонических колебаний, а для исследования систем, осуществляющих преобразование таких последовательностей, не может быть применен аппарат частотных характеристик. Это затруднение может быть устранено путем эквивалентной замены числовых последовательностей соответствующим образом подобранными последовательностями моделированных дельта-импульсов, к которым может быть применено преобразование Фурье и Лапласа. Связь между исходной дискретной последовательностью чисел  $x[kT]$  и эквивалентной ей последовательностью дельта-импульсов  $x^*(t)$  определяется формулой

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \delta(t - kT), \quad (8-3)$$

т. е. каждый член числовой последовательности заменяется дельта-импульсом соответствующей площади. Спектр такой последовательности импульсов определяет-

ся обычным порядком подстановкой выражения (8-3) в формулу прямого преобразования Фурье:

$$X^*(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \delta(t - kT) e^{-pt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] e^{-kTp}. \quad (8-4)$$

Таким образом, спектр такой последовательности является трансцендентной функцией  $p$ . Используя для сокращения записи обозначение  $z = e^{Tp}$ , последнюю формулу можно представить более компактно:

$$X^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] z^{-k}. \quad (8-5)$$

Следует заметить, что в литературе по дискретным системам формулы (8-4) и (8-5) принимаются обычно как формулы специального вида функциональных преобразований дискретных функций, аналогичных преобразованиям Фурье и Лапласа: формула (8-4) определяет преобразование, названное дискретным преобразованием Лапласа, а формула (8-5) — так называемое  $z$ -преобразование [Л. 27—30]. По-видимому, переход к таким специфичным преобразованиям оправдан лишь в случае исследования чисто дискретных систем. В автоматических же системах регулирования с цифровыми регуляторами имеются как дискретные элементы (вычислительные устройства регуляторов), так и непрерывные (собственно объекты регулирования). При исследовании таких смешанных систем приходится строить общую расчетную модель таких систем, т. е. использование дискретных преобразований требует по существу предварительного построения эквивалентных дискретных моделей непрерывных элементов системы. Напротив, при использовании обычных преобразований Фурье и Лапласа для исследования таких систем приходится строить эквивалентную расчетную непрерывную модель для дискретных частей смешанных систем. Последний способ представляется более предпочтительным хотя бы потому, что здесь сохраняются все привычные физические представления, на которых базируется математический аппарат теории непрерывных систем (например, представление сигналов в виде гармонических составляющих). Формальные же выкладки вследствие подобия исходных формул (8-4) и (8-5) остаются такими же, как и при использовании указанных дискретных преобразований.

Замена реальных числовых последовательностей последовательностями дельта-импульсов, естественно, требует соответствующей эквивалентной замены и отдельных функциональных элементов структурной схемы цифрового регулятора: аналого-цифрового преобразователя,

вычислительного устройства и цифро-аналогового преобразователя.

Если числовая последовательность  $x[kT]$  образуется в результате квантования некоторой непрерывной функции  $x(t)$ , соответствующая последовательность дельта-импульсов  $x^*(t)$  может быть выражена через функцию  $x(t)$  следующим образом:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (8-6)$$

или

$$x^*(t) = x(t) \delta^*(t). \quad (8-7)$$

Последняя формула показывает, что механизм образования последовательности дельта-импульсов  $x^*(t)$  может быть представлен как модуляция функцией  $x(t)$  бесконечной последовательности единичных дельта-импульсов (рис. 8-4)

$$\delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (8-8)$$

в результате прохождения непрерывной функции  $x(t)$  через элемент, генерирующий модулированные дельта-импульсы. Такой элемент может быть назван дельта-импульсным модулятором и будет в дальнейшем обозначаться, как указано на рис. 8-5.

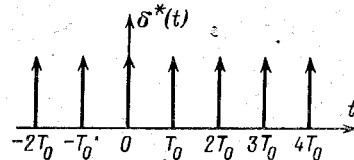


Рис. 8-4.



Рис. 8-5.

Последовательность немодулированных дельта-импульсов  $\delta^*(t)$  является периодической функцией с периодом  $T$ , которая, как и всякая периодическая функция, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}, \quad (8-9)$$

где  $\bar{C}_k$  определяется по формуле

$$\bar{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T}. \quad (8-10)$$

Таким образом, выражение для модулированной последовательности дельта-импульсов (8-7) может быть представлено также в следующем виде:

$$x^*(t) = \frac{x(t)}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T} t}. \quad (8-11)$$

Применяя к этому выражению преобразование Фурье, получаем:

$$\begin{aligned} X^*(p) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} e^{-p t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\left(p - jk \frac{2\pi}{T}\right) t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(p - jk \frac{2\pi}{T}\right). \end{aligned} \quad (8-12)$$

Имея в виду, что  $p = j\omega$ , эта формула может быть также записана следующим образом:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)\right]. \quad (8-13)$$

Как видим, действие дельта-импульсного модулятора сводится к размножению спектра модулирующей функции и переносу его вдоль оси частот на  $k2\pi/T$ . В результате спектры модулированных последовательностей дельта-импульсов оказываются периодическими функциями частоты.

Из формулы (8-13) также следует, что если сигнал  $x(t)$  обладает ограниченным спектром, т. е. если  $|X(j\omega)| = 0$  при  $\omega \geq \omega_{\text{макс}}$ , то при периоде квантования  $T \leq \pi/\omega_{\text{макс}}$  отдельные составляющие  $X^*(j\omega)$  для различных  $k$  не накладываются друг на друга и повторяют (с точностью до постоянного множителя  $1/T$ ) спектр  $X(j\omega)$ .

Тем самым имеется принципиальная возможность, установив идеальный фильтр низких частот, отфильтровать составляющие спектра последовательности импульсов  $X^*(j\omega)$  для  $k \neq 0$  (8-13) и полностью восстановить непрерывный входной сигнал дельта-импульсного модулятора.

Сформулированное положение составляет сущность теоремы В. А. Котельникова, утверждающей.

Таблица 8-1

$x(t)$ [ $\omega(t)$ ]	$X(p)$ [ $W(p)$ ]	$X^*(z)$ [ $W^*(z)$ ]
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^2}$
$e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\cos \beta t \cdot 1(t)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\sin \beta t \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t \cdot 1(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin \beta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$

что непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть полностью восстановлен по его дискретным значениям, взятым через интервал времени  $T \leq \pi/\omega_{\text{макс}}$ , где  $\omega_{\text{макс}}$  — максимальная частота в спектре сигнала.

В табл. 8-1 приведены выражения для спектров последовательностей дельта-импульсов, модулированных некоторыми часто встречающимися в расчетах непрерывными функциями.

Если модулирующая функция  $x(t)$  сдвинута на интервал  $\tau$  вправо вдоль оси времени, т. е. если она при  $t < \tau$  удовлетворяет условию  $x(t) = 0$ , причем величина

$x(t)$ [ω(t)]	$X(p)$ [W(p)]	$X^*(z)$ [W*(z)]
$1(t - \tau)$	$\frac{1}{p} e^{-p\tau}$	$\frac{1}{z-1}$
$(t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$	$\frac{1}{p^2} e^{-\tau p}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
$(t - \tau)^2 \cdot 1(t - \tau)$	$\frac{2}{p^3} e^{-\tau p}$	$T^2 \left[ \frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$
$e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot 1(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{\alpha + p}$	$\frac{e^{-\alpha m T}}{z - e^{-\alpha T}}$
$\cos \beta(t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \cos m\beta T - \cos(1-m)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\sin \beta(t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$	$\frac{\beta e^{-\tau p}}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin m\beta T + \sin(1-m)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha(t-\tau)} \cos \beta \times$ $\times (t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$	$\frac{(p + \alpha) e^{-\tau p}}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{[z \cos m\beta T - e^{-\alpha T} \cos(1-m)\beta T] e^{-\alpha m T}}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
$e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t - \tau) \times$ $\times 1(t - \tau)$	$\frac{\beta e^{-\tau p}}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{[z \sin m\beta T + e^{-\alpha T} \sin(1-m)\beta T] e^{-\alpha m T}}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$

Примечание.  $m = 1 - \frac{\tau}{T}$ .

этого интервала равна целому числу периодов квантования  $\tau = rT$ , полученное из этой таблицы выражение  $X^*(z)$  следует разделить на  $z^r$ ; если же этот интервал меньше периода квантования  $\tau < T$ , необходимо воспользоваться табл. 8-2. Этой же таблицей можно пользоваться и тогда, когда запаздывание превышает несколько периодов квантования (но не является кратным этому периоду), т. е. когда запаздывание удовлетворяет условию  $(r-1)T < \tau \leq rT$ . В этом случае полученное из указанной таблицы выражение для  $X^*(z)$  следует разделить на  $z^{r-1}$  и положить

$$m = r - \frac{\tau}{T}.$$

Формально указанные таблицы могут рассматриваться как таблицы соответствий для дискретного  $z$ -преобразования; поэтому для определения спектров модулированных последовательностей дельта-импульсов могут быть использованы таблицы  $z$ -преобразования, которые в достаточно полном объеме приводятся в пособиях по дискретным системам (например, в [Л. 28—30]).

### 8-3. Системы преобразования последовательностей дельта-импульсов

Вычислительное устройство цифрового регулятора осуществляет преобразование по определенному алгоритму входной числовой последовательности в последовательность чисел на выходе. После замены последовательности чисел  $x[kT]$  и  $y[kT]$  эквивалентными дельта-импульсными последовательностями  $x^*(t)$   $y^*(t)$  возникает необходимость в соответствующей замене цифрового устройства регулятора некоторой эквивалентной ему непрерывной динамической системой. Эта система должна осуществлять преобразование входной последовательности дельта-импульсов в выходную последовательность дельта-импульсов так же, как и исходная цифровая система. В частности, если цифровое вычислительное устройство реализует программу вычислений, определяемую разностным уравнением вида (8-1), то соответствующая ему эквивалентная система преобразования импульсных последовательностей должна удовлетворять уравнению

$$A_n y^*(t - nT) + \dots + A_1 y^*(t - T) + A_0 y^*(t) = B_m x^*(t - mT) + \dots + B_1 x^*(t - T) + B_0 x^*(t).$$

Подобные системы преобразования дельта-импульсных воздействий могут быть реализованы двояким образом:

1) с помощью динамической системы, состоящей лишь из запаздывающих (с временем запаздывания, равным  $T$ ) и безынерционных звеньев (такие системы условимся называть непрерывными системами преобразования импульсных последовательностей первого рода);

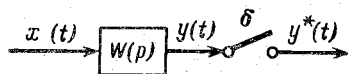


Рис. 8-6.

2) в виде непрерывно формирующего фильтра со специально подобранным оператором  $W(p)$ , на выходе которого устанавливается дельта-импульсный модулятор (рис. 8-6), работающий синхронно с входными импульсами (такие системы преобразования импульсных последовательностей будем называть системами второго рода).

Непрерывная система преобразования импульсных последовательностей первого рода должна, очевидно, удовлетворять следующему уравнению:

$$A_n y(t-nT) + \dots + A_1 y(t-T) + A_0 y(t) = B_m x(t-mT) + \dots + B_1 x(t-T) + B_0 x(t), \quad (8-14)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  — входной и выходной сигналы динамической системы. Эти сигналы могут иметь произвольный характер (необязательно импульсный).

Применяя к этому уравнению преобразование Фурье, получаем:

$$[A_n e^{-pnT} + \dots + A_1 e^{-pT} + A_0] Y(p) = [B_m e^{-pmT} + \dots + B_1 e^{-pT} + B_0] X(p). \quad (8-15)$$

Это уравнение в свою очередь можно заменить следующим образом:

$$Y(p) = W^*(p) X(p), \quad (8-16)$$

где

$$W^*(p) = \frac{B_m e^{-pmT} + \dots + B_1 e^{-pT} + B_0}{A_n e^{-pnT} + \dots + A_1 e^{-pT} + A_0}. \quad (8-17)$$

Напомним, что  $e^{-pT}$  представляет собой оператор запаздывающего звена с временем запаздывания, равным

$T$ . Поэтому динамическая система с оператором (8-17) является обычной непрерывной системой, состоящей из динамических элементов всего лишь двух видов: безынерционных и запаздывающих. В дальнейшем характеристики таких систем будут отмечаться звездочкой.

Из формулы (8-17) следует, что оператор системы преобразования импульсных последовательностей является трансцендентной функцией переменного  $p$ . Для сокращения записи удобно применять обозначение  $z = e^{pT}$ . Тогда

$$W^*(z) = \frac{B_m z^{-m} + \dots + B_1 z^{-1} + B_0}{A_n z^{-n} + \dots + A_1 z^{-1} + A_0} \quad (8-18)$$

или

$$W^*(z) = \frac{B_m z^{n-m} + \dots + B_1 z^{n-1} + B_0 z^n}{A_n + \dots + A_1 z^{n-1} + A_0 z^n}. \quad (8-19)$$

Специфика этой характеристики системы преобразования импульсных последовательностей заключается в том, что она, будучи характеристикой системы, состоящей лишь из безынерционных и запаздывающих звеньев, будет периодической функцией частоты (с периодом, равным частоте квантования  $\omega_{кв} = 2\pi/T$ ), т. е. для таких частотных характеристик является справедливым равенство:

$$W^*(j\omega) = W^* \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] \quad (k = \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (8-20)$$

Объясняется это тем, что указанным свойством периодичности обладает частотная характеристика каждого из входящих в систему запаздывающих звеньев.

Рассмотренная в § 8-1 цифровая система, описываемая разностным уравнением

$$10y(kT) - 9y[(k-1)T] = x(kT),$$

при переходе от числовых последовательностей к последовательностям дельта-импульсов заменяется непрерывной системой с уравнением

$$10y(t) - 9y(t-T) = x(t)$$

и оператором

$$W^*(p) = \frac{1}{10 - 9e^{-Tp}} = \frac{0,1}{1 - 0,9e^{-Tp}}.$$

Этой формуле соответствует структурная схема непрерывной системы с положительной обратной связью, показанная на рис. 8-7,а.

Для построения годографа амплитудно-фазовой характеристики этой системы удобно последнюю формулу переписать следующим образом:

$$W^*(j\omega) = \frac{0,111}{1,111 - e^{-j\omega T}}$$

Знаменатель этого выражения изображается в комплексной плоскости вектором  $\vec{AB}$  (рис. 8-7, б), который получается в результате вычитания из вектора  $\vec{OB} = 1,111e^{j0}$ , вектора  $\vec{OA} = e^{-jT\omega}$ , проведенного к окружности единичного радиуса под углом  $\varphi_{OA} = -T\omega$ . Меняя  $\omega$  (т. е. положение начала вектора  $\vec{AB}$ ), можно построить весь годограф характеристики  $W(j\omega)$ , имея в виду, что вектор этой характеристики связан с вектором  $AB$  соотношением

$$W(j\omega) = \frac{0,111}{\vec{AB}} = \frac{0,111}{AB} e^{-\varphi_{AB}}$$

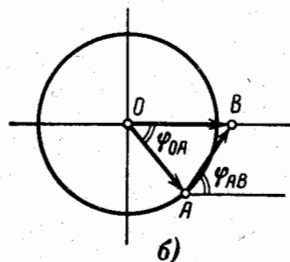
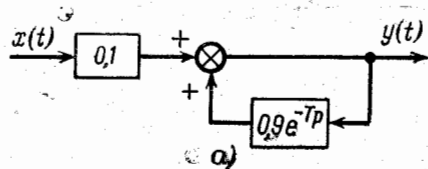


Рис. 8-7.

Соответствующий годограф показан на рис. 8-8, а, а график его модуля — на рис. 8-8, б. Из этих графиков непосредственно видна периодичность частотных характеристик непрерывных систем преобразования импульсных последовательностей.

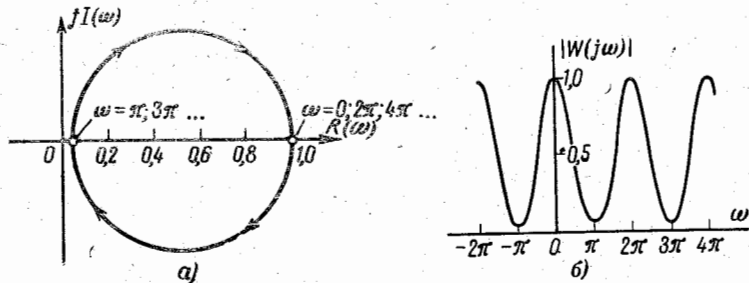


Рис. 8-8.

Весовая характеристика системы преобразования импульсных последовательностей второго рода (рис. 8-6), очевидно, представляет собой последовательность дельта-

импульсов, модулированную весовой характеристикой формирующего фильтра  $\omega(t)$ , и будет поэтому определяться формулой, подобной формуле (8-6):

$$\omega^*(t) = \omega(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (8-21)$$

Соответственно амплитудно-фазовая характеристика такой системы  $W^*(j\omega)$  связана с амплитудно-фазовой характеристикой формирующего фильтра  $W(j\omega)$  соотношением, аналогичным соотношению (8-13):

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right]. \quad (8-22)$$

Таким образом, для определения динамических характеристик систем преобразования импульсных последовательностей второго рода можно воспользоваться табл. 8-1 и 8-2, если только считать формулы в первом и втором столбцах формулами для весовой характеристики и оператора формирующего фильтра, а формулы в третьем столбце — формулами для оператора всей системы.

Вместо цифро-аналогового преобразователя в расчетной схеме регулятора должен быть установлен демодулятор, осуществляющий преобразование последовательности импульсов в соответствующее непрерывное изменение регулирующего воздействия. Динамические свойства такого демодулятора должны выбираться из очевидного условия, заключающегося в том, чтобы непрерывный сигнал на его выходе совпадал с сигналом на выходе цифро-аналогового преобразователя (см. рис. 8-2) после замены числовой последовательности на входе цифро-аналогового преобразователя последовательностью дельта-импульсов.

В простейшем и наиболее распространенном на практике случае сигнал на выходе цифро-аналогового преоб-

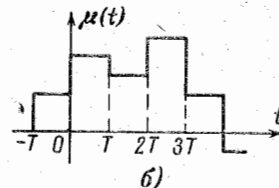
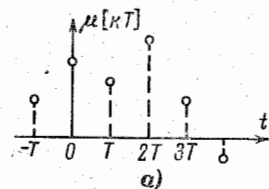


Рис. 8-9.

разователя приравняется значению поступившего очередного члена числовой последовательности (рис. 8-9,а) и остается постоянным вплоть до прихода следующего члена последовательности (рис. 8-9,б). Подобный преобразователь получил название фиксатора нулевого порядка.

Если цифро-аналоговый преобразователь осуществляет линейные операции над входной числовой последовательностью, то он может быть заменен демодулятором, представляющим собой линейную динамическую систему, функция веса которой  $w_{\text{дм}}(t)$  должна совпадать с реакцией цифро-аналогового преобразователя на единичное воздействие. В частности, при эквивалентной замене фиксатора нулевого порядка необходимо использовать демодулятор с функцией веса

$$w_{\text{дм}}(t) = 1(t) - 1(t - \tau), \quad (8-23)$$

график которой приведен на рис. 8-10. Частотная характеристика демодулятора, получаемая путем применения преобразования Фурье к этому выражению, определяется формулой

$$W_{\text{дм}}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (8-24)$$

Заметим, что частотная характеристика демодулятора одновременно зависит как от  $p$ , так и от  $z = e^{T p}$ .

#### 8-4. Расчетная схема систем регулирования с цифровыми регуляторами

После замены аналого-цифрового преобразователя цифрового регулятора дельта-импульсным модулятором, вычислительного устройства — фильтром, состоящим из безынерционных и запаздывающих звеньев, а цифро-аналогового преобразователя — демодулятором схема системы регулирования с цифровым регулятором (см. рис. 8-2) может быть представлена, как указано на рис. 8-11,а. Для последующих расчетов в этой схеме

целесообразно осуществить объединение элементов, частотные характеристики которых зависят лишь от  $z$ , и элементов, частотные характеристики которых зависят от  $p$ . Для этого частотную характеристику демодулятора следует представить в виде произведения

$$W_{\text{дм}}(z, p) = W_{\text{дм}}^*(z) \bar{W}_{\text{дм}}(p), \quad (8-25)$$

где  $W_{\text{дм}}^*(z)$  — множитель, зависящий лишь от  $z$ , а  $\bar{W}_{\text{дм}}(p)$  — лишь от  $p$ . Тогда контур системы можно представить состоящим из двух частей, частотные харак-

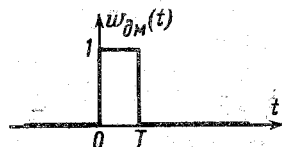


Рис. 8-10.

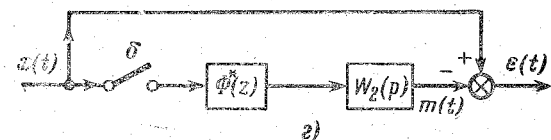
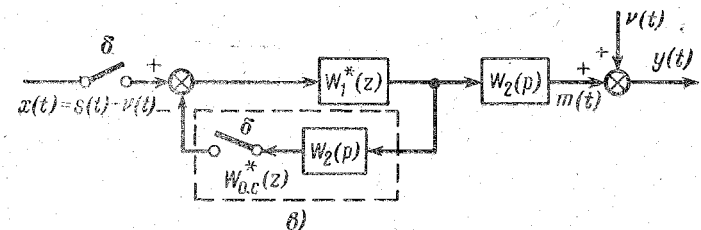
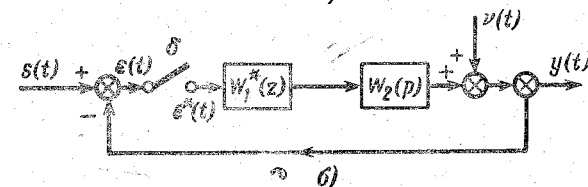
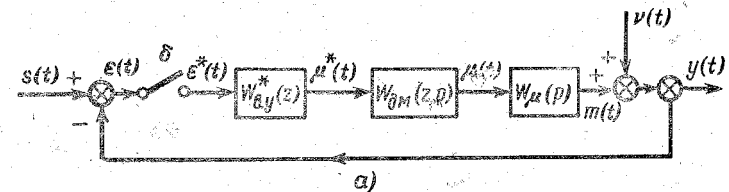


Рис. 8-11.

теристики которых будут зависеть лишь от  $z$  и от  $p$  (рис. 8-11,б):

$$W_{*1}^*(z) = W_{*в.у}^*(z) W_{*дм}^*(z); \quad (8-26)$$

$$W_2(p) = \overline{W}_{*дм}^*(p) W_{*μ}^*(p). \quad (8-27)$$

В свою очередь эта схема путем очевидных структурных преобразований может быть представлена в виде схемы на рис. 8-11,в, а затем и в виде схемы на рис. 8-11,г. В последней схеме  $\Phi^*(z)$  определяется формулой

$$\Phi^*(z) = \frac{W_{*1}^*(z)}{1 + W_{*1}^*(z) W_{*о.с}^*(z)}, \quad (8-28)$$

где  $W_{*о.с}^*(z)$  — оператор обратной связи, представляющей собой систему преобразования импульсных воздействий второго рода, формирующий фильтр которой имеет оператор  $W_2(p)$ . Для вычисления  $W_{*о.с}^*(z)$  по заданному  $W_2(p)$  можно воспользоваться формулами (8-21) и (8-22).

Изображение ошибки регулирования в системе на рис. 8-11,г определяется следующей формулой:

$$\varepsilon(p) = X(p) - \Phi^*(z) W_2(p) X^*(z) \quad (8-29)$$

или, учитывая формулу (8-13),

$$\varepsilon(p) = \left[ 1 - \frac{1}{T} \Phi^*(z) W_2(p) \right] X(p) - \frac{1}{T} \Phi^*(z) W_2(p) \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} X\left(p + jk \frac{2\pi}{T}\right), \quad (8-30)$$

где  $X(p)$  — изображение воздействия  $x(t) = s(t) - v(t)$ .

Поскольку всякое стационарное случайное воздействие может быть представлено как сумма независимых случайных элементарных воздействий,

$$x(t) = A_x e^{j\omega t}. \quad (8-31)$$

Рассмотрим в первую очередь, как может быть вычислена среднеквадратичная ошибка регулирования системы с цифровым регулятором при такого рода входном воздействии.

Из схемы на рис. 8-11,г непосредственно следует, что ошибка регулирования  $\varepsilon(t)$  в этом случае будет определяться формулой

$$\varepsilon(t) = A_x e^{j\omega t} - \frac{A_x}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi^* \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] \times \\ \times W_2 \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) t}.$$

Возводя обе части этого выражения в квадрат и усредняя, получаем:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{A_x^2}{2} \left\{ \left| 1 - \frac{1}{T} \Phi^*(j\omega) W_2(j\omega) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{T^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left| \Phi^* \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] W_2 \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] \right|^2 \right\}.$$

Принимая во внимание также, что

$$\Phi^*(j\omega) = \Phi^* \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right]$$

и

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| W \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] \right|^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W \times \\ \times \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] W \left[ -j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] = [W(j\omega) W(-j\omega)]^*$$

[последнее выражение есть оператор системы преобразования импульсных последовательностей второго рода, формирующий фильтр которой имеет оператор  $W(p) \times W(-p)$ ], окончательно получаем:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{A_x^2}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{T} \operatorname{Re} \Phi^*(j\omega) W_2(j\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \left| \Phi^*(j\omega) \right|^2 [W_2(j\omega) W_2(-j\omega)]^* \right\}. \quad (8-32)$$

Если воздействие (8-31) является составляющей входного стационарного эргодического воздействия со спект-



ром мощности  $G_{xx}(\omega)$ , то дисперсия выходной величины  $\sigma_{\varepsilon}^2$  получается путем суммирования дисперсий всех составляющих выхода, т. е. вычисляется по формуле

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega, \quad (8-33)$$

где  $G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$  с учетом (8-32) имеет следующий вид:

$$G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = \left\{ 1 - \frac{2}{T} \operatorname{Re} \Phi^*(j\omega) W_2(j\omega) + \frac{1}{T} |\Phi^*(j\omega)|^2 [W_2(j\omega)W_2(-j\omega)]^* \right\} G_{xx}(\omega). \quad (8-34)$$

Таким образом, порядок расчета оптимальных с точки зрения минимума среднеквадратичной погрешности параметров настройки системы регулирования с цифровым регулятором может быть принят следующим:

1) по известным операторам вычислительного устройства регулятора  $W_{в.у}^*(z)$ , демодулятора  $W_{дм}(p)$  и объекта  $W_{\mu}(p)$  с помощью формул (8-26) и (8-27) определяются характеристики частей разомкнутого контура регулирования  $W_{*1}(z)$  и  $W_2(p)$ ;

2) по  $W_2(p)$  находится оператор обратной связи системы  $W_{о.с}(z)$ ;

3) по частотной характеристике разомкнутого контура  $W_{*1}(z)W_{о.с}(z)$  в пространстве параметров настройки регулятора (в число которых следует также включить и период квантования  $T$ ) обычным порядком определяется граница области допустимого запаса устойчивости системы регулирования;

4) в найденной области определяется точка, в которой дисперсия ошибки, вычисляемая интегрированием формулы (8-34), принимает минимальное значение.

### 8-5. Системы с цифровыми регуляторами в режиме непрерывного регулирования

Формула для спектра мощности ошибки регулирования системы с дискретным регулятором (8-34) может быть представлена в следующем виде:

$$G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = \left| 1 - \frac{1}{T} \Phi^*(j\omega) W_2(j\omega) \right|^2 G_{xx}(\omega) + \Delta G_{\varepsilon\varepsilon}^{кв}(\omega), \quad (8-35)$$

где

$$\Delta G_{\varepsilon\varepsilon}^{кв}(\omega) = \frac{1}{T^2} |\Phi^*(j\omega)|^2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left| W \left[ j \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right) \right] \right|^2 G_{xx}(\omega). \quad (8-36)$$

Из такой записи этой формулы видно, что эффект квантования входного воздействия импульсным модулятором проявляется в виде дополнительной составляющей ошибки (ошибки квантования) со спектром мощности  $\Delta G_{\varepsilon\varepsilon}^{кв}(\omega)$ . Физически эта ошибка обусловлена пульсациями регулируемой величины в интервалах между замыканиями модулятора. Поскольку наличие этих пульсаций обычно нежелательно как с точки зрения точности регулирования, так и по ряду других практических соображений (например, из-за возможного уменьшения долговечности работы оборудования), в показатель оптимального функционирования системы с дискретным регулятором целесообразно ввести добавочное ограничение на величину пульсаций регулируемой величины, обусловленных квантованием сигнала в импульсном модуляторе, т. е. требование

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta G_{\varepsilon\varepsilon}^{кв}(\omega) d\omega \ll \sigma_{\varepsilon 0}^2, \quad (8-37)$$

где

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{T} \Phi^*(j\omega) W_2(j\omega) \right|^2 G_{xx}(\omega) d\omega \quad (8-38)$$

есть основная составляющая дисперсия ошибки регулирования.

Заметим, что формула (8-38) определяет дисперсию ошибки в системе регулирования непрерывного действия, которая получается из рассматриваемой (рис. 8-11) при замене дельта-импульсного модулятора безынерционным звеном с коэффициентом передачи  $1/T$ . Соответственно при выполнении требования (8-37) система с дискретным регулятором с точки зрения динамической ошибки перестает отличаться от системы с непрерывным регулятором,

частотная характеристика которого выбрана по формуле

$$W_p^{dc}(p) = \frac{1}{T} W_{в.у}^*(z) W_{дм}(p). \quad (8-39)$$

Для выяснения условий, при которых ошибка квантования становится пренебрежимо малой, обратимся вновь к исходной схеме регулирования с дискретным регулятором (рис. 8-11,а).

В этой схеме на вход дельта-импульсного модулятора подается смесь трех сигналов: изменение заданного

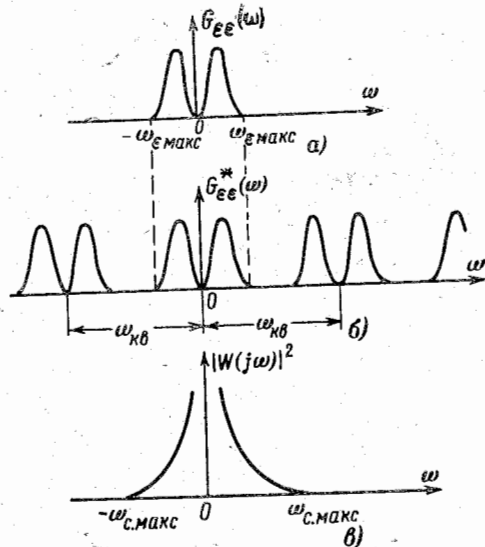


Рис. 8-12.

значения регулируемой величины  $s(t)$ , возмущение  $v(t)$  и сигнал  $m(t)$ , представляющий собой реакцию разомкнутой системы с частотной характеристикой  $W(p) = W_{в.у}^*(z) W_{дм}(p) W_{\mu}(p)$  на последовательность импульсов рассогласования  $\epsilon^*(t)$ . Пульсации в  $\epsilon(t)$ , очевидно, могут возникнуть лишь из-за наличия пульсаций в сигнале  $m(t)$ . В свою очередь в этом сигнале пульсации могут отсутствовать лишь тогда, когда в разомкнутом контуре полностью отфильтровываются боковые составляющие спектра  $\epsilon^*(t)$ .

Возникающую здесь ситуацию иллюстрирует рис. 8-12, где показаны графики спектра мощности ошибки регу-

лирования  $G_{\epsilon\epsilon}(\omega)$  при отсутствии пульсаций, спектра мощности последовательности импульсов ошибки  $G_{\epsilon\epsilon}^*(\omega)$  и квадрата модуля частотной характеристики разомкнутой системы  $|W(j\omega)|^2$ . Чтобы пульсации в  $\epsilon(t)$  отсутствовали, последний график практически не должен отличаться от нуля при частотах, превышающих частоту  $\omega_{кв} - \omega_{\epsilon\text{макс}}$ , т. е. наибольшая частота  $\omega_{с.макс}$ , выше которой модуль частотной характеристики системы может считаться равным нулю (эта частота иногда называется частотой среза системы), должна удовлетворять условию

$$\omega_{с.макс} \geq \omega_{кв} - \omega_{\epsilon\text{макс}},$$

где  $\omega_{кв} = 2\pi/T$  — частота квантования;  $\omega_{\epsilon\text{макс}}$  — наибольшая частота в спектре ошибки регулирования.

Из последнего неравенства может быть получено условие, которому должен удовлетворять период квантования, чтобы в ошибке регулирования отсутствовали пульсации квантования

$$T \leq \frac{2\pi}{\omega_{с.макс} + \omega_{\epsilon\text{макс}}}. \quad (8-40)$$

Наивысшая частота в спектре ошибки регулирования  $\epsilon(t)$  определяется наиболее высокочастотной из ее составляющих  $m(t)$ ,  $s(t)$ ,  $v(t)$ . Очевидно, что наивысшая частота в спектре составляющей  $m(t)$  совпадает с максимальной частотой пропускания системы  $\omega_{с.макс}$ , так как эта составляющая возникает не только вследствие действия на систему сигналов  $s(t)$  и  $v(t)$ , но также и в результате собственных переходных процессов, возникающих в системе. Наибольшие же частоты в спектрах воздействий  $s(t)$  и  $v(t)$ , как об этом уже говорилось ранее (см. § 7-2), в удовлетворительно функционирующих промышленных системах регулирования, должны быть как правило, существенно меньше полосы пропускания системы. Таким образом, в условии (8-40) можно положить  $\omega_{\epsilon\text{макс}} = \omega_{с.макс}$ , после чего оно принимает следующий вид:

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{с.макс}}. \quad (8-41)$$

Это условие может рассматриваться как формулировка условия теоремы В. А. Котельникова применительно к системам автоматического регулирования с дискретными регуляторами. Выполнение этого условия гарантирует не только отсутствие пульсаций в ошибке регулирования, но и совпадение частотной характеристики разомкнутого контура системы  $W^*_{1}(z)W^*_{o.c}(z)$  с дискретным регулятором (рис. 8-11, в) и частотной характеристикой непрерывной разомкнутой системы с регулятором (8-39). Иными словами, это условие гарантирует идентичность обеих систем не только с точки зрения величины среднеквадратичной ошибки регулирования, но и с точки зрения их запаса устойчивости. Следует обратить внимание на своеобразие использования теоремы В. А. Котельникова при построении систем регулирования с цифровыми регуляторами, которое заключается в том, что определяющим для выбора периода квантования является не полоса частот входных воздействий, а полоса частот пропускаемых системой регулирования в целом. В частности, нельзя выбирать предельный период квантования, исходя лишь из спектральных свойств входных воздействий и фильтрующих свойств объекта регулирования. При неизменных динамических свойствах объекта и неизменных статистических характеристиках возмущений величина предельного периода квантования должна меняться с изменением закона регулирования регулятора и изменением его параметров настройки. Общая тенденция здесь такова, что чем большее быстродействие системы может обеспечить регулятор, тем меньшим должен выбираться период квантования. С другой стороны, выполнение условия отсутствия пульсаций квантования (8-41) может быть достигнуто не только путем уменьшения периода квантования, но также и соответствующим изменением других параметров настройки регулятора (при неизменной величине периода квантования).

### 8-6. Алгоритмы вычислительных устройств цифровых регуляторов

То обстоятельство, что при выборе параметров цифровых регуляторов из условия отсутствия пульсаций квантования эти регуляторы в динамическом отношении оказываются подобными непрерывным, позволяет опреде-

лять оптимальный алгоритм функционирования цифрового регулятора  $W_p(p)$  по обычной формуле (6-5). Техническая реализация найденного таким образом закона регулирования в цифровых регуляторах осуществляется соответствующим выбором программ работы их вычислительных устройств  $W^*_{в.у}(z)$ . Следует только обратить внимание, что решение задачи алгоритмизации цифрового регулятора отличается от решения аналогичных задач для обычных цифровых вычислительных машин тем, что закон регулирования цифрового регулятора зависит не только от алгоритма работы его вычислительного устройства, но также и от динамических свойств выходного цифро-аналогового преобразователя.

В соответствии с формулой (8-39) частотная характеристика вычислительного устройства цифрового регулятора, реализующего при заданной частотной характеристике демодулятора  $W_{дм}(p)$  желаемый непрерывный закон регулирования  $W_p(p)$ , определяется следующим образом:

$$W^*_{в.у}(z) = T \frac{W_p(p)}{W_{дм}(p)} \quad (8-42)$$

Поскольку выражение в правой части этой формулы, вообще говоря, должно зависеть от  $p$ , а выражение в левой части — от  $z$ , то речь может идти лишь о приближенной реализации этого равенства. Решение задачи наилучшего приближения здесь целесообразно осуществлять в такой последовательности:

1. Представив частотную характеристику демодулятора в виде (8-25), записать формулу (8-42) следующим образом:

$$K^*(z) \approx T \frac{W_p(p)}{W_{дм}(p)}, \quad (8-43)$$

где

$$K^*(z) = W^*_{в.у}(z) W^*_{дм}(z), \quad (8-44)$$

и с помощью известных методов численного анализа [Л. 19] определить характеристику  $K^*(z)$ , приближенно реализующую требуемую зависимость.

2. По найденной таким образом характеристике  $K^*(z)$  найти частотную характеристику вычислительного устройства

$$W^*_{в.у}(z) = \frac{K^*(z)}{W^*_{дм}(z)}. \quad (8-45)$$

В частности, если в регуляторе используется для восстановления сигнала фиксатор нулевого порядка с частотной характеристикой (8-24), для которого  $\overline{W}_{\text{дм}}(p) = 1/p$  и  $W_{\text{дм}}^*(z) = 1 - z^{-1}$ , формулы (8-43) и (8-45) принимают следующий вид:

$$K^*(z) \approx T p W_p(p); \quad (8-46)$$

$$W_{\text{в.у}}^*(z) = \frac{z}{z-1} K^*(z). \quad (8-47)$$

Рассмотрим подробнее алгоритмы работы вычислительных устройств, реализующих унифицированные И-, П-, ПИ- и ПИД-законы регулирования, когда восстановление сигнала осуществляется фиксатором нулевого порядка.

1. И-закон регулирования будет получен, если в формулу (8-46) подставить:

$$W_p(p) = k_n/p$$

а затем воспользоваться формулой (8-47)

$$W_{\text{в.у}}^*(z) = T k_n \frac{z}{z-1}. \quad (8-48)$$

Последняя формула зависит лишь от  $z$ . Это значит, что интегральный закон регулирования является тем редким исключением, когда непрерывный закон регулирования может быть точно [в пределах диапазона частот, удовлетворяющего условию (8-41)] реализован средствами цифровой техники.

Полезно обратить внимание, что вычислительное устройство с найденной передаточной функцией при демодуляторе в виде фиксатора нулевого порядка [при выполнении условия (8-41)] дает точную реализацию интегрального закона регулирования, в то время как с точки зрения осуществления самой операции интегрирования оно является далеко не самым лучшим.

Действительно, легко видеть, что это вычислительное устройство работает на использовании простейшей аппроксимации входного сигнала — аппроксимации прямоугольниками. При такой аппроксимации площадь под графиком функции  $e(t)$  в пределах от  $t=0$  до момента текущего вычисления  $\mu(nT)$  определяется формулой

$$\mu(nT) = \mu [(n-1)T] + T e(nT),$$

а соответствующий спектр выходной величины вычислительного устройства

$$\mu(p) = \mu(p) e^{-Tp} + T e(p).$$

Следовательно, частотная характеристика дискретного интегратора будет определяться формулой

$$W_{\text{в.у}}^*(z) = \frac{T}{1 - e^{-Tp}} = T \frac{z}{z-1}, \quad (8-49)$$

что совпадает с (8-48) при  $k_n=1$ .

Если выбрать более совершенный способ аппроксимации интегрируемой функции, например метод трапеций, площадь под графиком функции в момент  $nT$  будет вычисляться по формуле

$$\mu(nT) = \mu [(n-1)T] + \frac{1}{2} T \frac{e(nT) + e(n-1)T}{2} \quad (8-50)$$

и, следовательно, частотная характеристика дискретного интегратора приобретет следующий вид:

$$W_{\text{в.у}}^*(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-Tp}}{1 - e^{-Tp}} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (8-51)$$

Частотная характеристика регулятора (8-39) с таким вычислительным устройством запишется следующим образом:

$$W_p^{\text{дс}}(p) = W_p(p) \frac{1 + e^{-Tp}}{2}, \quad (8-52)$$

где  $W_p(p) = k_n/p$  — характеристика И-регулятора.

Таким образом, более совершенная аппроксимация привела к большему отклонению частотной характеристики от желаемой, причем это отклонение соответствует ухудшению качества регулирования. В частности, использование регулятора с вычислительным устройством (8-50) вводит в контур регулирования запаздывание, равное половине периода квантования.

2. П-закон регулирования. Если в формулу (8-46) подставить (6-19), получим:

$$K^*(z) \approx T k_p p. \quad (8-53)$$

Таким образом, речь идет о построении дискретного вычислительного устройства, приближенно реализующего операцию дифференцирования. Существует достаточно много алгоритмов численного дифференцирования функций, заданных ее дискретными равноотстоящими значениями. Не останавливаясь подробно на этих методах, отметим лишь, что частотные характеристики дискретных дифференциаторов можно выбирать в виде обратных частотных характеристик дискретных интеграторов [Л. 28]. Так, имея в виду, что интегрирование можно осуществлять по методу прямоугольников с помощью дискретного фильтра с частотной характеристикой (8-49), а по методу трапеций — с помощью фильтра с частотной характеристикой (8-51), можно записать соответственно следующие две характеристики дискретных вычислительных устройств, реализующих зависимости (8-53):

$$K^*(z) = k_p \frac{z-1}{z}; \quad (8-54)$$

$$K^*(z) = 2k_p \frac{z-1}{z+1}. \quad (8-55)$$

Если воспользоваться первой из этих формул, выражение для частотной характеристики (8-47) вычислительного устройства цифрового регулятора примет следующий вид:

$$W_{\text{в.у}}^*(z) = k_p \quad (8-56)$$

и, следовательно, оператор (8-39) всего регулятора в целом при выполнении условия (8-41) будет определяться формулой

$$W_p^{дс}(p) = k_p \frac{1 - e^{-Tp}}{Tp}. \quad (8-57)$$

Если при синтезе вычислительного устройства воспользоваться выражением (8-55), то получим:

$$W_{п.у}^*(z) = 2k_p \frac{z}{z+1}. \quad (8-58)$$

Соответствующий этому вычислительному устройству оператор регулятора (8-39) будет уже определяться формулой

$$W_p^{дс}(p) = \frac{2k_p}{Tp} \frac{1 - e^{-Tp}}{1 + e^{-Tp}}. \quad (8-59)$$

Анализ работы систем регулирования с регуляторами (8-57) и (8-59) показывает, что точность их работы будет, как правило, ниже, чем точность работы системы с непрерывным П-регулятором (6-19).

Для окончательного выбора между двумя полученными операторами вычислительных устройств регулятора следует осуществить расчет оптимальных параметров настройки этих регуляторов  $k_p$  и  $T$  для конкретного объекта, после чего можно будет оценить, какой из них обеспечивает большую точность регулирования.

3. ПИ-закон регулирования (6-11) может рассматриваться как комбинация предыдущих двух законов и может быть реализован путем суммирования операторов вычислительных устройств (дискретного П- и И-регуляторов). Если просуммировать выражения (8-48) и (8-56), то получим:

$$W_{п.у}^*(z) = Tk_n \frac{z}{z-1} + k_p = k_p \frac{\left(1 - \frac{T}{T_n}\right)z - 1}{z-1}, \quad (8-60)$$

где  $T_n = k_p/k_n$ .

Оператор соответствующего дискретного регулятора (8-39) будет в этом случае иметь следующий вид:

$$W_p^{дс}(p) = \frac{k_p}{Tp} \left(1 + \frac{T}{T_n} - e^{-Tp}\right). \quad (8-61)$$

4. ПИД-закон регулирования. Подставив в формулу (8-46) выражение для оператора этого закона (6-8), получим:

$$K^*(z) \approx k_p \left(Tp + \frac{T}{T_n} + T_n Tp^2\right). \quad (8-62)$$

Для получения численными методами второй производной можно возвести в квадрат оператор дифференциатора первого порядка. Если дифференцирование осуществляется с помощью обратного оператора интегрирования (8-49), формула для  $K^*(z)$  приобретает следующий вид:

$$K^*(z) = k_p \left[ \frac{z-1}{z} + \frac{T}{T_n} + \frac{T_n}{T} \frac{(z-1)^2}{z^2} \right], \quad (8-63)$$

а оператор вычислительного устройства регулятора

$$W_{п.у}^*(z) = k_p \frac{\left(1 + \frac{T}{T_n} + \frac{T_n}{T}\right)z^2 - \left(1 + 2\frac{T_n}{T}\right)z + \frac{T_n}{T}}{z(z-1)}. \quad (8-64)$$

Регулятор в целом будет обладать следующим оператором:

$$W_p^{дс}(p) = \frac{k_p}{Tp} \left[ \left(1 + \frac{T}{T_n} + \frac{T_n}{T}\right) - \left(1 + 2\frac{T_n}{T}\right)e^{-Tp} + \frac{T_n}{T} e^{-2Tp} \right]. \quad (8-65)$$

## 8-7. Расчет оптимальных параметров настройки цифровых регуляторов

Расчет оптимальных параметров настройки дискретных регуляторов из условия минимума среднеквадратичной ошибки регулирования при добавочных ограничениях на запас устойчивости системы и отсутствие пульсаций квантования (8-41) может производиться в следующем порядке:

1) по известным операторам вычислительного устройства регулятора и демодулятора с помощью формулы (8-39) определяется оператор регулятора при работе в режиме отсутствия пульсаций квантования  $W_p^{дс}(p)$ ;

2) обычным порядком по известной амплитудно-фазовой характеристике объекта  $W_\mu(j\omega)$  находится в пространстве параметров настройки этого непрерывного регулятора (причем в число этих параметров должен быть включен и период квантования  $T$ ) область, в которой система имеет запас устойчивости не ниже заданного;

3) в этом же пространстве находится область, в которой удовлетворяется условие (8-41). Для этого, очевидно, следует задаться некоторым достаточно малым числом  $\Delta \ll 1$  и решить уравнение

$$|W(j\omega_{с. макс})| = \Delta, \quad (8-66)$$

где  $W(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, которая с учетом условия (8-41) принимает вид:

$$\left| W\left(j \frac{\pi}{T_{np}}\right) \right| = \Delta, \quad (8-67)$$

где  $T_{пр}$  — предельное значение периода квантования (это уравнение относительно  $T_{пр}$  и определяет границу искомой области в пространстве параметров настройки регулятора);

4) в области, общей для обеих найденных в пп. 2 и 3 областей, обычным порядком (см. § 6-2 и 7-2), ищется точка, соответствующая минимуму среднеквадратичной ошибки регулирования.

Пример расчета приведен в приложении.

В некоторых случаях период квантования оказывается известным еще до начала расчетов (например, он определяется техническими возможностями аппаратуры регулирования). Очевидно, что расчет в этом случае существенно упрощается из-за уменьшения числа подлежащих определению параметров настройки. Области допустимого запаса устойчивости и отсутствия пульсаций квантования определяются в этом случае в пространстве параметров настройки регулятора (из числа которых  $T$  исключается) при заданном  $T$ .

Возможна и другая постановка задачи выбора оптимальных параметров цифрового регулятора, при которой расчет также существенно упрощается. Поскольку цифровые регуляторы обычно реализуются на базе самой современной техники, представляется вполне разумным требование, чтобы обеспечиваемая ими точность регулирования практически была не ниже точности, обеспечиваемой обычными аналоговыми регуляторами. Решение задачи в этом случае может производиться в следующем порядке:

1) обычным порядком определяются оптимальные параметры типового непрерывного регулятора, ориентируясь на характеристику которого  $W_p(p)$  осуществлялся синтез характеристик вычислительного устройства рассматриваемого цифрового регулятора;

2) оставляя найденные параметры неизменными и в цифровом регуляторе, находится максимально допустимая величина периода квантования, при которой динамические характеристики системы с цифровым регулятором не будут заметно отличаться от характеристик системы с непрерывным регулятором.

При выборе критерия, характеризующего ухудшение качества работы системы с цифровым регулятором по сравнению с системой с непрерывным регулятором, следует не забывать, что введение квантования может ухудшить не только точность регулирования, но и устойчивость системы. Поэтому при определении допустимых значений  $T$  следует в первую очередь исходить из допустимого ухудшения запаса устойчивости и отсутствия пульсаций квантования. Лишь после этого в найденной области допустимых по указанным соображениям параметров можно перейти к определению точки, соответствующей минимуму ошибки регулирования. Поэтому порядок расчетов на втором этапе может быть следующим.

Для выбранной достаточно малой величины  $\Delta$  по формуле, аналогичной формуле (8-66),

$$W_{\text{опт}}(j\omega_{\text{с. макс}}) = \Delta, \quad (8-68)$$

где  $W_{\text{опт}}(j\omega)$  — частотная характеристика оптимальной системы, найденная на первом этапе, определяется полоса пропускаемых си-

стемой частот  $\omega_{\text{с. макс}}$ ; после этого по формуле (8-41) находится максимальная, допустимая по условию отсутствия пульсаций, величина периода квантования  $T_{\text{макс}}$ . По характеристике  $W_{\text{опт}}(j\omega)$  строится семейство характеристик разомкнутой системы для нескольких значений периода квантования  $T \leq T_{\text{макс}}$ :

$$W^{\Delta c}(j\omega) = W_{\text{опт}}(j\omega) \Delta W^{\Delta c}(j\omega), \quad (8-69)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta W^{\Delta c}(j\omega) &= \frac{W_p^{\Delta c}(j\omega)}{W_{p.\text{опт}}(j\omega)} = \\ &= \frac{1}{T} \frac{W_{\text{в.у}}^*(j\omega) W_{\text{дм}}(j\omega)}{W_{p.\text{опт}}(j\omega)}. \end{aligned} \quad (8-70)$$

Так, для системы с цифровым П-регулятором, вычислительное устройство которого имеет характеристику (8-54), характеристика  $\Delta W^{\Delta c}(j\omega)$  определяется формулой

$$\Delta W^{\Delta c}(j\omega) = \frac{\sin \frac{T}{2} \omega}{\frac{T}{2} \omega} e^{-i \frac{T}{2} \omega}, \quad (8-71)$$

которая при малых  $T$  может быть приближенно представлена следующим образом:

$$\Delta W^{\Delta c}(j\omega) \approx e^{-i \frac{T}{2} \omega}. \quad (8-72)$$

Таким образом, квантование сигнала здесь в первом приближении эквивалентно введению в контур регулирования системы с непрерывным П-регулятором запаздывания, равного половине периода квантования.

По характеристикам  $W^{\Delta c}(j\omega)$  можно затем построить зависимость увеличения показателя колебательности системы  $M$  от периода квантования  $T$  или, задавшись допустимой величиной увеличения этого показателя, найти предельно допустимую по условиям сохранения системой требуемого запаса устойчивости величину периода квантования  $T_{\text{уст. макс}}$ . Этот этап расчета может быть упрощен, если имеется уверенность, что (как это обычно бывает) основное влияние на увеличение  $M$  при малых  $T$  оказывает вектор характеристики разомкнутой системы при ее резонансной частоте  $W_{\text{опт}}(j\omega_{\text{рез}})$  (т. е. при частоте касания окружности на рис. 7-2). Поэтому требование сохранения системой достаточного запаса устойчивости может быть сведено к требованию, чтобы вектор частотной характеристики разомкнутой системы с оптимально настроенным непрерывным регулятором при резонансной частоте после введения квантования не получил слишком большого дополнительного отставания по фазе и увеличения по модулю (приближающих его к «опасной» точке  $(-1; j0)$ ):

$$\left. \begin{aligned} \arg(\Delta W(j\omega_{\text{рез}})) &< \delta_{\varphi}; \\ |\Delta W(j\omega_{\text{рез}})| &< 1 + \delta_{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (8-73)$$

Обычно более жестким является первое из двух условий (8-73). Вектор разомкнутой системы с непрерывными П- и ПИ-регуляторами при резонансной частоте и обычно принимаемых расчетных значениях  $M$  обычно располагается под углом, близким к  $-150^\circ$ . Поэтому добавочное отставание по фазе здесь не должно превышать порядка  $3-4^\circ$  ( $0,05-0,07 \text{ рад}$ ). Следовательно, в системах с цифровыми регуляторами, в которых введение квантования эквивалентно введению запаздывания (8-72), максимальный период квантования по условиям сохранения требуемого запаса устойчивости не должно превышать величины:

$$T \leq (0,05 \div 0,07) \frac{2}{\omega_{\text{рез}}} \quad (8-74)$$

Иными словами, частота квантования должна быть примерно в пятьдесят раз выше резонансной частоты системы.

После определения предельно допустимых значений  $T$  из условий (8-68) и (8-73) выбирается меньшее из них.

Поскольку максимальная частота пропускания любой системы  $\omega_{\text{макс}}$  отличается от резонансной частоты системы менее чем в 25 раз, выполнение условия (8-74), как правило, гарантирует также и выполнение условия отсутствия пульсаций квантования (8-68).

Подводя итог, следует еще раз обратить внимание на то, что в системах регулирования с цифровыми регуляторами (в зависимости от выбранных значений их параметров) могут наблюдаться три режима работы:

1. Режим работы при относительно малом периоде квантования, когда цифровой регулятор осуществляет регулирование практически так же, как осуществлял бы регулирование соответствующий непрерывный регулятор, т. е. оператор цифрового регулятора  $W_p^{dc}(p)$  (8-39) в этом случае практически не отличается от оператора  $W_p(p)$ , фигурирующего в формуле (8-42).

2. Режим работы при сравнительно большом периоде квантования, но не превышающем предельной величины, определяемой условием малости пульсаций квантования (8-41). Цифровой регулятор в динамическом отношении по-прежнему может рассматриваться как непрерывный регулятор, однако его оператор  $W_p^{dc}(p)$  может существенно (обычно в худшую сторону) отличаться от оператора  $W_p(p)$ . Особенностью характеристик такого регулятора является их зависимость от периода квантования, который должен рассматриваться как добавочный параметр настройки.

3. Режим работы при периоде квантования, превышающем его значение, определяемое условием (8-41). Работа цифрового регулятора в этом случае не имеет аналога среди непрерывных регуляторов. При расчете

битимальных параметров настройки можно руководствоваться рекомендациями, изложенными в § 8-4.

Иначе говоря, в системах регулирования с цифровыми регуляторами могут существовать два вида добавочных ошибок регулирования: ошибка, обусловленная отклонением динамических характеристик регулятора от расчетных [отличие оператора  $W_p^{dc}(p)$  от  $W_p(p)$ ], и ошибка, обусловленная квантованием сигналов.

В первом режиме обе эти добавочные ошибки отсутствуют, во втором появляется первая из указанных добавочных ошибок, а в третьем режиме появляется также и добавочная ошибка квантования.

Рассмотренный выше подход к синтезу цифровых регуляторов исходил из основной предпосылки о нежелательности появления пульсаций квантования, следствием чего явилось стремление выбрать структуру и параметры вычислительного устройства цифровых регуляторов так, чтобы регулятор в целом осуществлял регулирование подобно некоторому заданному непрерывному регулятору. В литературе по системам с цифровыми регуляторами, как правило, большое внимание уделяется возможностям реализации в таких системах некоторых специфических законов регулирования, в частности законам регулирования, позволяющим реализовать в системе процессы конечной длительности [Л. 27, 29 и др.], когда на ее вход подается воздействие заданного вида.

При этом обычно считается, что возможность достижения конечного времени установления является характерной и ценной особенностью дискретных систем.

В этой связи следует прежде всего заметить, что возможность получения процессов с конечным временем установления вовсе не является специфичным свойством дискретных систем — такие процессы в принципе могут быть реализованы и в системах с непрерывными регуляторами. Потребуем, например, чтобы процесс регулирования объекта в виде интегрирующего звена без запаздывания [ $W_p(p) = 1/p$ ] при действии ступенчатого возмущения  $\lambda(t) = 1(t)$  со стороны регулирующего органа оканчивался в течение времени  $T_{\text{пер}}$  и имел вид, указанный на рис. 8-13,а, т. е. менялся в соответствии с формулой

$$y(t) = t \cdot 1(t) - 2 \left( t - \frac{1}{2} T_{\text{пер}} \right) \times \\ \times 1 \left( t - \frac{1}{2} T_{\text{пер}} \right) + (t - T_{\text{пер}}) \cdot 1(t - T_{\text{пер}}).$$

Поскольку спектр  $y(t)$  в этом случае будет определяться выражением

$$y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} e^{-\frac{T_{\text{пер}}}{2} p} + \frac{1}{p^2} e^{-T_{\text{пер}} p},$$

частотная характеристика замкнутой системы регулирования должна определяться формулой

$$\Phi_{\lambda y}(p) = \frac{1}{p} \left( 1 - 2e^{-\frac{T_{\text{пер}}}{2} p} + e^{-T_{\text{пер}} p} \right).$$

Это позволяет, воспользовавшись формулой (5-15) и учтя, что  $W_{\lambda}(p) = W_{\mu}(p)$ , определить требуемую частотную характеристику

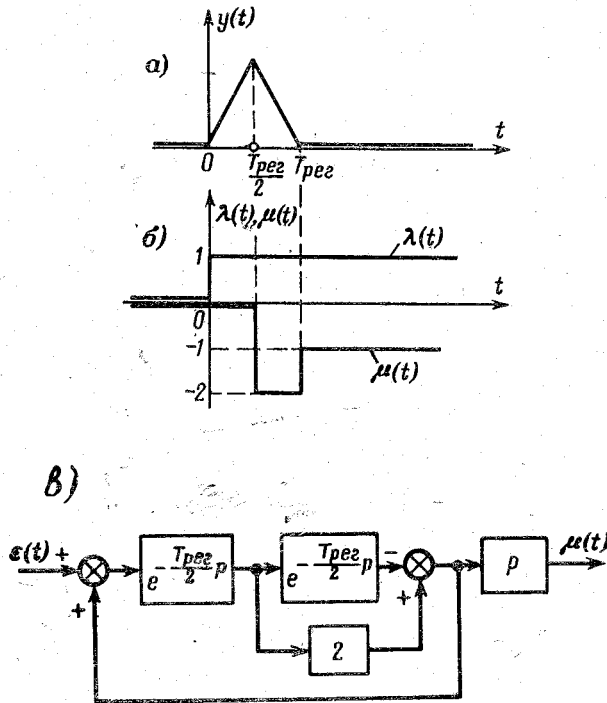


Рис. 8-13.

непрерывного регулятора, реализующего заданный процесс регулирования:

$$\begin{aligned} W_p(p) &= \frac{W_{\mu}(p) - \Phi_{\lambda y}(p)}{W_{\mu}(p) \Phi_{\lambda y}(p)} = \\ &= p \frac{2e^{-\frac{T_{\text{пер}}}{2} p} - e^{-T_{\text{пер}} p}}{1 - 2e^{-\frac{T_{\text{пер}}}{2} p} + e^{-T_{\text{пер}} p}}. \end{aligned}$$

График перемещения регулирующего органа иллюстрирует рис. 8-13,б, а возможная структурная схема регулятора, состоящего из двух запаздывающих, дифференцирующего и безынерционного элементов, приведена на рис. 8-13,в.

При этом важно подчеркнуть, что в непрерывных системах регулирования минимально достижимая длительность существования отклонения регулируемой величины в принципе зависит лишь от запаздывания в регулирующем канале объекта (в одноконтурных схемах регулирования она не может быть сделана меньше этого запаздывания). Если запаздывание в объекте отсутствует, длительность процесса регулирования принципиально может быть сделана сколь угодно малой. Иная картина наблюдается в системах с дискретными регуляторами. Здесь минимально достижимая длительность процесса регулирования (даже при отсутствии запаздывания в объекте и при пренебрежении соображениями грубости системы к вариациям параметров и требований к отсутствию пульсаций квантования) не может быть сделана меньше величины периода квантования  $T$ , оно будет меняться так, как будто никакого регулирования нет. Лишь после очередного замыкания импульсного модулятора регулятор начинает воздействовать на объект для ликвидации этого отклонения.

Заметим попутно, что по этой причине в системах с цифровыми регуляторами невозможно достичь инвариантности регулируемой величины даже по отношению к контролируемым возмущениям (см. § 9-4).

К этому следует добавить, что синтез систем с конечным временем установления осуществляется для некоторого заранее заданного детерминированного возмущения. Анализ ряда систем регулирования с конечным временем установления при случайных воздействиях [Л. 32] свидетельствует о том, что среднеквадратичная ошибка регулирования в таких системах, как правило, оказывается большей, чем в системах с обычными типовыми законами регулирования. Поэтому при регулировании промышленных объектов целесообразность использования критерия конечного времени установления в каждом конкретном случае нуждается в специальном обосновании.

Довольно широкое распространение получило также мнение, что введение квантования способствует улучшению динамики регулирования объектов с большим запаздыванием [Л. 33, 34]. Это мнение по существу базируется на обнаруженной в отдельных системах регулирования с дискретными регуляторами тенденции к увеличению допустимого значения коэффициента передачи разомкнутого контура, при превышении которого система теряет устойчивость с ростом периода квантования. Проведенные более детальные исследования поведения этих систем при случайных возмущениях [Л. 35] показали однако, что величина критического коэффициента передачи в системах с дискретными регуляторами не может служить показателем динамической точности, так как она не учитывает появления добавочной ошибки, обусловленной пульсациями регулируемой величины из-за квантования сигналов.



## 8-8. Системы регулирования с импульсными регуляторами

В практике автоматизации производственных процессов довольно широкое применение получили импульсные аналоговые регуляторы, которые и получают информацию о регулируемой величине в виде последовательности равноотстоящих импульсов конечной длительности. Интенсивность каждого импульса определяется величиной отклонения регулируемой величины в момент его посылки. Целесообразность применения импульсного регулирования обычно определяется теми или иными техническими или экономическими соображениями. Первоначально появление импульсного регулирования было обусловлено возможностью получения с помощью импульсных устройств простых усилителей электрических сигналов (импульсный элемент в таких регуляторах выполнялся в виде механического устройства, получившего название падающей дужки). В настоящее время применение импульсного регулирования преследует другие цели. Прежде всего оно позволяет уплотнить каналы передачи информации и использовать один регулятор для регулирования целого ряда величин путем последовательного подключения его к разным каналам. Кроме того, измерение некоторых регулируемых величин (например, химического состава) зачастую удается осуществлять лишь дискретными способами.

Обычно при регулировании промышленных объектов используются прямоугольные импульсы, интенсивность которых может меняться либо изменением амплитуды  $A_{\text{и}}$  при неизменной их длительности  $\tau_{\text{и}}$ , либо изменением длительности при неизменной амплитуде. Модуляция первого вида обычно называется амплитудно-импульсной, второго — широтно-импульсной.

Амплитудно-импульсная модуляция может быть определена следующей формулой:

$$A_{\text{и}}(kT) = k_a \varepsilon(kT), \quad (8-75)$$

где  $A_{\text{и}}(kT)$  — амплитуда импульса, посылаемого в момент времени  $kT$ ;  $\varepsilon(kT)$  — значение сигнала на входе в амплитудно-импульсный модулятор в момент начала посылки импульса  $kT$ ;  $k_a$  — постоянный коэффициент, называемый коэффициентом амплитудной модуляции.

Преобразование сигналов в широтно-импульсном модуляторе может быть определено формулой

$$\tau_{\text{и}}(kT) = k\varepsilon(kT), \quad (8-76)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент, называемый коэффициентом широтной модуляции.

Импульсный элемент, осуществляющий амплитудную модуляцию импульсов, обычно работает совместно с исполнительным двигателем пропорциональной скорости. Характер процессов на входе импульсного элемента и выходе исполнительного двигателя иллюстрирует рис. 8-14.

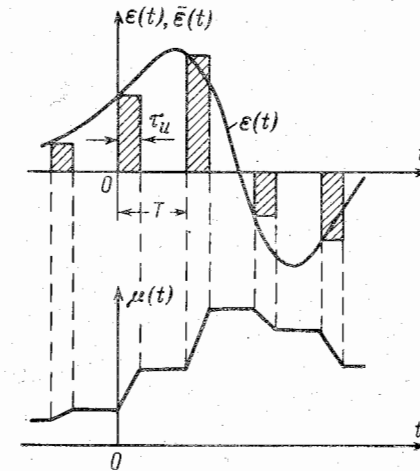


Рис. 8-14.

Здесь при изменении сигнала на входе импульсного элемента  $\varepsilon(t)$  последний вырабатывает последовательность равноотстоящих импульсов  $\bar{\varepsilon}(t)$  постоянной длительности  $\tau_{\text{и}}$ , амплитуда которых зависит от сигнала в момент начала посылки. Исполнительный двигатель включается лишь на время посылки импульсов, причем он перемещает регулируемый орган с тем большей скоростью, чем больше амплитуда импульса.

Импульсный элемент, осуществляющий широтную модуляцию, работает с исполнительными двигателями постоянной скорости (например, с трехфазными асинхронными электродвигателями). Характер процессов в регуляторе с широтно-импульсной модуляцией иллюстрирует

рис. 8-15. Здесь амплитуда импульсов остается неизменной, однако с увеличением сигнала на входе импульсного элемента увеличивается длительность импульса и двигатель остается включенным на большее время. Соответственно, хотя исполнительный двигатель и имеет посто-

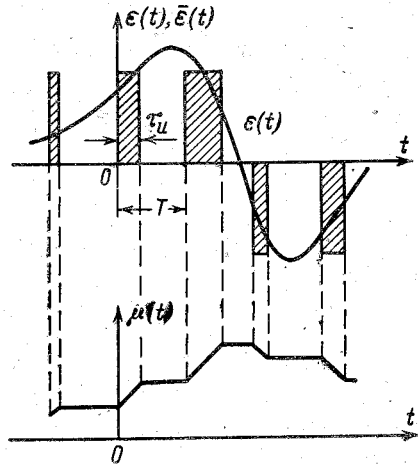


Рис. 8-15.

янную скорость, он перемещает регулирующий орган со средней скоростью тем большей чем больше величина сигнала на входе импульсного модулятора. Следует обратить внимание на подобие работы регулятора с широтно-импульсной модуляцией и релейного регулятора с обратной связью в пульсирующем режиме (см. § 6-3). В обоих случаях для перемещения регулирующего органа используется исполнительный двигатель с постоянной

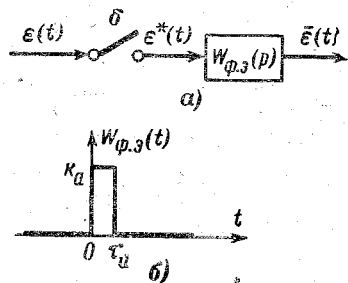


Рис. 8-16.

скоростью, причем изменение средней скорости перемещения регулирующего органа достигается в обоих случаях за счет перераспределения соотношения между длительностью посылаемых импульсов и паузами между ними. Однако рассматриваемый здесь регулятор отличается от релейного в том отношении, что момен-

ты посылок импульсов в нем задаются принудительно и интервал между началом посылок двух соседних импульсов постоянен и равен периоду квантования  $T$ .

При анализе импульсных систем удобно заменять реальный импульсный элемент схемой, состоящей из последовательно соединенных дельта-импульсного модулятора (такого же, как был рассмотрен при анализе систем с цифровыми регуляторами) и соответствующим образом подобранного формирующего элемента (рис. 8-16,а). Возможность такой замены определяется тем обстоятельством, что, хотя импульсы здесь имеют конечную длительность, величина каждого из них отражает лишь мгновенные значения входа в моменты посылок.

Весовая характеристика формирующего элемента для амплитудно-импульсного модулятора должна совпадать с импульсом, вырабатываемым реальным модулятором при единичном сигнале на его входе, т. е. должна иметь вид, указанный на рис. 8-16,б:

$$W_{\phi,\delta}(t) = \begin{cases} k_a, & 0 < t < \tau_u; \\ 0, & t < 0, t > \tau_u. \end{cases} \quad (8-77)$$

Применяя к этой формуле преобразование Фурье, получаем следующую формулу для частотной характеристики формирующего элемента:

$$W_{\phi,\delta}(p) = k_a \frac{1 - e^{-\tau_u p}}{p}. \quad (8-78)$$

Структурная схема импульсного регулятора приведена на рис. 8-17,а. Она состоит из импульсного модуля-

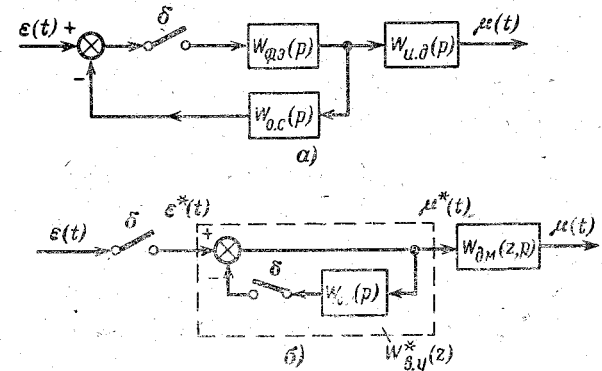


Рис. 8-17.

тора (который на приведенной схеме показан уже в виде последовательного соединения дельта-импульсного модулятора и формирующего элемента) и исполнительного двигателя с пропорциональной скоростью перемещения регулирующего органа [представляющего собой поэтому интегрирующее звено с характеристикой

$$W_{и.д}(p) = \frac{k_{и.д}}{p}].$$

Кроме того, для получения желаемого закона регулирования в регулятор могут быть введены соответствующие корректирующие устройства. На рис. 8-17,а корректирующее устройство выполнено в виде аналоговой отрицательной обратной связи с оператором  $W_{о.с}(p)$ .

После очевидных преобразований рассмотренная схема может быть приведена к эквивалентному виду (рис. 8-17,б), аналогичному эквивалентной схеме для цифрового регулятора (см. рис. 8-11,а). Оператор демодулятора здесь определяется формулой

$$W_{дм}(p) = W_{ф.з}(p) W_{и.д}(p), \quad (8-79)$$

а оператор вычислительного устройства

$$W_{в.у}^*(z) = \frac{1}{1 + W_{о.с}^*(z)}, \quad (8-80)$$

где  $W_{о.с}^*(z)$  — оператор обратной связи, реализованной с помощью аналогового фильтра с оператором  $W(p) = W_{ф.з} W_{о.с}(p)$  и дельта-импульсного модулятора на его выходе.

Таким образом, если в цифровом регуляторе для изменения оператора  $W_{в.у}^*(z)$  требуется изменить алгоритм работы цифрового вычислительного устройства, то в рассматриваемом аналоговом импульсном регуляторе для этого достаточно соответствующим образом изменить динамические характеристики аналоговой обратной связи. Выбрав соответствующим образом  $W_{о.с}(p)$ , можно добиться того, что работа импульсного регулятора будет в динамическом отношении идентичной работе того или иного цифрового регулятора.

Остается поэтому неизменным и порядок расчета оптимальных параметров настройки импульсных регуляторов с амплитудной модуляцией. В частности, при достаточно малом периоде квантования  $T \leq \pi/\omega_{с.макс}$  дельта-импульсный модулятор на рис. 8-17 может быть за-

менен безынерционным элементом с коэффициентом передачи  $1/T$ , так что в целом рассматриваемый импульсный регулятор будет вести себя как непрерывный с оператором:

$$W_p^{дс}(p) = \frac{\frac{1}{T} W_{ф.з}(p) W_{и.д}(p)}{1 + \frac{1}{T} W_{ф.з}(p) W_{о.с}(p)}. \quad (8-81)$$

При  $T \rightarrow 0$

$$W_p^{дс}(p) = \frac{k_a \frac{\tau_H}{T} W_{и.д}(p)}{1 + k_a \frac{\tau_H}{T} W_{о.с}(p)}, \quad (8-82)$$

так как всегда  $\tau_H \leq T$ .

В простейшем и наиболее распространенном на практике случае, когда в регуляторе отсутствуют корректирующие элементы, оператор регулятора при  $T < \pi/\omega_{с.макс}$  принимает следующий вид:

$$W_p^{дс}(p) = \frac{1}{T} W_{ф.з}(p) W_{и.д}(p) \quad (8-83)$$

или учитывая (8-78),

$$W_p^{дс}(p) = W_p(p) \frac{1 - e^{-\tau_H p}}{\tau_H p}, \quad (8-84)$$

где  $W_p(p) = k_n/p$  — оператор непрерывного И-регулятора. Как видим, такой регулятор приближенно реализует И-закон регулирования, однако в отличие от цифрового регулятора с вычислительным устройством (8-48) здесь имеет место искажение этого закона, обусловленное конечной длительностью импульсов  $\tau_H$ . Это ухудшает свойства регулятора, так как в контур регулирования вносится дополнительное транспортное запаздывание, равное половине длительности импульсов.

В то же время при  $T < \pi/\omega_{с.макс}$  величина периода квантования практически не влияет на качество работы системы регулирования.

В соответствии со сказанным выбор оптимальных значений трех параметров настройки регулятора с оператором (8-84): коэффициента амплитудной модуляции  $k_a$ , периода квантования  $T$  и длительности импульсов  $\tau_H$  — можно производить в такой последовательности:

1) по амплитудно-фазовой характеристике объекта  $W_\mu(j\omega)$  обычным порядком строится семейство амплитудно-фазовых характеристик разомкнутой системы для ряда выбранных значений  $\tau_H$  и единичного значения коэффициента передачи  $k_n$ ;

б) построением окружностей, касающихся этих характеристик, определяются допустимые по условиям требуемого запаса устойчивости значения коэффициента передачи  $k_n$  для каждого из выбран-

ных  $\tau_n$  (так как запас устойчивости системы не зависит от  $T$ , границами области в плоскости параметров настройки  $T$  и  $k_n$  будут прямые, параллельные оси  $T$ );

3) из уравнения (8-67), которое для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\frac{k_n T_{\text{нр}}}{\pi} \frac{\sin \frac{\tau_n}{T_{\text{нр}}} \frac{\pi}{2}}{\frac{\tau_n}{T_{\text{нр}}} \frac{\pi}{2}} \left| W_{\mu} \left( j \frac{\pi}{T_{\text{нр}}} \right) \right| = \Delta, \quad (8-85)$$

определяется граница области допустимых значений параметров по условию отсутствия пульсации квантования. Тем самым в плоскости параметров  $T$  и  $k_n$  выделяются для каждого из выбранных  $\tau_n$  области допустимых параметров по обоим ограничениям.

Для любой заданной комбинации значений  $\tau_n$  и  $T$  в найденной таким образом области может быть определена наибольшая величина  $k_n$ , а затем величина коэффициента амплитудной модуляции

$$k_a = \frac{T k_n}{k_{н.л} \tau_n}. \quad (8-86)$$

В основу выбора оптимальных параметров настройки может быть также положено требование, чтобы процесс регулирования в рассматриваемой импульсной системе был практически не хуже, чем процесс в соответствующей непрерывной системе, получающейся из нее при  $T=0$ . Соответствующий критерий был уже ранее сформулирован в виде условий (8-68) и (8-73). В рассматриваемом здесь случае введение квантования сигналов при достаточно малых периодах эквивалентно введению в контур регулирования запаздывания. Поэтому вместо двух неравенств (8-73) здесь можно ограничиться одним

$$\frac{\tau_n}{2} \omega_{\text{рез}} \leq \delta_{\phi}, \quad (8-87)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  — резонансная частота системы с непрерывным регулятором (6-13) при ее оптимальной настройке ( $k_n = k_{н.опт}$ ). После выбора  $\tau_n$ , удовлетворяющего условию (8-87), можно из уравнения (8-68) найти предельно допустимую величину периода квантования  $T_{\text{пред}}$ , после чего по формуле (8-86) легко находится величина коэффициента амплитудной модуляции  $k_a$ . Пример расчета приведен в приложении.

### 8-9. Особенности расчета систем регулирования с широтной модуляцией импульсов

При подаче дельта-импульса площади  $\varepsilon(kT)$  на вход формирующего элемента (рис. 8-16,а) широтно-импульсного модулятора на его выходе должен возникнуть прямоугольный импульс постоянной амплитуды  $B$  и длительности  $\varepsilon(kT)$ . Поэтому весовая функция формирующего

элемента должна представлять собой прямоугольный импульс длительности  $\varepsilon(kT)$  и амплитуды  $\frac{B}{\varepsilon(kT)}$ :

$$W_{\phi.э.к}(t) = \begin{cases} \frac{B}{\varepsilon(kT)}, & 0 < t < \varepsilon(kT); \\ 0, & t < 0, t > \varepsilon(kT), \end{cases} \quad (8-88)$$

т. е. его частотная характеристика должна определяться формулой

$$W_{\phi.э.к}(p) = \frac{B}{\varepsilon(kT)} \frac{1 - e^{-\varepsilon(kT)p}}{p}. \quad (8-89)$$

Как видим, коэффициенты этой характеристики  $B/\varepsilon(kT)$  и  $\varepsilon(kT)$  зависят от величины входного воздействия. Они остаются постоянными лишь в пределах одного периода квантования, а в момент посылки очередного импульса они скачком меняются в соответствии с новой величиной входного сигнала. Таким образом, регуляторы с широтной модуляцией являются нелинейными регуляторами. Это требует для их исследования в общем случае применения соответствующих специально разработанных методов. Имеются, однако, некоторые частные, но весьма важные с практической точки зрения случаи, когда рассматриваемая нелинейная система может быть без существенного ущерба для точности считаться линейной. Напомним, что ширина спектра сигнала на входе дельта-импульсного модулятора в нормальных условиях функционирования системы регулирования не может превышать полосы пропускания системы в разомкнутом состоянии  $\omega_{с.макс}$ ; соответственно динамические особенности формирующего элемента имеет смысл рассматривать лишь в пределах этой полосы частот. Графики модуля и фазы характеристики (8-89) для нескольких уровней входного сигнала  $\varepsilon(kT)$  приведены соответственно на рис. 8-18,а и б. Как видно из рис. 8-18, при достаточно малой полосе спектра воздействия  $\omega_{с.макс}$  разница между частотными характеристиками формирующего элемента при различных уровнях входного сигнала оказывается небольшой (на рисунке эта область заштрихована). Это обстоятельство позволяет все возможные характеристики формирующего звена для раз-

личных уровней входного сигнала заменить одной, соответствующей наибольшему уровню  $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{макс}}$ , т. е. считать, что частотная характеристика формирующего элемента может быть записана следующим образом:

$$W_{\text{ф.э}}(p) = \frac{B}{\varepsilon_{\text{макс}}} \frac{1 - e^{-\varepsilon_{\text{макс}} p}}{p}. \quad (8-90)$$

Как легко видеть, указанная замена по существу соответствует замене действительного широтно-импульсно-

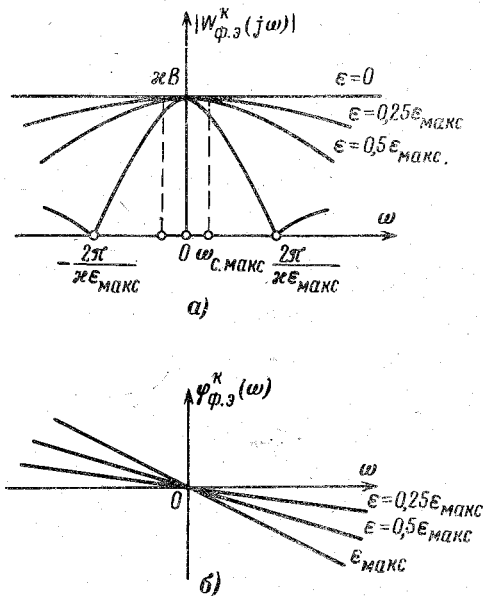


Рис. 8-18.

го модулятора амплитудно-импульсным, генерирующим импульсы постоянной длительности, равной длительности широтно-модулированного импульса при максимальном уровне входного сигнала.

Поскольку характеристики эквивалентного амплитудного модулятора совпадают с характеристиками широтного модулятора лишь при максимальном уровне входного сигнала, наибольшее расхождение между обоими модуляторами будет иметь место при низких уровнях входного сигнала  $\varepsilon(t) \approx 0$  (в этом случае характеристика

амплитудного модулятора на рис. 8-18 сохраняет положение, соответствующее  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{макс}}$ , а характеристика широтного модулятора становится параллельной оси абсцисс  $\varepsilon = 0$ ). Максимальное расхождение между этими характеристиками имеет место при частоте  $\omega_{с.макс}$  и равно по модулю:

$$\Delta = B_{\kappa} - B_{\kappa} \frac{\sin \frac{\kappa \varepsilon_{\text{макс}}}{2} \omega_{с.макс}}{\frac{\kappa \varepsilon_{\text{макс}}}{2} \omega_{с.макс}}. \quad (8-91)$$

Задавшись, например,  $\Delta/B_{\kappa} = 0,05$ , получим:

$$\tau_{н.макс} = \kappa \varepsilon_{\text{макс}} \leq \frac{1,1}{\omega_{с.макс}} \quad (8-92)$$

или, принимая во внимание связь между  $\omega_{с.макс}$  и максимально допустимым по условию отсутствия пульсаций квантования периодом квантования  $T_{\text{пр}} = \pi/\omega_{с.макс}$ ,

$$\tau_{н.макс} \leq \frac{1,1}{\pi} T_{\text{пр}} \approx 0,3 T_{\text{пр}}, \quad (8-93)$$

т. е. для того чтобы широтный модулятор мог рассматриваться как амплитудный с длительностью импульсов  $\tau_{н.макс} = \kappa \varepsilon_{\text{макс}}$  и коэффициентом амплитудной модуляции  $k_a = B/\varepsilon_{\text{макс}}$ , достаточно, чтобы максимальная длительность импульса, которую сможет генерировать широтный модулятор в процессе функционирования системы, не превышала трети максимально допустимого периода квантования.

Практически сформулированное правило выполняется почти всегда (тем более что действительная величина периода квантования обычно выбирается существенно меньше величины  $T_{\text{пр}}$ ).

После указанной замены модуляторов расчет системы регулирования производится методами, изложенными в предыдущем параграфе, с добавлением лишь процедуры проверки выполнения условия (8-92) или (8-93).

Остановимся поэтому лишь на последовательности расчета регулятора с широтной модуляцией без корректирующих устройств.

При условии, что  $T < \pi/\omega_{с.макс}$ , частотная характеристика регулятора принимает следующий вид:

$$W_{\text{р}}^{\text{дс}}(p) = \frac{1}{T} k_a k_{н.п} \frac{1 - e^{-\tau_{н.макс} p}}{p^2}. \quad (8-94)$$

Имея в виду, что  $Bk_{и.д} = S$  — скорость перемещения регулирующего органа во время посылки импульса, последнюю формулу удобно представить следующим образом:

$$W_p^{дс}(p) = W_p(p) \frac{1 - e^{-\tau_{и.макс} p}}{\tau_{и.макс} p}, \quad (8-95)$$

где  $W_p(p) = k_{и}/p$  — оператор непрерывного И-регулятора с коэффициентом передачи

$$k_{и} = \frac{S \tau_{и.макс}}{\epsilon_{макс} T}. \quad (8-96)$$

Дальнейший расчет можно производить в порядке, изложенном в предыдущем параграфе применительно к системе с амплитудной модуляцией, но с учетом ограничения (8-93), а также того обстоятельства, что наилучшим случаем с точки зрения определения полосы пропускания системы  $\omega_{с.макс}$  является случай малого уровня входного сигнала, когда формирующее звено не осуществляет никакой фильтрации сигнала (характеристика для  $\epsilon = 0$  на рис. 8-18). В силу последнего замечания уравнение для определения  $T_{пр}$  (8-85) в рассматриваемом случае должно выбираться в виде

$$\frac{k_{и} T_{пр}}{\pi} \left| W_{\mu} \left( j \frac{\pi}{T_{пр}} \right) \right| = \Delta. \quad (8-97)$$

После определения границ области в пространстве трех параметров настройки регулятора  $T$ ,  $\tau_{и}$  и  $k_{и}$  (практически эта область строится на плоскости параметров  $T$  и  $k_{и}$  в виде семейства графиков для различных  $\tau_{и}$ ), в которой удовлетворяются требования достаточного запаса устойчивости и отсутствия пульсации квантования регулируемой величины, в этой области находится подобласть, где, кроме того, удовлетворяется условие (8-93). В этой подобласти выбирается линия, соответствующая некоторому подходящему значению длительности импульсов  $\tau_{и.макс}$ , что позволяет определить также и оптимальное значение коэффициента передачи регулятора  $k_{и}$ . Знание этих параметров позволяет оценить максимальное отклонение регулируемой величины  $\epsilon_{макс}$  при наиболее тяжелом возмущении, так как система с такими параметрами будет функционировать практически так же, как и непрерывная система с И-регулятором с тем же коэффициентом передачи  $k_{и}$ , и с добавочным запаздыванием, равным  $\tau_{и.макс}/2$ . После определения  $\epsilon_{макс}$  можно найти и требуемый коэффициент широтной модуляции  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\tau_{и.макс}}{\epsilon_{макс}}. \quad (8-98)$$

Граница области допустимых параметров для выбранного  $\tau_{и.макс}$  определяет наибольшее возможное значение периода квантования  $T_{пр}$  (минимальная величина этого периода, очевидно, равна  $\tau_{и.макс}$ ). Это позволяет выбрать границы возможных значений скорости исполнительного двигателя по формуле

$$k_{и} \epsilon_{макс} < S < \frac{T_{пр}}{\tau_{и.макс}} k_{и} \epsilon_{макс}. \quad (8-99)$$

Остановившись на технически наиболее приемлемом значении  $S$  из этого диапазона, можно затем определить период квантования:

$$T = \frac{\tau_{и.макс} S}{k_{и} \epsilon_{макс}}.$$

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ДОБАВОЧНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ КАНАЛАМИ

#### 9-1. Способы повышения предельной динамической точности автоматических систем регулирования

Среднеквадратичная ошибка регулирования, определяемая формулой (5-26), является минимально возможной в рассматривавшейся выше одноконтурной системе (см. рис. 5-6,б). Дальнейшее повышение динамической точности регулирования не может быть достигнуто путем улучшения алгоритма функционирования регулятора. Для достижения этой цели приходится принимать меры к тому, чтобы регулятор получал более своевременную информацию о текущем состоянии объекта.

При неизменных динамических свойствах объекта и статистических характеристиках возмущений улучшение качества получаемой регулятором рабочей информации может быть достигнуто путем введения в него более своевременных сведений о текущем изменении возмущающих воздействий. Практически это возможно в следующих случаях:

1) когда в составе возмущающих воздействий имеется детерминированная составляющая (например, при регулировании режима работы электростанций, когда наряду со случайными возмущениями нагрузки имеет место изменение нагрузки по диспетчерскому графику);

2) когда имеется возможность контроля некоторых вспомогательных координат объекта, которые отзываются на возмущения с меньшим запаздыванием, чем основная регулируемая величина (в частности, этими координатами могут быть и сами возмущения, если они поддаются контролю).

В первом случае эффект действия детерминированной составляющей возмущения может быть полностью компенсирован введением заранее рассчитанного воздействия, которое с необходимым упреждением может быть подано на вход регулятора совместно с задающим воздействием.

Во втором случае схема регулирования (см. рис. 5-6,б) должна быть дополнена добавочными каналами передачи информации.

Пример системы регулирования, приведенный на рис. 9-1,а, иллюстрирует второй случай. Здесь на вход регулятора подается не только основная регулируемая величина  $y(t)$ , но также и информация об изменении

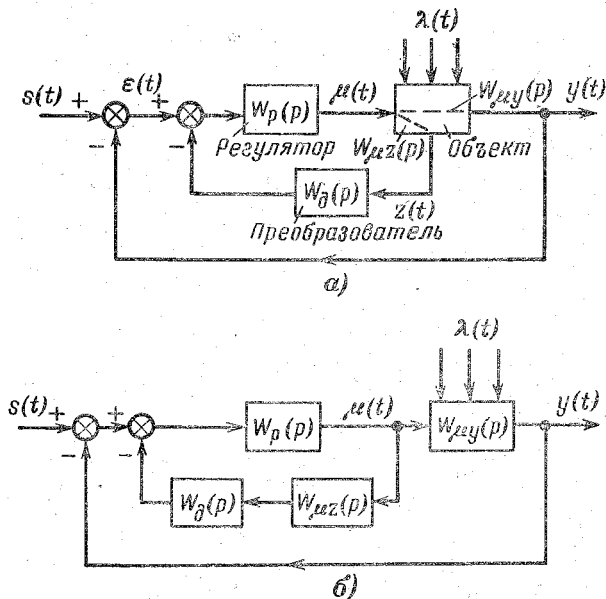


Рис. 9-1.

некоторой вспомогательной величины  $z(t)$ . Соответственно на поведение этой системы влияет как оператор регулятора  $W_p(p)$ , так и оператор добавочного преобразователя  $W_d(p)$ , определяющий участие в формировании регулирующего воздействия добавочной величины  $z(t)$ .

Схема на рис. 9-1,а в отличие от ранее рассматривавшейся схемы на рис. 5-6,б в общем случае уже имеет не один, а два контура, по которым циркулирует информация, и может быть названа двухконтурной. В этой связи необходимо подчеркнуть, что число контуров, из которых состоит система, не поддается четкому определению, если не ввести определенных добавочных правил группировки звеньев системы в соответствующие подси-

стемы (как это сделано на рис. 9-1,а, где все динамические звенья системы объединены в две подсистемы, имеющие определенные функциональные признаки — регулируемый объект и автоматический регулятор). Действительно, ранее рассматривавшуюся схему автоматического регулирования (рис. 5-8,б) логично считать одноконтурной. В то же время если в ней используется регулятор с внутренней корректирующей обратной связью (например, электронный регулятор, рассмотренный в § 6-3) и если не принять указанных правил группировки звеньев, то такая система с равным правом может считаться и двухконтурной. Более того, любую линейную динамическую систему  $n$ -го порядка путем эквивалентных структурных преобразований можно представить состоящей из безынерционных и  $n$ -интегрирующих звеньев, образующих соответствующее число замкнутых контуров передачи воздействий (на этом свойстве, как известно, основывается возможность применения аналоговых вычислительных машин, содержащих лишь интеграторы и усилители, для моделирования сложных динамических систем).

Схему системы автоматического регулирования, отражающую информационное взаимодействие между объектом и регулятором, будем называть информационной; соответственно элемент или контур системы будет называться информационным, если его введение в схему меняет предельно достижимую точность регулирования; в противном случае элемент системы должен считаться простым корректирующим. Под термином «многоконтурная система» будет пониматься система, состоящая из нескольких информационных контуров; число корректирующих контуров при этом не будет приниматься во внимание.

Для определения того, является ли новый контур в линейной системе регулирования информационным или просто корректирующим, можно руководствоваться следующими соображениями.

Пусть в исходную одноконтурную систему (см. рис. 5-7,а), в которой эффект влияния всех возмущений учтен в виде аддитивного возмущения  $v(t)$ , добавлен новый контур, в результате чего получена новая структурная схема системы. Путем эквивалентных структурных преобразований новая схема может быть вновь приведена к виду рис. 5-7,а. Если в этой новой эквивалентной

одноконтурной схеме свойства приведенного к выходу объекта возмущения  $v(t)$  окажутся отличными от первоначальных, то новый контур является информационным и его введение может увеличить предельную динамическую точность системы. Если же в найденной эквивалентной одноконтурной схеме претерпит изменение лишь динамические характеристики системы, а характеристики возмущения  $v(t)$  останутся прежними, новый контур является лишь корректирующим.

В частности, приведенная на рис. 9-1,а двухконтурная информационная схема превращается в одноконтурную информационную схему в случае, когда  $z(t)$  перестает быть статистически связанной через объект с основной регулируемой величиной  $y(t)$  (т. е. когда отсутствуют общие возмущения, действующие одновременно

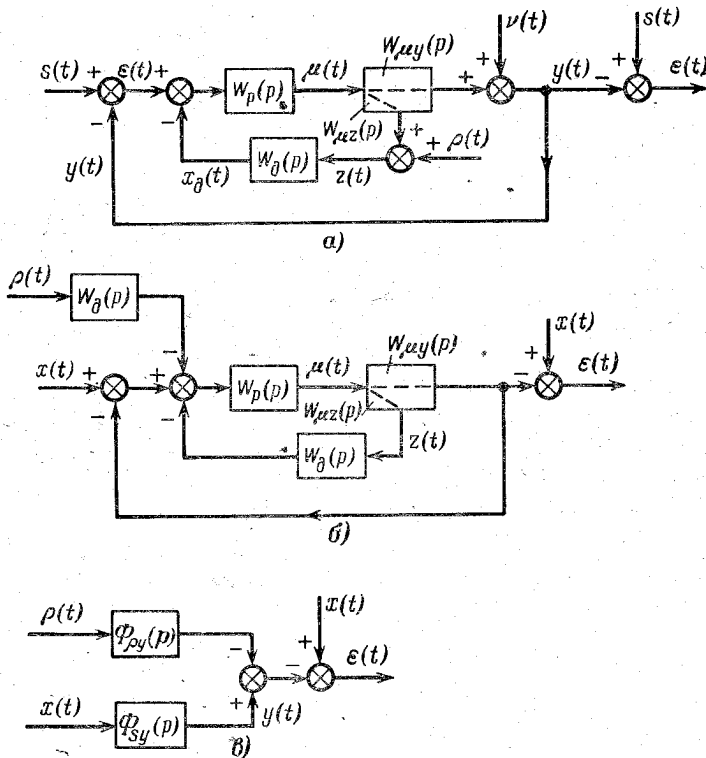


Рис. 9-2.

на обе эти величины). Так, будет, например, тогда, когда вспомогательную величину  $z(t)$  попытаться воспроизвести на модели объекта, моделирующей канал с частотной характеристикой  $W_{\mu z}(p)$  (рис. 9-1,б). Эта модель, очевидно, выполняет здесь функции простого корректирующего контура, добавочно подключаемого к регулятору в одноконтурной информационной схеме (рис. 5-6). Следует отметить, что введение добавочного канала информации необязательно должно приводить к появлению добавочного замкнутого контура передачи воздействий. Это имеет место тогда, когда вспомогательная величина  $z(t)$  не зависит от регулирующего воздействия  $\mu(t)$  [т. е. когда  $W_{\mu z}(p) = 0$ ].

Естественно, что на практике при использовании схем с добавочными воздействиями могут применяться различные варианты схемы, приведенной на рис. 9-1,а.

Расчетная схема системы регулирования с добавочным воздействием, учитывающая все без исключения возмущения  $\lambda(t)$ , действующие на регулируемый объект, а также изменение заданного значения регулируемой величины  $s(t)$ , приведена на рис. 9-2,а. Эффект действия всех возмущений в этой схеме учитывается двумя эквивалентными возмущениями  $v(t)$  и  $\rho(t)$ , наложенными непосредственно на регулируемые величины  $y(t)$  и  $z(t)$ . Эти возмущения, очевидно, будут доступными для непосредственного контроля, если прекратить регулирование объекта, т. е. при  $\mu(t) = 0$ . Наблюдаемые в этом случае реализации регулируемых величин  $y(t)$  и  $z(t)$  будут совпадать с реализациями  $v(t)$  и  $\rho(t)$ .

В свою очередь схема на рис. 9-2,а может быть путем очевидных преобразований представлена в виде, указанном на рис. 9-2,б, а затем на рис. 9-2,в, где обозначено:

$$x(t) = s(t) - v(t); \quad (9-1)$$

$$\Phi_{sy}(p) = \frac{W_p(p) W_{\mu y}(p)}{1 + W_p(p) W_{\mu z}(p) W_{\mu}(p) + W_p(p) W_{\mu y}(p)}; \quad (9-2)$$

$$\Phi_{py}(p) = W_{\mu}(p) \Phi_{sy}(p). \quad (9-3)$$

Таким образом, целью синтеза оптимальной системы в рассматриваемом случае является определение двух оптимальных весовых характеристик  $\Phi_{sy}(t)$  и  $\Phi_{py}(t)$ , удовлетворяющих условию физической реализуемости

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{sy}(t) &= 0; \quad t < \tau_{\mu y}; \\ \Phi_{py}(t) &= 0; \quad t < \tau_{\mu z}; \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

где  $\tau_{\mu y}$ ,  $\tau_{\mu z}$  — значения времени запаздывания в соответствующих регулируемых каналах объекта.

Решение этой задачи может быть получено в результате обобщения метода синтеза оптимальной системы, рассмотренного в § 5-6, на случай системы с двумя входами.



Ошибка системы на рис. 9-2,в

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\xi) x(t-\xi) d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\xi) \rho(t-\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (9-5)$$

Возводя (9-5) в квадрат

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = \left[ x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\xi) x(t-\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\xi) \rho(t-\xi) d\xi \right] \left[ x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\eta) \times \right. \\ \left. \times x(t-\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\eta) \rho(t-\eta) d\eta \right] \end{aligned}$$

и усредняя, получаем выражение для дисперсии ошибки:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_x^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\eta) r_{xx}(\eta) d\eta - \\ - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\eta) r_{pv}(\eta) d\eta + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\xi) \times \\ \times d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\eta) r_{pv}(\eta-\xi) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\xi) d\xi \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\eta) r_{xx}(\xi-\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\xi) \times \\ \times d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py}(\eta) r_{pp}(\xi-\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (9-6)$$

где  $r_{xx}(\tau)$ ,  $r_{pp}(\tau)$  — автокорреляционные функции  $x(t)$  и  $\rho(t)$ ;  $r_{pv}(\tau)$  — взаимная корреляционная функция между  $\rho(t)$  и  $v(t)$ .

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{sy}(t) &= \Phi_{sy \text{ опт}}(t) + \delta a(t); \\ \Phi_{py}(t) &= \Phi_{py \text{ опт}}(t) + \gamma b(t), \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

где  $\delta$  и  $\gamma$  — коэффициенты;  $a(t)$  и  $b(t)$  — произвольные, независимые от  $\Phi_{sy \text{ опт}}(t)$  и  $\Phi_{py \text{ опт}}(t)$  функции времени, удовлетворяющие условиям физической осуществимости;

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= 0; t < \tau_{\mu y}; \\ b(t) &= 0; t < \tau_{\mu y}. \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

После подстановки формул (9-7) в общее выражение (9-6) получим:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon \text{ мин}}^2 - 2\delta A - 2\gamma B + \delta^2 C + \gamma^2 D + 2\delta\gamma E,$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \left\{ r_{xx}(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py \text{ опт}}(\eta) r_{pv}(\eta-\xi) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\eta) r_{xx}(\xi-\eta) d\eta \right\} d\xi; \\ B &= \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \left\{ -r_{pv}(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\eta) r_{pv}(\xi- \right. \\ &\quad \left. - \eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py \text{ опт}}(\eta) r_{pp}(\xi-\eta) d\eta \right\} d\xi; \\ C &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} a(\eta) r_{xx}(\xi-\eta) d\eta; \\ D &= \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} b(\eta) r_{pp}(\xi-\eta) d\eta; \\ E &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} b(\eta) r_{pv}(\eta-\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

Определяемая этой формулой дисперсия ошибки должна быть больше  $\sigma_{\varepsilon \text{ мин}}^2$  при любых  $a(t)$  и  $b(t)$  и любых (в том числе и при сколь угодно малых) значениях  $\delta$  и  $\gamma$ . Но, очевидно, это возможно лишь при выполнении условий:

$$A=0; B=0, \quad (9-10)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py \text{ опт}}(\xi) r_{pv}(\xi-\tau) d\xi + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\xi) r_{xx}(\tau-\xi) d\xi; \\ r_{pv}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\xi) r_{pv}(\tau-\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py \text{ опт}}(\xi) r_{pp}(\tau-\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

причем, так как имеют место соотношения (9-8), достаточно чтобы указанные условия выполнялись лишь при  $\tau > \tau_{\mu y}$ .

Решение системы интегральных уравнений (9-11) дает ответ на поставленную задачу об оптимальном виде характеристик  $\Phi_{sy \text{ опт}}(t)$  и  $\Phi_{py \text{ опт}}(t)$ .

Подставив (9-11) в (9-6), получим формулу для минимальной дисперсии ошибки, которая имеет место при использовании оптимальных весовых характеристик  $\Phi_{sy}(t)$  и  $\Phi_{py}(t)$ :

$$\sigma_{\epsilon \text{ мин}}^2 = \sigma_x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\tau) r_{xx}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py \text{ опт}}(\tau) r_{py}(\tau) d\tau. \quad (9-12)$$

После определения оптимальных  $\Phi_{sy \text{ опт}}(t)$  и  $\Phi_{py \text{ опт}}(t)$  с помощью формул (9-2) и (9-3) могут быть найдены и соответствующие операторы оптимальных регулятора и преобразователя  $W_{p, \text{ опт}}(p)$  и  $W_{d, \text{ опт}}(p)$ .

Полученные результаты могут быть обобщены на случай не одного, а нескольких добавочных воздействий от нескольких вспомогательных регулируемых величин. Можно показать, что ошибка регулирования, когда число добавочных регулируемых величин  $z(t)$  равно  $n$ , определяется формулой

$$\epsilon(t) = x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy}(\xi) x(t-\xi) d\xi + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py_i}(\xi) p_i(t-\xi) d\xi, \quad (9-13)$$

а оптимальные с точки зрения минимума среднеквадратичной ошибки регулирования основной величины  $y(t)$  частотные характеристики регулятора и  $n$  преобразователей определяются решением системы  $(n+1)$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\xi) r_{xx}(\tau-\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py_i \text{ опт}}(\xi) r_{p_i y}(\tau-\xi) d\xi; \\ r_{p_i y}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\xi) r_{p_i y}(\tau-\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py_j \text{ опт}}(\xi) r_{p_i p_j}(\tau-\xi) d\xi \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

Получаемая в этом случае минимальная дисперсия ошибки регулирования находится из формулы

$$\sigma_{\epsilon \text{ мин}}^2 = \sigma_x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{sy \text{ опт}}(\xi) r_{xx}(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{py_i \text{ опт}}(\xi) r_{p_i y}(\xi) d\xi. \quad (9-15)$$

Практически, однако, число вспомогательных регулируемых величин редко оказывается большим одной-двух.

Ценность информации, получаемой регулятором в рассматриваемой схеме, по-прежнему определяется формулой (5-17), в которой  $\sigma_{\epsilon \text{ мин}}^{\text{пр}}$  находится из (9-12) или (9-15). Умножив и разделив выражение под знаком логарифма в этой формуле на величину среднеквадратичной ошибки  $\sigma_{\epsilon \text{ мин}}^y$ , которая имела бы место при регулировании того же объекта лишь по отклонению основной регулируемой величины [без ввода добавочного воздействия от вспомогательной величины  $z(t)$ ], формулу (5-17) можно представить в виде суммы

$$J = J_y + J_z,$$

где  $J_y = -\log(\sigma_{\epsilon \text{ мин}}^y / \sigma_x)$  — ценность информации, заключенной в измерении основной регулируемой величины  $y(t)$ ;  $J_z = -\log(\sigma_{\epsilon \text{ мин}}^{\text{пр}} / \sigma_{\epsilon \text{ мин}}^y)$  — ценность добавочной информации, которую регулятор получает по каналу измерения добавочной регулируемой величины  $z(t)$  или нескольких добавочных величин.

## 9-2. Условия высокой предельной динамической точности систем с добавочными информационными каналами

Для выяснения вопроса о выборе точек измерения добавочных величин, обеспечивающих наибольшую эффективность новых информационных каналов, рассмотрим поведение системы, приведенной на рис. 9-1,а по отношению к произвольному возмущению  $\lambda(t)$ . В этом случае структурная схема системы регулирования может быть преобразована к расчетной схеме, приведенной на рис. 9-3,а, где  $W_{\lambda y}(p)$  — оператор объекта по каналу действия возмущения  $\lambda(t)$  на основную регулируемую величину  $y(t)$ , а

$$\Phi(p) = \frac{W_p(p) W_{\mu y}(p) [W_{\lambda y}(p) + W_n(p) W_{\lambda z}(p)]}{1 + W_p(p) W_n(p) W_{\mu z}(p) + W_p(p) W_{\mu y}(p)}. \quad (9-16)$$

Тем самым задача определения оптимальных характеристик  $W_p(p)$  и  $W_n(p)$  сводится к определению оптимальной характеристики  $\Phi(p)$ , т. е. к обычной задаче синтеза оптимальной системы (см. § 4-11), причем взаимный спектр мощности между входом  $\lambda(t)$  и желаемым выходом  $n(t)$  определяется соотношением

$$G_{\lambda n}(p) = W_{\lambda y}(p) G_{\lambda \lambda}(p), \quad (9-17)$$

где  $G_{\lambda \lambda}(p)$  — спектр мощности рассматриваемого возмущения.

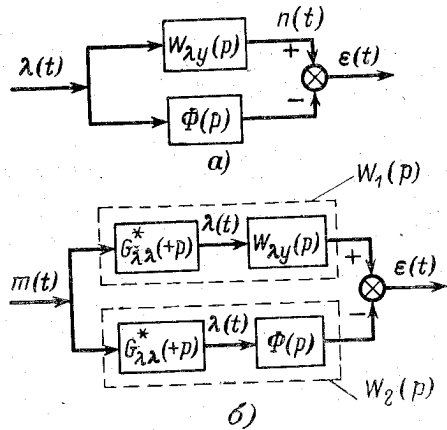


Рис. 9-3.

Однако для большей наглядности получаемых результатов воспользуемся другим способом решения этой задачи. Как уже ранее отмечалось, образование случайного воздействия со спектром мощности  $G_{\lambda \lambda}(p)$  может быть представлено как результат прохождения случайного белого шума через динамический формирующий элемент с частотной характеристикой  $G_{\lambda \lambda}^*(+p)$ , причем  $G_{\lambda \lambda}^*(+p)$  есть сомножитель в выражении для спектра мощности  $\lambda(t)$ , зависящий лишь от  $+p$ . В соответствии с этим расчетная схема на рис. 9-3,а может быть заменена схемой на рис. 9-3,б, на вход которой подается белый шум  $m(t)$ . С другой стороны, пользуясь соотношением (4-77), можно сформулировать задачу минимизации дисперсии ошибки как задачу минимизации интеграла от

квадрата весовой характеристики полученной системы, так как

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\omega_1(t) - \omega_2(t)]^2 dt, \quad (9-18)$$

где  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  — весовые характеристики, соответствующие частотным характеристикам:

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= G_{\lambda \lambda}^*(+p) W_{\lambda y}(p); \\ W_2(p) &= G_{\lambda \lambda}^*(+p) \Phi(p). \end{aligned} \right\} \quad (9-19)$$

Заметим теперь, что характеристика  $\omega_1(t)$  имеет запаздывание, равное  $\tau_{\lambda y}$ , а запаздывание в характеристике  $\omega_2(t)$ , как это следует из выражения (9-16),  $\tau_{\mu y} + \tau_{\lambda z}$ , если  $\tau_{\lambda y} > \tau_{\lambda z}$ , и  $\tau_{\mu y}$ , если  $\tau_{\lambda y} < \tau_{\lambda z}$ .

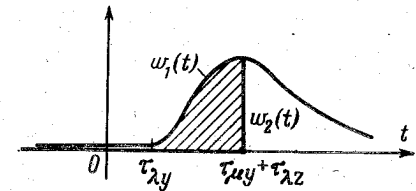


Рис. 9-4.

Пусть график квадрата характеристики  $\omega_1(t)$ , которая, очевидно, не может быть изменена введением добавочных воздействий, имеет вид, указанный на рис. 9-4. Для минимизации дисперсии ошибки регулирования необходимо подобрать характеристику  $\omega_2(t)$  таким образом, чтобы она в наименьшей степени отличалась от  $\omega_1(t)$  по критерию (9-18).

Если запаздывание по каналам действия возмущения удовлетворяет условию  $\tau_{\lambda y} > \tau_{\lambda z}$ , самое лучшее, что можно сделать в этом отношении, — это выбрать  $\omega_1(t)$  так, чтобы при  $t \geq \tau_{\mu y} + \tau_{\lambda z}$ , когда только эта характеристика и может быть отличной от нуля, она совпала с характеристикой  $\omega_1(t)$  (как это показано на рис. 9-4):

$$\omega_{2\text{опт}}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_{\mu y} + \tau_{\lambda z}; \\ \omega_1(t), & t \geq \tau_{\mu y} + \tau_{\lambda z}. \end{cases} \quad (9-20)$$

В этом случае площадь, заключенная между графиками  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$ , примет наименьшее возможное значение (эта площадь на рис. 9-4 заштрихована), что соответствует минимуму дисперсии ошибки регулирования, определяемой формулой

$$\sigma_{\varepsilon \text{ мин}}^2 = \int_{\tau_{\lambda y}}^{\tau_{\mu y} + \tau_{\lambda z}} \omega_1^2(t) dt. \quad (9-21)$$

Заметим, что при отсутствии добавочного воздействия от промежуточной регулируемой величины  $z(t)$  минимальная ошибка регулирования определялась бы формулой

$$\sigma_{\varepsilon \text{ мин}}^2 = \int_{\tau_{\lambda y}}^{\tau_{\mu y} + \tau_{\lambda y}} \omega_1^2(t) dt. \quad (9-22)$$

Это свидетельствует, в частности, о том, что введение нового информационного канала позволяет увеличить предельную эффективность системы лишь при условии, что выбор места отбора новой регулируемой величины  $z(t)$  подчинен условию  $\tau_{\lambda z} < \tau_{\lambda y}$ , т. е. эта регулируемая

величина реагирует на возмущающее воздействие с меньшим запаздыванием, чем основная регулируемая величина  $y(t)$ . Кроме того, далеко не безразличными оказываются динамические свойства канала действия возмущения на основную регулируемую величину. При отсутствии запаздывания в этом канале введение в схему регулирования информации об изменении добавочной величины  $z(t)$  с точки зрения повышения предельной динамической точности регулирования оказывается бесполезным. Напротив, при достаточно большом запаздывании в этом канале, точнее, при выполнении условия

$$\tau_{\mu y} + \tau_{\lambda z} - \tau_{\lambda y} \leq 0, \quad (9-23)$$

введение добавочной регулируемой величины позволяет полностью устранить влияние данного возмущения на основную регулируемую величину, так что при любых изменениях этого возмущающего воздействия отклонения регулируемой величины  $y(t)$  будут отсутствовать. Системы регулирования, обладающие указанным свойством, получили название **инвариантных**.

Рассмотрим несколько частных, но имеющих практически важное значение случаев применения полученных результатов.

### 9-3. Каскадные схемы регулирования

Как уже отмечалось (в § 5-5), в промышленных объектах регулирования наибольшее запаздывание наблюдается чаще всего в регулирующих каналах. Применение в схемах регулирования таких объектов добавочных информационных каналов оказывается наиболее эффективным по отношению к возмущениям, идущим со стороны регулирующего органа, которые действуют на регулируемую величину с наибольшим возможным запаздыванием, равным запаздыванию в регулирующем канале ( $\tau_{\lambda y} = \tau_{\mu y}$ ). Точку отбора добавочной регулируемой величины  $z(t)$  по соображениям наилучшего выполнения условия инвариантности (9-23) по отношению к указанным возмущениям следует выбирать возможно ближе к регулирующему органу, т. е. стремиться к выполнению условия  $\tau_{\lambda z} = \tau_{\mu z} = 0$ .

Схемы регулирования с добавочным воздействием от вспомогательной регулируемой величины  $z(t)$ , выбираемой в относительной близости от регулирующего органа с целью устранения влияния на главную регулируемую величину возмущений, идущих со стороны регулирующего органа объекта, будем называть **каскадными** схемами. Каскадные схемы получили широкое распространение на практике.

На рис. 9-5 в качестве примера такой схемы показана типовая схема регулирования температуры перегретого пара парогенераторов электростанций.

Перегрев пара до требуемой температуры производится в пароперегревателе, между первой и второй ступенями которого включен пароохладитель. Регулирование температуры пара осуществляется путем изменения подачи охлаждающей воды на впрыск в пароохладитель  $\mu(t)$  с помощью регулирующего клапана, установленного на линии подвода этой воды.

Основная регулируемая величина объекта — температура перегретого пара  $y(t)$  — измеряется термопарой  $ТП_y$ , сигнал от которой подается на регулятор. Кроме того, в схеме используется добавочное воздействие от

вспомогательной регулируемой величины  $z(t)$  — температуры пара непосредственно за пароохладителем. В результате изменения температуры пара  $z(t)$ , которые могут быть вызваны изменением температуры пара в первой ступени пароперегревателя или самопроизвольным изменением расхода воды на впрыск (возмущениями, идущими со стороны регулирующего органа), сразу

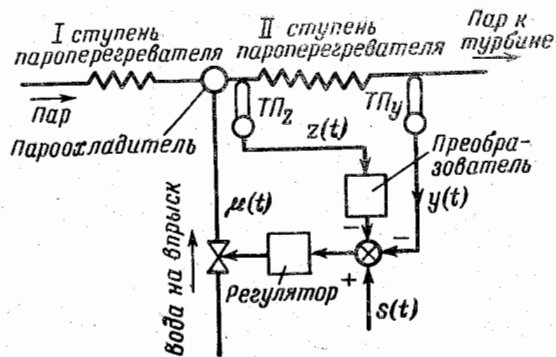


Рис. 9-5.

же воспринимаются терморпарой  $ТПz$  и регулятор производит необходимое изменение расхода воды на впрыск до начала изменения температуры перегретого пара.

Так как в установившихся режимах работы котла регулятор должен контролировать лишь температуру на выходе пароперегревателя  $y(t)$ , сигнал от  $z(t)$  должен появляться лишь в переходных режимах (так как в противоположном случае регулятор будет поддерживать на заданном значении не температуру пара после пароперегревателя, а сумму температур пара после пароперегревателя и после пароохладителя). Поэтому преобразователь сигнала  $z(t)$  обычно выполняют в виде реального дифференцирующего звена.

Другим примером каскадной схемы может служить схема регулирования давления вырабатываемого парогенератором пара (рис. 9-6). Здесь регулирование основной регулируемой величины — давления за котлом  $y(t)$  осуществляет корректирующий регулятор  $KP$ , который, однако, воздействует не на регулирующий орган подачи топлива в топку (например, на клапан, если топливо газовое), а на задатчик второго, стабилизирующего регулятора  $CP$ . Последний поддерживает на заданном значе-

нии, определяемом корректирующим регулятором, количество тепла  $z(t)$ , воспринимаемое поверхностями нагрева котла. Тем самым возмущения, идущие со стороны топки котла, которые могут быть вызваны неравномерностью подачи топлива топливopодающими устройствами, непредвиденными колебаниями качества топлива и

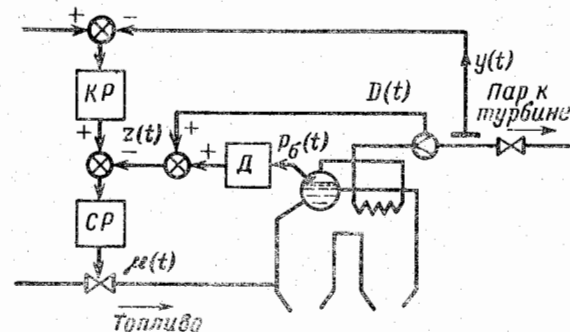


Рис. 9-6.

т. п., немедленно ликвидируются стабилизирующим регулятором и не успевают поэтому сколько-нибудь существенно повлиять на основную регулируемую величину.

Поскольку в настоящее время отсутствует прибор для непосредственного измерения количества тепла, подводимого к поверхностям нагрева в единицу времени, формирование вспомогательной регулируемой величины  $z(t)$  в этой схеме производится косвенным образом. Анализ динамики котла показывает, что указанное количество тепла в первом приближении может считаться пропорциональным сумме расхода пара  $D(t)$  и производной от давления в барабане котла  $p_0(t)$ .

Структурная схема рассматриваемой системы регулирования давления приведена на рис. 9-7. Как видим, она отличается от схемы на рис. 9-1, а, однако это отличие не имеет принципиального значения. Действительно, как легко видеть, схема на рис. 9-7 переходит в схему на рис. 9-1, а, если в последней сложить:

$$\left. \begin{aligned} W_p(p) &= W_{p.k}(p) W_{p.c}(p); \\ W_d(p) &= \frac{1}{W_{p.k}(p)}, \end{aligned} \right\} \quad (9-24)$$

где  $W_{p.k}(p)$  и  $W_{p.c}(p)$  — операторы корректирующего и стабилизирующего регуляторов.

Условия, при выполнении которых каскадная схема регулирования будет наилучшим образом подавлять последствия возмущения, идущего со стороны регулирующего органа, могут быть получены из формулы (9-20), если учесть, что в этом случае справедливы равенства  $\tau_{\mu y} = \tau_{\lambda y}$  и  $\tau_{\lambda z} = 0$ . Следовательно,

$$\omega_{\text{зопт}}(t) = \omega_1(t); t > 0 \quad (9-25)$$

или с учетом (9-19),

$$\Phi_{\text{оут}}(p) = W_{\mu y}(p). \quad (9-26)$$

В этом случае влияние возмущений, идущих со стороны регулирующего органа, на основную регулируемую величину будет полностью устранено. Требования, кото-

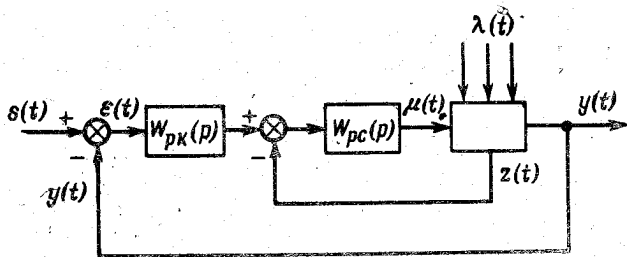


Рис. 9-7.

рые следует наложить на операторы регулирующих устройств, для того чтобы было реализовано условие (9-26), могут быть получены путем подстановки (9-26) в (9-16). Как можно легко заметить, для этого следует стремиться к возможно большему значению коэффициента передачи регулятора. Поскольку запаздывание по каналу регулирующего воздействия на вспомогательную регулируемую величину в каскадных схемах относительно мало, это требование практически всегда может быть выполнено.

Обратим внимание, что условие подавления возмущений, идущих со стороны регулирующего органа в каскадных схемах не накладывает никаких ограничений на вид характеристики  $W_{\lambda}(p)$ . Свобода в выборе этой характеристики позволяет определить ее таким образом, чтобы в максимальной степени уменьшить влияние на основную регулируемую величину всех остальных возмущений.

Для определения из этих условий оптимального оператора преобразователя устремим в общей формуле для  $\Phi_{sy}(p)$  (9-2) коэффициент передачи регулятора к бесконечности. В результате этого получим:

$$\Phi_{sy}(p) = \frac{W_{\mu y}(p)}{W_{\mu z}(p)W_{\lambda}(p) + W_{\mu y}(p)} = \frac{\frac{W_{\mu y}(p)}{W_{\mu z}(p)W_{\lambda}(p)}}{1 + \frac{W_{\mu y}(p)}{W_{\mu z}(p)W_{\lambda}(p)}}. \quad (9-27)$$

Структура этой формулы показывает, что ей соответствует обычная одноконтурная система автоматического регулирования, объект и регулятор которой определяют операторами

$$W_{\mu z}(p) = \frac{W_{\mu y}(p)}{W_{\mu z}(p)}; \quad (9-28)$$

$$W_{p.z}(p) = \frac{1}{W_{\lambda}(p)}, \quad (9-29)$$

и, следовательно, схема системы регулирования с добавочным воздействием (см. рис. 9-2, б) в этом случае может быть заменена схемой, приведенной на рис. 9-8, а. Ошибка регулирования этой схемы определяется формулой

$$\epsilon(t) = x(t) - \Phi_{sy}(p)[x(t) - W_{\lambda}(p)\rho(t)].$$

В свою очередь эта схема может быть преобразована в обычную одноконтурную схему (рис. 9-8, б), которая подробно рассматривалась ранее. Ошибки этой схемы

$$\epsilon(t) = x_3(t) - \Phi_{sy}(p)x_3(t).$$

Приравнявая последние два выражения, получаем:

$$x_3(t) = x(t) - \frac{\Phi_{sy}(p)}{1 - \Phi_{sy}(p)}W_{\lambda}(p)\rho(t)$$

или с учетом (9-27) и (9-28)

$$x_3(t) = x(t) - W_{\mu z}(p)\rho(t). \quad (9-30)$$

Таким образом, задача синтеза оптимального оператора  $W_{\lambda}(p)$  свелась к обычной задаче синтеза оператора регулятора  $W_{p.z}(p)$  в обычной одноконтурной схеме регулирования, приведенное входное воздействие которой определяется формулой (9-30), а оператор объекта по каналу регулирования — формулой (9-28).

Выражение (9-30) может быть переписано следующим образом:

$$x_3(t) = x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mu_3}(\xi) \rho(t - \xi) d\xi,$$

и поэтому корреляционная функция эквивалентного воздействия  $x_3(t)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} r_{x_3 x_3}(\tau) = & r_{xx}(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mu_3}(\xi) r_{x\rho}(\tau - \xi) d\xi - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mu_3}(\xi) r_{\rho x}(\tau + \xi) d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mu_3}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mu_3}(\eta) r_{\rho\rho}(\tau + \xi - \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (9-31)$$

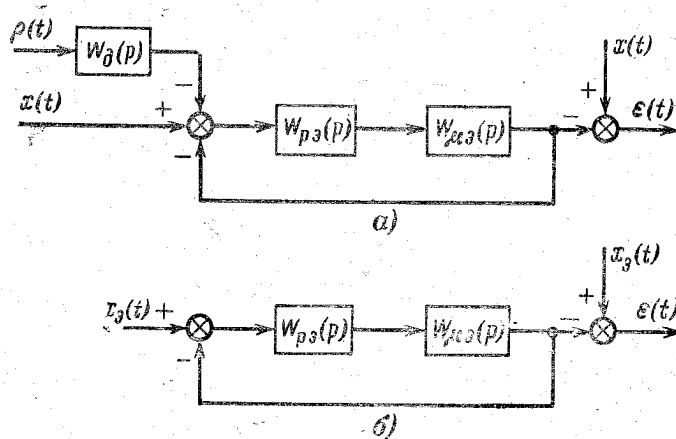


Рис. 9-8.

где  $r_{xx}(\tau)$ ,  $r_{\rho\rho}(\tau)$  — корреляционные функции  $x(t)$  и  $\rho(t)$ ;  $r_{x\rho}(\tau)$  — взаимная корреляционная функция  $x(t)$  и  $\rho(t)$ .

Переходя к спектрам мощности, получаем:

$$G_{x_3 x_3}(\omega) = G_{xx}(\omega) - 2\operatorname{Re}\{W_{\mu_3}(j\omega) G_{x\rho}(j\omega)\} + |W_{\mu_3}(j\omega)|^2 G_{\rho\rho}(\omega). \quad (9-32)$$

Следовательно, дисперсия ошибки регулирования в рассматриваемой каскадной схеме

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + W_{\mu_3}(j\omega) W_{p_3}(j\omega)} \right|^2 G_{x_3 x_3}(\omega) d\omega. \quad (9-33)$$

Естественно, что использование схем с добавочными информационными каналами (и, в частности, каскадных схем) может оказаться целесообразным и в том случае, когда в регулирующем канале объекта отсутствует транспортное запаздывание, но закон регулирования регулятора выбирается более простым, чем этого требует формула (6-4), например, один из типовых законов. В этом случае одноконтурная схема сможет обеспечить приемлемую точность регулирования лишь при относительно низкочастотных возмущающих воздействиях (сравнительно с резонансной частотой самой системы). С этой точки зрения введение более высоких производных в закон регулирования и приближение его к виду, определяемому формулой (6-4), может рассматриваться как способ выполнения сформулированного условия путем увеличения резонансной частоты системы. Введение же добавочного информационного канала может рассматриваться как способ решения той же задачи, но другим возможным путем, например воздействуя непосредственно на возмущения с целью сузить полосу занимаемых ими частот. В частности, для подавления относительно высокочастотных возмущений, идущих со стороны регулирующего органа, может использоваться каскадная схема регулирования. При этом, однако, необходимо обеспечить сравнительно широкую полосу пропускания вспомогательного внутреннего контура регулирования, так чтобы по сравнению с ней указанные возмущения были уже низкочастотными. Для этого, очевидно, необходимо выбирать точку отбора вспомогательной регулируемой величины так, чтобы она характеризовалась малой инерционностью по отношению к регулирующему воздействию, позволяющей установить в регуляторе достаточно большой коэффициент передачи.

Итак, выбор оптимальных параметров каскадных схем можно осуществлять в следующем порядке:

1. По заданным частотным характеристикам объекта  $W_{\mu y}(p)$  и  $W_{\mu z}(p)$  определяется частотная характеристика эквивалентного объекта (9-28), по которой обычным

порядком (как при синтезе одноконтурных систем) определяется оптимальный алгоритм функционирования эквивалентного регулятора  $W_{p,э}(p)$ . Поскольку практически близкими к оптимальному здесь могут считаться унифицированные ПИ- или ПИД-алгоритмы, задача обычно сводится лишь к определению оптимальных параметров этих алгоритмов. Если имеются основания считать, что приведенные к выходу эквивалентной схемы возмущения (после введения добавочного контура) могут оказаться недостаточно низкочастотными, следует произвести уточнение настройки с учетом спектра мощности эквивалентного воздействия, вычисляемого по формуле (9-32).

2. Используя формулу (9-29), определяется оператор преобразователя. Если в качестве эквивалентного регулятора был выбран ПИ-регулятор, преобразователь должен представлять собой реальное дифференцирующее звено с оператором

$$W_d(p) = \frac{k_d T_d p}{T_d p + 1}, \quad (9-34)$$

причем его параметры настройки: коэффициент передачи  $k_d$  и постоянная времени  $T_d$  — должны быть связаны с найденными оптимальными параметрами настройки эквивалентного ПИ-регулятора соотношениями:

$$k_d = \frac{1}{k_{p,э}}; \quad T_d = T_{и,э}. \quad (9-35)$$

Если в качестве эквивалентного регулятора выбирался ПИД-регулятор, преобразователь должен быть выполнен в виде реального дифференцирующего звена с инерционностью второго порядка

$$W_d(p) = \frac{k_d T_{д1} p}{T_{д2} T_{д1} p^2 + T_{д1} p + 1}. \quad (9-36)$$

Найденный таким образом оператор преобразователя в каскадной схеме будет оптимальным лишь при условии, что коэффициент передачи регулятора в этой схеме (рис. 9-1, а) достаточно большой. Но так как практически величина этого коэффициента всегда ограничена, расчет должен быть дополнен определением оптимальной настройки регулятора, а также проверкой того, что полученная величина коэффициента передачи регулятора оказалась достаточно большой, для того чтобы можно

было заменить реальную двухконтурную каскадную схему эквивалентной ей одноконтурной.

Оптимальная настройка регулятора в схеме на рис. 9-1 определяется в первую очередь из условия сохранения системой необходимого запаса устойчивости. Так как настройка преобразователя уже определена, то преобразователь совместно с действительным объектом образуют некоторый новый объект для регулятора, оператор которого определяется формулой

$$W_{\mu,э}^p(p) = W_{\mu,у}(p) + W_{\mu,з}(p) W_d(p). \quad (9-37)$$

Поэтому граница области допустимого запаса устойчивости в пространстве параметров настройки регулятора определяется обычным порядком по амплитудно-фазовой характеристике, соответствующей этому оператору. Практически эта процедура может быть значительно упрощена, если учесть, что инерционность внутреннего контура должна быть намного меньше инерционности внешнего. Так как на долю регулятора приходится отработка быстротекущих процессов, происходящих во внутреннем контуре, то по отношению к таким относительно высокочастотным колебаниям реальный дифференциатор ведет себя как безынерционное звено с коэффициентом передачи  $k_d$ . С другой стороны, по отношению к этим процессам можно считать оператор  $W_{\mu,у}(p)$  близким к нулю. В результате выражение (9-37) можно с достаточной точностью заменить более простым

$$W_{\mu,э}^p(p) \approx k_d W_{\mu,з}(p). \quad (9-38)$$

Таким образом, расчет настройки регулятора можно осуществлять по характеристике малоинерционного канала объекта  $W_{\mu,з}(p)$ , в результате которого обычным порядком может быть получена граница области заданного запаса устойчивости в плоскости параметров настройки  $T_n$  и  $k_p k_d$ . Выбор точки, соответствующей оптимальной настройке, следует производить, исходя из тех соображений, что по отношению к быстройдействующему внутреннему контуру возмущения, идущие со стороны регулирующего органа, могут считаться низкочастотными. В этом случае оптимальной настройке соответствует точка на границе области допустимого запаса



устойчивости, где отношение  $k_p k_d / T_{и}$  максимально. Определив соответствующие этой точке параметры  $k_d k_{p, \text{опт}}$  и  $T_{и, \text{опт}}$ , можно затем определить и  $k_{p, \text{опт}}$  (так как  $k_d$  уже известно).

Заключительным этапом расчета должна быть проверка предположения о малой инерционности внутреннего контура по сравнению с внешним, которое положено в основу изложенного приема раздельного расчета регулятора и преобразователя. Один из возможных способов такой проверки состоит в следующем.

Расчет настройки преобразователя осуществляется в предположении, что выражение для оператора исходной системы в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{W_{\mu y}(p) W_p(p)}{1 + W_{\mu z}(p) W_p(p) W_{\pi}(p)}$$

может быть заменено более простым

$$W_0(p) = \frac{W_{\mu y}(p)}{W_{\mu z}(p) W_{\pi}(p)}$$

Погрешность, которая получается при такой замене, может быть учтена множителем

$$\Delta(p) = \frac{W(p)}{W_0(p)} = \frac{W_{\mu z}(p) W_p(p) W_{\pi}(p)}{1 + W_{\mu z}(p) W_p(p) W_{\pi}(p)} \quad (9-39)$$

Очевидно, что принятая замена допустима, если  $\Delta(j\omega)$  в существенном для системы диапазоне частот мало отличается от единицы:

$$\Delta(j\omega) \approx 1 \quad (9-40)$$

Так как с точки зрения ухудшения запаса устойчивости системы опасными являются увеличение по модулю и отставание по фазе характеристики системы  $W(j\omega)$  по сравнению с расчетной  $W_0(j\omega)$  в окрестности резонансной частоты системы  $\omega_{\text{рез}}$ , последнее условие может быть выражено двумя неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} |\Delta(j\omega_{\text{рез}})| - 1 < a; \\ \arg \Delta(j\omega_{\text{рез}}) > -b, \end{aligned} \right\} \quad (9-41)$$

где  $a$  и  $b$  — заданные небольшие числа (обычно можно принять  $a=0,1$  и  $b=5^\circ$ ). Значение резонансной частоты  $\omega_{\text{рез}}$  находится в процессе проведения расчета оптимальной настройки преобразователя.

В случае, если указанные условия не удовлетворяются, расчет оптимальной настройки регулятора и преобразователя следует производить совместно (отыскивать оптимум одновременно в пространстве четырех варьируемых параметров настройки  $k_p$ ,  $T_{и}$ ,  $k_d$ ,  $T_d$ ). Практически этот расчет можно осуществить подбором на моделирующей установке. Тем не менее выполненные расчеты и в этом случае не являются напрасными — их результаты дают ориентировку в значениях параметров настройки, в окрестности которых следует искать оптимальную настройку на модели. Впрочем, опыт расчетов показывает, что невозможность применения изложенного выше метода раздельной последовательной настройки регулятора и преобразователя, как правило, свидетельствует о большой инерционности внутреннего контура и, следовательно, о малой эффективности введения дополнительного воздействия от вспомогательной регулируемой величины.

Пример расчета каскадной схемы приведен в приложении.

#### 9-4. Системы с компенсацией возмущений

Поскольку введение воздействий от добавочных регулируемых величин в сущности призвано давать более своевременную информацию о появлении возмущений (еще до того, как эти возмущения успеют подействовать на основную регулируемую величину), в качестве вспомогательной величины  $z(t)$  можно выбирать непосредственно одно из возмущений. Для получения схемы подобной системы достаточно в общей схеме на рис. 9-1, а положить  $W_{\mu z}(p) = 0$  и  $W_{\lambda z}(p) = 1$ .

В результате приходим к схеме, указанной на рис. 9-9, где  $\lambda(t)$  — возмущающее воздействие, добавочная информация о котором подается на вход регулятора;  $v(t)$  — приведенное к выходу объекта возмущение, экви-

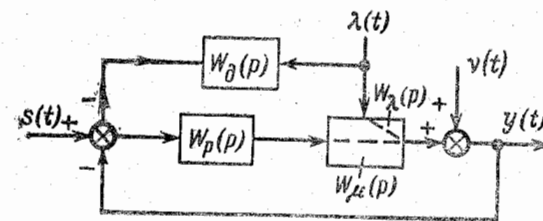


Рис. 9-9.

валентное по своему действию всем возмущениям, за исключением  $\lambda(t)$ . Такие схемы регулирования получили название схем с компенсацией возмущений.

От других систем с добавочными информационными каналами эти системы отличаются той особенностью, что введение добавочного канала информации здесь не приводит к появлению нового замкнутого контура передачи воздействия, и следовательно, не влияет на устойчивость системы регулирования. Однако эти системы обладают тем недостатком, что в них производится компенсация влияния на основную регулируемую величину лишь того возмущения, от которого вводится дополнительное воздействие. Между тем в общем случае промежуточную регулируемую величину можно выбрать таким образом, что она будет ослаблять влияние нескольких возмущений.

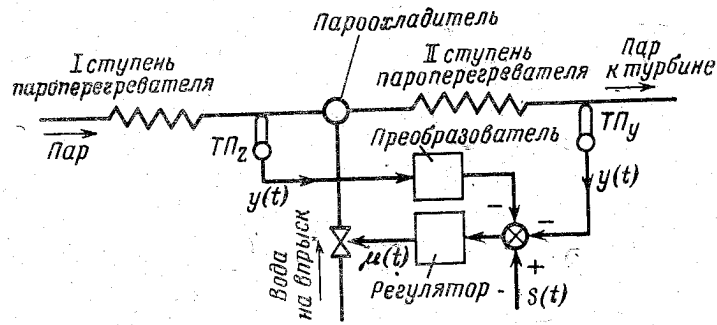


Рис. 9-10.

Примером системы с компенсацией возмущений может служить схема регулирования температуры перегретого пара, приведенная на рис. 9-10, где добавочное воздействие взято по температуре перед парохладителем, а не после него, как это имело место в каскадной схеме на рис. 9-5. Поскольку эта температура не зависит от изменения подачи охлаждающей воды на впрыск, введение такого воздействия не влияет на устойчивость системы регулирования. Однако по сравнению с каскадной рассматриваемая схема имеет тот недостаток, что здесь учитывается возмущение, идущее лишь со стороны первой секции пароперегревателя, и не учитываются возмущения, обусловленные самопроизвольным измене-

нием подачи воды на впрыск (например, из-за изменения давления в питательной магистрали).

Предельная эффективность введения добавочного компенсирующего воздействия от возмущения по-прежнему определяется соотношением между величиной запаздывания по каналу регулирующего воздействия  $\tau_\mu$  и запаздывания  $\tau_\lambda$  по каналу действия возмущения (добавочный сигнал от которого вводится в систему) на основную регулируемую величину  $y(t)$ . При  $\tau_\lambda = 0$  введение компенсирующего воздействия не приводит к увеличению предельной эффективности. При увеличении  $\tau_\lambda$  степень компенсации ошибки увеличивается и при  $\tau_\lambda = \tau_\mu$  влияние выбранного возмущения на регулируемую величину может быть полностью устранено, т. е. система может стать инвариантной по отношению к этому возмущению.

Обычно на практике используются системы с компенсацией возмущений, достаточно близкие к инвариантности. В этом случае синтез оптимальных операторов регулятора  $W_p(p)$  и преобразователя  $W_d(p)$  в схеме на рис. 9-9 может быть расчленен на два этапа.

На первом этапе производится синтез оптимального оператора регулятора в предположении, что компенсирующее воздействие отсутствует (система является обычной одноконтурной), а на объект не действует возмущение  $\lambda(t)$ , от которого вводится это компенсирующее воздействие. Порядок выполнения этого этапа расчета был подробно рассмотрен ранее. Он сводится к определению физически реализуемого оператора замкнутой системы  $\Phi_{sy}(p)$ , когда на ее вход подается случайный сигнал с корреляционной функцией

$$r_{xx}(\tau) = r_{ss}(\tau) + r_{vv}(\tau),$$

где  $r_{ss}(\tau)$  — корреляционная функция задающего воздействия  $s(t)$ ;  $r_{vv}(\tau)$  — корреляционная функция эквивалентного возмущения, приведенного к выходу объекта  $y(t)$  [без учета  $\lambda(t)$ ].

Обоснованием такого подхода к выбору оптимального оператора регулятора является то обстоятельство, что возмущающее воздействие  $\lambda(t)$  будет скомпенсировано, так что на долю регулятора остается лишь устранение последствий действия возмущения  $v(t)$ .

Вторым этапом расчета является определение оптимального оператора  $W_d(p)$ . Схема системы регулирования на рис. 9-9 по отношению к возмущению, от которого вводится компенсирующее воздействие, может быть представлена в виде, указанном на рис. 9-11,а, где  $\Phi_{sy}(p)$  и  $\Phi_{\lambda y}(p)$  — операторы замкнутой системы регулирования, определяемые формулами (5-12) и (5-15),

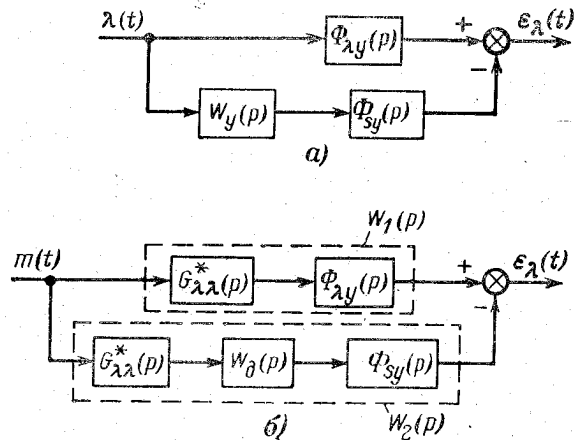


Рис. 9-11.

которые к моменту выполнения расчетов второго этапа уже известны. Поскольку выходная величина такой системы определяется соотношением

$$\varepsilon(t) = [\Phi_{\lambda y}(p) - W_d(p) \Phi_{sy}(p)] \lambda(t), \quad (9-42)$$

то условие инвариантности по отношению к компенсируемому возмущению записывается следующим образом:

$$\Phi_{\lambda y}(p) - W_d(p) \Phi_{sy}(p) = 0,$$

т. е.

$$W_d(p) = \frac{\Phi_{\lambda y}(p)}{\Phi_{sy}(p)} = \frac{W_{\lambda y}(p)}{W_{\mu}(p) W_p(p)}, \quad (9-43)$$

Если запаздывание по регулируемому каналу  $\tau_{\mu}$  оказывается большим запаздывания по каналу действия возмущения  $\tau_{\lambda}$  (что чаще всего бывает на практике), непо-

средственное использование формулы (9-43) приводит к физически нереализуемой системе. В этом случае инвариантность системы оказывается недостижимой и для определения оптимальной физически реализуемой частотной характеристики элемента компенсации следует воспользоваться методами теории синтеза систем, оптимальных с точки зрения минимума средневладратичной ошибки. Удобнее всего для этой цели воспользоваться приемом, изложенным в § 9-2. Дополнив схему на рис. 9-11, а формирующим элементом с частотной характеристикой  $G_{\lambda\lambda}^*(+p)$  и перейдя таким образом к схеме с белым шумом на входе (рис. 9-11,б), легко прийти к выводу, что оптимальная весовая характеристика нижней ветви этой схемы должна определяться равенством

$$\omega_{20пт}(t) = \begin{cases} 0; & t < \tau_{\mu}; \\ \omega_1(t); & t \geq \tau_{\mu}, \end{cases} \quad (9-44)$$

где  $\omega_1(t)$  — весовая характеристика верхней ветви схемы, оператор которой

$$W_1(p) = G_{\lambda\lambda}^*(+p) \Phi_{\lambda y}(p). \quad (9-45)$$

После определения  $\omega_{20пт}(t)$  находится соответствующий ей оператор  $W_{20пт}(p)$ , после чего уже может быть найден и оптимальный физически реализуемый оператор компенсирующего элемента

$$W_{д.опт}(p) = \frac{W_{20пт}(p)}{G_{\lambda\lambda}^*(+p) \Phi_{syопт}(p)}. \quad (9-46)$$

Минимально возможная величина дисперсии ошибки регулирования, получаемая при использовании такого компенсирующего элемента, определяется формулой

$$\sigma_{\varepsilon}^2_{мин} = \int_{\tau_{\lambda}}^{\tau_{\mu}} \omega_1^2(t) dt. \quad (9-47)$$

Практически оптимальную частотную характеристику компенсирующего элемента обычно требуется выбрать в виде дробно-рациональной функции относительно невысокого порядка. В этом случае для решения задачи целесообразно выражение для спектра ошибки (9-42) переписать в следующем виде:

$$\varepsilon(p) = [W_{д.опт}(p) - W_d(p)] \lambda_0(p), \quad (9-48)$$

где  $W_{\pi}^{нл}(p)$  определяется формулой (9-43), а  $\lambda_{\alpha}(p)$  является спектром эквивалентного возмущения, определяемого выражением

$$\lambda_{\alpha}(p) = \Phi_{sy}(p)\lambda(p). \quad (9-49)$$

В этом случае задача сводится к выбору структуры (из класса допустимых) и параметров оператора  $W_{\pi}(p)$  из условий минимизации выражения

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{\pi}^{нл}(j\omega) - W_{\pi}(j\omega)|^2 G_{\alpha}(\omega) d\omega, \quad (9-50)$$

где

$$G_{\alpha}(\omega) = |\Phi_{sy}(j\omega)|^2 G_{\lambda\lambda}(\omega). \quad (9-51)$$

Для предварительной ориентировки в выборе структуры частотной характеристики преобразователя  $W_{\pi}(p)$  целесообразно построить годограф амплитудно-фазовой характеристики идеального преобразователя  $W_{\pi}^{нл}(j\omega)$  в пределах существенного для системы диапазона частот [определяемого по  $G_{\alpha}(\omega)$ ]. Например, если этот годограф в пределах существенного диапазона частот  $0 < \omega < \omega_{\max}$  имеет вид, указанный на рис. 9-12, то это свидетельствует о возможности использования преобразователя в виде реально дифференцирующего звена, так как годограф частотной характеристики  $W_{\pi}(j\omega)$  этого звена располагается в том же квадранте комплексной плоскости, что и существенный участок характеристики  $W_{\pi}^{нл}(j\omega)$ .

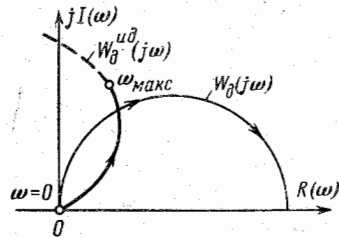


Рис. 9-12.

Выбор оптимальных значений параметров преобразователя производится из условия минимума интеграла (9-50), что соответствует наилучшему приближению характеристики  $W_{\pi}(j\omega)$  к желаемой  $W_{\pi}^{нл}(j\omega)$  с учетом веса, определяемого спектральной плотностью мощности  $G_{\alpha}(\omega)$ . Для решения этой задачи могут быть использованы соответствующие методы приближения функций.

1. Приближение по методу наименьших квадратов. Заменяя интегрирование в формуле (9-50) суммированием, получаем:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} |W_{\pi}(jk\Delta\omega) - W_{\pi}^{нл}(jk\Delta\omega)|^2 G_{\alpha}(k\Delta\omega), \quad (9-52)$$

где  $\Delta\omega = \frac{\omega_{\max}}{m}$ .

Для определения минимума этого выражения следует приравнять нулю частные производные от  $\sigma_{\varepsilon}^2$  по варьируемым параметрам  $a, b \dots$  частотной характеристики  $W_{\pi}(j\omega)$ . В результате будет получена система из  $n$  уравнений ( $n$  — число варьируемых параметров), которая может быть представлена в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\varepsilon}^2}{\partial a} &= \frac{2\Delta\omega}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \Delta R(k\Delta\omega) \frac{\partial R_{\pi}(k\Delta\omega)}{\partial a} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta I(k\Delta\omega) \frac{\partial I_{\pi}(k\Delta\omega)}{\partial a} \right] G_{\alpha}(\omega) = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{\varepsilon}^2}{\partial b} &= \frac{2\Delta\omega}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \Delta R(k\Delta\omega) \frac{\partial R_{\pi}(k\Delta\omega)}{\partial b} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta I(k\Delta\omega) \frac{\partial I_{\pi}(k\Delta\omega)}{\partial b} \right] G_{\alpha}(\omega) = 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (9-53)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta R\omega &= R_{\pi}(\omega) - R_{\pi}^{нл}(\omega); \\ \Delta I(\omega) &= I_{\pi}(\omega) - I_{\pi}^{нл}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (9-54)$$

Здесь  $R_{\pi}(\omega)$  и  $I_{\pi}(\omega)$  — вещественная и мнимая составляющие частотных характеристик  $W_{\pi}(j\omega)$  и  $W_{\pi}^{нл}(j\omega)$ .

Дискретные частоты, при которых осуществляется приближение, целесообразно выбирать по графику  $G_{\alpha}(\omega)$ , так чтобы они соответствовали наиболее существенным значениям этой характеристики. Это позволяет сократить интервал  $\Delta\omega$  (а тем самым и число точек) приближения. В частности, если спектр компенсируемого возмущения занимает достаточно широкую полосу (т. е. возмущение относительно высокочастотное), так что она перекрывает полосу частот характеристики  $|\Phi_{sy}(j\omega)|$ , то в графике

спектра эквивалентного воздействия  $G_a(\omega)$ , как и в характеристике  $|\Phi_{sy}(j\omega)|$ , будет наблюдаться пик в окрестности резонансной частоты  $\omega_{рез}$ . В этом случае желательно выбирать одну из частот приближения равной резонансной частоте  $\omega_{рез}$  (например,  $\omega_0=0$ ;  $\omega_1=\omega_{рез}/2$ ;  $\omega_2=\omega_{рез}$ ).

Как показывает опыт расчетов, при таком выборе узловых точек требуемое их число часто не превышает двух-трех.

2. Приближение характеристик преобразователей методом интерполирования. В соответствии с этим методом выбор оптимальных параметров  $a, b \dots$  должен быть подчинен требованию, чтобы частотные характеристики  $W_d(j\omega)$  и  $W_d^{нл}(j\omega)$  совпадали в нескольких заранее выбранных точках. Это приводит к системе из  $n$  уравнений (число которых, очевидно, должно быть равным числу варьируемых параметров)

$$\left. \begin{aligned} W_d(j\omega_1) &= W_d^{нл}(j\omega_1); \\ W_d(j\omega_2) &= W_d^{нл}(j\omega_2) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (9-55)$$

Как и в предыдущем случае, важную роль играет удачный выбор точек аппроксимации. В частности, при наличии в графике  $G_a(\omega)$  резонансного пика целесообразно одну из точек интерполяции выбирать в точке резонанса. В качестве второй точки приближения приходится выбирать точку нулевой частоты. Если число варьируемых параметров не превышает двух (как это часто бывает на практике), приближение ограничивается указанными двумя точками.

3. Приближение характеристик разложением их в ряд Тейлора.

Если возмущение  $\lambda(t)$  имеет заведомо низкочастотный характер, то, применяя прием, использованный ранее при выборе оптимальных параметров регулятора (см. § 7-2), можно производить приближение из условий:

$$\left. \begin{aligned} W_d(j\omega)|_{\omega=0} &= W_d^{нл}(j\omega)|_{\omega=0}; \\ \frac{dW_d(j\omega)}{d\omega}|_{\omega=0} &= \frac{dW_d^{нл}(j\omega)}{d\omega}|_{\omega=0}. \end{aligned} \right\} \quad (9-56)$$

Подробное изложение такого метода расчета систем с компенсацией возмущений можно найти в [Л. 81].

Пример выбора оптимальной структуры и параметров системы с компенсацией возмущений приведен в приложении.

## 9-5. Системы косвенного регулирования

На практике иногда оказывается, что подлежащая регулированию величина оказывается недоступной для непосредственного контроля (например, по причине отсутствия соответствующих датчиков или из-за недоступности места, где необходимо производить измерение). В этом случае задача может быть решена путем применения регулирования другой косвенной величины, статистически связанной с основной регулируемой величиной. Примером подобной схемы косвенного регулирования может служить схема регулирования тепло-

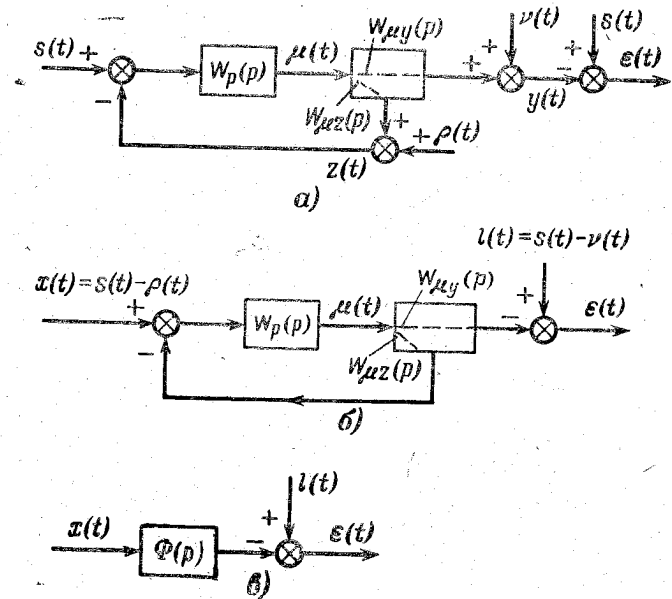


Рис. 9-13.

восприятия поверхностей нагрева котла, которая была приведена на рис. 9-6 (при выключенном корректирующем регуляторе КР). В этой схеме вместо непосредственного измерения тепловосприятия поверхностей нагрева парогенератора измеряется косвенная величина — сумма расхода пара и производной от давления в барабане котла.

В общем случае схема системы косвенного регулирования может быть представлена, как показано на рис. 9-13,а, где  $y(t)$  и  $z(t)$  — основная и косвенная регулируемые величины;  $\nu(t)$  и  $\rho(t)$  — эквивалентные возмущения, приведенные соответственно к  $y(t)$  и  $z(t)$ .

После очевидных преобразований эта схема приводится к виду 9-13,б и, следовательно, задача сводится к обычной задаче синтеза оптимальной весовой характеристики системы  $\Phi_{опт}(t)$  (рис. 9-13,в), удовлетворяющей условию

$$\Phi_{опт}(t) = 0 \text{ при } t < \tau_{\mu y}, \quad (9-57)$$

на вход которой подается случайный процесс  $x(t) = s(t) - p(t)$ , а желаемым выходом является  $l(t) = s(t) - v(t)$ . Решение этой задачи уже достаточно полно было рассмотрено в (§ 5-6), и на нем останавливаться не будем.

После определения  $\Phi_{опт}(p)$  может быть найдена оптимальная частотная характеристика регулятора, если учесть, что

$$\Phi(p) = \frac{W_p(p) W_{\mu y}(p)}{1 + W_p(p) W_{\mu z}(p)}. \quad (9-58)$$

Дисперсия ошибки регулирования в этой схеме может быть определена с помощью формулы, аналогичной (9-12):

$$\sigma_{\text{смин}}^2 = \sigma_l^2 - \int_0^{\infty} \Phi_{опт}(\tau) r_{zi}(\tau) d\tau. \quad (9-59)$$

Из формулы (9-58) обычным порядком могут быть получены и условия оптимальности для представляющих наибольший практический интерес низкочастотных воздействий.

Определение оптимальных значений параметров настройки регуляторов может осуществляться обычным порядком: по заданной частотной характеристике входящего в замкнутой контур регулирования канала объекта  $W_{\mu z}(p)$  в пространстве параметров регулятора строится область допустимого запаса устойчивости, в которой затем определяется точка, соответствующая минимуму среднеквадратичного отклонения регулируемой величины  $y(t)$ .

Часто косвенные величины практически служат не только для целей регулирования, но оказываются необходимыми также и для осуществления оперативного контроля за недоступными для измерения основными регулируемыми величинами. Схема подсоединения к объекту вычислительного устройства ВУ, вычисляющего предполагаемое значение  $y(t)$  по косвенным координатам  $z_i(t), \dots, z_m(t)$ , приведена на рис. 9-14,а. Целью расчета этой схемы является определение оптимального алгоритма функционирования ВУ, т. е. такого алгоритма, который обеспечивал бы минимизацию отклонения  $\epsilon(t)$  выхода ВУ  $y_{в.у}(t)$  от действительного значения величины  $y(t)$ . В более общем случае может потребоваться, чтобы минимизировалось рассогласование между выходом  $y_{в.у}(t)$  и некоторым заранее заданным функционалом от  $y(t)$ . Так, может потребоваться предсказание возможного значения  $y(t)$  на некоторое время  $\tau$  вперед. Подобные задачи достаточно просто решаются в случае, когда объект может считаться линейной динамической системой, подверженной действию стационарных случайных возмущений, а в качестве меры отклонения вычисленного значения выхода от его действительного значения выбирается среднеквадратичное отклонение. В этом случае для ее

решения достаточно располагать корреляционными функциями возмущений, приведенными к основному  $y(t)$  и вспомогательным  $z_1(t), \dots, z_m(t)$  выходам объекта  $v(t), \rho_1(t), \dots, \rho_m(t)$ , а также взаимными корреляционными функциями каждой пары этих возмущений  $r_{vv}(\tau), r_{\rho_i \rho_i}(\tau), r_{v_i \rho_j}(\tau)$ .

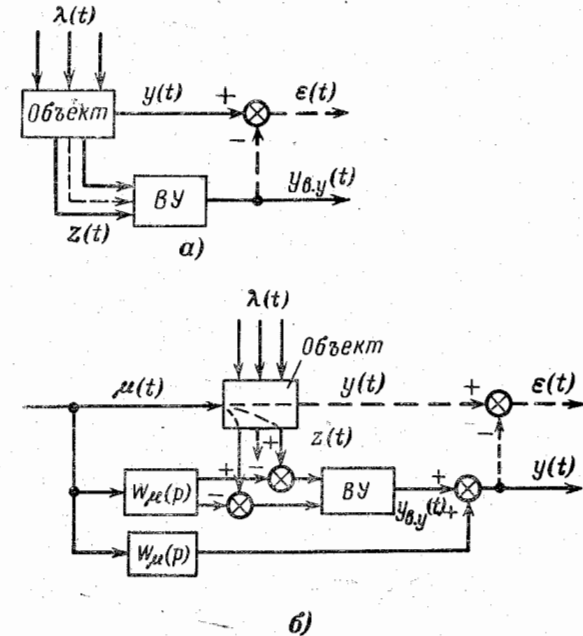


Рис. 9-14.

Можно показать [Л. 39], что оптимальная весовая характеристика  $\omega_i(t)$   $i$ -го канала вычислительного устройства ВУ в этом случае определяется решением системы интегральных уравнений вида

$$r_{\rho_j v}(\tau) = \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(\xi) r_{\rho_j \rho_i}(\tau - \xi) d\xi \quad (\tau > 0, j = 1, 2, \dots, m). \quad (9-60)$$

Дисперсия ошибки между вычисленным и действительным выходами будет определяться формулой

$$\sigma_{\text{смин}}^2 = \sigma_v^2 - \sum_{j=1}^m \int_{-1}^{\infty} \omega_j(\xi) r_{\rho_j v}(\xi) d\xi. \quad (9-61)$$

Необходимость оперирования с корреляционными функциями основной величины  $y(t)$  предполагает, что эта величина хотя и недо-

ступна для непрерывного оперативного контроля в процессе эксплуатации объекта, все же ее реализации могут быть каким-то образом зарегистрированы перед проектированием системы или при ее наладке (постановкой соответствующим образом организованного эксперимента, использованием лабораторных анализов и т. п.).

Следует специально обратить внимание, что синтезированная указанным способом система косвенного контроля вычисляет не действительное значение выхода объекта регулирования  $y(t)$ , а лишь составляющую этого выхода, обусловленную действием возмущений  $\lambda(t)$ . Между тем выходная величина всякого регулируемого объекта определяется не только действиями возмущений, но и регулирующими воздействиями, причем практически всегда интерес представляет полное изменение выходной величины.

Очевидно, что система уравнений (9-60) может быть использована и для вычисления указанного общего изменения выходной величины объекта, для чего достаточно в состав приведенных к выходам возмущений  $v(t)$ ,  $p(t)$  включить также и реакции основной и косвенных координат  $z(t)$  на регулирующие воздействия  $\mu(t)$ , осуществляемые в процессе нормальной эксплуатации объекта. Однако к такому подходу при построении схем косвенного контроля необходимо относиться с определенной осторожностью.

Дело в том, что регулирующие воздействия объекта отличаются от возмущающих воздействий по крайней мере двумя особенностями. Во-первых, регулирующие воздействия в замкнутых системах регулирования по самой своей физической природе всегда зависят от выходных величин объекта — регулируемых величин (так как формирование регулирующего воздействия осуществляется в основном по результатам наблюдения за текущим изменением регулируемых величин объекта) и, следовательно, схема на рис. 9-14,а не будет отражать действительных связей объекта с внешней средой. Во-вторых, формирование регулирующих воздействий в неавтоматизированных объектах осуществляется не техническим устройством, а обслуживающим персоналом, причем по отношению к воздействиям, которые он оказывает на объект, могут вообще оказаться неприменимыми методы теории вероятностей, (во всяком случае возможность применения этих методов должна быть в каждом конкретном случае специально проверена). Обусловлено это тем, что в действиях отдельных людей могут наблюдаться не поддающиеся формализации факторы.

Таким образом, применение схемы, приведенной на рис. 9-14,а, для оценки общего выхода объекта с учетом действия регулирующих сигналов практически может использоваться лишь в случае, когда имеется уверенность, что регулирование объекта во все время его эксплуатации будет осуществляться автоматически техническими устройствами. Если такой уверенности нет, учет регулирующих воздействий при косвенном контроле величины  $y(t)$  целесообразно осуществлять отдельно от возмущений, соответствующим усложнением структурной схемы системы. Вариант такой схемы приведен на рис. 9-14,б. Здесь эффект влияния на косвенные координаты  $z(t)$  регулирующего воздействия  $\mu(t)$  устраняется подачей на вход вычислительного устройства ВУ сигналов от моделей объекта с операторами по каналам от  $\mu(t)$  к  $z(t)$ , а для получения оценки общего выхода  $y(t)$  к выходу ВУ  $y_{в.у}(t)$  прибавляется реакция объекта на воздействие  $\mu(t)$ , получаемая с помощью модели объекта с оператором  $W_{\mu}(p)$  по каналу от  $\mu(t)$  к  $y(t)$ . Таким образом, для по-

строения системы косвенного контроля в общем случае необходимо располагать не только корреляционными функциями приведенных возмущений, но и динамическими характеристиками объекта по регулирующим каналам на основную и косвенные выходные величины.

## 9-6. Многосвязные системы регулирования

Рассмотренные выше автоматические системы регулирования предназначались для поддержания на заданном значении одной регулируемой величины. На практике часто встречаются объекты с несколькими регулируемыми величинами (такие объекты получили название многомерных). Правда, если эти регулируемые величины независимы друг от друга, задача их регулирования сводится к построению соответствующего числа систем регулирования, каждая из которых является системой с одной регулируемой величиной. Однако задача существенно усложняется, если регулируемые величины оказываются взаимосвязанными.

Физической причиной появления взаимных связей между регулируемыми величинами является наличие общих входных воздействий, изменение каждого из которых приводит к одновременному изменению этих регулируемых величин. При построении систем регулирования таких величин важно различать взаимосвязь, обусловленную наличием общих возмущений, и взаимосвязь, обусловленную наличием общих регулирующих воздействий. В первом случае система регулирования двух (или большего числа) регулируемых величин по существу распадается на соответствующее число независимых систем с одной регулируемой величиной каждая. Наличие взаимосвязи между регулируемыми величинами приведет здесь лишь к тому, что эти системы будут находиться в действии в одно и то же время. Соответственно синтез каждой из указанных систем может производиться обычными методами вне зависимости от другой. Связь же через общие регулирующие воздействия приводит к коренным изменениям в структуре системы регулирования и методах ее синтеза. Поскольку здесь действия одного регулятора распространяются не только на «свою», но и на соседние регулируемые величины и приводят поэтому к включению в работу остальных регуляторов, выбор закона регулирования каждого регулятора нельзя осуществлять независимо от закона регулирования другого. Кроме того, наличие внутренних перекрестных связей в объ-

екте между регулирующими воздействиями и регулируемы́ми величинами требует в общем случае введения соответствующих перекрестных связей и между отдельными регуляторами. Соответственно для регулирования объектов, регулируемые величины которых связаны через общие регулирующие воздействия, могут применяться две структурные схемы:

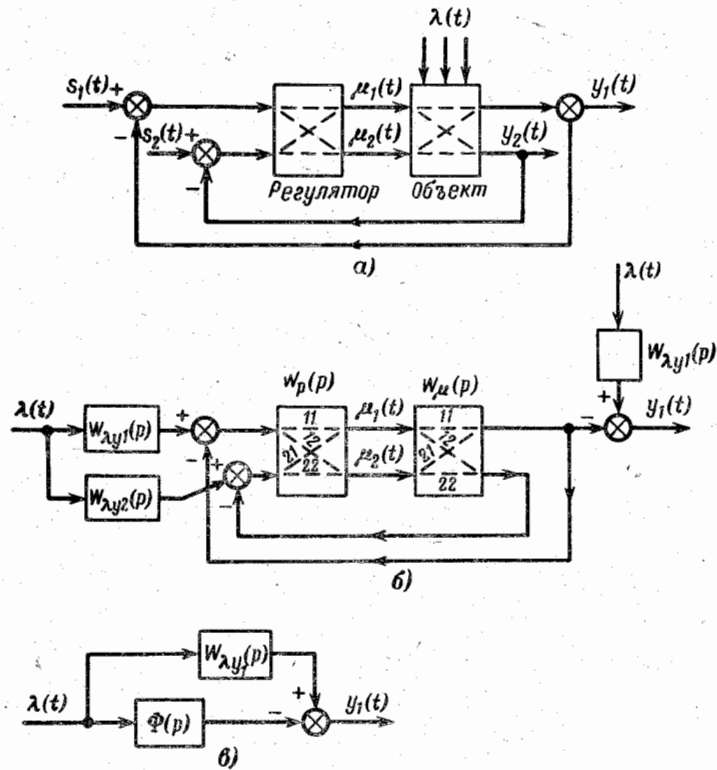


Рис. 9-15.

1) схема независимого регулирования, когда между регуляторами отдельных величин отсутствуют специальные перекрестные связи (но выбор закона регулирования каждого регулятора производится с учетом наличия перекрестных связей в объекте);

2) схема связанного регулирования, когда между регуляторами устанавливаются перекрестные связи.

Схема связанного регулирования для случая двух регулируемых величин приведена на рис. 9-15,а. В ней два регулятора по существу превращаются в один регулятор с двумя входами и двумя выходами, свойства которого определяются четырьмя операторами: двумя по прямым каналам  $W_{p11}(p)$ ,  $W_{p22}(p)$  и двумя  $W_{p12}(p)$ ,  $W_{p21}(p)$  по перекрестным. Работа этого регулятора отличается той особенностью, что при появлении отклонения лишь одной регулируемой величины он начинает одновременно перемещать оба регулирующих органа.

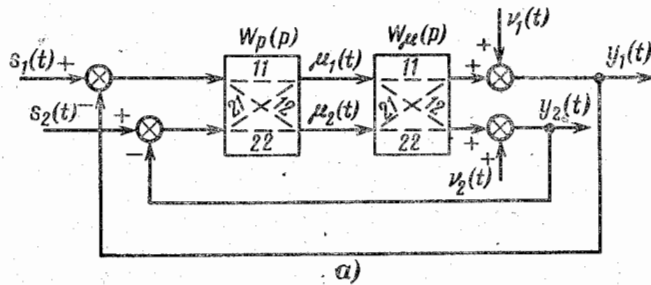
Рассмотрим предельную точность регулирования рассматриваемой системы по отношению лишь к одному, произвольно выбранному возмущению  $\lambda(t)$ . В этом случае математическое описание объекта должно включать в себя шесть динамических характеристик:  $W_{\mu11}(p)$  и  $W_{\mu12}(p)$  по каналам передачи первого регулирующего воздействия  $\mu_1(t)$  соответственно на  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ ;  $W_{\mu21}(p)$  и  $W_{\mu22}(p)$  по каналам действия  $\mu_2(t)$  на  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  и  $W_{\lambda1}(p)$  и  $W_{\lambda2}(p)$  по каналам действия возмущения  $\lambda(t)$  на  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Целью синтеза является определение четырех оптимальных операторов регулятора:  $W_{p11}(p)$ ,  $W_{p12}(p)$ ,  $W_{p21}(p)$ ,  $W_{p22}(p)$  (здесь первый индекс обозначает номер регулируемой величины, а второй — номер регулирующего воздействия).

Если интересоваться изменением лишь одной регулируемой величины, например  $y_1(t)$ , то схема системы на рис. 9-15,а может быть преобразована к виду, указанному на рис. 9-15,б. Легко видеть, что эта схема оказалась подобной ранее рассмотренной схеме регулирования одной регулируемой величины с добавочным воздействием от вспомогательной величины (см. рис. 9-1). Напомним, что улучшение точности регулирования в упомянутой системе было обусловлено тем обстоятельством, что возмущающее воздействие  $\lambda(t)$  начинает влиять на вспомогательную величину раньше, чем на основную, т. е. тем, что запаздывание  $\tau_{\lambda z}$  в канале с оператором  $W_{\lambda z}(p)$  было меньшим запаздывания  $\tau_{\lambda y}$  в канале  $W_{\lambda y}(p)$ . Это приводит к более раннему вмешательству регулятора в работу и тем самым позволяет более качественно осуществлять процесс регулирования.

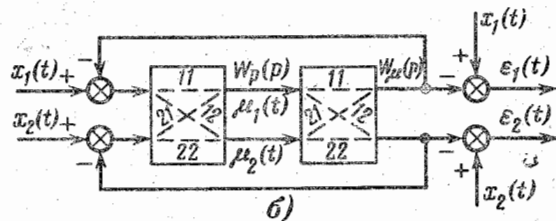
Аналогичная ситуация может возникнуть и в рассматриваемом здесь случае системы связанного регулирования. Если запаздывание  $\tau_{\lambda y_2}$  по каналу действия возмущения  $\lambda(t)$  на вторую регулируемую величину  $y_2(t)$  [каналу с оператором  $W_{\lambda y_2}(p)$ ] окажется меньше, чем запаздывание по каналу на первую регулируемую величину  $y_1(t)$  [с оператором  $W_{\lambda y_1}(p)$ ], точность поддержания первой величины  $y_1(t)$  может быть сделана выше, чем это имело бы место при индивидуальном ее регулировании. Иначе говоря, вторая регулируемая величина  $y_2(t)$  может рассматриваться как вспомогательная при регулировании первой, введение воздействия от которой позволяет повысить точность регулирования  $y_1(t)$ .



Более того, система связанного регулирования с этой точки зрения располагает большими потенциальными возможностями сравнительно с обычной схемой с добавочным воздействием (см. рис. 9-1) в том отношении, что регулирующие воздействия регулятора на величину  $y_1(t)$  проходят не только по каналу с оператором  $W_{\mu 11}(p)$ , но и по каналу с оператором  $W_{\mu 21}(p)$ . Поэтому если запаздывание в первом канале  $\tau_{\mu 11}$  окажется больше, чем запаздывание  $\tau_{\mu 21}$ , то имеется возможность для дальнейшего повышения точности регулирования.



а)



б)

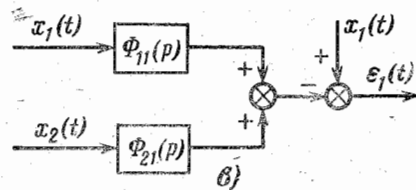


Рис. 9-16.

Синтез оптимальных (с точки зрения достижения предельной эффективности) регуляторов в рассматриваемой системе может быть осуществлен теми же приемами, что и синтез системы с одной регулируемой величиной с добавочными воздействиями (см. § 9-1). Для

этого исходную схему на рис. 9-15,б следует представить в свернутом виде, как это указано на рис. 9-15,в, и определить оптимальную весовую характеристику системы  $\Phi(t)$ , которая должна удовлетворять условию физической осуществимости:

$$\varphi_{\text{опт } \lambda y_1}(t) = 0 \text{ при } t < \begin{cases} \tau_{\mu y_1} + \tau_{\mu 11}; \\ \tau_{\lambda y_1} + \tau_{\mu 21}; \\ \tau_{\mu y_2} + \tau_{\mu 11}; \\ \tau_{\lambda y_2} + \tau_{\mu 21}. \end{cases} \quad (9-62)$$

причем определяющей является наименьшая из указанных четырех сумм запаздываний  $\tau_{\lambda y_1}$ ,  $\tau_{\lambda y_2}$ ,  $\tau_{\mu 11}$ ,  $\tau_{\mu 21}$ .

Подобным же образом может быть произведен синтез оптимального оператора системы регулирования  $\Phi_{\text{опт } \lambda y_2}(p)$ , определяющего влияние выбранного возмущения на вторую регулируемую величину. Затем по известным  $\Phi_{\text{опт } \lambda y_1}(p)$  и  $\Phi_{\text{опт } \lambda y_2}(p)$  находятся оптимальные выражения для операторов четырех каналов регулятора, минимизирующих ошибку регулирования обеих величин.

Таким образом, система связанного регулирования нескольких регулируемых величин по отношению к возмущению, оказывающему влияние на все эти величины, в принципе может осуществлять процесс регулирования более точно, чем отдельно взятые индивидуальные системы.

В общем случае на объект действует большое число возмущений (многие из которых вообще недоступны для контроля); кроме того, могут меняться во времени и заданные значения регулируемых величин  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

Расчетная схема системы регулирования, учитывающая все указанные воздействия, может быть представлена в виде, указанном на рис. 9-16,а, где через  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  обозначены эквивалентные возмущения (учитывающие влияние всех без исключения возмущений), приведенные соответственно к регулируемым величинам  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ .

В свою очередь последняя схема может быть представлена как указано на рис. 9-16,б, где  $x_1(t) = s_1(t) - v_1(t)$  и  $x_2(t) = s_2(t) - v_2(t)$  представляют собой эквивалентные задающие воздействия.

Рассмотрим ошибку регулирования  $\epsilon_1(t)$  первой регулируемой величины  $y_1(t)$ . Схема, определяющая формирование этой ошибки, может быть представлена в виде, указанном на рис. 9-16,в. Легко видеть, что эта схема оказалась тождественной расчетной схеме системы с добавочным воздействием от вспомогательной регулируемой величины, которая уже рассматривалась ранее на рис. 9-2,в, если обозначить в ней  $\Phi_{21}(p) = W_{\rho y}(p)$  и  $\Phi_{11}(p) = \Phi_{s y}(p)$ . Соответственно для определения оптимальных весовых динамических характеристик  $\Phi_{11}(t)$  и  $\Phi_{21}(t)$  в схеме рис. 9-16 можно воспользоваться системой интегральных уравнений (9-11), которые

В принятых здесь обозначениях записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r_{x_1 x_2}(\tau) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{210пг}(\xi) r_{x_2 x_1}(\xi - \tau) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{110пг}(\xi) r_{x_1 x_1}(\tau - \xi) d\xi; \\ r_{x_2 x_1}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{110пг}(\xi) r_{x_2 x_1}(\tau - \xi) d\xi - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{210пг}(\xi) r_{x_2 x_2}(\tau - \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} (9-63)$$

где  $r_{x_1 x_1}(\tau)$  и  $r_{x_2 x_2}(\tau)$  — автокорреляционные функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ ;  $r_{x_2 x_1}(\tau)$  — взаимная корреляционная функция между  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$ .

Уравнения (9-63) должны решаться при добавочном условии, что  $\varphi_{11}(t) = 0$  и  $\varphi_{21}(t) = 0$  при  $t < \tau_{мин1}$ , где  $\tau_{мин1}$  — наименьшее из запаздываний  $\tau_{\mu 11}$ ,  $\tau_{\mu 21}$  по каналам действия  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  на  $y_1(t)$ .

Подобным же образом можно показать, что оптимальные импульсные переходные характеристики  $\varphi_{22}(t)$  и  $\varphi_{12}(t)$ , минимизирующие среднеквадратичное отклонение второй регулируемой величины  $y_2(t)$ , определяются системой интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{x_2 x_2}(\tau) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{120пг}(\xi) r_{x_1 x_2}(\xi - \tau) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{220пг}(\xi) r_{x_2 x_2}(\tau - \xi) d\xi; \\ r_{x_1 x_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{220пг}(\xi) r_{x_1 x_2}(\tau - \xi) d\xi - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{120пг}(\xi) r_{x_1 x_1}(\tau - \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} (9-64)$$

причем  $\varphi_{12}(t)$  и  $\varphi_{22}(t)$  должны быть равными нулю при  $t < \tau_{мин2}$ , где  $\tau_{мин2}$  — наименьшее из запаздываний  $\tau_{\mu 12}$ ,  $\tau_{\mu 22}$ .

В уравнениях (9-63) и (9-64) весовые характеристики соответствуют операторам  $\Phi_{11}(p)$ ,  $\Phi_{12}(p)$ ,  $\Phi_{21}(p)$ ,  $\Phi_{22}(p)$ , которые связаны

с операторами объекта и регулятора следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11}(p) &= \frac{K_{11}(p)[1 - K_{22}(p)] - K_{21}(p)K_{12}(p)}{[1 + K_{11}(p)][1 + K_{22}(p)] - K_{21}(p)K_{12}(p)}; \\ \Phi_{21}(p) &= \frac{-K_{21}(p)K_{22}(p)}{[1 + K_{11}(p)][1 + K_{22}(p)] - K_{21}(p)K_{12}(p)}; \\ \Phi_{22}(p) &= \frac{K_{22}(p)[1 + K_{11}(p)] - K_{12}(p)K_{21}(p)}{[1 + K_{22}(p)][1 + K_{11}(p)] - K_{12}(p)K_{21}(p)}; \\ \Phi_{12}(p) &= \frac{-K_{12}(p)K_{11}(p)}{[1 + K_{22}(p)][1 + K_{11}(p)] - K_{12}(p)K_{21}(p)}, \end{aligned} \right\} (9-65)$$

где

$$\begin{aligned} K_{21}(p) &= W_{p22}(p)W_{\mu 21}(p) + W_{p21}(p)W_{\mu 11}(p); \\ K_{11}(p) &= W_{p11}(p)W_{\mu 11}(p) + W_{p12}(p)W_{\mu 21}(p); \\ K_{12}(p) &= W_{p11}(p)W_{\mu 12}(p) + W_{p12}(p)W_{\mu 22}(p); \\ K_{22}(p) &= W_{p22}(p)W_{\mu 22}(p) + W_{p21}(p)W_{\mu 12}(p). \end{aligned}$$

Используя эти формулы, можно по найденным  $\Phi_{11}(p)$ ,  $\Phi_{12}(p)$ ,  $\Phi_{22}(p)$ ,  $\Phi_{21}(p)$  определить и оптимальные операторы регулятора.

Минимальная дисперсия ошибки регулирования, получаемая при использовании таких оптимальных передаточных функций, определяется формулами, аналогичными (9-12):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\epsilon_1 мин}^2 &= \sigma_{x_1}^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{110пг}(\tau) r_{x_1 x_1}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{210пг}(\tau) r_{x_2 x_1}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{\epsilon_2 мин}^2 &= \sigma_{x_2}^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{220пг}(\tau) r_{x_2 x_2}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{120пг}(\tau) r_{x_1 x_2}(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} (9-66)$$

При переходе к технической реализации найденных указанным образом оптимальных алгоритмов функционирования регулятора в многосвязных системах приходится вводить ряд добавочных ограничений, среди которых наиболее важным является требование устойчивости системы. Это ограничение в многосвязных системах приобретает особенно важное значение, так как наличие перекрестных связей в объекте и регуляторе приводит к появлению в системе большого числа дополнительных замкнутых контуров циркулирования воздействий (число которых может намного превышать число регулируемых величин). Особенно неприятным здесь является то, что наличие перекрестных связей может привести к появлению контуров с положительными обратными связями.

Указанное обстоятельство в общем случае значительно осложняет проблему синтеза оптимальной многосвязной системы при наличии ограничений. Как правило, ее приходится решать методом последовательных приближений с использованием моделирующих устройств. Ряд инженерных методов синтеза многосвязных систем рассмотрен в [Л. 82].

Имеются, однако, некоторые практически важные и распространенные случаи, когда синтез многосвязных систем может осуществляться поэтапно по отдельным контурам, причем на каждом из таких этапов расчета могут использоваться изложенные ранее методы расчета систем с одной регулируемой величиной.

1. Случай, когда инерционность основного канала регулирования объекта для одной регулируемой величины существенно меньше инерционности основного канала для другой величины.

В этом случае разность частот, на которых работают отдельные контуры регулирования, оказывается настолько значительной, что имеется возможность произвести синтез регулятора для малоинерционного контура в предположении, что второй контур отсутствует. После этого может быть произведен синтез другого регулятора, эквивалентный объект которого строится с учетом уже найденного регулятора для первого контура. Порядок расчета здесь по существу остается подобным расчетам при синтезе каскадных схем регулирования систем с одной регулируемой величиной, и поэтому подробно на нем останавливаться не будем.

2. Случай, когда регулируемые величины не имеют общих возмущений.

Физически этот случай соответствует тому, что каждое из возмущений действует только на «свою» регулируемую величину и практически не оказывает влияния на другие регулируемые величины. Наличие перекрестных связей в объекте по регулирующим воздействиям в этом случае, по-видимому, всегда вредно, так как по этим каналам возмущения посредством регулятора начинают оказывать влияние не только на «свои», но и на другие регулируемые величины. Сюда же следует отнести случай, когда среди входных воздействий на систему основной вес имеют управляющие воздействия  $s(t)$ , изменение каждого из которых должно оказывать влияние лишь на одну регулируемую величину.

Очевидно, что в рассматриваемом случае самое лучшее, что можно сделать — это выбрать перекрестные связи в регуляторе так, чтобы они по возможности полностью компенсировали перекрестные связи [с операторами  $W_{\mu 12}(p)$  и  $W_{\mu 21}(p)$ ] в регулируемом объекте. Очевидно, что условия такой компенсации имеют вид

$$\left. \begin{aligned} W_{p21}(p) W_{\mu 11}(p) &= W_{p22}(p) W_{\mu 21}(p); \\ W_{p12}(p) W_{\mu 22}(p) &= W_{p11}(p) W_{\mu 12}(p), \end{aligned} \right\} \quad (9-67)$$

из которых находятся выражения для частотных характеристик оптимальных компенсирующих связей в регуляторе:

$$\left. \begin{aligned} W_{p21}(p) &= \frac{W_{\mu 21}(p)}{W_{\mu 11}(p)} W_{p22}(p); \\ W_{p12}(p) &= \frac{W_{\mu 12}(p)}{W_{\mu 22}(p)} W_{p11}(p). \end{aligned} \right\} \quad (9-68)$$

Условия, определяемые последними формулами, получили название условий автономности отдельных контуров многосвязной системы регулирования. Самы системы регулирования, удовлетворяющие этим условиям, называются автономными системами.

Синтез автономной многосвязной системы регулирования может быть расчленен на два этапа. Вначале, по известным частотным характеристикам прямых каналов регулируемого объекта  $W_{\mu 11}(p)$  и  $W_{\mu 22}(p)$  определяются оптимальные частотные характеристики прямых каналов регулятора  $W_{p11}(p)$  и  $W_{p22}(p)$ , причем расчет производится так, как если бы обе системы являлись полностью независимыми системами, каждая с одной регулируемой величиной. Основанием такого подхода является то обстоятельство, что в дальнейшем выбор перекрестных связей будет произведен так, что обе эти системы будут действительно независимыми. После этого по известным  $W_{p11}(p)$  и  $W_{p22}(p)$  с помощью формул (9-68) находятся оптимальные характеристики  $W_{p12}(p)$  и  $W_{p21}(p)$ .

Найденные операторы регулятора являются естественно идеализированными, к которым следует стремиться при выборе реальных операторов технических элементов системы. Для выбора этих реальных операторов, очевидно, могут быть использованы рассмотренные в § 9-4 методы синтеза систем с компенсацией возмущений.

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ  
НАСТРОЙКИ ДЕЙСТВУЮЩИХ АВТОМАТИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ**

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ**

**10-1. Понятие о статистических оценках**

Необходимые для расчетов систем регулирования динамические характеристики регулируемого объекта и вероятностные характеристики действующих на объект возмущений, как правило, приходится получать экспериментально непосредственно на объекте. Обусловлено это тем, что аналитические методы расчета динамических характеристик промышленных объектов обычно позволяют получить лишь весьма приближенное их значение. Что касается вероятностных характеристик возмущений, то они по самой своей природе не могут быть получены аналитическим путем и могут быть определены лишь обработкой реализаций возмущений, снятых на объекте в процессе его эксплуатации.

Порядок проведения экспериментов по оценке динамических характеристик объекта непосредственно следует из самого определения понятия этих характеристик. Так, для нахождения переходной характеристики объекта по регулирующему каналу необходимо установить равновесный режим работы объекта и затем нанести регулирующим органом ступенчатое воздействие и зарегистрировать изменение во времени регулируемой величины; для определения частотной характеристики этого канала следует подавать гармонические воздействия различных частот и, зарегистрировав в каждом случае установившиеся колебания выходной величины, вычислить отношение амплитуд и фазовый сдвиг между выходным и входным сигналами и т. д.

Таким образом, определение динамических характеристик в общем случае должно сопровождаться нарушением нормального режима работы объекта, и для того чтобы это нарушение было достаточно малым, приходится идти на уменьшение амплитуды испытательных воздействий. В то же время в процессе проведения экспериментов объект находится под влиянием неустраиваемых случайных возмущений, искажающих результат эксперимента, причем относительное влияние этих возмущений оказывается тем большим, чем меньше выбрана амплитуда испытательных воздействий. Влияние случайных возмущений и помех может быть снижено повторением опытов и усреднением их результатов, но это приводит к удлинению экспериментов, что обычно также нежелательно. В этой связи возникает задача о выборе числа повторений эксперимента для того, чтобы при допустимом нарушении нормального режима работы объекта была уверенность, что полученная из эксперимента динамическая характеристика достаточно близка к действительной характеристике. Аналогичная ситуация возникает и при экспериментальном определении корреляционных функций случайных воздействий. Практически реализация, по которой осуществляются расчеты, всегда имеет ограниченную длину, и поэтому возникает вопрос, какова должна быть ее минимальная длина, чтобы вычисленная по ней корреляционная функция достаточно мало отличалась от действительной корреляционной функции.

В основе методов решения подобных задач лежат методы статистических оценок неизвестных параметров случайных величин — математического ожидания и дисперсии, а также корреляционного момента двух случайных величин. Процедура получения оценок обычно имеет следующий вид:

1. Производится  $n$  независимых опытов, в результате которых получают выборку  $x_1, x_2, \dots, x_n$  независимых значений изучаемой случайной величины  $X$ .

2. Составляется функция  $\tilde{a}$  от полученных значений случайной величины  $X$ :

$$\tilde{a} = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10-1)$$

Функция (10-1), очевидно, может рассматриваться как одно из возможных значений новой случайной величины

$$\tilde{A} = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (10-2)$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — случайные величины, обладающие тем же законом распределения, что и  $X$ .

Случайная величина  $\tilde{A}$  называется оценкой параметра  $a$  величины  $X$ , если по мере увеличения числа опытов  $n$  ее возможные значения все более тесно группируются вокруг оцениваемого параметра  $a$ . Практически это значит, что дисперсия случайной величины  $\tilde{A}$  с увеличением  $n$  должна стремиться к нулю (оценка, обладающая таким свойством, является состоятельной), а ее математическое ожидание должно совпадать с оцениваемым параметром (такая оценка называется несмещенной).

3. По заданному закону распределения случайной величины  $X$  находится закон распределения оценки  $\tilde{A}$ . Задавшись затем достаточно малой вероятностью  $q$  такой, что событие, имеющее вероятность меньше  $q$ , может считаться практически невозможным, определяют наибольшее  $\tilde{a}_{\max}$  и наименьшее  $\tilde{a}_{\min}$  возможные значения  $\tilde{A}$ , которые могут появиться в результате проведения опытов; при этом обычно выбор  $\tilde{a}_{\min}$  и  $\tilde{a}_{\max}$  осуществляют при дополнительном условии, что вероятность превышения величины  $\tilde{a}_{\max}$  и вероятность получения  $\tilde{a}$  меньше  $\tilde{a}_{\min}$  одинакова. В этом случае определение  $\tilde{a}_{\min}$  и  $\tilde{a}_{\max}$  осуществляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{2} &= \int_{\tilde{a}_{\max}}^{\infty} p(\tilde{a}) d\tilde{a}; \\ \frac{q}{2} &= \int_{-\infty}^{\tilde{a}_{\min}} p(\tilde{a}) d\tilde{a}, \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

где  $p(\tilde{a})$  — плотность распределения оценки  $\tilde{A}$ .

Тем самым определяются и наибольшие возможные отклонения оценки  $\tilde{A}$  от своего математического ожидания  $m_{\tilde{a}}$ , т. е. от оцениваемого параметра в большую или меньшую сторону:  $\Delta\tilde{a}_+ = \tilde{a}_{\max} - m_{\tilde{a}}$  и  $\Delta\tilde{a}_- = m_{\tilde{a}} - \tilde{a}_{\min}$ .

Самое худшее, на что можно рассчитывать, это если в результате опыта получено одно из крайних значений оценки (либо  $\tilde{a}_{\min}$ , либо  $\tilde{a}_{\max}$ ). В этом случае действительное значение параметра  $a$  будет в наибольшей степени отличаться от  $\tilde{a}$ . Соответственно интервал, в кото-

ром с вероятностью  $P_{\text{дов}} = 1 - q$  должен находиться оцениваемый параметр  $a$ , определяется формулой

$$\tilde{a} - \Delta\tilde{a}_+ < a < \tilde{a} + \Delta\tilde{a}_-. \quad (10-4)$$

Этот интервал получил название доверительного интервала  $a$ , а вероятность  $P_{\text{дов}}$  — доверительной вероятности.

В случае, когда плотность распределения  $p(\tilde{a})$  имеет симметричный относительно математического ожидания  $m_{\tilde{a}}$  вид,  $\Delta\tilde{a}_+ = \Delta\tilde{a}_- = \Delta\tilde{a}$  и формулу (10-4) можно переписать следующим образом:

$$a = \tilde{a} \pm \Delta\tilde{a}. \quad (10-5)$$

При практическом использовании изложенного способа построения доверительных интервалов обычно возникают затруднения, обусловленные зависимостью плотности распределения  $p(\tilde{a})$  оценки  $\tilde{A}$  от самого оцениваемого параметра  $a$ . Это затруднение приходится устранять путем перехода к некоторой новой специально подобранной случайной величине, связанной с оценкой известной функциональной зависимостью, но не зависящей от оцениваемого параметра.

## 10-2. Оценка математического ожидания случайной величины

Из определения понятия математического ожидания случайной величины следует, что при оценке этого параметра необходимо вычислять среднее арифметическое значение полученных из опытов значений  $X$ , т. е.

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (10-6)$$

Соответствующая оценка

$$\tilde{M}_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (10-7)$$

является несмещенной и состоятельной, так как

$$m_M = M \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\} = m_x; \quad (10-8)$$

$$\sigma_M^2 = D \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\} = \frac{1}{n} \sigma_x^2. \quad (10-9)$$

Кроме того, можно показать, что для нормально распределенных  $X$  эта оценка является и наилучшей в том смысле, что из всех возможных других состоятельных оценок математического ожидания она обладает при одном и том же  $n$  наименьшей дисперсией, т. е. обеспечивает наименьший случайный разброс вычисленных значений  $\tilde{m}_x$  от действительного  $m_x$  (такие оценки называются эффективными).

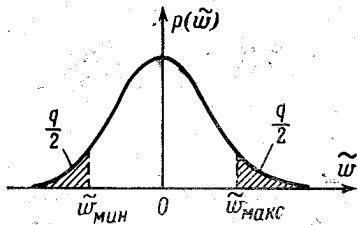


Рис. 10-1.

Так как оценка (10-7) является линейной функцией  $X_k$ , то при нормально распределенной  $X$  она также распределена нормально. Для определения границ доверительного интервала следует перейти к центрированной и нормированной случайной величине

$$\tilde{W} = \frac{1}{\sigma_M} (\tilde{M} - m_M), \quad (10-10)$$

которая может быть [если учесть (10-8) и (10-9)] представлена следующим образом:

$$\tilde{W} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_x} (\tilde{M} - m_x). \quad (10-11)$$

Переход к этой случайной величине устраняет зависимость плотности распределения оценки  $\tilde{M}_x$  от оцениваемого параметра  $m_x$  (так как математическое ожидание  $W$  равно нулю).

График плотности распределения этой случайной величины приведен на рис. 10-1. В силу его симметрии формулы (10-3) в этом случае могут быть заменены одной

$$\frac{q}{2} = \int_{\tilde{w}_{\max}}^{\infty} p(\tilde{w}) d\tilde{w} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{w}_{\max}}^{\infty} e^{-\frac{\tilde{w}^2}{2}} d\tilde{w} = 1 - \Phi(\tilde{w}_{\max}), \quad (10-12)$$

где  $\Phi(\tilde{w}_{\max})$  — интеграл вероятности.

В табл. 10-1 приведены вычисленные по этой формуле значения  $\tilde{w}_{\max}$  для нескольких наиболее употребительных на практике значений доверительной вероятности  $P_{\text{дов}} = 1 - q$ .

Таблица 10-1

$P_{\text{дов}}$	$\tilde{w}_{\max}$	$P_{\text{дов}}$	$\tilde{w}_{\max}$
0,900	1,645	0,980	2,326
0,950	1,960	0,990	2,576

Как следует из формулы (10-11), наибольшее отклонение  $\tilde{M}$  от своего математического ожидания связано с  $\tilde{w}_{\max}$  соотношением

$$\Delta \tilde{m} = \tilde{m}_{\max} - m_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tilde{w}_{\max}. \quad (10-13)$$

и поэтому формула (10-4) для границ доверительного интервала в рассматриваемом случае приобретает следующий вид:

$$\tilde{m}_x - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tilde{w}_{\max} < m_x < \tilde{m}_x + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tilde{w}_{\max}. \quad (10-14)$$

Однако при попытке использования этой формулы в расчетах возникает затруднение, вызванное тем, что в ней фигурирует среднеквадратичное значение  $\sigma_x$  случайной величины  $X$ , которое заранее обычно никогда неизвестно. В этих условиях можно заменить неизвестную дисперсию  $\sigma_x^2$  значением ее оценки

$$\tilde{d}_x = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{m}_x)^2. \quad (10-15)$$

Обратим внимание, что в этой формуле при вычислении среднего арифметического деление производится не на  $n$ , а на  $n-1$ , так как только в этом случае, как показывают расчеты, оценка дисперсии

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \tilde{M}_x)^2, \quad (10-16)$$

будет несмещенной.

Замена в формуле (10-14)  $\sigma_x$  на  $\tilde{\sigma}_x$  может считаться допустимой лишь при достаточно большом значении

Границы доверительного интервала распределения  
Стьюдента для доверительной вероятности 0,98

$f$	$\tilde{t}_{\max}$	$f$	$\tilde{t}_{\max}$	$f$	$\tilde{t}_{\max}$
1	31,82	11	2,718	21	2,518
2	6,965	12	2,681	22	2,508
3	4,541	13	2,650	23	2,500
4	3,747	14	2,624	24	2,492
5	3,365	15	2,602	25	2,485
6	3,141	16	2,583	26	2,479
7	2,998	17	2,567	27	2,473
8	2,896	18	2,552	28	2,467
9	2,821	19	2,539	29	2,462
10	2,764	20	2,528	30	2,457
					2,326

(практически при  $n > 30$ ). Однако замена  $\sigma_x$  на  $\tilde{\sigma}_x$  будет логически безупречной, если ее производить не на заключительном этапе расчета (10-14), а в самом начале, при переходе от  $X$  к новой, не зависящей от  $m$  случайной величине, т. е. в формуле (10-11). Получаемая в результате этого новая случайная величина

$$\tilde{T} = \sqrt{\frac{n}{\tilde{D}_x}} (\tilde{M} - m_x) \quad (10-17)$$

при нормально распределенной  $X$  уже не будет распределена нормально. Можно показать [Л. 41], что эта величина имеет плотность распределения, определяемую формулой

$$\tilde{p}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \left(1 + \frac{\tilde{t}^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}, \quad (10-18)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция;  $f = n - 1$ ;  $\tilde{t}$  — возможные значения  $\tilde{T}$ .

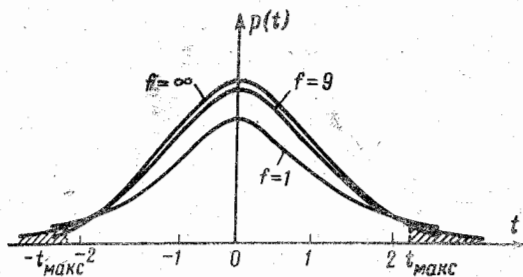


Рис. 10-2.

Это распределение называется распределением Стьюдента с  $f$  степенями свободы. График плотности распределения для каждого  $f$  представляет собой колоколообразную кривую (подобную графику плотности нормального распределения), симметричную относительно начала координат (рис. 10-2). В табл. 10-2 приведены границы доверительного интервала для распределения Стьюдента при доверительной вероятности, равной 0,98 (более подробные таблицы для других значений доверительной вероятности можно найти в пособиях по математической статистике).

Из формулы (10-17) следует, что максимально возможному значению  $t_{\max}$  соответствует наибольшее отклонение оценки от истинного значения математического ожидания, определяемое следующим образом:

$$\tilde{m} = m_{\max} - m_x = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \tilde{t}_{\max}. \quad (10-19)$$

Поэтому формула (10-4) для границ доверительного интервала приобретает вид:

$$\tilde{m}_x - \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \tilde{t}_{\max} < m_x < \tilde{m}_x + \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \tilde{t}_{\max}. \quad (10-20)$$

Схема расчетов при оценке математического ожидания должна быть следующей:

1) производится  $n$  независимых измерений случайной величины  $X$  и по формуле (10-6) находится оценка  $\tilde{m}_x$ , которая может считаться приближенным значением математического ожидания  $m_x$ ;

2) по формуле (10-15) определяется оценка дисперсии  $\sigma_x^2$  случайной величины  $X$ , а по таблицам границ доверительных интервалов для распределения Стьюдента при выбранной доверительной вероятности  $P_{\text{дов}}$  и  $f = n - 1$  находится  $\tilde{t}_{\max}$ .

3) границы доверительного интервала для  $M_x$  (границы возможного отклонения действительного значения математического ожидания  $m_x$  от вычисленной оценки  $\tilde{m}_x$ ) находятся по формуле (10-20).

При достаточно большом числе опытов ( $n > 30$ ) распределение Стьюдента практически совпадает с нормальным распределением и вместо таблиц доверительных интервалов для распределения Стьюдента можно пользоваться соответствующими таблицами для нормального распределения, т. е. можно пользоваться не формулой (10-20), а формулой (10-14).

Заметим, что при отсутствии априорных сведений о дисперсии случайной величины  $\sigma_x^2$  заранее, до начала опытов, нет возможности подсчитать, сколько опытов  $n$  необходимо будет произвести для того, чтобы оценить математическое ожидание с требуемой точностью. Определение получаемой точности оценки в этом случае приходится производить после каждого очередного опыта. Лишь при достаточно большом числе повторений опытов (при  $n > 30$ ) можно сделать определенные выводы относительно необходимого их числа. В этом случае в формуле (10-20) можно заменить  $t_{\text{макс}}$  на  $\tilde{w}_{\text{макс}}$ , соответствующее принятой доверительной вероятности (например, для  $P_{\text{доп}} = 0,98$  эта величина будет равна 2,326). Требуемое число опытов может быть найдено из формулы

$$n \geq \frac{\tilde{\sigma}_x^2}{\Delta \tilde{m}_{\text{доп}}^2} \tilde{w}_{\text{макс}}^2, \quad (10-21)$$

где  $\Delta \tilde{m}_{\text{доп}}$  — допустимая абсолютная величина погрешности оценки.

Измерения нормально распределенной случайной величины в пяти независимых повторениях опыта дали следующие результаты:  $-0,538$ ;  $-0,211$ ;  $-0,604$ ;  $-1,590$ ;  $-0,597$ .

Оценка математического ожидания, выполненная по формуле (10-6), дает следующий результат:

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{5} (-0,538 - 0,211 - 0,604 - 1,590 - 0,597) = -0,708,$$

а оценка дисперсии, выполненная по формуле (10-15),

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{4} [(-0,538 + 0,708)^2 + (-0,211 + 0,708)^2 + (-0,604 + 0,708)^2 + (-1,590 + 0,708)^2 + (-0,597 + 0,708)^2] = 0,269.$$

По табл. 10-2 для  $f = 5 - 1 = 4$  находим  $t_{\text{макс}} = 3,747$ . Из формулы (10-19) определяется максимальная возможная погрешность оценки

$$\Delta \tilde{m} = \sqrt{\frac{0,269}{5}} \cdot 3,747 = 0,869.$$

т. е. действительное значение математического ожидания с вероятностью 0,98 должно находиться в пределах  $-1,577 \div +0,161$ .

Этот пример иллюстрирует важность построения доверительных интервалов при оценке среднего значения случайной величины.

Рассмотренная выборка взята из таблицы значений нормально распределенной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, и лишь случайно (из-за крайне ограниченного объема выборки) все ее значения оказались отрицательными и сосредоточенными вокруг значения  $-0,708$ . Без построения доверительных интервалов вряд ли могло в этих условиях возникнуть предположение, что действительное значение математического ожидания равно нулю.

### 10-3. Оценка дисперсии случайной величины

Рассмотрим вначале порядок оценки дисперсии  $\sigma_x^2$  случайной величины  $X$  по ее выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , когда математическое ожидание этой случайной величины  $m_x$  заранее известно. В качестве значения оценки дисперсии здесь следует выбрать среднее арифметическое квадратов отклонений измеренных значений  $X$  от  $m_x$ :

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2, \quad (10-22)$$

т. е. оценкой дисперсии является случайная величина  $\tilde{D}_x$ , связанная с  $X_1, X_2, \dots, X_n$  соотношением

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m_x)^2. \quad (10-23)$$

Умножив и разделив правую часть этой формулы на постоянное число  $\sigma_x^2$ , ее можно представить в следующем виде:

$$\tilde{D}_x = \frac{\sigma_x^2}{n} \chi^2, \quad (10-24)$$

где

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{X_k - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \quad (10-25)$$

есть случайная величина, представляющая собой сумму квадратов центрированных и нормированных случайных



Граница доверительных интервалов распределения хи-квадрат для доверительной вероятности 0,98

$n$	$\chi^2_{\text{мин}}$	$\chi^2_{\text{макс}}$	$n$	$\chi^2_{\text{мин}}$	$\chi^2_{\text{макс}}$
1	0,000157	6,635	16	5,812	32,00
2	0,0201	9,210	17	6,408	33,41
3	0,115	11,34	18	7,015	34,81
4	0,297	13,28	19	7,663	36,19
5	0,554	15,09	20	8,260	37,57
6	0,872	16,81	21	8,897	38,93
7	1,239	18,48	22	9,542	40,29
8	1,646	20,09	23	10,20	41,64
9	2,088	21,67	24	10,86	42,98
10	2,558	23,21	25	11,52	44,31
11	3,053	24,72	26	12,20	45,64
12	3,571	26,22	27	12,88	46,96
13	4,107	27,69	28	13,56	48,28
14	4,660	29,14	29	14,26	49,59
15	5,229	30,58	30	14,95	50,89

величин. Можно показать [Л. 41], что при нормально распределенной случайной величине  $X$  величина  $\chi^2$  имеет плотность распределения, не зависящую от оцениваемого параметра  $\sigma_x^2$ , и определяемую формулой

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \frac{n-2}{(\chi^2)^{\frac{n-2}{2}}} \text{ для } 0 < \chi^2 < \infty, \quad (10-26)$$

а ее математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\left. \begin{aligned} m_{\chi^2} &= n; \\ \sigma_{\chi^2}^2 &= 2n. \end{aligned} \right\} \quad (10-27)$$

Распределение, определяемое формулой (10-26), называется распределением Пирсона или распределением

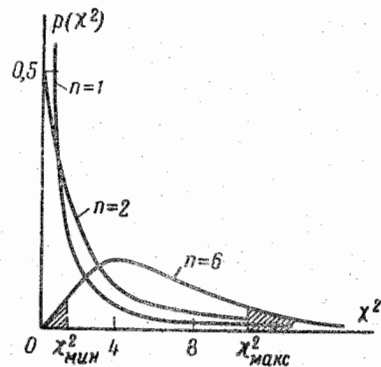


Рис. 10-3.

хи-квадрат с  $n$  степенями свободы. В отличие от ранее рассмотренных распределений график  $p(\chi^2)$  имеет несимметричный характер (рис. 10-3) и, следовательно, границы доверительного интервала  $\chi_{\text{мин}}^2$  и  $\chi_{\text{макс}}^2$ , вычисленные по формулам (10-3), будут различными. В табл. 10-3 приведены значения этих границ для доверительной вероятности 0,98.

В соответствии с (10-24) математическое ожидание и дисперсия оценки (10-23) определяются формулами

$$M\{\tilde{D}_x\} = \frac{\sigma_x^2}{n} M\{\chi^2\};$$

$$D\{\tilde{D}_x\} = \frac{\sigma_x^4}{n^2} D\{\chi^2\}$$

или

$$m_{\tilde{D}} = \sigma_x^2; \quad (10-28)$$

$$\sigma_{\tilde{D}}^2 = \frac{2}{n} \sigma_x^4. \quad (10-29)$$

Таким образом, оценка (10-23) является несмещенной и состоятельной. Наибольшее и наименьшее возможные отклонения оценки  $\tilde{D}_x$  от своего математического ожидания в большую и меньшую стороны определяются соответственно выражениями:

$$\sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{n} \chi_{\text{мин}}^2 = \sigma_x^2 \left(1 - \frac{1}{n} \chi_{\text{мин}}^2\right);$$

$$\frac{\sigma_x^2}{n} \chi_{\text{макс}}^2 - \sigma_x^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{1}{n} \chi_{\text{макс}}^2 - 1\right),$$

и поэтому в соответствии с (10-4) истинное значение оцениваемой дисперсии должно удовлетворять неравенствам:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x^2 - \sigma_x^2 \left( \frac{1}{n} \chi_{\max}^2 - 1 \right) &< \sigma_x^2; \\ \tilde{\sigma}_x^2 + \sigma_x^2 \left( 1 - \frac{1}{n} \chi_{\min}^2 \right) &> \sigma_x^2, \end{aligned}$$

т. е. границы доверительного интервала для  $\sigma_x^2$  определяются следующим образом:

$$\frac{n \tilde{\sigma}_x^2}{\chi_{\max}^2} < \sigma_x < \frac{n \tilde{\sigma}_x^2}{\chi_{\min}^2}. \quad (10-30)$$

При достаточно большом числе опытов ( $n > 30$ ) распределение случайной величины  $D_x$  стремится к нормальному (как сумма независимых случайных величин).

Соответствующая ей центрированная и нормированная случайная величина в этом случае будет определяться формулой

$$\tilde{W} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{D_x - \sigma_x^2}{\sigma_x^2}, \quad (10-31)$$

а наибольшее отклонение  $D_x$  от своего математического ожидания

$$\tilde{\sigma}_{x\max}^2 - \sigma_x^2 = \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma_x^2 \tilde{w}_{\max}, \quad (10-32)$$

где  $\tilde{w}_{\max}$  берется из табл. 10-1.

Неравенство (10-4) здесь приобретает следующий вид:

$$\tilde{\sigma}_x^2 - \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma_x^2 \tilde{w}_{\max} < \sigma_x^2 < \tilde{\sigma}_x^2 + \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma_x^2 \tilde{w}_{\max},$$

т. е. границы доверительного интервала определяются формулой

$$\frac{\tilde{\sigma}_x^2}{1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \tilde{w}_{\max}} < \sigma_x^2 < \frac{\tilde{\sigma}_x^2}{1 - \sqrt{\frac{2}{n}} \tilde{w}_{\max}}, \quad (10-33)$$

которая при достаточно малом  $\sqrt{\frac{2}{n}} \tilde{w}_{\max}$  может быть заменена приближенной

$$\left( 1 - \sqrt{\frac{2}{n}} \tilde{w}_{\max} \right) \tilde{\sigma}_x^2 < \sigma_x^2 < \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \tilde{w}_{\max} \right) \tilde{\sigma}_x^2. \quad (10-34)$$

Если математическое ожидание  $m_x$  случайной величины  $X$  при оценке ее дисперсии заранее неизвестно, в качестве значения оценки дисперсии следует выбрать функцию (10-15), т. е. вместо неизвестного математического ожидания подставить в (10-22) его оценку (10-6), а чтобы оценка дисперсии после такой замены осталась несмещенной, произвести деление не на  $n$ , а на  $n-1$ . Можно показать [Л. 41], что в этом случае остаются в силе все предыдущие выкладки, но только с заменой  $n$  на  $n-1$ . Границы доверительного интервала определяются по формуле, аналогичной (10-30):

$$\frac{(n-1) \tilde{\sigma}_x^2}{\chi_{\max}^2} < \sigma_x^2 < \frac{(n-1) \tilde{\sigma}_x^2}{\chi_{\min}^2}, \quad (10-35)$$

где  $\tilde{\sigma}_x^2$  определяется по формуле (10-15), а  $\chi_{\min}^2$  и  $\chi_{\max}^2$  — по табл. 10-2 для  $f = n - 1$ .

При большом  $n$  границы доверительного интервала по-прежнему могут определяться по формуле (10-34).

Произведем оценку дисперсии случайной величины, выборка которой была приведена в примере предыдущего параграфа.

В указанном примере уже были найдены значения оценок  $\tilde{\sigma}_x^2 = 0,269$  и  $\tilde{m}_x = -0,708$ . Предельные значения для  $\chi^2$  при доверительной вероятности 0,98 и  $n-1=4$  находятся из табл. 10-3:  $\chi_{\min}^2 = 0,297$  и  $\chi_{\max}^2 = 13,28$ . В соответствии с формулой (10-35) истинное значение оцениваемой дисперсии должно быть расположено в пределах от  $4 \cdot 0,269/13,28 = 0,08$  до  $4 \cdot 0,269/0,297 = 3,62$ .

Следует обратить внимание на одну практически очень важную особенность оценки дисперсии случайной величины, существенно отличающую ее от оценки математического ожидания. При оценке математического ожидания заранее ничего нельзя сказать о требуемом объеме выборки  $n$  для того, чтобы относительная погрешность получаемого результата не превосходила заданной величины. Объясняется это тем, что степень раз-

броса значений случайной величины (ее дисперсия) никак не связана с оцениваемыми параметрами (математическим ожиданием).

Иначе обстоит дело при оценке дисперсии случайной величины. Как следует из формул (10-28) и (10-29), среднеквадратичное значение оценки дисперсии  $\sigma_x^2$  связано с оцениваемым параметром — дисперсией  $\sigma_x^2$  совершенно определенной зависимостью

$$\sigma_{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{n/2}} \sigma_x^2. \quad (10-36)$$

Поэтому здесь имеется возможность заранее подсчитать число опытов  $n$ , необходимое для того, чтобы относительная погрешность  $(\tilde{\sigma}_x^2 - \sigma_x^2)/\sigma_x^2$  определения  $\sigma_x^2$  не превышала заданных пределов  $\pm \delta$ . В частности, при достаточно больших  $n$  формула для такого подсчета [как это следует из (10-34)] имеет следующий вид:

$$n = \frac{2\tilde{\sigma}_{\max}^2}{\delta^2}, \quad (10-37)$$

т. е. при заданной доверительной вероятности необходимое число опытов растет обратно пропорционально квадрату допустимой ошибки. В табл. 10-4 приведены значения  $n$  для нескольких характерных  $P_{\text{дов}}$  и  $\delta$ .

Таблица 10-4

$\delta, \%$	$P_{\text{дов}}$	
	0,95	0,98
20	193	271
10	770	1 082
5	3 080	4 328

Из табл. 10-4, в частности, следует, что при обычно встречающихся в технических расчетах значениях доверительной вероятности 0,95 и допустимой относительной погрешности 5% число повторений

опытов оказывается намного большим 30, так что оценка дисперсии в этом случае может считаться распределенной нормально.

#### 10-4. Оценка корреляционного момента случайных величин

В соответствии с формулой для корреляционного момента  $r_{xy}$  двух случайных величин  $X$  и  $Y$  (4-48) в качестве его оценки по результатам  $n$  наблюдений следует

взять

$$\tilde{R}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m_x)(Y_k - m_y). \quad (10-38)$$

Если математические ожидания  $m_x$  и  $m_y$  неизвестны, их заменяют соответствующими оценками:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_x &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k; \\ \tilde{M}_y &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k. \end{aligned} \right\} \quad (10-39)$$

т. е. вместо (10-38) пользуются следующей формулой:

$$\tilde{R}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \tilde{M}_x)(Y_k - \tilde{M}_y). \quad (10-40)$$

В этой формуле множитель  $n/(n-1)$  необходим для того, чтобы оценка осталась несмещенной.

Можно показать, что в случае, когда  $X$  и  $Y$  подчиняются двумерному нормальному закону распределения, оценка  $R_{xy}$  имеет математическое ожидание и дисперсию, определяемые формулами:

$$M \{\tilde{R}_{xy}\} = r_{xy}; \quad (10-41)$$

$$D \{\tilde{R}_{xy}\} = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2 + r_{xy}^2}{n-1}, \quad (10-42)$$

т. е. она является несмещенной и состоятельной. Формула для дисперсии оценки (10-42) может быть также переписана в следующем виде:

$$D \{\tilde{R}_{xy}\} = \sigma_x^2 \sigma_y^2 \frac{1 + \rho_{xy}^2}{n-1}, \quad (10-43)$$

где

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \quad (10-44)$$

есть коэффициент корреляции случайных величин  $X$  и  $Y$ .

При достаточно большом числе  $n$  оценка  $\hat{R}_{xy}$  как сумма большого числа независимых случайных величин распределена практически нормально. Поэтому можно утверждать, что с заданной доверительной вероятностью  $P_{\text{дов}}$  истинное значение корреляционного момента находится в пределах доверительного интервала:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{xy} - \tilde{\omega}_{\text{макс}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2 + r_{xy}^2}{n-1}} \leq r_{xy} \leq \tilde{r}_{xy} + \\ + \tilde{\omega}_{\text{макс}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2 + r_{xy}^2}{n-1}}. \end{aligned}$$

Относительную погрешность оценки корреляционного момента удобно определять как отношение абсолютной погрешности  $\Delta r = |\tilde{r}_{xy} - r_{xy}|$  к наибольшему возможному значению корреляционного момента  $r_{\text{макс}} = \sigma_x \sigma_y$ , т. е.

$$\delta_r = \frac{|\tilde{r}_{xy} - r_{xy}|}{r_{\text{макс}}}. \quad (10-45)$$

С учетом предыдущей формулы величина такой относительной погрешности определяется следующим образом:

$$\delta_r = \frac{\Delta r}{r_{\text{макс}}} = \tilde{\omega}_{\text{макс}} \sqrt{\frac{1 + \rho_{xy}^2}{n-1}} \approx \tilde{\omega}_{\text{макс}} \sqrt{\frac{1 + \rho_{xy}^2}{n}}. \quad (10-46)$$

Как видим, ошибка в определении корреляционного момента зависит от коэффициента корреляции  $\rho_{xy}$ , который в процессе проведения эксперимента неизвестен. Если ориентироваться на наихудший случай, т. е. на наибольшую возможную погрешность, в последней формуле следует принять  $\rho_{xy} = 1$ :

$$\delta_r = \frac{\Delta r}{r_{\text{макс}}} \leq \tilde{\omega}_{\text{макс}} \sqrt{\frac{2}{n}}. \quad (10-47)$$

Таким образом, наибольшая относительная ошибка в определении корреляционного момента совпадает с относительной ошибкой оценки дисперсии [см. формулу (10-34)]. Соответственно число повторений опытов, необходимое для того, чтобы оценка корреляционного момента была получена с необходимой точностью  $\delta_r$ , по-прежнему определяется формулой (10-37).

На практике часто не требуется оценивать значение корреляционного момента, а достаточно лишь определить, являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  коррелированными. Иначе говоря, по результатам  $n$  пар незави-

симых наблюдений  $X$  и  $Y$  необходимо оценить, насколько большой должна быть оценка корреляционного момента, вычисленная по результатам этих наблюдений, для того чтобы можно было утверждать, что в действительности корреляционный момент между этими величинами не равен нулю.

Поскольку величина корреляционного момента между двумя случайными величинами зависит не только от степени статистической взаимосвязи между ними, но и от дисперсии этих величин, для решения этой задачи следует вычислять оценку коэффициента корреляции

$$\tilde{P}_{xy} = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - M_x)(Y_k - M_y)}{\sqrt{D_x D_y}}. \quad (10-48)$$

Можно показать, что если случайные величины  $X$  и  $Y$  распределены нормально и статистически независимы, то величина  $\tilde{T}$ , связанная с  $\tilde{P}_{xy}$  соотношением

$$\tilde{T} = \sqrt{n-2} \frac{\tilde{P}_{xy}}{\sqrt{1 - \tilde{P}_{xy}^2}}, \quad (10-49)$$

имеет распределение Стьюдента с  $f = n-2$  степенями свободы. Следовательно, если по результатам  $n$  независимых друг от друга наблюдений за парами значений  $X$  и  $Y$  вычислено значение оценки коэффициента корреляции

$$\tilde{\rho}_{xy} = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{m}_x)(y_k - \tilde{m}_y)}{\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 \tilde{\sigma}_y^2}}, \quad (10-50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_x &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k; & \tilde{m}_y &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k; \\ \tilde{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{m}_x)^2; \\ \tilde{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \tilde{m}_y)^2; \end{aligned} \right\} \quad (10-51)$$

то, вычислив соответствующее значение  $\bar{T}$

$$\bar{t} = \sqrt{n-2} \frac{\tilde{r}_{xy}}{\sqrt{1-\tilde{r}_{xy}^2}}. \quad (10-52)$$

можно, воспользовавшись табл. 10-2, определить, значимо ли отличается от нуля найденное значение  $r_{xy}$ . Если значение  $\bar{t}$ , вычисленное по формуле (10-52), окажется по модулю больше  $\bar{t}_{\max}$ , найденной из этой таблицы для

Таблица 10-5

$k$	$x_k$	$y_k$
1	+2,040	+0,230
2	-1,082	+0,089
3	-0,594	-0,880
4	+0,281	+0,888
5	+1,296	+0,282

$f=n-2$  и выбранной доверительной вероятности, следует считать, что случайные величины  $X$  и  $Y$  статистически зависимы. Необходимо, однако, подчеркнуть, что если  $\bar{t}$  окажется по модулю меньше  $\bar{t}_{\max}$ , столь категоричного заключения делать нельзя — в этом случае слу-

чайные величины могут быть как зависимыми, так и независимыми. Иначе говоря, при  $|\bar{t}| > \bar{t}_{\max}$  данные опыта говорят о необходимости отвергнуть гипотезу о независимости рассматриваемых величин, при  $|\bar{t}| < \bar{t}_{\max}$  данные опыта допускают возможность отсутствия между случайными величинами статистической связи.

Произведено пять независимых друг от друга наблюдений за одновременно появляющимися парами значений двух нормально распределенных случайных нормально распределенных величин  $X$  и  $Y$ ; результаты этих наблюдений приведены в табл. 10-5.

Можно ли, исходя из этих данных, утверждать, что между случайными величинами существует статистическая взаимосвязь?

Оценки математических ожиданий и дисперсий, определяемые формулами (10-51), дают следующие результаты:  $\tilde{m}_x = 0,388$ ;  $\tilde{\sigma}_x^2 = 1,67$ ;  $\tilde{m}_y = 0,122$ ;  $\tilde{\sigma}_y^2 = 0,409$ , и, следовательно, оценка коэффициента корреляции (10-50) равна:

$$\tilde{r}_{xy} = 0,385.$$

Подставив это значение в (10-49), получим:

$$\bar{t} = \sqrt{3} \frac{0,385}{\sqrt{1-0,385^2}} = 0,72.$$

Для доверительной вероятности 0,98 и  $f=n-2=3$  из табл. 10-2 находим, что  $\bar{t}_{\max} = 4,541$ . Поэтому следует сделать заключение, что результаты опытов не позволяют утверждать, что эти величины зависимы.

## 10-5. Оценка корреляционной функции стационарного случайного процесса

Как следует из формулы для корреляционной функции стационарного эргодического случайного процесса  $X(t)$  (4-65), оценку этой функции по реализации процесса  $x(t)$  длительности  $T$  следует осуществлять по формуле

$$\tilde{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t) x(t+\tau) dt, \quad (10-53)$$

где

$$x(t) = x(t) - m_x$$

— реализация центрированного процесса  $X(t)$ .

В общем случае математическое ожидание  $m_x$  также подлежит оценке. Однако при исследовании систем автоматического регулирования реализация  $x(t)$  обычно предварительно подвергается так называемой операции центрирования с помощью специальных схем или алгоритмов. Поэтому будем считать, что  $m_x$  известно.

Можно показать, что [Л. 41] математическое ожидание оценки  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ , соответствующей ее реализации  $\tilde{r}_{xx}(\tau)$ , вычисленной по формуле (10-53), совпадает с оцениваемой корреляционной функцией  $r_{xx}(\tau)$ , т. е. эта оценка является несмещенной. Дисперсия  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$  [при нормально распределенном процессе  $x(t)$ ] определяется формулой

$$\sigma_R^2(\tau) = \frac{2}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \left(1 - \frac{\xi}{T-\tau}\right) [r_{xx}^2(\xi) + r_{xx}(\xi + \tau) r_{xx}(\xi - \tau)] d\xi. \quad (10-54)$$

Так как это выражение при  $T \rightarrow \infty$  стремится к нулю, рассматриваемая оценка является также и состоятельной.

Поскольку оценка корреляционной функции является не случайной величиной, а случайным процессом, возможны два подхода к процедуре получения этой оценки: параметрический и непараметрический. В первом случае перед началом расчетов должна быть задана общая

структура выражения для оцениваемой корреляционной функции. Целью расчетов является оценка численных значений коэффициентов принятого выражения, исходя из выбранного критерия приближения (обычно исходя из метода наименьших квадратов).

Наибольшие успехи в этом направлении достигнуты в работах [Л. 47, 48, 83, 84]. В качестве типовой структуры корреляционной функции в этих работах принимается знакопостоянная функция  $\tau$ , представляющая собой сумму нескольких экспонент, удовлетворяющая условиям дифференцируемости исследуемого процесса. Параметрические методы обычно являются статистически более надежными. Однако недостатком параметрического подхода следует считать необходимость априорного знания структуры корреляционной функции; может поэтому оказаться, что исходная модель процесса не отражает некоторых существенных его черт. Так, например, реализацию случайных процессов на практике почти всегда приходится подвергать предварительной операции центрирования, что физически может быть интерпретировано как пропускание реализации процесса через некоторый центрирующий фильтр, частотная характеристика которого при нулевой частоте равна нулю. Как легко видеть, центрированная таким образом реализация должна иметь корреляционную функцию, интеграл от которой в бесконечных пределах должен быть равен нулю (т. е. эта функция должна быть знакопеременной, причем так, что площади под положительными и отрицательными участками графика этой функции должны быть одинаковыми). Поэтому практически целесообразно в случае, когда нет полной уверенности в структуре корреляционной функции исследуемого процесса, сочетать непараметрические и параметрические методы, т. е. вначале оценивать общий вид корреляционной функции непараметрическими методами, после чего осуществлять оценку наиболее вероятного вида структуры корреляционной функции и ее параметров с построением доверительных интервалов.

Трудности оценки корреляционной функции определяются в основном следующими тремя причинами:

а) логической противоречивостью постановки задачи определения дисперсии оценки корреляционной функции  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$  по формуле (10-54), для использования которой необходимо уже знать корреляционную функцию  $r_{xx}(\tau)$ ;

б) неизвестным характером закона распределения оценки  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ ;

в) зависимостью доверительных интервалов для оценки  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$  не только от дисперсии этой оценки, но и от корреляционной функции этой оценки.

Один из возможных способов преодоления первых двух затруднений состоит в следующем [Л. 58].

1) Реализация  $x(t)$  общей длины  $T$  разбивается на  $n$  более коротких реализаций одинаковой длины  $T_k = T/n$  и по каждой из них с помощью формулы (10-53) осуществляется подсчет значений  $\tilde{r}_{xx1}(\tau), \dots, \tilde{r}_{xxn}(\tau)$  оценки  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ .

2) Находится среднее арифметическое полученных значений  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ :

$$\tilde{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{r}_{xxk}(\tau), \quad (10-55)$$

а также значение оценки дисперсии

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{R}}^2(\tau) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\tilde{r}_{xxk}(\tau) - \tilde{r}_{xx}(\tau)]^2. \quad (10-56)$$

3) если имеется уверенность в том, что распределение оценки  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ , вычисленной на интервалах длины  $T_k$ , достаточно близко к нормальному, а оценки, вычисленные на соседних реализациях  $X(t)$ , статистически независимы, наибольшие возможные границы доверительных интервалов для  $r_{xx}(\tau)$  могут быть определены с помощью рассмотренного уже выше критерия Стьюдента

$$|\tilde{r}_{xx}(\tau) - r_{xx}(\tau)|_{\max} = \frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{R}}(0)}{\sqrt{n}} \tilde{t}_{\max}. \quad (10-57)$$

Вычисленные таким образом границы доверительного интервала, вообще говоря справедливы лишь для сравнительно малых  $\tau$  из-за того, что при использовании последней формулы не учитывалась корреляция между отдельными сечениями оценки корреляционной функции  $\tilde{R}_{xx}(\tau)$  (способ вычисления соответствующего момента можно найти, например, в [Л. 46], для чего по-прежнему необходимо располагать истинной корреляционной функцией  $r_{xx}(\tau)$ ).

Покажем теперь, что сформулированные требования допустимости применения изложенной методики [т. е. нормальность распределения оценки  $\hat{R}_{xx}(\tau)$  и независимость ее на соседних интервалах] практически всегда выполняются, если только оценка корреляционной функции выполняется с необходимой для последующих расчетов точностью.

1. *Условие нормальности.* Обычно вычисления оценок корреляционных функций производят с помощью цифровых вычислительных машин, которые оперируют с дискретными значениями  $x(t)$ , т. е. вместо формулы (10-53) используется следующая формула:

$$\tilde{r}_{xxh}(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x(i\Delta t) x(i\Delta t + \tau). \quad (10-58)$$

Предположим вначале, что в этой формуле интервал дискретности  $\Delta t$  выбран достаточно большим и отдельные слагаемые суммы оказываются статистически независимыми. Это условие может быть записано следующим образом:

$$\Delta t \geq \tau + \eta, \quad (10-59)$$

где  $\eta$  — интервал корреляции исследуемого случайного процесса:

$$r_{xx}(\tau) \approx 0 \text{ при } |\tau| > \eta. \quad (10-60)$$

При таком условии формула (10-58) определяет значение оценки корреляционного момента для сечений процесса  $X_h(t)$ , разделенных интервалом времени  $\tau$ . При достаточно большом  $m$  закон распределения этой оценки (как суммы большого числа независимых случайных величин  $X(i\Delta t)$  и  $X(i\Delta t + \tau)$ ) будет приближаться к нормальному. Однако при малом  $m$  он будет существенно от него отличаться, причем, как показывает анализ [Л. 42], это отклонение будет тем большим, чем большей будет статистическая связь между  $X(i\Delta t)$  и  $X(i\Delta t + \tau)$ . В наихудшем с этой точки зрения случае при  $\tau = 0$  формула (10-58) будет определять значение оценки дисперсии  $\tilde{\sigma}_{xh}^2$  процесса  $X_h(t)$ , вычисленное по независимым сечениям, которая (см. § 10-3) имеет распределение хи-квадрат с  $m$  степенями свободы. В свою оче-

редь это распределение может считаться практически близким к нормальному при  $m > 30$ . Таким образом, оценка  $\hat{R}_{xxh}(\tau)$ , вычисленная по формуле (10-58), может считаться распределенной нормально, если в ней выбрано  $\Delta t = \eta$ , а длина реализации  $T_h$  исследуемого случайного процесса удовлетворяет условию

$$T_h \geq 30\eta. \quad (10-61)$$

Пусть теперь при неизменном  $T_h$  число слагаемых в формуле (10-58) удваивается и становится равным  $2m$  за счет уменьшения вдвое интервала дискретности  $\Delta t$ . Такое увеличение числа слагаемых может быть интерпретировано как добавление к прежней сумме новой подобной же сумме чисел, причем каждое из слагаемых этой новой суммы представляет собой сечения процесса  $X_h(t)$ , взятые в промежутках между прежними сечениями. Соответственно формула (10-58) при  $\tau = 0$  приобретает следующий вид:

$$\tilde{r}_{xxh}(0) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} \left[ x\left(i \frac{\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}, \quad (10-62)$$

где

$$\Sigma_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[ x(i\Delta t) \right]^2;$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ x\left[\left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta t\right] \right\}^2.$$

Хотя  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  оказываются статистически связанными в каждой отдельно взятой сумме  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , отдельные слагаемые остаются некоррелированными и поэтому закон распределения их остается нормальным. Нормальным будет и закон распределения оценки (10-62), которая представляет собой среднее арифметическое нормально распределенных величин  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .

Подобным же образом можно показать, что распределение оценки остается нормальным и при последующем делении начального интервала дискретности на четыре, восемь и т. д. частей. Заметим, однако, что при практических расчетах нет необходимости выбирать

слишком малый интервал дискретности  $\Delta t$ , так как учет добавочных сильно коррелированных друг с другом сечений случайного процесса по существу не несет никакой новой информации об этом процессе, а лишь бесполезно загружает вычислительную машину. Исследование этого вопроса показало [Л. 43], что практически этот интервал целесообразно выбирать меньшим  $\left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}\right) \eta$ .

Подтверждение формуле (10-61) можно получить, исходя и из других соображений. Как отмечается в [Л. 44], критерий Стьюдента вообще относительно слабо реагирует на отклонение закона распределения оцениваемой выборки от нормального. Этот вывод базируется, в частности, на результатах работы [Л. 45], где приведены таблицы изменения  $\tilde{t}$ -критерия в зависимости от так называемых коэффициентов эксцесса и асимметрии — коэффициентов, которые являются практически удобной мерой степени отклонения закона распределения от нормального. Расчеты оценки по формуле (10-53), т. е. при  $\Delta t = 0$ , проведенные для ряда корреляционных функций возмущений, достаточно характерных для промышленных объектов регулирования, показали, что при выполнении условия (10-61) коэффициенты эксцесса и асимметрии (вычисление которых осуществлялось по формулам, приведенным в [Л. 46]) имеют такие значения, которые позволяют пользоваться обычными таблицами критерия Стьюдента (типа табл. 10-2).

2. *Условие независимости оценок, вычисленных на соседних интервалах.* Покажем, что при выполнении условия (10-61) оценки  $\tilde{R}_{xxk}(\tau)$ , вычисленные на соседних интервалах, могут считаться также и некоррелированными. При  $\tau = 0$  эти оценки определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}_j &= \tilde{R}_j(0) = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} X_j^2(t) dt; \\ \tilde{D}_{j+1} &= \tilde{R}_{j+1}(0) = \frac{1}{T_k} \int_{T_k}^{2T_k} X_{j+1}^2(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (10-63)$$

а соответствующий им коэффициент корреляции

$$\rho_{j,j+1} = \frac{r_{j,j+1}}{\sigma_j \sigma_{j+1}}, \quad (10-64)$$

где

$$\sigma_j^2 = \frac{4}{T_k} \int_0^{T_k} \left(1 - \frac{\xi}{T_k}\right) r_{xx}^2(\xi) d\xi \quad (10-65)$$

— дисперсия оценки  $\tilde{D}_j$ ;

$$r_{j,j+1} = M \{ [\tilde{D}_j - \sigma_x^2] [\tilde{D}_{j+1} - \sigma_x^2] \} \quad (10-66)$$

— корреляционный момент  $\tilde{D}_j$  и  $\tilde{D}_{j+1}$ .

Наличие корреляции между  $\tilde{D}_j$  и  $\tilde{D}_{j+1}$ , очевидно, обусловлено лишь тем обстоятельством, что имеется корреляция между сечениями процесса  $X(t)$  на участках  $(T_k - \eta) \div T_k$  и  $T_k \div (T_k + \eta)$ . Целесообразно представить поэтому формулы (10-63) в следующем виде:

$$\tilde{D} = \frac{T_k - \eta}{T_k} \tilde{D}_{T_k - \eta} + \frac{\eta}{T_k} \tilde{D}_\eta, \quad (10-67)$$

где  $\tilde{D}_{T_k - \eta}$  и  $\tilde{D}_\eta$  — оценки дисперсии, вычисленные на интервалах длительности  $T_k - \eta$  и  $\eta$  соответственно.

Очевидно, что корреляционный момент (10-66) зависит лишь от  $\tilde{D}_{j\eta}$  и  $\tilde{D}_{j+1, \eta}$ :

$$r_{j,j+1} = \frac{\eta^2}{T_k^2} M \{ [\tilde{D}_{j\eta} - \sigma_x^2] [\tilde{D}_{j+1, \eta} - \sigma_x^2] \} \quad (10-68)$$

и не может быть больше дисперсии  $\sigma_{\tilde{D}}^2$  оценки  $\tilde{D}_\eta$ , вычисленной по реализации длительности  $\eta$ :

$$r_{j,j+1} \leq \frac{\eta^2}{T_k^2} \sigma_{\tilde{D}\eta}^2.$$

Подставив это выражение в (10-64) и учтя (10-65), после некоторых преобразований можно получить следующее неравенство:

$$\rho_{j,j+1} \leq \frac{\eta}{T_k} \frac{\int_0^{T_k} \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right) r_{xx}^2(\xi) d\xi}{\int_0^{T_k} \left(1 - \frac{\xi}{T_k}\right) r_{xx}^2(\xi) d\xi}, \quad (10-69)$$



вместо которого можно записать более сильное

$$\rho_{j,j+1} < \frac{\eta}{T_h} \quad (10-70)$$

Таким образом, при выполнении условия (10-61) коэффициент корреляции между оценками дисперсии на соседних интервалах не будет превышать значения 0,03, что практически не повлияет на результат, получаемый с помощью критерия Стьюдента [Л. 44].

Подобным же образом можно показать практическую независимость оценок для  $\tau \neq 0$ .

3. *Ориентировочные требования к общей длине реализации.* Использование изложенного выше метода оценки корреляционной функции, очевидно, возможно лишь при наличии реализации случайного процесса общей длиной не менее шестидесяти интервалов корреляции этого процесса (лишь в этом случае удастся получить минимальный объем выборки  $n=2$ , необходимый для использования критерия Стьюдента). Оценим поэтому, какова должна быть общая длина реализации стационарного случайного процесса, для того чтобы оценка корреляционной функции могла быть вычислена с удовлетворительной точностью.

Допустим вначале, что оценка корреляционной функции  $\hat{R}_{xx}(\tau)$  при  $\tau=0$  (т. е. оценка дисперсии  $\hat{D}_x$ ) осуществляется по дискретным значениям процесса с помощью формулы (10-58), причем интервал дискретности выбран не меньшим интервала корреляции процесса  $\Delta t \geq \eta$ . В этом случае задача сводится к оценке дисперсии случайной величины по нескольким независимым ее значениям, и, следовательно, для выбора числа сечений  $nm$ , обеспечивающих получение оценки  $\hat{D}_x$  с требуемой относительной погрешностью  $\delta$ , можно пользоваться формулой (10-37) и табл. 10-4. Как уже отмечалось выше, число  $nm$ , а следовательно, и число интервалов корреляции  $\eta$ , содержащихся в общей длине реализации  $T$ , необходимое для получения оценки с обычно требуемой для практических расчетов точностью, оказывается большим (порядка сотен и тысяч). Уменьшение интервала дискретности  $\Delta t$ , естественно, позволяет получить более полную информацию о процессе и соответственно сократить длину реализации без потери точности оценки  $\hat{R}_{xx}(\tau)$ . Однако, как уже отмечалось выше, коррелированные сечения несут тем меньшую добавочную информацию, чем больше степень статистической зависимости между ними, и

поэтому уменьшение длины реализации за счет сокращения величины  $\Delta t$  оказывается в общем не столь уж большим. Так, по [Л. 47] переход от дискретного к непрерывному алгоритму оценки (10-53) корреляционных функций возмущений, которые могут считаться достаточно характерными для производственных объектов, позволяет уменьшить среднеквадратичную погрешность оценки примерно в 1,5 раза, что соответствует, как показывает анализ формулы (10-54), сокращению длины реализации примерно в 2—3 раза. Но и с учетом этого обстоятельства длина реализации остается все же относительно очень большой и во всяком случае должна включать в себя не меньше 250—400 интервалов корреляции.

Хотя полученная оценка является сравнительно грубой [точное значение числа  $n$  определяется в процессе проведения экспериментов с помощью формулы (10-57)], она тем не менее подтверждает принципиальную возможность разбиения исходной реализации на достаточно большое число частных интервалов длиной  $T_h \geq 30\eta$ , необходимое для последующего использования критерия Стьюдента.

Оценку интервала корреляции  $\eta$  можно осуществлять, используя изложенный в § 10-4 критерий наличия корреляции в двумерной нормальной совокупности.

Следует обратить внимание, что при определении интервала корреляции, необходимого для использования изложенного выше метода оценки корреляционной функции, допустима весьма большая степень приближения. Здесь важно лишь не занижить этот интервал; если же при расчетах и проведении экспериментов будет выбрана завышенная величина  $\eta$ , то это существенно не скажется на окончательной длине реализации процесса. Действительно, это приведет к тому, что уменьшится дисперсия оценки  $\hat{R}_{xxk}(\tau)$  на каждом из частных интервалов (из-за увеличения длительности реализации  $T_h$ ), что потребует использования меньшего числа  $n$  этих интервалов.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 11-1. Активные и пассивные методы идентификации

Задача идентификации динамических систем (и в том числе объектов регулирования) заключается в оценке по результатам наблюдения за изменением входных и выходных величин математических моделей этих систем.

В частности, для оценки весовой характеристики стационарной линейной системы, на выходную величину которой наложена случайная стационарная неконтролируемая помеха  $v(t)$  (рис. 11-1), можно воспользоваться уравнением (4-91). Поскольку практически регистрация реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$  входной и выходной величин системы может осуществляться лишь в течение ограниченного интервала времени  $T$ , вместо истинных корреляционных функций  $r_{xx}(\tau)$  и  $r_{xy}(\tau)$  в указанное уравнение приходится подставлять их оценки, определяемые по формулам:

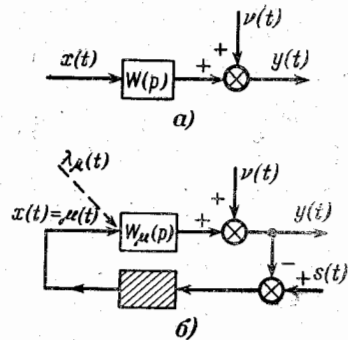


Рис. 11-1.

$$\tilde{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt; \quad (11-1)$$

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)y(t+\tau) dt. \quad (11-2)$$

Следовательно, из уравнения

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\xi) \tilde{r}_{xx}(\tau - \xi) d\xi \quad (11-3)$$

будет получена не истинная весовая характеристика  $w(t)$ , а лишь ее оценка  $\tilde{w}(t)$ .

Методы идентификации систем преобразования воздействий можно разделить на активные и пассивные.

Использование активных методов идентификации предполагает постановку на действующей системе специальных экспериментов, в определенной степени нарушающих режим ее нормального функционирования. При использовании пассивных методов математическая модель системы ищется по результатам наблюдения за естественными изменениями ее входных и выходных величин в процессе нормального функционирования системы

без какого-либо специального вмешательства в режим ее работы [Л. 50, 51]. То обстоятельство, что пассивные методы позволяют получить математическую модель системы без нарушения нормального режима ее работы и без постановки каких-либо специальных экспериментов, естественно, делает их крайне привлекательными. Неслучайно поэтому большинство опубликованных в последние годы работ по идентификации объектов управления посвящено развитию именно пассивных методов.

Следует, однако, иметь в виду, что успешное применение пассивных методов идентификации по данным нормального функционирования системы возможно по крайней мере при выполнении следующих двух условий:

1) случайные помехи, искажающие реакцию на выбранное входное воздействие, должны быть независимыми от этого воздействия (в противном случае в составе погрешности оценки динамической характеристики, помимо случайной составляющей, которая может быть сведена к допустимо малой величине с помощью методов математической статистики, будет входить также и неустранимая систематическая погрешность);

2) входное воздействие, по которому осуществляется идентификация, должно обладать достаточно широким частотным спектром, во всяком случае не меньшим, чем полоса частот, в пределах которой требуется оценить динамическую характеристику системы. В частности, по этой причине вычисление весовой характеристики системы решением уравнения (11-3), строго говоря, невозможно, так как весовая характеристика является реакцией системы на воздействие, спектр которого занимает бесконечно большую полосу частот, в то время как любой реальный сигнал обладает ограниченным спектром. Попытки решить такую задачу наталкиваются на известную математическую трудность, проявляющуюся в том, что наличие малых погрешностей задания корреляционных функций  $r_{xx}(\tau)$  и  $r_{xy}(\tau)$  приводит к появлению сколь угодно больших погрешностей в оценке весовой характеристики  $w(t)$  [Л. 49]. Поэтому задачу решения уравнения (11-3) следует считать некорректно поставленной задачей. Для решения такого уравнения приходится вводить добавочные ограничивающие предположения (осуществлять регуляризацию решения).

К сожалению, ситуация, возникающая при идентификации реальных объектов управления, чаще всего ока-

зывается такой, что сформулированные условия возможности применения пассивных методов не выполняются. Объясняется это прежде всего тем, что схема взаимодействия объектов управления с внешней средой не соответствует общепринятой схеме, которая была приведена на рис. 11-1,а.

Напомним, что входные воздействия объектов регулирования делятся на две группы: возмущающие и регулирующие. Хотя число возмущающих воздействий обычно значительно превышает число регулирующих, а их влияние на регулируемые величины может быть значительно сильнее, чем влияние регулирующих воздействий, все же первостепенное значение для построения систем автоматического регулирования имеют динамические характеристики регулирующих каналов объекта, а следовательно, основными входными воздействиями объекта, по отношению к которым в первую очередь необходимо отыскивать математическую модель объекта, являются регулирующие воздействия. Это утверждение, очевидно, остается справедливым для любых систем управления вне зависимости от их сложности, числа действующих на объект возмущений, принятого критерия оптимального функционирования и т. п. Действительно, зная как объект будет реагировать на регулирующие воздействия, очевидно, невозможно сформировать эти воздействия.

Крайне важным является также то обстоятельство, что от динамических свойств регулирующих каналов зависит главнейший показатель работоспособности систем регулирования — их устойчивость.

В то же время в процессе нормального функционирования объекта регулирующие воздействия формируются обслуживающим персоналом или, если объект автоматизирован, регулятором в зависимости от текущего состояния объекта и в первую очередь от текущего изменения его регулируемых величин. Таким образом, в условиях нормального функционирования объекта его регулирующие воздействия оказываются зависимыми от действующих на объект возмущений, т. е. оказывается невыполненным первое из сформулированных выше условий возможности использования пассивных методов. Соответственно схема идентификации, приведенная на рис. 11-1,а, должна быть дополнена по крайней мере так, как указано на рис. 11-1,б, где заштрихованным прямоуголь-

ником условно обозначен человек-оператор или регулятор.

Подчеркнем, что искажающее влияние этой зависимости обычно бывает настолько большим, что оно не позволит использовать пассивную идентификацию даже при предварительной, грубо приближенной оценке характеристик объекта. Например, если в системе, приведенной на рис. 1-2, происходит непрерывное случайное изменение положения клапана на потреблении жидкости  $\lambda(t)$ , то и вся система регулирования будет находиться в непрерывном движении. С первого взгляда может показаться, что, зарегистрировав реализации случайного изменения положения регулирующего клапана  $\mu(t)$  и случайного изменения уровня  $y(t)$ , можно затем, воспользовавшись уравнением (11-3), оценить и весовую характеристику объекта  $w_\mu(t)$ . Однако, как легко заметить непосредственно из этого рисунка, несмотря на случайный характер изменения  $\mu(t)$  и  $y(t)$ , эти процессы через регулятор связаны между собой жесткой связью, т. е.  $\mu(t)$  с точностью до постоянного множителя, равного отношению плеч рычага регулятора, повторяет изменение  $y(t)$ . Соответственно применение описанной процедуры пассивной идентификации приведет к абсурдному результату, а именно что вне зависимости от того, что представляет собой объект, оценка его характеристики всегда будет соответствовать безынерционному звену с коэффициентом передачи, обратным коэффициенту передачи регулятора  $W_\mu(p) = l_2/l_1$ .

Можно показать, что в более общем случае, когда регулирование осуществляется регулятором с оператором  $W_p(p)$ , получаемая в результате применения такой процедуры оценка оператора объекта будет равна обратному оператору регулятора  $1/W_p(p)$  и совершенно не будет зависеть от действительных свойств объекта по регулирующему каналу.

Указанное затруднение может быть преодолено лишь путем выбора входного воздействия, внешнего не только по отношению к объекту, но и по отношению ко всей замкнутой системе, с помощью которой осуществляется регулирование его режима в процессе идентификации. Это воздействие должно быть выбрано таким образом, чтобы из полученной в результате идентификации оценки динамической характеристики системы можно было за-

тем выделить характеристику объекта по регулируемому каналу  $W_{\mu}(p)$ .

Очевидно, что таким воздействием может быть либо возмущающее воздействие, идущее со стороны регулирующего органа, для которого  $W_{\lambda}(p) = W_{\mu}(p)$  (на рис. 11-1, б — это воздействие  $\lambda_{\mu}(t)$ , показанное пунктиром), либо задающее воздействие  $s(t)$ . Естественно, что в обоих случаях эти воздействия должны быть статистически независимыми по отношению ко всем другим действующим на объект возмущениям. Например, при оценке динамической характеристики регулирующего канала объекта в рассмотренной системе (рис. 1-2) в качестве указанного воздействия может быть выбрано случайное изменение давления жидкости в трубопроводе перед регулирующим клапаном [при условии, что изменение давления в действительности имеет место и не зависит от перемещения регулирующего клапана  $\mu(t)$ ].

К сожалению, получить таким образом математическую модель системы, а затем выделить из нее математическую модель объекта удастся лишь в отдельных особо благоприятных случаях (в частности, когда регулирование режима работы объекта в процессе идентификации осуществляется автоматическим регулятором с известным законом регулирования). Если регулятор является линейным и включен по обычной схеме (рис. 11-1, б), в результате наблюдения за естественным изменением возмущения, поступающего со стороны регулирующего органа, и изменением регулируемой величины будет получена характеристика системы  $\Phi(p)$ , которая связана с характеристиками объекта  $W_{\mu}(p)$  и регулятора  $W_p(p)$  соотношением (5-15), т. е. для получения характеристики объекта после окончания процедуры идентификации необходимо произвести дополнительный пересчет по формуле

$$W_{\mu}(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - W_p(p)\Phi(p)}. \quad (11-4)$$

Ситуация резко усложняется в случае, когда идентификацию объекта предполагается производить для того, чтобы спроектировать систему автоматического регулирования этого объекта, а следовательно, во время идентификации объект еще не автоматизирован и управляет-

ся обслуживающим персоналом. В этом случае попытка применить изложенную процедуру идентификации может вообще не привести к какому-либо определенному результату, так как свойства идентифицируемой системы регулирования будут зависеть от поведения обслуживающего персонала в процессе идентификации, а это поведение может быть слишком «субъективным», не поддающимся формальному описанию. Практически единственный способ устранения этого затруднения состоит в том, что на время проведения идентификации обслуживающий персонал получает инструкции осуществлять регулирование в соответствии с некоторыми заранее заданными детерминированными алгоритмами. К сожалению, человек-оператор, обладая по сравнению с автоматическими регуляторами неизмеримо большей гибкостью в ориентировке и приспособлением к управлению объектом в различных, иногда непредвиденных ситуациях, в то же время довольно плохо воспроизводит даже простейшие линейные детерминированные алгоритмы регулирования [Л. 53]. Обычно от человека-оператора можно требовать реализации лишь простых нелинейных позиционных алгоритмов, при использовании которых и вся система становится существенно нелинейной. Чаще всего поэтому на время проведения эксперимента обслуживающий персонал вообще отстраняется от вмешательства в режим работы объекта до тех пор, пока отклонения регулируемых величин остаются в допустимых по условиям эксплуатации пределах. Когда же эти отклонения начинают достигать слишком больших размеров, опыт прекращается и обслуживающий персонал восстанавливает нормальный режим работы объекта. Если времени проведения опыта оказалось недостаточно для получения надежных оценок динамических характеристик, после восстановления нормального режима обслуживающий персонал вновь прекращает управление объектом и опыты продолжаются. Практически может понадобиться несколько подобных повторений опытов.

Очевидно, что принудительное изменение характера работы обслуживающего персонала, а тем более прекращение его вмешательства в работу объекта неизбежно должно повлечь за собой существенное нарушение нормального режима функционирования объекта. Таким образом, даже при использовании для идентификации объектов управления естественных изменений входных

воздействий специфика взаимодействия этих объектов с внешней средой оказывается такой, что она не позволяет применять пассивные методы идентификации без нарушения нормального режима функционирования. Практически, однако, при идентификации в указанных условиях приходится прибегать также и к подаче на объект специально организованных добавочных испытательных воздействий, применение которых позволяет наиболее эффективно использовать те относительно небольшие отрезки времени, в течение которых объект изолируется от вмешательства обслуживающего персонала. Кроме того, применение специальных испытательных сигналов обычно необходимо также потому, что при использовании естественных изменений входного воздействия, как правило, не выполняется второе из сформулированных выше условий применения пассивных методов идентификации.

Дело в том, что динамические характеристики объекта по регулирующим каналам нужны не только для оценки фильтрующих свойств объекта по отношению к возмущениям, идущим со стороны регулирующего органа. Эти характеристики (как это следует из рассмотрения методов расчета систем регулирования, изложенных во второй части) необходимы в первую очередь для синтеза системы регулирования, исходя из требований к ее устойчивости. В свою очередь для оценки устойчивости системы необходимо располагать характеристиками регулирующего канала объекта в диапазоне относительно высоких частот.

Так, для расчета системы с ПИ-регулятором требуется участок амплитудно-фазовой характеристики объекта в пределах третьего квадранта комплексной плоскости (участок  $CD$  характеристики на рис. 11-2); для расчета системы с ПИД-регулятором — в пределах третьего и второго квадрантов (участок  $CE$  на рис. 11-2) и т. д.

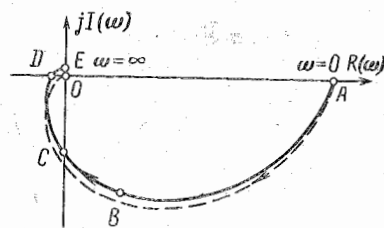


Рис. 11-2.

С другой стороны, если объект регулирования функционирует нормально, т. е. если имеют место небольшие отклонения регулируемых величин от заданных значений, то это позволяет предполагать, что действующие на объект возмущения имеют

относительно низкочастотный характер с диапазоном частот, не включающим в себя резонансных частот системы регулирования (см. § 7-2). Иначе говоря, использование естественных случайных изменений возмущений обычно позволяет получить с требуемой точностью лишь низкочастотный участок характеристики объекта, расположенный в пределах четвертого квадранта комплексной плоскости (участок  $AB$  характеристики на рис. 11-2), что явно недостаточно для последующего расчета системы автоматического регулирования.

Подобная же ситуация, очевидно, возникает и при оценке динамических характеристик объекта по каналам действия всех остальных возмущений. Схема взаимодействия объекта с регулятором или человеком-оператором остается такой же, как и на рис. 11-1,б, только характеристики этих каналов будут отличными от характеристик регулирующих каналов. Так же, как и в предыдущем случае, необходимо позаботиться об исключении влияния обслуживающего персонала на результаты идентификации, в частности, путем устранения его на допустимое время от управления объектом; если же режим работы объекта автоматически регулируется, то идентификация может осуществляться в условиях нормального функционирования системы. Однако следует помнить, что получаемая в этом случае динамическая характеристика будет являться характеристикой всей системы регулирования и для получения характеристики объекта необходимо выполнить дополнительный пересчет. Например, если регулятор подключен к объекту по схеме на рис. 11-1,б, то в результате идентификации по данным наблюдения за изменением  $y(t)$  и  $\lambda(t)$  будет получена характеристика  $\Phi_{\lambda y}(p)$ , из которой может быть получена характеристика соответствующего канала объекта

$$W_{\lambda}(p) = [1 + W_p(p)W_{\mu}(p)] \Phi_{\lambda y}(p). \quad (11-5)$$

Как видим, значение характеристики регулирующего канала  $W(p)$  в рассматриваемом случае заключается, помимо прочего, также в том, что она необходима и для определения остальных характеристик объекта.

Обратим внимание, что если идентифицируемый объект линеен и перед оценкой характеристик по каналам действия возмущений уже известна характеристика регулирующего канала этого объекта  $W_{\mu}(p)$ , устранение

влияния обслуживающего персонала на результаты идентификации каналов действия возмущений может быть достигнуто путем подключения к действующему объекту модели регулирующего канала с характеристикой  $W_{\mu\mu}(p)$  так, как это показано на рис. 11-3.

Если эта модель достаточно хорошо отражает свойства действительного канала, т. е. если  $W_{\mu}(p) = W_{\mu\mu}(p)$ ,

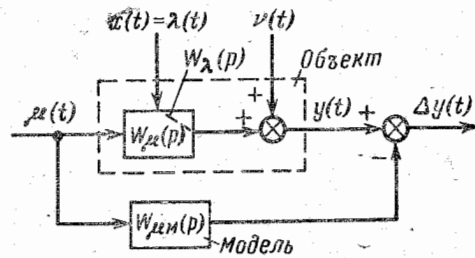


Рис. 11-3.

регистрация реализаций  $\lambda(t)$  и  $\Delta y(t)$  в условиях нормальной эксплуатации объекта, управляемого обслуживающим персоналом, позволяет оценить характеристику  $W_{\lambda}(p)$ .

В отличие от регулирующих воздействий возмущения, по каналам действия которых необходимо оценить динамические характеристики объекта, могут оказаться неуправляемыми, т. е. может оказаться невозможным подать на входы этих каналов испытательные воздействия. Однако характеристики каналов действия возмущений не влияют на устойчивость системы регулирования, и поэтому частотный диапазон возмущений, существующих в условиях нормальной эксплуатации, может оказаться достаточным для последующего анализа динамической точности системы регулирования по среднестатистическим показателям (при условии, что характеристики объекта по регулирующим каналам уже известны). Тем не менее и при оценке характеристик каналов действия возмущений следует по возможности стремиться к использованию специальных испытательных воздействий с широким частотным диапазоном, потому что эти характеристики могут понадобиться для анализа максимальных отклонений регулируемых величин при действии возмущений наиболее тяжелой ступенчатой формы. Кроме то-

го, применение таких воздействий обычно позволяет сократить время экспериментов.

Из сказанного следует, что получение динамических характеристик неавтоматизированных объектов в объеме, необходимом для последующего синтеза по ним системы регулирования, практически не может быть осуществлено без активного эксперимента, нарушающего режим нормального функционирования объекта. Это нарушение режима обусловлено не только необходимостью подачи специальных испытательных воздействий, но также и необходимостью изменения характера управления объектом со стороны обслуживающего персонала во время идентификации. Методы пассивного эксперимента в этих условиях имеют в значительной степени вспомогательное значение как средство получения динамических характеристик лишь по каналам внешних возмущений (при известных характеристиках регулирующих каналов) и то только для объектов, допускающих поэтапную оценку характеристик регулирующих каналов и каналов действия возмущений, т. е. по существу только для линейных объектов.

Следует подчеркнуть, что вопреки распространенному мнению [Л. 52] необходимость применения активных методов при идентификации объектов управления обусловлена не только тем, что «так проще», а объективными реально существующими ограничениями, которые могут сделать задачу идентификации пассивными методами принципиально нерешаемой, как бы совершенным ни был математический аппарат обработки результатов наблюдений. Естественно также, что трудности применения пассивных методов идентификации не могут не возрастать по мере усложнения идентифицируемых объектов. При этом под «сложными» объектами следует, конечно, понимать не объекты с большим числом возмущений (этим свойством может обладать любой линейный объект с одной регулируемой величиной), а многомерные и нелинейные объекты. Идентификация таких объектов пассивными методами, даже в том ограниченном объеме, о котором говорилось выше, возможна лишь в отдельных особо благоприятных случаях. Объясняется это неприменимостью к нелинейным объектам принципа наложения, что не позволяет осуществлять поэтапную раздельную идентификацию их регулирующих каналов и каналов действия возмущений.



Практически нелинейные математические модели промышленных объектов регулирования обычно представляют в виде совокупности двух видов характеристик:

1) нелинейных статических характеристик, определяющих связь между установившимися значениями входных и выходных величин объекта на всем возможном в процессе эксплуатации диапазоне изменения этих переменных;

2) линеаризованных динамических характеристик по отдельным каналам передачи воздействий объекта, определяющих его поведение в динамике при малых отклонениях входных переменных в окрестности нескольких фиксированных статических режимах (например, при нескольких фиксированных нагрузках объекта).

Представление нелинейной математической модели объекта в таком виде допустимо лишь при условии, что большие по амплитуде возмущения, при действии которых начинают проявляться нелинейные зависимости, имеют низкочастотный характер; тем не менее подобный способ представления динамики нелинейных объектов регулирования получил весьма широкое распространение, что, в частности, может служить косвенным подтверждением применимости к ним гипотезы в низкочастотном характере возмущений (по крайней мере при первоначальных ориентировочных расчетах).

## 11-2. Оценка переходных характеристик объектов

Необходимость в устранении влияния обслуживающего персонала на результаты идентификации требует довольно сложной организации экспериментов при оценке динамических характеристик неавтоматизированных объектов. Практически поэтому при построении математических моделей таких объектов обычно ограничиваются оценкой наиболее простых (с точки зрения организации экспериментов) переходных характеристик. Испытательные воздействия в этом случае выбираются в виде ступенчатых функций времени, подаваемых на вход объекта в те отрезки времени, когда устраняется влияние обслуживающего персонала на режим его работы. Если в процессе проведения эксперимента объект находится под воздействием случайных возмущений, подачу испытательных воздействий приходится повторять несколько раз с тем, чтобы достичь требуемой точности получаемой

оценки характеристики. Рассмотрим поэтому вначале статистические свойства случайной помехи, которая накладывается на регулируемую величину в промежутках между вмешательством обслуживающего персонала в режим работы объекта.

Характер процессов, возникающих в этом случае на выходе объекта, иллюстрирует рис. 11-4, где  $v(t)$  — возмущение, приведенное к выходу объекта (изменение регулируемой величины, которое имело бы место при полном отсутствии регулирования);  $v_{\mu}(t)$  — составляющая изменения регулируемой величины, вызванная изменением регулирующего воздействия  $\mu(t)$  (реакция объекта на это воздействие). Очевидно, что изменение регулируемой величины  $y(t)$  будет равно разности между  $v(t)$  и  $v_{\mu}(t)$ .

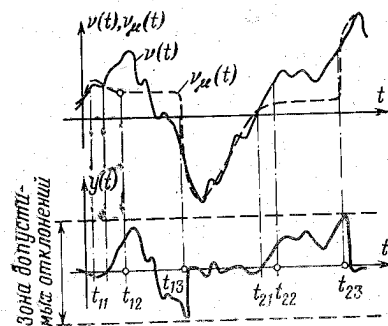


Рис. 11-4.

Осуществляя управление объектом, обслуживающий персонал стремится поддерживать регулируемую величину  $y(t)$  как можно более точно, на ее заданном значении. В частности, если заданное значение регулируемой величины постоянно, то это соответствует стремлению поддерживать изменение реакции  $v_{\mu}(t)$  возможно ближе к изменению возмущения  $v(t)$ . На рис. 11-4 до момента времени  $t_{11}$  регулирование осуществляется обслуживающим персоналом так, что  $y(t)$  мало отклоняется от заданного значения. В момент времени  $t_{11}$  обслуживающий персонал устраняется от регулирования и начинается самопроизвольное изменение регулируемой величины. Вначале это изменение обусловлено как изменением возмущения  $v(t)$ , так и остаточным изменением реакции  $v_{\mu}(t)$  на прошедшие изменения регулирующего воздействия (интервал между моментами времени  $t_{11}$  и  $t_{12}$ ). После окончания переходного процесса, начиная с момента  $t_{12}$ , реакция  $v_{\mu}(t)$  стабилизируется на некотором постоянном значении и дальнейшее изменение  $y(t)$  с точностью

до некоторой постоянной величины совпадает с изменением возмущения  $v(t)$ . В момент времени  $t_{13}$ , когда отклонение регулируемой величины начинает достигать угрожающих размеров, обслуживающий персонал вмешивается в работу объекта и, воздействуя на регулирующий орган, возвращает регулируемую величину к заданному значению. После того как регулируемая величина будет достаточно хорошо застabilизирована на своем заданном значении (в момент времени  $t_{21}$ ), регулирование вновь прекращается и начинает происходить новое самопроизвольное изменение регулируемой величины, вызванное как изменением  $v(t)$ , так и остаточными переходными процессами. После момента времени  $t_{22}$ , когда переходные процессы оканчиваются, изменение  $y(t)$  вновь происходит только за счет изменения возмущения  $v(t)$  при некотором постоянном значении  $v_{\mu}(t)$  (причем значение  $v_{\mu}(t)$  на отрезке  $t_{22}-t_{23}$ , вообще говоря, может быть отличным от его значения на предыдущем отрезке  $t_{12}-t_{13}$ ). Аналогичным образом протекают процессы и при последующих устранениях обслуживающего персонала от регулирования объекта. Свободными от субъективного вмешательства человека-оператора являются лишь интервалы времени  $t_{12}-t_{13}$ ,  $t_{22}-t_{23}$  и т. д.

Предполагая, что случайные процессы на указанных интервалах статистически независимы (такое предположение, по-видимому, практически всегда выполняется, так как процесс восстановления обслуживающим персоналом нормального режима обычно занимает достаточно большое время), будем рассматривать графики изменения регулируемой величины на всех последовательных интервалах  $t_{12}-t_{13}$ ,  $t_{22}-t_{23}$  и т. д. как реализации случайного процесса  $Y(\tau)$ , причем начало отсчета этого процесса будем брать в моменты времени  $t_{12}$ ,  $t_{22}$ , ...:

$$Y(\tau) = N(\tau) - N_{\mu 0}, \quad (11-6)$$

где  $N_{\mu 0}$  — случайный (постоянный в каждой реализации) уровень реакции на регулирующее воздействие.

Как видим, исключить влияние человека-оператора на этот процесс все же не удалось (воздействием оператора определяется величина  $N_{\mu 0}$ ). Чтобы полностью устранить его, будем рассматривать процесс  $Z(t)$ , равный разности

текущего значения  $Y(\tau)$  и его значения, имеющего место в начальный момент каждого интервала:

$$Z(\tau) = Y(\tau) - Y(0). \quad (11-7)$$

Так как

$$Y(0) = N(0) - N_{\mu 0}, \quad (11-8)$$

то с учетом (11-6) формула (11-7) запишется в виде

$$Z(\tau) = N(\tau) - N(0) = \overset{0}{N}(\tau) - \overset{0}{N}(0), \quad (11-9)$$

где

$$\overset{0}{N}(\tau) = N(\tau) - m_v; \quad \overset{0}{N}(0) = N(0) - m_v;$$

$m_v$  — математическое ожидание  $v(t)$ . Как видим, свойства процесса  $Z(\tau)$  определяются лишь свойствами централизованного процесса — возмущения  $\overset{0}{N}(t)$ . Математическое ожидание этого процесса, очевидно, равно нулю:

$$M\{Z(\tau)\} = 0, \quad (11-10)$$

а дисперсия

$$D\{Z(\tau)\} = M\{[\overset{0}{N}(\tau) - \overset{0}{N}(0)]^2\} = 2[\sigma_v^2 - r_{vv}(\tau)], \quad (11-11)$$

где  $r_{vv}(\tau)$  — корреляционная функция возмущения  $N(t)$ ;  $\sigma_v^2$  — дисперсия этого возмущения.

Как видим, случайный процесс  $Z(\tau)$  оказался нестационарным по дисперсии — ее величина с ростом  $\tau$  увеличивается от нуля до значения, равного удвоенному значению дисперсии возмущения  $N(t)$ .

В соответствии с этим порядок проведения эксперимента по оценке переходной характеристики объекта в окрестности некоторого режима может быть принят следующим.

После того как обслуживающий персонал установит требуемый режим работы объекта и прекратит вмешательство в его работу, спустя время, необходимое для окончания переходных процессов, на вход объекта по-

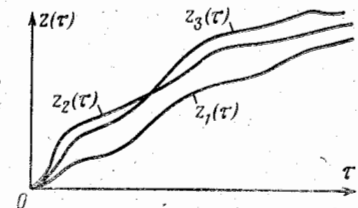


Рис. 11-5.



дается ступенчатое возмущение амплитуды  $A$  и регистрируется изменение регулируемой величины. По реализации регулируемой величины  $y(t)$  определяется реализация  $z_1(\tau) = y_1(\tau) - y_1(0)$ , где  $y_1(0)$  — значение регулируемой величины в момент посылки пробного воздействия, после чего обслуживающий персонал восстанавливает прежний режим работы объекта. Затем опыт вновь повторяется при той же величине пробного воздействия  $A$ , и определяется вторая реализация  $z_2(\tau) = y_2(\tau) - y_2(0)$ . Таким образом, в результате  $n$  опытов будет получен ансамбль реализаций  $z_1(\tau), \dots, z_n(\tau)$  (рис. 11-5), располагая которым можно вычислить их среднее значение

$$\bar{z}(\tau) = \frac{1}{nA} \sum_{i=1}^n z_i(\tau), \quad (11-12)$$

которое может рассматриваться как одна из возможных реализаций случайного процесса

$$\tilde{H}(\tau) = \frac{1}{nA} \sum_{i=1}^n Z_i(\tau); \quad (11-13)$$

где  $Z_i(\tau)$  определяется формулой (11-9), но с добавлением реакции  $Ah(\tau)$  на испытательное воздействие

$$Z_i(\tau) = \overset{0}{N}_i(\tau) - \overset{0}{N}_i(0) + Ah(\tau) - Ah(0). \quad (11-14)$$

Таким образом, формула (11-13) может быть переписана следующим образом:

$$\tilde{H}(\tau) = h(\tau) - h(0) + \frac{1}{nA} \sum_{i=1}^n [\overset{0}{N}_i(\tau) - \overset{0}{N}_i(0)]. \quad (11-15)$$

Математическое ожидание этого случайного процесса

$$M\{\tilde{H}(\tau)\} = h(\tau) - h(0). \quad (11-16)$$

Так как начальное значение  $h(0)$  оцениваемой характеристики  $h(t)$  практически всегда известно (чаще всего оно равно нулю), то тем самым случайный процесс, определяемый формулой (11-13), может считаться несмещенной оценкой характеристики  $h(t)$ .

Дисперсия оценки (11-13) в соответствии с (11-11) определяется формулой

$$D\{\tilde{H}(\tau)\} = \frac{2}{nA^2} [\sigma_v^2 - r_{vv}(\tau)]; \quad (11-17)$$

Как видим, дисперсия оценки уменьшается с ростом числа опытов  $n$ , что свидетельствует о ее состоятельности; увеличение точности получаемой оценки может быть достигнуто также путем увеличения амплитуды входного воздействия.

Так как дисперсия  $\sigma_v^2$  и корреляционная функция  $r_{vv}(\tau)$  возмущения  $v(t)$  во время проведения опытов неизвестны, формулой (11-17) обычно воспользоваться не удастся и приходится вычислять наибольшее значение оценки дисперсии  $\tilde{H}(\tau)$  по формуле (10-15)

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{H}}^2(\tau) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{z_i(\tau)}{A} - \bar{z}(\tau) \right]^2. \quad (11-18)$$

Абсолютная погрешность определения переходной характеристики  $h(\tau)$  тогда может определяться по формуле

$$\Delta h(\tau) = t_{\max} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{H}}^2(\tau)}{n}}, \quad (11-19)$$

где  $t_{\max}$  — значение критерия Стьюдента.

Напомним, что число повторений опытов  $n$ , необходимое для оценки характеристики с требуемой точностью, вообще говоря, не может быть определено перед проведением экспериментов, а определяется в процессе самой идентификации, т. е. после каждого опыта производится оценка точности полученной характеристики и в зависимости от результата принимается решение, следует ли прекратить опыты или продолжать их дальше.

Рассмотренный способ обработки ансамбля реализаций переходной характеристики (11-13) является, очевидно, непараметрическим, причем получаемые по формуле (11-19) границы доверительных интервалов справедливы лишь для сравнительно малых  $\tau$ , так как при их вычислении не учитывалась корреляция между отдельными сечениями оценки характеристики  $\tilde{H}(t)$ .

После того как будет получена оценка переходной характеристики, достаточно надежно отражающая общий характер ее изменения, для последующего уточнения ее, как и при оценке корреляционных функций, могут быть использованы параметрические методы. Для аппроксима-

ции графика этой оценки аналитическим выражением могут быть использованы методы, которые будут изложены в § 11-4.

В зависимости от конкретных условий работы исследуемого объекта при оценке его переходных характеристик могут применяться не только ступенчатые пробные воздействия, но и воздействия другой формы. На практике очень часто используется пробное воздействие в виде прямоугольного импульса длительности  $\tau_u$  и амплитуды  $A$  (рис. 11-6,а). Реакция объекта на подобного рода воздействие часто называется импульсной переходной характеристикой  $h_u(t)$ .

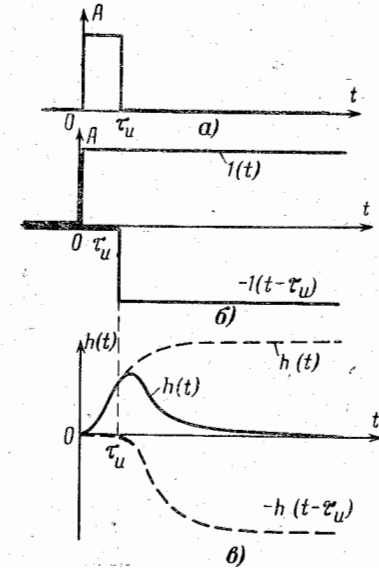


Рис. 11-6.

рассматриваться как разность смещенных на время  $\tau_u$  двух обычных переходных характеристик  $h(t)$  и  $h(t - \tau_u)$  (рис. 11-6,б):

$$h_u(t) = h(t) - h(t - \tau_u), \quad (11-20)$$

т. е.

$$h(t) = h_u(t) + h(t - \tau_u). \quad (11-21)$$

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} h(t - \tau_u) &= h_u(t - \tau_u) + h(t - 2\tau_u); \\ h(t - 2\tau_u) &= h_u(t - 2\tau_u) + h(t - 3\tau_u) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (11-22)$$

можно легко получить также следующее выражение для  $h(t)$ :

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_u(t - i\tau_u). \quad (11-23)$$

На основании этого выражения значение переходной характеристики в момент времени  $t$  получается суммированием значений им-

пульсной переходной характеристики  $h_u(t)$ , взятых в дискретные моменты времени через интервал  $\tau_u$ .

### 11-3. Перестроение переходных характеристик в частотные

Экспериментальные методы позволяют получить переходные характеристики объекта в табличном или графическом виде. Но так как для расчета системы регулирования желательно располагать частотными характеристиками объекта, возникает задача перестроения переходных характеристик в частотные. Такое перестроение может быть осуществлено либо предварительной аппроксимацией экспериментальной переходной характеристики подходящим аналитическим выражением, либо путем выполнения соответствующих операций непосредственно над значениями переходной характеристики, заданными таблицей или графиком. В последнем случае частотная характеристика будет получена также в графическом или табличном виде.

Перестроение с использованием предварительной аппроксимации переходной характеристики обладает тем очевидным достоинством, что при этом одновременно находится аналитическое выражение для частотной характеристики, а следовательно, и дифференциальное уравнение объекта. Недостатком такого способа перестроения является то, что получаемый результат обычно весьма ненадежен из-за трудностей формулировки критерия приближения при аппроксимации переходных характеристик. В результате часто оказывается, что весьма близким в среднем на всем диапазоне изменения времени переходным характеристикам соответствуют частотные характеристики, недопустимо сильно различающиеся в области существенного для будущей системы регулирования диапазона частот. Остановимся поэтому на одном из возможных способов непосредственного перестроения переходных характеристик в частотные.

Рассмотрим периодические колебания прямоугольной формы с периодом  $T_0$  (рис. 11-7,а). Если эти колебания подать на вход объекта, на его выходе установятся периодические колебания  $z(t)$  с тем же периодом (рис. 11-7,б). Из периодических колебаний входа и выхода могут быть выделены первые гармоники их разложения в ряд Фурье, по которым обычным порядком могут быть определены значения амплитудной и фазовой характеристик объекта для частоты  $\omega = 2\pi/T_0$ .

Амплитуда первой гармоники прямоугольного колебания (рис. 11-6,а) определяется формулой

$$A_{вх} = \frac{4}{\pi} d, \quad (11-24)$$

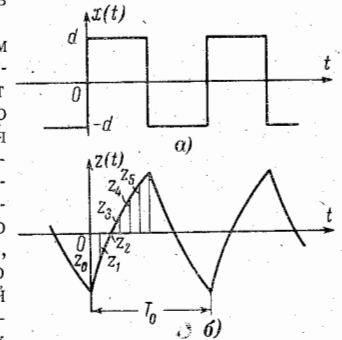


Рис. 11-7.

где  $d$  — амплитуда прямоугольного колебания. Для определения первой гармоники выходных колебаний следует вычислить интегралы:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) \sin \frac{2\pi}{T_0} dt; \\ b_1 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) \cos \frac{2\pi}{T_0} dt. \end{aligned} \right\} \quad (11-25)$$

после чего значения амплитудной и фазовой частотной характеристики определяются из формул

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{\pi}{4d} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1} \end{aligned} \quad (11-26)$$

Практически при расчетах вместо формул (11-25) используют приближенные формулы:

$$\begin{aligned} a_1 &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} z_k \sin \frac{2\pi}{m} k; \\ b_1 &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} z_k \cos \frac{2\pi}{m} k, \end{aligned} \quad (11-27)$$

где  $z_k$  — дискретные значения  $z(t)$ , взятые через интервал дискретности, равный  $\Delta t = T_0/m$ ;  $m$  — число дискретных значений функций выхода, учитываемых при расчете.

В большинстве случаев при подобного рода расчетах достаточно ограничиться значением  $m=12$  или даже  $m=6$ . В последнем случае формулы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (z_1 + z_2); \\ b_1 &= \frac{2}{3} z_0 + \frac{1}{3} (z_1 - z_2). \end{aligned}$$

так как  $z_0 = -z_3$ ;  $z_1 = -z_4$ ;  $z_2 = -z_5$ .

При использовании приведенных формул начало отсчета следует брать в момент изменения знака прямоугольного воздействия с отрицательного на положительный.

В свою очередь реакция объекта на прямоугольные колебания может быть достаточно просто подсчитана по известной его переходной характеристике. Действительно, рассмотренные колебания (рис. 11-7,а) могут рассматриваться как знакопеременная последовательность одинаковых прямоугольных импульсов длительностью  $\frac{T_0}{2}$  каждый.

Выбрав начало отсчета времени в момент начала произвольного положительного импульса, можно вычислить значение выходной ве-

личины объекта  $z(t)$  для любого момента  $0 < t < T_0/2$  как реакцию на все предыдущие знакопеременные прямоугольные импульсы входа

$$z(t) = h(t) - h_{\text{н}}\left(t + \frac{T_0}{2}\right) + h_{\text{н}}\left(t + 2\frac{T_0}{2}\right) - h_{\text{н}}\left(t + 3\frac{T_0}{2}\right) + \dots \quad (11-28)$$

где  $h_{\text{н}}(t)$  — реакция объекта на прямоугольный импульс длительностью  $T_0/2$ .

Принимая во внимание (11-20), последнюю формулу можно также представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} z(t) &= h(t) - \left[ h\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - h\left(t + \frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{2}\right) \right] + \\ &+ \left[ h\left(t + 2\frac{T_0}{2}\right) - h\left(t + 2\frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{2}\right) \right] - \dots \end{aligned} \quad (11-29)$$

По истечении времени переходного процесса  $t_{\text{пер}}$  переходная характеристика объекта устанавливается на некотором постоянном значении  $h_{\text{уст}}$  и, следовательно, характеристика  $h_{\text{н}}(t)$  при  $t > t_{\text{пер}} + \frac{T_0}{2}$

становится практически неотличимой от нуля. Поэтому в записанной сумме можно ограничиться конечным числом слагаемых. Если на интервале  $0 < t < t_{\text{пер}}$  укладывается  $n$  полупериодов  $T_0/2$ , формулу (11-28) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} z(t) &= h(t) - h_{\text{н}}\left(t + \frac{T_0}{2}\right) + h_{\text{н}}\left(t + 2\frac{T_0}{2}\right) - \dots - \\ &- h_{\text{н}}\left[t + (n+1)\frac{T_0}{2}\right] + h_{\text{н}}\left(t + n\frac{T_0}{2}\right), \end{aligned} \quad (11-30)$$

а формула (11-29) примет вид:

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 \left\{ h(t) - h\left(t + \frac{T_0}{2}\right) + h\left(t + 2\frac{T_0}{2}\right) - \dots + \right. \\ &+ \left. h\left[t + (n-2)\frac{T_0}{2}\right] - h\left[t + (n-1)\frac{T_0}{2}\right] \right\} + h\left(t + n\frac{T_0}{2}\right). \end{aligned} \quad (11-31)$$

Сформулируем теперь последовательность действий для определения вектора частотной характеристики для частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  [для определенности будем считать, что гармонический анализ предполагается осуществлять по формулам (11-27) с учетом трех дискретных значений  $z(t)$  в течение полупериода]:

1) выбирается участок переходной характеристики от  $t=0$  до такого значения  $t_{\text{пер}}$ , при котором переходный процесс практически уже заканчивается; на этом участке должно помещаться целое число  $n$  полупериодов;  $t_{\text{пер}} = nT_0/2$ ;

2) в пределах этого участка записываются значения переходной характеристики в дискретные моменты времени через интервал  $\Delta t = T_0/6$ , в результате будет получено  $r = 3n + 1$  значений характеристики  $h_0, h_1, \dots, h_r$ ;

3) по формуле (11-31) вычисляются значения

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= 2(h_0 - h_3 + h_6 - h_9 + \dots + h_{r-6} - h_{r-3}) + h_r; \\ z_1 &= 2(h_1 - h_4 + h_7 - h_{10} + \dots + h_{r-5} - h_{r-2}) + h_r; \\ z_r &= 2(h_2 - h_5 + h_8 - h_{11} + \dots + h_{r-4} - h_{r-1}) + h_r; \end{aligned} \right\} (11-32)$$

4) с помощью формул (11-27) определяются коэффициенты  $a_1$  и  $b_1$ , после чего по формулам (11-26) находятся значения амплитудной и фазовой частотных характеристик объекта для частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ .

Рассмотренный способ определения частотных характеристик применим и для объектов без саморегулирования, переходная характеристика которых с ростом времени уходит в бесконечность (рис. 11-8). Для этого достаточно лишь представить характеристику объекта как сумму характеристик интегрирующего звена и звена с характеристикой  $h_a(t)$ :

$$h(t) = k_{\Pi} t + h_a(t). \quad (11-33)$$

Коэффициент передачи интегрирующего звена  $k_{\Pi}$  определяется угловым коэффициентом асимптоты на рис. 11-8, (она показана пунктиром, к которой стремится  $h(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , после чего легко определяются характеристика  $h_a(t)$  и соответствующая ей частотная характеристика  $W_a(j\omega)$ . Частотная характеристика объекта определяется формулой

$$W(j\omega) = W_a(j\omega) + \frac{k_{\Pi}}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (11-34)$$

Пример рассмотренного способа перестроения приведен в приложении.

Одним из достоинств рассмотренного метода перестроения следует считать простоту программирования для расчетов на цифровых вычислительных машинах.

#### 11-4. Аппроксимация экспериментальных переходных характеристик объектов регулирования

Аппроксимация экспериментальных графиков переходных характеристик объектов регулирования обычно включает в себя два этапа:

1) выбор общей аналитической формулы для аппроксимирующей характеристики;

2) определение оптимальных значений коэффициентов этой характеристики из условия минимума принятого критерия приближения характеристик.

Аппроксимирующая переходная характеристика объекта обычно выбирается в виде, которому соответствует

оператор, представляющий дробно-рациональную функцию  $p$  с добавлением в случае необходимости транспортного запаздывания (5-11). Однако при выборе критерия приближения для определения коэффициентов этой характеристики встречаются уже ранее отмечавшиеся серьезные трудности. В частности, с определенной осторожностью следует относиться к использованию широко распространенного метода наименьших квадратов. Обусловлено это тем, что применение такого метода позволяет получить приближение переходной характеристики в среднем на всем диапазоне ее изменения. Между тем аппроксимация переходных характеристик не является самоцелью — она нужна для последующего построения системы регулирования объекта. Соответственно при использовании частотных методов синтеза о качестве полученной аппроксимации свидетельствует не столько близость самих переходных характеристик, сколько близость соответствующих им частотных характеристик в диапазоне частот, существенном для разрабатываемой системы регулирования. При этом следует иметь в виду, что этот диапазон для достаточно совершенных систем регулирования обычно смещается в высокочастотную область (участок *CE* на рис. 11-2), в пределах которой частотная характеристика объекта по модулю становится небольшой (сравнительно с ее низкочастотной ветвью). Значит, может возникнуть такая ситуация, когда внешне казалось бы вполне удовлетворительная аппроксимация характеристики в среднем на всем диапазоне ее изменения (например, как показано на рис. 11-2 пунктиром), в действительности будет совершенно непригодной для последующего использования ее в расчетах из-за недопустимо большой относительной погрешности аппроксимации в существенном частотном диапазоне.

Таким образом, сама постановка задачи аппроксимации характеристик объектов оказалась противоречивой, поскольку для осуществления аппроксимации необходимо располагать информацией о существенном диапазоне частот системы регулирования, для синтеза которой собственно и выполняется аппроксимация. Это обстоятельство (на него уже обращалось внимание в § 6-2) требует большой осторожности при использовании «универсальных» способов аппроксимации (например, с помощью разложения по ортогональным полиномам). Практически более надежными здесь являются методы

аппроксимации, разработанные для тех или иных достаточно типовых случаев.

Из большого числа разработанных к настоящему времени методов аппроксимации остановимся лишь на одном

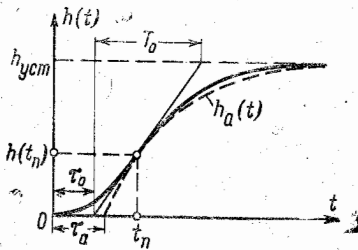


Рис. 11-9.

достаточно простым пригодном для аппроксимации наиболее часто встречающихся на практике переходных характеристик объектов по регулирующим каналам, особенностью которых является отсутствие в их составе колебательных составляющих [Л. 56]. Как показывает опыт, структура аппроксимирующего выражения для частотной характеристики таких объектов в случае, когда для регулирования предполагается использовать типовые законы, может быть выбрана в виде

$$W_a(p) = \frac{k_a e^{-\tau_a p}}{(T_{a1} p + 1)(T_{a2} p + 1)^n} \quad (11-35)$$

Целью аппроксимации в этом случае является выбор оптимальных значений коэффициентов:  $k_a$ ,  $\tau_a$ ,  $T_{a1}$ ,  $T_{a2}$  и  $n$ . Условимся считать значения этих коэффициентов оптимальными, если они обеспечивают совпадение исходной и аппроксимирующей переходных характеристик и их первых производных по времени при  $t=0$  и в точке перегиба аппроксимируемой характеристики ( $t=t_n$ ), а также при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 11-9). Иначе говоря, критерий приближения аппроксимирующей характеристики  $h_a(t)$  к действительной характеристике  $h(t)$  может быть записан следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} k_a &= h_{уст}; & h_a(t_n) &= h(t_n); \\ \frac{dh_a(t)}{dt} \Big|_{t=t_n} &= \frac{dh(t)}{dt} \Big|_{t=t_n}, \end{aligned} \right\} \quad (11-36)$$

где  $t_n$  определяется из условия

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_n} = 0. \quad (11-37)$$

Простейшим частным случаем оператора (11-35) является оператор аperiодического звена с запаздыванием

$$W_a(p) = \frac{k_a e^{-\tau_a p}}{T_a p + 1}. \quad (11-38)$$

Соответствующая ему переходная характеристика определяется формулой

$$h_a(t) = k_a \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau_a}{T_a}} \right) \cdot 1(t - \tau_a), \quad (11-39)$$

и условия (11-36) в этом случае приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} h(t_n) &= k_a \left( 1 - e^{-\frac{t_n - \tau_a}{T_a}} \right); \\ \frac{dh}{dt} \Big|_{t=t_n} &= \frac{k_a}{T_a} e^{-\frac{t_n - \tau_a}{T_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (11-40)$$

Для определения производной  $dh(t)/dt$  к графику исходной переходной характеристики  $h(t)$  в точке перегиба проводится касательная (рис. 11-9) и определяется интервал времени  $T_0$ , заключенный между точками пересечения этой касательной оси абсцисс и линии нового установившегося значения  $h_{уст}$  переходной характеристики. Приняв, кроме того, обозначение  $h(t_n) = b h_{уст}$ , условия (11-40) можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} b &= 1 - e^{-\frac{t_n - \tau_a}{T_a}} \\ \frac{T_a}{T_0} &= e^{-\frac{t_n - \tau_a}{T_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (11-41)$$

Решая эту систему уравнений, получаем следующие формулы для определения коэффициентов аппроксимирующей характеристики (11-39):

$$\begin{aligned} T_a &= (1 - b) T_0; \\ \tau_a &= t_n - (1 - b) T_0 \ln \frac{1}{1 - b}. \end{aligned} \quad (11-42)$$

При  $b < 0,5$  вторую из этих формул можно заменить более простой для вычислений

$$\tau_a = t_{\pi} - (1,025b - 0,625b^2)T; \quad (11-43)$$

График получаемой в результате изложенной процедуры аппроксимирующей характеристики  $h_a(t)$ , показан на рис. 11-9 пунктиром.

Следует отметить, что при аппроксимации реальной переходной характеристики характеристикой аperiodического звена с запаздыванием часто в качестве постоянной времени  $T_a$  выбирается просто величина  $T_0$ , а время запаздывания  $\tau_a$  принимается равным отрезку, отсекаемому касательной на оси времени (этот отрезок на рис. 11-9 обозначен через  $\tau_0$ ). Как легко заметить, такое упрощение допустимо лишь в случае, когда значение характеристики в точке перегиба относительно невелико ( $b < 0,05$ ). Вообще же говоря, такое упрощение производить нецелесообразно, так как оно приводит к заниженному расчетному времени запаздывания и завышенной постоянной времени, т. е. создает более благоприятное впечатление о динамических свойствах объекта, с точки зрения достижимой точности регулирования, чем это имеет место на самом деле.

Более точная аппроксимация переходных функций (особенно в области малых  $t$ ) может быть получена, если в качестве аппроксимирующего выбрать инерционное звено второго порядка с запаздыванием.

Предположим, что исходная переходная характеристика может быть аппроксимирована выражением, соответствующим оператору

$$W_a(p) = \frac{k_a}{(T_{a1}p + 1)(T_{a2}p + 1)}, \quad (11-44)$$

т. е.

$$h_a(t) = k_a \left( 1 - \frac{T_{a1}}{T_{a1} - T_{a2}} e^{-\frac{t}{T_{a1}}} + \frac{T_{a2}}{T_{a1} - T_{a2}} e^{-\frac{t}{T_{a2}}} \right). \quad (11-45)$$

Продифференцировав это выражение дважды и приравняв вторую производную нулю, получим уравнение для определения абсциссы точки перегиба  $t_{\pi,a}$ :

$$\frac{1}{T_{a2}} e^{-\frac{t_{\pi,a}}{T_{a2}}} = \frac{1}{T_{a1}} e^{-\frac{t_{\pi,a}}{T_{a1}}} \quad (11-46)$$

Значения характеристики (11-45) и ее первой производной в точке перегиба определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} h(t_{\pi,a}) &= k_a \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_{a2}}{T_{a1}} \right) e^{-\frac{t_{\pi,a}}{T_{a1}}} \right]; \\ \frac{dh(t)}{dt} \Big|_{t=t_{\pi}} &= \frac{k_a}{T_{a1}} e^{-\frac{t_{\pi,a}}{T_{a1}}} = \frac{k_a}{T_0}, \end{aligned} \right\} \quad (11-47)$$

где  $T_0$  по-прежнему определяется построением касательной в точке перегиба (рис. 11-9).

Из формулы (11-46) может быть найдена зависимость  $t_{\pi,a}/T_{a1}$  от  $T_{a2}/T_{a1}$ , имея которую можно с помощью формул (11-47) найти и зависимости  $b_a = h(t_{\pi,a})/h_{уст}$  и  $T_{a1}/T_0$  от  $T_{a2}/T_{a1}$ . Графики всех указанных зависимостей приведены на рис. 11-10.

По графикам этих зависимостей можно, очевидно, решать и обратную задачу, а именно находить значения  $T_{a1}$  и  $T_{a2}$  по заданным  $b$  и  $T_0$ .

Порядок определения коэффициентов аппроксимирующей характеристики (11-45)  $k_a$ ,  $T_{a1}$  и  $T_{a2}$  может быть принят следующим:

1) коэффициент передачи  $k_a$  принимается равным установившемуся значению характеристики  $h_{уст}$ ;

2) к исходной переходной характеристике  $h(t)$  проводится касательная в точке ее перегиба и определяется величина  $T_0$ ;

3) с помощью графиков, приведенных на рис. 11-10, по известной величине  $b = h(t_{\pi})/h_{уст}$  находится значение  $T_{a2}/T_{a1}$ , после чего уже легко находят значения  $T_{a1}/T_0$ .

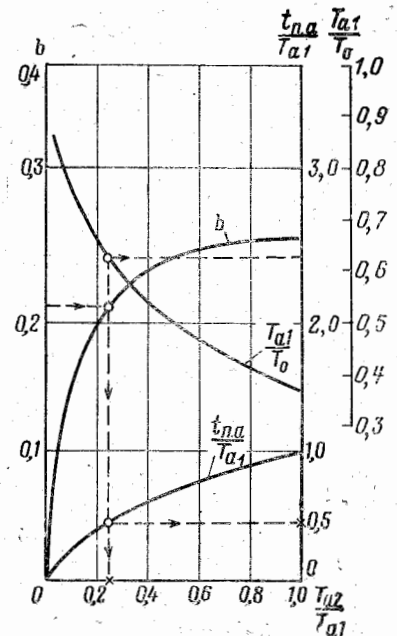


Рис. 11-10.

и  $t_{п.а}/T_{a1}$ , и, следовательно,  $T_{a1}$ ,  $T_{a2}$  и  $t_{п.а}$ .

В заключение следует сравнить найденное значение  $t_{п.а}$  с действительным значением  $t_{п}$ , определяемым непосредственно по исходной характеристике  $h(t)$ . Если они совпадают, то это значит, что исходная характеристика может быть аппроксимирована характеристикой (11-45). Обычно оказывается, что  $t_{п.а}$  оказывается меньше  $t_{п}$ . Это свидетельствует о том, что в аппроксимирующую характеристику следует ввести запаздывание, определяемое по очевидной формуле:

$$\tau_a = t_{п} - t_{п.а}. \quad (11-48)$$

Аппроксимирующая передаточная функция объекта в этом случае приобретает следующий вид:

$$W_a(p) = \frac{k_a e^{-\tau_a p}}{(T_{a1} p + 1)(T_{a2} p + 1)}. \quad (11-49)$$

Аппроксимация инерционным звеном второго порядка с запаздыванием возможна лишь при условии, что величина  $b$  не превышает значения 0,265 (это максимально возможное для характеристики звена второго порядка значение  $b$  имеет место при равных постоянных времени  $T_{a1} = T_{a2}$ ). Поэтому, если это условие не выполняется,

в аппроксимирующей характеристике (11-35) следует выбрать  $n > 1$ . Расчетные графики для различных значений  $n$ , полученные так же, как и для  $n=1$ , представлены на рис. 11-11 (для сравнения здесь же воспроизведены графики для  $n=1$  с рис. 11-10). Эти графики позволяют производить аппроксимацию переходных характеристик, относительная ордината точки перегиба в которых не превышает величины  $\frac{t_{п.а}}{T_{a1}}$  (что вполне достаточно для обычно встречающихся на практике объектов).

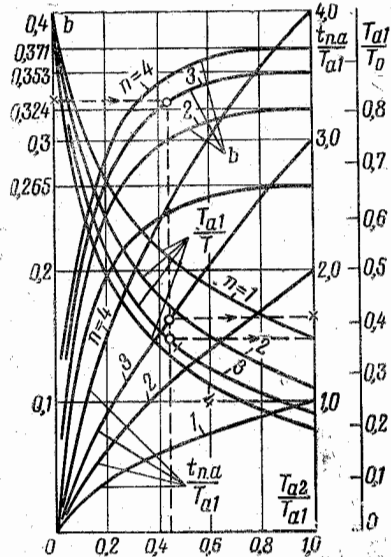


Рис. 11-11.

В заключение необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что практически при выборе положения точки перегиба переходных характеристик реальных объектов допустим некоторый произвол. Объясняется это тем, что близким переходным характеристикам могут соответствовать довольно сильно различающиеся по своей структуре операторы. Наличие же определенной свободы в выборе положения точки перегиба может рассматриваться как достоинства изложенного метода аппроксимации, так как позволяет выбрать из множества возможных аппроксимирующих характеристик наиболее удобную для последующих расчетов. Так, например, если окажется, что точка перегиба удовлетворяет требованию  $b < 0,265$ , то, пользуясь графиками на рис. 11-11, можно подобрать по крайней мере четыре структуры передаточных функций (для  $n=1 \div 4$ ). Варьируя, кроме того, в разумных пределах величину  $b$ , можно в ряде случаев добиться удовлетворительной аппроксимации свойств объекта без введения запаздывания. Пример расчета приведен в приложении

### 11-5. Приближенный расчет оптимальных параметров регуляторов непосредственно по переходной характеристике объекта

В случаях, когда для аппроксимации переходных характеристик объекта могут быть использованы достаточно простые аппроксимирующие функции с небольшим числом варьируемых коэффициентов и в переходной характеристике объекта по регулирующему каналу содержится достаточно полная начальная информация для расчета оптимальных параметров регулятора, соответствующие расчеты могут быть заранее выполнены для всех возможных комбинаций коэффициентов характеристики объекта. Практически к такому случаю относится расчет оптимальных параметров П, И, ПИ-регуляторов для объектов с монотонными переходными характеристиками (типа рассмотренных в § 11-4) при низкочастотных возмущающих воздействиях и когда в качестве расчетного может быть выбрано ступенчатое возмущение, идущее со стороны регулирующего органа.

Не останавливаясь подробно на порядке получения указанных формул и графиков (для этого могут быть использованы изложенные в гл. 7 методы), приведем окончательные результаты для случая, когда динамика



объекта по регулируемому каналу может быть аппроксимирована инерционным звеном первого порядка с запаздыванием (11-38), а в качестве критерия оптимальности выбран минимум среднеквадратичной ошибки регулирования при низкочастотных воздействиях [Л. 54, 56]. После определения по способу, изложенному в § 11-4, трех коэффициентов аппроксимирующей характеристики  $k_a$ ,  $T_a$ ,  $\tau_a$  оптимальные значения коэффициентов передачи П- и И-регуляторов могут быть вычислены соответственно по формулам:

$$k_{p, \text{опт И}} = \frac{1}{k_a} \left( 0,40 + \frac{0,42}{\frac{\tau_a}{T_a} - 0,07} \right); \quad (11-50)$$

$$k_{p, \text{опт П}} = \frac{1}{k_a \tau_a} \left( 0,16 + 0,52 \frac{\tau_a}{T_a} \right). \quad (11-51)$$

Для определения оптимальных значений двух параметров настройки ПИ-регулятора (коэффициента передачи  $k_p$  и постоянной интегрирования  $T_{\text{И}}$ ) можно воспользоваться графиками, приведенными на рис. 11-12.

Следует отметить, что к настоящему времени предложено весьма много различных формул и графиков для выполнения расчетов по рассмотренной схеме [Л. 34,

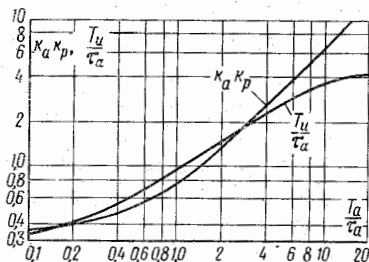


Рис. 11-12.

36, 55, 8]. Все эти методы отличаются друг от друга по существу лишь различными формулировками критериев оптимальности системы регулирования и критерия приближения, принимаемого при аппроксимации переходной характеристики объекта. В подавляющем числе случаев эти методы ориентируются на ступенчатое возмущение со стороны регулирующего органа или ступен-

чатое изменение задания регулятору. Как правило, рекомендации распространяются и на системы с ПИД-регуляторами. В некоторых работах приводятся рекомендации по выбору регуляторов, исходя из довольно подробных показателей поведения системы регулирования (максимального отклонения регулируемой величины в переходных процессах, длительности процесса регулирования, величины перерегулирования и т. п.) при ступенчатых возмущениях нагрузкой объекта и т. п. К сожалению, приходится признать, что во всех подобных случаях допускается явная переоценка реальных возможностей рассмотренного способа расчета параметров систем регулирования.

Прежде всего аппроксимация действительных переходных характеристик объекта характеристикой инерционного звена первого порядка с запаздыванием, как правило, дает совершенно неудовлетворительные результаты при расчете параметров ПИД-регуляторов. Оценка же качественных показателей процесса регулирования при ступенчатой форме возмущающего воздействия допустима лишь при условии, что динамические характеристики канала, по которому действует расчетное возмущение, должны совпадать с характеристиками регулирующего канала (т. е. лишь по отношению к возмущению, идущему со стороны регулирующего органа, или к изменению задания регулятору). Использование же подобного способа оценки максимальных отклонений регулируемой величины, перерегулирования и других качественных показателей по отношению к возмущению нагрузкой, вообще говоря, должно рассматриваться как грубая ошибка. Обусловлено это тем, что, как уже отмечалось в § 5-5, динамические характеристики реальных промышленных объектов регулирования по каналам действия возмущения нагрузкой могут резко отличаться от динамических характеристик регулирующих каналов, причем в худшую (с точки зрения качества процесса регулирования) сторону. В этой связи следует подчеркнуть, что хотя возмущению нагрузкой и может быть заменено эквивалентным ему возмущением, идущим со стороны регулирующего органа, но при такой замене обычно существенно меняется форма возмущения. В частности, ступенчатому возмущению нагрузкой соответствует не ступенчатое, а значительно более тяжелое для системы эквивалентное возмущение со стороны регулирующего органа, содер-



жащее обычно в начальный момент времени импульсы бесконечно большей амплитуды (напомним, что ступенчатое возмущение может быть наиболее тяжелым только в классе ограниченных по модулю возмущений).

### 11-6. Оценка корреляционных функций возмущений

Для полного расчета параметров настройки регуляторов необходимо, помимо динамических характеристик регулирующих каналов объекта, располагать корреляционными функциями возмущений, приведенных к соответствующим выходам объекта. Получение реализаций этих возмущений может быть осуществлено в условиях нормальной эксплуатации объекта (даже если он находится на ручном регулировании) путем подключения параллельно к регулирующим каналам динамических моделей этих каналов с последующим вычитанием из регулируемых величин объекта выходов этих моделей. В дальнейшем обработка полученных таким образом реализаций может осуществляться способом, изложенным в § 10-5.

Одной из основных трудностей при практических расчетах оценок корреляционных функций случайных процессов по одной его реализации является трудность центрирования этих реализаций. Следует подчеркнуть, что эти трудности имеют принципиальный характер и обусловлены необходимостью использования системного подхода при выполнении этой операции. Широко освещенные в литературе алгоритмы центрирования [Л. 6, 18] обладают тем очевидным недостатком, что для выбора граничной частоты в сглаживающем фильтре по существу невозможно указать надежных рекомендаций, гарантирующих, что в отфильтрованной низкочастотной составляющей случайного процесса не будет содержаться важная для расчета системы регулирования информация. Очевидно, что эта граничная частота определяется динамическими свойствами системы регулирования, для построения которой собственно и осуществляется вся процедура оценки корреляционных функций.

Указанное затруднение может быть устранено, если в качестве центрирующего фильтра использовать саму автоматическую систему регулирования идентифицируемого объекта, предварительный синтез которой осуществ-

влен по заранее определенным динамическим характеристикам регулирующих каналов этого объекта в предположении низкочастотного характера возмущения (напомним, что при использовании такой гипотезы статистические характеристики возмущений для синтеза системы не нужны).

Таким образом, вся процедура построения системы регулирования состоит из следующих этапов:

а) Оценка динамических характеристик регулирующих каналов объекта.

б) Синтез системы регулирования в предположении низкочастотного характера возмущений.

в) Запись реализаций изменений во времени регулируемых величин и регулирующих воздействий в процессе нормальной эксплуатации объекта и вычисление по ним реализации приведенных к выходам объекта возмущений. Так, например, при регулировании объекта с одной регулируемой величиной  $y(t)$  и регулирующим воздействием  $\mu(t)$  это вычисление производится по формуле

$$v(t) = y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mu}(\xi) \mu(t - \xi) d\xi; \quad (11-52)$$

где  $\omega_{\mu}(t)$  — весовая характеристика объекта.

г) Центрирование полученной реализации с помощью модели системы. Так, например, для одноконтурной системы регулирования оператор центрирующего фильтра имеет следующий вид:

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + W_{\mu}(p) W_p^{n,q}(p)}, \quad (11-53)$$

где  $W_p^{n,q}(p)$  — оператор регулятора при его оптимальной настройке, найденной из условия низкочастотного характера возмущений.

д) Оценка корреляционных функций по центрированным таким образом реализациям.

е) Коррекция настройки регулятора с учетом найденных статистических свойств возмущений. Так, например, для одноконтурной системы регулирования такая кор-

403—19

рекция может быть осуществлена путем вычисления спектра мощности ошибки по формуле

$$G_{ee}(\omega) = \left| \frac{1 + W_{\mu}(j\omega) W_p^{н.ч}(j\omega)}{1 + W_{\mu}(j\omega) W_p(j\omega)} \right| G_{vv}(\omega), \quad (11-54)$$

где  $G_{vv}(\omega)$  — спектр мощности, соответствующий найденной корреляционной функции возмущения  $v(t)$ .

Расчеты этого этапа могут осуществляться аналогично расчетам, выполняемым при определении оптимальных параметров регулятора, которые были рассмотрены в гл. 7.

## ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ В ДЕЙСТВУЮЩИХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ

#### 12-1. Особенности идентификации автоматических систем регулирования

Практический опыт показывает, что результат синтеза системы регулирования, выполненного на основании математической модели объекта, полученной аналитически или постановкой эксперимента на еще не автоматизированном объекте, оказывается чаще всего весьма далеким от действительно оптимальной системы. Обусловлено это в первую очередь неполнотой начальной информации о динамике объекта, содержащейся в полученной таким способом его модели. Действительно, необходимость исключения влияния обслуживающего персонала на результаты опытов по идентификации объекта, находящегося на «ручном» регулировании, делает процедуру оценки его динамических характеристик весьма громоздкой и трудоемкой. В этих условиях приходится ограничиваться определением переходных характеристик объекта, которые являются менее удобными для расчетов, чем частотные. Нарушение нормального режима функционирования объекта, возникающее в процессе проведения экспериментов, как правило, не позволяет осуществить повторение опытов столько раз, сколько это было бы необходимо для оценки динамических характеристик с требуемой точностью. К тому же сами эти требования к точности идентификации трудно поддаются формулировке, поскольку выбор критерия приближения для ма-

тематической модели объекта, как уже ранее отмечалось, зависит не только от свойств самого объекта, но в равной степени и от свойств регуляторов, которые будут установлены на этом объекте (т. е. при формулировке критерия приближения необходимо исходить из системного принципа построения моделей отдельных элементов системы).

Следует также учитывать, что в реально функционирующих системах автоматического регулирования наряду с неполнотой начальной информации о свойствах объекта имеет место также и неполнота начальной информации о динамике аппаратуры автоматического регулирования, так как во всякой технической конструкции регуляторов заданный закон регулирования реализуется лишь приближенно.

Соответственно, синтез автоматической системы регулирования по заранее заданным динамическим характеристикам объекта в общем случае должен рассматриваться лишь как первый шаг на пути построения оптимальной системы. Обычно на этом этапе синтеза удаётся лишь наметить общую структуру системы регулирования, окончательный же выбор количественных значений параметров системы приходится осуществлять уже непосредственно на действующей системе регулирования в процессе ее наладки и пробной эксплуатации.

Во время наладки автоматической системы регулирования имеется возможность определять экспериментальным путем не только характеристики отдельно взятого объекта, но и характеристики всей системы регулирования в целом, работающей при некоторой начальной, пусть даже грубо приближенной, настройке регулятора. Этой возможностью не следует пренебрегать, так как экспериментальная оценка математической модели системы обладает рядом важных практических преимуществ перед оценкой модели объекта. В то же время, располагая характеристиками системы автоматического регулирования, можно осуществить расчет требуемого изменения первоначально установленных параметров настройки регулятора для того, чтобы они приняли оптимальные значения. В частности, если система регулирования линейна, то, располагая соответствующими ее характеристиками, а также характеристиками регулятора, можно вычислить характеристику объекта, по которой уже обычным порядком может быть найдена  $\Phi_{\text{н}}(p)$  оп-

тимальная настройка регулятора. Так, например, имея характеристику одноконтурной системы регулирования, показанной на рис. 12-1,а, определяющую изменение ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$  при изменении задания регулятору  $s(t)$ , можно вычислить характеристику регулирующего канала объекта:

$$W_{\mu}(p) = \frac{1}{W_p(p)} \left[ \frac{1}{\Phi_{s\varepsilon}(p)} - 1 \right]. \quad (12-1)$$

Характеристика  $\Phi_{s\varepsilon}(p)$  может быть определена путем подачи на вход действующей системы регулирования задатчиком регулятора испытательного воздействия  $s_0(t)$

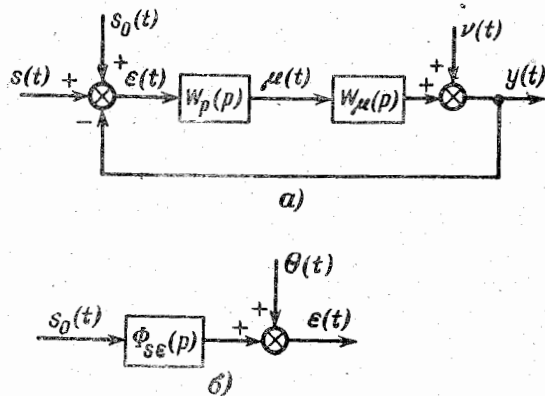


Рис. 12-1.

и регистрации возникающего при этом изменения ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$ .

Как известно, знания характеристики объекта  $W_{\mu}(p)$  достаточно для определения оптимальной настройки рассматриваемой системы, если возмущения могут считаться низкочастотными. Если же понадобится уточнить настройку регулятора с учетом действительных статистических свойств возмущения, то для этого необходимо располагать спектром мощности  $G_{vv}(\omega)$  эквивалентного возмущения  $v(t)$ , приведенного к выходу объекта. Этот спектр мощности может быть вычислен по спектру мощности  $G_{\theta\theta}(\omega)$  эквивалентного возмущения  $\theta(t)$ , приведенного к выходу системы регулирования  $\varepsilon(t)$  (рис. 12-1,б):

$$G_{vv}(\omega) = \frac{G_{\theta\theta}(\omega)}{|\Phi_{s\varepsilon}(j\omega)|^2}. \quad (12-2)$$

Реализация этого возмущения может быть получена путем регистрации ошибки регулирования в действующей системе регулирования при отсутствии испытательного воздействия, т. е. при  $s_0(t) = 0$ .

Несмотря на то что при оценке характеристик системы регулирования для получения характеристик объекта требуется дополнительный пересчет, в целом необходимость в этих добавочных расчетах перекрывается целым рядом достоинств, из которых отметим следующие:

1. Автоматическая система регулирования может длительное время функционировать самостоятельно, не нуждаясь во вмешательстве обслуживающего персонала. Это обстоятельство снимает проблему устранения влияния действия обслуживающего персонала на результаты идентификации, а поэтому эксперимент может осуществляться в стационарном режиме работы системы с использованием стационарных испытательных воздействий (типа последовательностей импульсов или гармоник). Упрощаются также организация эксперимента и статистическая обработка его результатов. В частности, в этом случае имеется возможность заранее до начала опытов оценить корреляционную функцию приведенных к выходам системы эквивалентных случайных помех (реализации которых представляют собой изменение во времени отклонений регулируемых величин в процессе нормального функционирования системы регулирования), что позволяет выбрать наилучшую форму пробных воздействий и оценить требуемую длительность эксперимента. Наконец, снимается проблема центрирования реализаций, так как система сама отфильтровывает те низкочастотные составляющие, которые не имеют значения для расчета. Физически это проявляется в том, что отклонения регулируемых величин поддерживаются регуляторами в среднем на нулевом уровне.

2. Наибольшие по модулю значения частотные характеристики системы принимают в существенном для них диапазоне частот, и, следовательно, в этом диапазоне достигается и наибольшая точность оценок динамических характеристик системы.

3. В динамической характеристике системы регулирования находят свое отражение факторы, искажающие закон регулирования реальной аппаратуры регулирования. Соответственно имеется возможность определить характеристики объекта по характеристике системы так, что

в ней будут учтены эти искажающие факторы. Действительно, пусть в системе частотная характеристика реального регулятора  $W_p^p(p)$  отличается от характеристики идеального регулятора  $W_p(p)$  некоторым неизвестным множителем  $A(p)$ , т. е.

$$W_p^p(p) = A(p) W_p(p). \quad (12-3)$$

При вычислении характеристики объекта по формуле (12-1) можно считать характеристики регулятора идеальными. Тогда вместо действительной характеристики объекта  $W_\mu(p)$  получим другую характеристику  $W_\mu^p(p)$ , связанную с ней соотношением

$$W_\mu^p(p) = A(p) W_\mu(p). \quad (12-4)$$

Расчет оптимальной настройки регулятора по этой характеристике можно производить, считая, что регулятор имеет идеальный закон регулирования  $W_p(p)$ .

4. Наличие действующих автоматических регуляторов при идентификации системы регулирования позволяет технически достаточно просто осуществлять подключение к ней соответствующей аппаратуры (генераторов испытательных воздействий, измерительных приборов, специализированных вычислительных устройств и т. п.); кроме того, возможность проведения экспериментов без привлечения обслуживающего персонала в принципе позволяет автоматизировать процессы идентификации и оптимизации настройки системы и перейти к самонастраивающейся (адаптивной) системе регулирования.

5. Детерминированный характер алгоритма функционирования регуляторов позволяет в некоторых случаях осуществлять идентификацию системы регулирования методами пассивного эксперимента. Правда, для этого необходимо, чтобы в процессе нормальной эксплуатации на систему действовало доступное для контроля возмущение, идущее со стороны регулирующего органа (или изменение заданного значения регулируемой величины), которое удовлетворяло бы двум требованиям:

а) было статистически не связано ни с одним из других возмущений;

б) имело спектр с полосой частот не уже полосы пропускания системы регулирования.

В соответствии с (4-91) оценку реакции системы на воздействие, совпадающее по форме с автокорреляционной функцией входного воздействия  $r_{ss}(\tau)$ , следует искать в виде оценки взаимной корреляционной функции входной и выходной величин системы:

$$\tilde{r}_{ss}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} s_0(t) \varepsilon(t+\tau) dt. \quad (12-5)$$

Если для идентификации используется специально сформированное испытательное воздействие  $s_0(t)$ , то это воздействие может быть выбрано в виде периодической с периодом  $T_0$  детерминированной функции времени, которая может рассматриваться как одна из реализаций эргодического случайного процесса, реализации которого отличаются друг от друга только случайным смещением вдоль оси времени. Корреляционная функция такого процесса будет также периодической с периодом  $T_0$ .

$$r_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_0-\tau} \int_0^{T_0-\tau} s_0(t) s_0(t+\tau) dt. \quad (12-6)$$

Принимая во внимание, что

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\xi) s_0(t-\xi) d\xi + \theta(t), \quad (12-7)$$

и подставив это выражение в (12-5), при  $T=lT_0$  ( $l$  — целое число), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{ss}(\tau) &= \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} s_0(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\xi) s_0(t+\tau-\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} s_0(t) \lambda(t+\tau) dt = g(\tau) + n(\tau), \end{aligned} \quad (12-8)$$

где

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\xi) r_{ss}(\tau-\xi) d\xi; \quad (12-9)$$

$$n(\tau) = \tilde{r}_{s\theta}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} s_0(t) \theta(t+\tau) dt. \quad (12-10)$$

Составляющая  $g(\tau)$  представляет собой подлежащую оценке реакцию системы на воздействие в виде  $r_{ss}(\tau)$ ;  $n(\tau)$  является аддитивной случайной помехой, наличие которой приводит к ошибке оценки. Поскольку эта помеха является оценкой взаимной корреляционной функции процессов  $s_0(t)$  и  $\theta(t)$ , а эти процессы статистически не связаны, то при  $T \rightarrow \infty$ , она стремится к нулю и, следовательно,  $r_{ss}(\tau)$  является состоятельной оценкой для  $g(\tau)$ . Обратим внимание, что так как  $s_0(t)$  является детерминированной функцией, то при нормально распределенном возмущении  $\theta(t)$  помеха  $n(\tau)$  будет также распределена нормально [как взвешенная сумма (12-10) значений  $\theta(t)$ ].

Дисперсия  $n(\tau)$  может быть определена по формуле

$$\sigma_n^2 = M \left\{ \frac{1}{T^2} \int_0^T s(\xi) \theta(\tau + \xi) d\xi \int_0^T s(\eta) \theta(\tau + \eta) d\eta \right\} \quad (12-11)$$

или, учитывая, что  $s(t)$  является детерминированной функцией времени,

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T s(\xi) d\xi \int_0^T s(\eta) r_{\theta\theta}(\eta - \xi) d\eta. \quad (12-12)$$

В заключение следует заметить, что преимущества идентификации действующих систем автоматического регулирования по сравнению с идентификацией отдельно взятых объектов оказываются настолько существенными, что к включению автоматических регуляторов перед началом идентификации целесообразно прибегать даже в тех случаях, когда в задачу идентификации входит оценка лишь динамических характеристик объекта, свободных от искажающего влияния динамических характеристик реальных регуляторов [Л. 57]. Организация эксперимента в этом случае по существу ничем не отличается от организации экспериментов по оценке динамических характеристик системы регулирования. Отличие заключается лишь в том, что здесь приходится регистрировать не только изменение регулируемых величин на выходе объекта, но и изменение регулирующих воздействий.

В частности, можно показать, что оценка характеристики объекта по регулируемому каналу  $W_{\mu}(p)$  в системе

регулирования, приведенной на рис. 12-1, *a*, может быть получена с помощью формул (12-8) и (12-9), в которых следует только заменить  $r_{ss}(\tau)$  на оценку взаимной корреляционной функции  $r_{s\mu}(\tau)$  для  $s_0(t)$  и  $\mu(t)$ , а  $r_{ss}(\tau)$  — на оценку взаимной корреляционной функции  $r_{sy}(\tau)$  для  $s(t)$  и  $y(t)$ .

## 12-2. Оценка весовой характеристики системы регулирования

Для оценки весовой характеристики автоматической системы регулирования проще всего на ее вход подать периодическую последовательность достаточно коротких импульсов, период следования которых должен быть настолько большим, чтобы между окончанием предыдущего импульса и началом посылки последующего переходные процессы в системе успевали окончиться. Практически наиболее просто формируются прямоугольные импульсы; в этом случае последовательность импульсов определяется формулой

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } iT_0 < t < iT_0 + \tau_{и}; \\ 0 & \text{при } iT_0 + \tau_{и} < t < (i+1)T_0 \end{cases} \quad (12-13)$$

( $i=0, 1, 2, \dots, l-1$ ),

где  $l$  — число периодов последовательности  $T_0$  на интервале усреднения  $T$ .

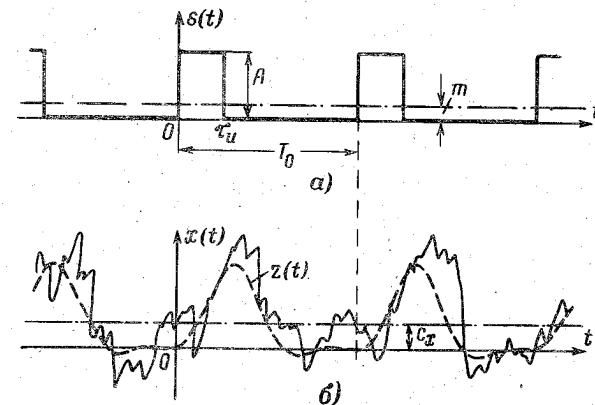


Рис. 12-2.

График такой последовательности импульсов приведен на рис. 12-2,а, а на рис. 12-2,б — реакция системы на эту последовательность с учетом случайных помех.

Обратим внимание, что рассматриваемая здесь последовательность импульсов принципиально отличается от

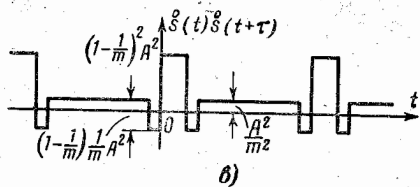
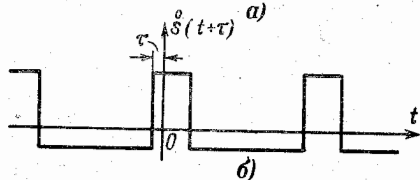
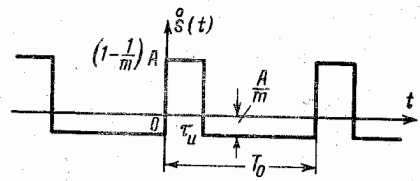


Рис. 12-3.

импульсных воздействий, применяемых при идентификации отдельно взятого неавтоматизированного объекта (см. § 11-2), в том отношении, что в последнем случае, как правило, приходится использовать изолированные одиночные импульсы, между посылками которых обычно имеет место вмешательство обслуживающего персонала в режим работы объекта. Кроме того, интервал между посылками может быть непостоянным и должен был выбираться настолько большим, чтобы устранялась статистическая зависимость между результатами отдельных опытов.

Последовательность импульсов (12-13) имеет среднее значение, определяемое формулой

$$m = \frac{\tau_u}{T_0} A, \quad (12-14)$$

т. е. центрированная последовательность импульсов (12-13) определяется следующим выражением:

$$s(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{\tau_u}{T_0}\right) & \text{при } iT_0 < t < iT_0 + \tau_u; \\ -A \frac{\tau_u}{T_0} & \text{при } iT_0 < t < (i+1)T_0. \end{cases} \quad (12-15)$$

График этой функции приведен на рис. 12-3,а. График произведения центрированной последовательности импульсов  $s(t)$  (рис. 12-3,а) на смещенную последователь-

ность  $s(t+\tau)$  (рис. 12-3,б) имеет вид, показанный на рис. 12-3,в; усреднение этого произведения за период приводит к следующей корреляционной функции рассматриваемой последовательности:

$$\tilde{r}_{ss}(\tau) = r_{ss}(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{m} - \frac{\tau}{\tau_u}\right) \frac{A^2}{m} & \text{при } iT_0 - \tau_u < \tau < iT_0 + \tau_u; \\ -\frac{A^2}{m^2} & \text{при } iT_0 + \tau_u < \tau < (i+1)T_0 - \tau_u \end{cases} \quad (12-16)$$

$$(i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots),$$

где  $m = T_0/\tau_u$ . График этой корреляционной функции приведен на рис. 12-4.

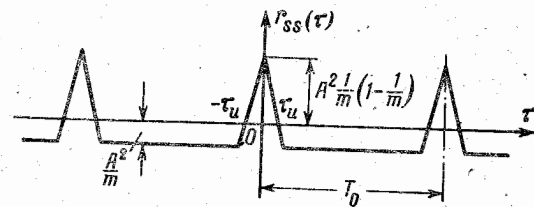


Рис. 12-4.

Таким образом, взаимная корреляционная функция испытательного воздействия  $s(t)$  и выходного сигнала системы  $\varepsilon(t)$  в этом случае будет в пределах  $0 < \tau < T_0$  представлять собой реакцию системы на одиночный треугольный импульс площадь которого под графиком равна  $A^2\tau_u/m$ . При малой длительности импульсов в качестве оценки весовой характеристики системы следует взять:

$$\tilde{\Phi}_{se}(\tau) = \frac{m}{A^2\tau_u} \tilde{r}_{se}(\tau), \quad (12-17)$$

где  $\tilde{r}_{se}(\tau)$  вычисляется по известному центрированному воздействию  $s(t)$  (12-15) и реализации ошибки регулирования, зарегистрированной в процессе эксперимента  $\varepsilon(t)$ , с помощью формулы (12-5). Дисперсия этой оценки, очевидно, будет определяться следующим образом:

$$\sigma_{\tilde{\Phi}}^2 = \frac{m^2}{A^4\tau_u^2} \sigma_n^2, \quad (12-18)$$

где  $\sigma_n^2$  — дисперсия оценки взаимной корреляционной функции (12-12)

При достаточной малой длительности импульсов действительную последовательность можно заменить эквивалентной последовательностью дельта-функций, т. е. считать, что  $s(t)$  определяется не формулой (12-15), а формулой

$$s(t) = A\tau_n \sum_{i=0}^{lm-1} c_i \delta(t - i\tau_n), \quad (12-19)$$

где

$$c_i = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m} \approx 1 & \text{при } i=0, m, 2m, \dots, l-1; \\ -\frac{1}{m} & \text{при остальных } i. \end{cases} \quad (12-20)$$

Подстановка этих выражений в формулы (12-12) и (12-18) приводит к следующему выражению для дисперсии оценок:

$$\sigma_\Phi^2 = \frac{1}{A^2 \tau_n^2 l^2} \sum_{i=0}^{lm-1} \sum_{j=0}^{lm-1} c_i c_j r_{\theta\theta} [(j-i)\tau_n] \quad (12-21)$$

или

$$\sigma_\Phi^2 = \frac{1}{A^2 \tau_n^2 l} \left\{ \sigma_\theta^2 + \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{lm-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{lm-1} c_i c_j r_{\theta\theta} [(j-i)\tau_n] \right\}, \quad (12-22)$$

где  $\sigma_\theta^2$  — дисперсия возмущения  $\theta(t)$ .

### 12-3. Оценка весовой характеристики системы регулирования с помощью псевдослучайного сигнала

При оценке весовых характеристик в качестве пробных воздействий могут использоваться не только детерминированные, но и случайные сигналы, близкие по своим свойствам к белому шуму, получаемые от специальных генераторов случайных функций. Поскольку корреляционная функция белого шума представляет собой дельта-функцию, то и взаимная корреляционная функция между входной и выходной величинами системы будет в этом случае совпадать с ее весовой характеристикой.

Белый шум может быть приближенно реализован в виде последовательности одинаковых, следующих вплотную друг за другом достаточно коротких прямоугольных импульсов со случайно меняющимся знаком, причем вероятность появления очередного импульса с положительным или отрицательным знаком одинакова и не зависит от знака предыдущего импульса. Можно показать, что корреляционная функция такой случайной последовательности импульсов имеет вид одиночного треугольного импульса (рис. 12-5). Однако оценка этой корреляционной функции, вычисленная по реализации конечной длительности, имеет случайные флуктуации, существенно усложняющие определение весовой характеристики системы. В этом отношении значительно более удобными являются так называемые псевдослучайные последовательности, представляющие собой детерминированные периодические последовательности импульсов с заранее заданными корреляционными функциями [Л. 60, 61, 62].

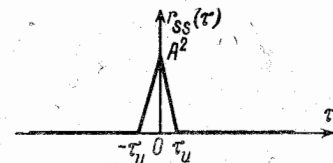


Рис. 12-5.

Псевдослучайные последовательности импульсов формируются на основании линейных рекуррентных двоичных последовательностей чисел  $s_1, s_2, \dots, s_l$ , каждый член которых может принимать значения 0 или 1 в соответствии с рекуррентным соотношением

$$s_i = a_1 s_{i-1} + a_2 s_{i-2} + \dots + a_n s_{i-n}, \quad (12-23)$$

причем  $s$  и  $a$  могут быть лишь нулем или единицей, а операция сложения производится по модулю 2, т. е. сложение выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 &= 0; \\ 0 + 1 &= 1; \\ 1 + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12-24)$$

Значения коэффициентов  $a$  для  $n \leq 5$  приведены в табл. 12-1.

Таблица 12-1

$n$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$
2	—	—	—	1	1
3	—	—	1	0	1
4	—	1	0	0	1
	1	0	0	1	0
5	1	0	1	1	1
	1	1	0	1	1

Для построения последовательности достаточно задать произвольную начальную последовательность  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .

Рассмотренная последовательность является периодической с периодом

$$m = 2^n - 1, \quad (12-25)$$

Для  $n=3$  формула (12-23) принимает вид:

$$s_i = s_{i-1} + s_{i-2},$$

а последовательность будет иметь период, равный  $m=2^3-1=7$ .  
Задав, например, начальные числа  $s_1=s_2=s_3=1$ , получим:

$$s_4 = s_3 + s_2 = 1 + 1 = 0;$$

$$s_5 = s_4 + s_3 = 0 + 1 = 1;$$

$$s_6 = s_5 + s_4 = 1 + 1 = 0;$$

т. е. последовательность будет иметь вид:

$$1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0; 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \dots \quad (12-26)$$

График последовательности прямоугольных импульсов, каждый из которых имеет длительность  $\tau_n$ , построенный в соответствии с этой формулой, приведен на рис. 12-6. Задав другую начальную

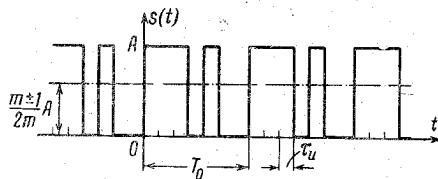


Рис. 12-6.

последовательность, например  $s_1=s_3=0; s_2=1$ , получим новую последовательность

$$0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0; 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \dots \text{ и т. д.}$$

Двоичная последовательность чисел обладает следующими особенностями:

1. Число единиц и нулей в периоде различается на единицу, т. е.

$$\sum_{i=0}^{m-1} s_i = \frac{m \pm 1}{2}. \quad (12-27)$$

2. Две одинаковые двоичные последовательности при сдвиге относительно друг друга на любое число позиций будут иметь различные члены лишь на  $d$  позициях, число которых определяется формулой

$$d = \frac{m+1}{2}. \quad (12-28)$$

Например, последовательность (12-26) и сдвинутая на две позиции новая последовательность в пределах одного периода имеют следующий вид:

$$1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0;$$

$$1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1.$$

Они различаются на четырех позициях (второй, пятой, шестой и седьмой). Среднее значение любой двоичной последовательности с учетом (12-27) определяется формулой

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} s_i = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{1}{m} \right). \quad (12-29)$$

При  $m \gg 1$  без ущерба для точности можно считать среднее значение двоичной последовательности равным 0,5. В дальнейшем рассмотрение будет ограничено именно этим случаем.

Найдем корреляционную функцию последовательности одинаковых прямоугольных импульсов с амплитудой  $A$  и длительностью  $\tau_n$  каждый, если послылка импульсов соответствует значению  $s=1$ , вычисленному по формуле (12-23).

Произведение двух таких последовательностей импульсов, смещенных относительно друг друга на время  $\tau < \tau_n$ , будет состоять из двух групп импульсов.

Первую группу составит последовательность из  $m$  положительных импульсов с амплитудой  $A^2/4$  и длительностью  $\tau_n - \tau$ , которая образовалась при умножении каждого импульса на себя самого; среднее значение этой последовательности за период

$$\frac{A^2}{4} \frac{1}{m\tau_n} m(\tau_n - \tau) = \frac{A^2}{4} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_n} \right).$$

Вторая группа будет состоять из последовательности знакопеременных импульсов, образовавшихся при перемножении значений одного импульса на значения соседнего. Как следует из (12-28), число отрицательных импульсов здесь будет равно  $(m+1)/2$ ; оставшиеся  $(m-1)/2$  будут положительными. Так как длительность импульсов этой группы равна  $\tau$ , а их амплитуда по-прежнему равна  $A^2/4$ , то среднее за период значение этой группы будет определяться формулой

$$\frac{A^2}{4} \frac{1}{m\tau_n} \left( \frac{m-1}{2} \tau - \frac{m+1}{2} \tau \right) = -\frac{A^2}{4} \frac{\tau}{m\tau_n}.$$

Сложив последние два выражения, получим формулу для корреляционной функции двоичной последовательности импульсов для  $|\tau| < \tau_n$ :

$$\frac{A^2}{4} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\tau}{\tau_n} \right].$$

При перемножении последовательности импульсов, сдвинутых на  $\tau_n < \tau < T_0 - \tau_n$ , значение каждого импульса умножается на значения смещенной последовательности.

При этом образуется знакопеременная последовательность импульсов с амплитудой  $A^2/4$ , причем, как следует из (12-28), площадь отрицательных импульсов равна  $\frac{m+1}{2} \frac{A^2\tau_n}{4}$ , а площадь положитель-

ных импульсов равна  $\frac{m-1}{2} \frac{A^2\tau_n}{4}$ , т. е. значение корреляционной

функции для  $\tau_n < \tau < T_0 - \tau_n$  равно:  $-\frac{1}{m} \frac{A^2}{4}$ . Так как рассматри-



ваемая последовательность импульсов является периодичной с периодом  $T_0 = m\tau_n$ , то окончательно можно записать следующее выражение для ее корреляционной функции:

$$r_{ss}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{4} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\tau}{\tau_n} \right]; & i T_0 - \tau_n < \tau < i T_0 + \tau_n; \\ -\frac{A^2}{4m}; & i T_0 + \tau_n < \tau < (i+1) T_0 - \tau_n \quad (i=0, \pm 1, \pm 2 \dots). \end{cases} \quad (12-30)$$

Ее график приведен на рис. 12-7.

Сравнивая формулы (12-16) и (12-30), а также рис. 12-4 и 12-7, можно прийти к выводу, что при одинаковых  $\tau_n$  и  $m \gg 1$  корреля-

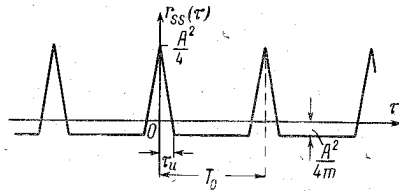


Рис. 12-7.

ционные функции обычной и псевдослучайной последовательности импульсов совпадают с точностью до постоянного множителя  $\frac{m}{4} \frac{A_{псл}^2}{A_{об}^2}$ , т. е. связь между корреляционными функциями определяется формулой

$$r_{ss \text{ псл}}(\tau) = \frac{m}{4} \frac{A_{псл}^2}{A_{об}^2} r_{ss \text{ об}}(\tau), \quad (12-31)$$

где  $A_{об}$  и  $A_{псл}$  — амплитуды обычной и псевдослучайной последовательностей импульсов соответственно.

При достаточно малом  $\tau_n$  оценка весовой характеристики системы с помощью псевдослучайной последовательности импульсов будет определяться формулой, подобной формуле (12-17):

$$\tilde{\Phi}_{ss}(\tau) = \frac{4}{A_{об}^2 \tau_n} \tilde{r}_{ss}(\tau), \quad (12-32)$$

а входная последовательность импульсов может быть заменена соответствующей последовательностью дельта-функций (12-19), в которой следует только положить:

$$c_i = \pm \frac{1}{2}, \quad (12-33)$$

причем знак  $c_i$  определяется принятым рекуррентным правилом (12-23) (если  $s_i = 1$ , знак  $c_i$  берется положительным, если  $s_i = 0$  — отрицательным). Соответственно формулы для дисперсии оценки весо-

370

вой характеристики (12-21) и (12-22) в этом случае приобретают следующий вид [Л. 58]:

$$\sigma_{\Phi}^2 = \frac{16}{A_{об}^2 \tau_n^2 l^2 m^2} \sum_{i=0}^{lm-1} \sum_{j=0}^{lm-1} c_i c_j r_{\theta\theta} [(i-j) \tau_n] \quad (12-34)$$

или

$$\sigma_{\Phi}^2 = \frac{4}{A_{об}^2 \tau_n^2 l m} \left\{ \sigma_{\theta}^2 + \sum_{i=0}^{lm-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{lm-1} c_i c_j r_{\theta\theta} [(i-j) \tau_n] \right\}. \quad (12-35)$$

Эти формулы позволяют заранее оценить требуемую длительность эксперимента  $T = mT_0$  для того, чтобы оценка характеристики была получена с желаемой точностью. Так, например, если случайное возмущение, наложенное на выход объекта  $\theta(t)$ , обладает настолько широкой полосой частот, что она может считаться белым шумом с корреляционной функцией

$$r_{\theta\theta}(\tau) = \sigma_{\theta}^2 \delta(\tau),$$

формулы (12-22) и (12-35) дают следующие результаты:

$$\sigma_{\tilde{\Phi}_{об}}^2 \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \frac{\sigma_{\theta}^2}{A_{об}^2 \tau_n^2 l} \approx \frac{\sigma_{\theta}^2}{A_{об}^2 \tau_n^2 l}; \quad (12-36)$$

$$\sigma_{\tilde{\Phi}_{псл}}^2 = \frac{4 \sigma_{\theta}^2}{A_{псл}^2 \tau_n^2 l m}. \quad (12-37)$$

Из этих формул видно, что при одинаковых амплитудах импульсов  $A_{псл} = A_{об}$  применение псевдослучайной последовательности импульсов требует для оценки весовой характеристики системы с заданной среднеквадратичной погрешностью в  $m/4$  раз меньше времени, чем при использовании обычной последовательности. Следует, однако, не забывать, что при оценке эффективности применения того или иного испытательного сигнала необходимо учитывать степень нарушения режима нормального функционирования объекта, вызванного подачей этого воздействия. Поскольку это нарушение режима проявляется прежде всего в увеличении отклонения регулируемой величины в критерий сравнения испытательных воздействий различных видов, необходимо ввести ограничение на допустимую величину этого отклонения. В частности, если мерой этого добавочного отклонения служит его среднеквадратичное значение  $\sigma_e$ , то, учитывая формулу (12-31), условие одинакового нарушения нормального режима работы объекта при использовании псевдослучайной и обычной последовательностей импульсов принимает следующий вид:

$$A_{псл} = \frac{2}{\sqrt{m}} A_{об}. \quad (12-38)$$

Таким образом, для того, чтобы добавочное среднее квадратичное отклонение регулируемой величины, вызванное подачей псевдослучайной пробной последовательности импульсов, не превышало отклонения, вызываемого обычной последовательностью, амплитуда импульсов псевдослучайной последовательности должна быть в  $\sqrt{m/2}$  раз меньшей амплитуды обычной последовательности. В частности, если выражение для  $A_{\text{исл}}$  (12-38) подставить в (12-37), придем к формуле (12-36). Это значит, что эффективность обоих рассмотренных пробных воздействий в рассмотренном случае оказывается одинаковой, т. е. для получения оценки весовой характеристики с одинаковой точностью при одинаковом нарушении нормального режима функционирования объекта длительность экспериментов должна быть также одинакова. Применение псевдослучайной последовательности в этом случае может быть целесообразным лишь потому, что позволяет провести эксперимент при существенно меньших амплитудах входных импульсов.

#### 12-4. Оценка частотных характеристик систем регулирования

Поскольку все расчеты, связанные с синтезом систем регулирования, удобно осуществлять в частотной области, при идентификации системы чаще всего целесообразно оценивать не переходные, а частотные характеристики.

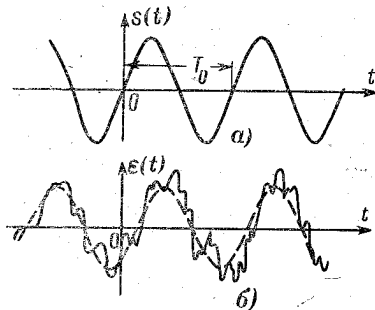


Рис. 12-8.

Определение вектора амплитудно-фазовой системы для некоторой частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  может быть осуществлено подачей на ее вход синусоидального воздействия (рис. 12-8,а);

$$s(t) = A_s \sin \omega_0 t \quad (12-39)$$

и регистрацией установившихся колебаний выходной величины. При

наличии аддитивной помехи  $\theta(t)$  изменение ошибки регулирования во времени (рис. 12-8,б) в этом случае будет определяться формулой

$$s(t) = A(\omega_0) A_s \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] + \theta(t); \quad (12-40)$$

где  $A(\omega_0)$  и  $\varphi(\omega_0)$  — значения амплитудной и фазовой частотных характеристик системы для частоты  $\omega_0$ .

Реализация оценки взаимной корреляционной функции  $s(t)$  и  $\epsilon(t)$  на отрезке наблюдения, состоящем из це-

лого числа  $l$  периодов колебаний  $T_0$ , будет иметь следующий вид:

$$\tilde{r}_{s\epsilon}(\tau) = \frac{A_s}{lT_0} \int_0^{lT_0} \epsilon(t + \tau) \sin \omega_0 t dt \quad (12-41)$$

или, если принять во внимание (12-40),

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{s\epsilon}(\tau) = & \frac{1}{2} A(\omega_0) A_s^2 \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\omega_0)] + \\ & + \frac{A_s}{lT_0} \int_0^{lT_0} \theta(t + \tau) \sin \omega_0 t dt. \end{aligned} \quad (12-42)$$

Математическое ожидание соответствующего случайного процесса будет определяться формулой

$$M\{\tilde{R}_{s\epsilon}(\tau)\} = \frac{A_s^2}{2} A(\omega_0) \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\omega_0)]. \quad (12-43)$$

Таким образом, оценка взаимной корреляционной функции входа и выхода системы  $\tilde{R}_{s\epsilon}(\tau)$  в рассматриваемом случае представляет собой оценку косинусоидального колебания на выходе системы, вызванного входным косинусоидальным колебанием с амплитудой  $A_s^2/2$ . Поэтому вычисление реализации оценки выходных косинусоидальных колебаний  $\tilde{a}(t)$ , которые возникли бы, если бы на вход было подано косинусоидальное колебание единичной амплитуды, следует производить по формуле (12-41), но с пересчетом к единичной амплитуде:

$$\tilde{a}(\tau) = \frac{2}{A_s l T_0} \int_0^{lT_0} \epsilon^*(t + \tau) \sin \omega_0 t dt. \quad (12-44)$$

Амплитуда этих колебаний, очевидно, совпадает со значением амплитудной частотной характеристики системы  $A(\omega_0)$  при частоте  $\omega = \omega_0$ , а начальная фаза — с фазовой частотной характеристикой  $\varphi(\omega_0)$ .

Случайная составляющая оценки (12-44) в соответствии с (12-42) определяется выражением

$$\tilde{q}(\tau) = \frac{2}{A_s l T_0} \int_0^{lT_0} \theta(t + \tau) \sin \omega_0 t dt, \quad (12-45)$$

дисперсия которой, а следовательно, и дисперсия оценки  $\tilde{a}(\tau)$

$$\sigma_{\tilde{a}}^2 = \frac{4}{A_s^2 l^2 T_0^2} \int_0^{lT_0} \sin \omega_0 \xi d\xi \int_0^{lT_0} r_{\theta\theta}(\eta - \xi) \sin \omega_0 \eta d\eta. \quad (12-46)$$

Для того чтобы из  $a(\tau)$  можно было определить ее амплитуду  $A(\omega_0)$  и начальную фазу  $\varphi(\omega_0)$ , достаточно располагать ее значениями при  $\tau=0$  и  $\tau=T_0/4$ , т. е. достаточно оценить две случайные величины:

$$\tilde{u}(\omega_0) = \tilde{a}(0) = \frac{2}{A_s l T_0} \int_0^{lT_0} \varepsilon(t) \sin \omega_0 t dt; \quad (12-47)$$

$$\tilde{v}(\omega_0) = \tilde{a}\left(\frac{T_0}{4}\right) = \frac{2}{A_s l T_0} \int_0^{lT_0} \varepsilon\left(t + \frac{T_0}{4}\right) \sin \omega_0 t dt. \quad (12-48)$$

Как легко заметить,  $\tilde{u}(\omega)$  и  $\tilde{v}(\omega)$  являются оценками вещественной и мнимой частотных характеристик системы. Случайные составляющие этих оценок определяются формулами:

$$z_u = \frac{2}{A_s l T_0} \int_0^{lT_0} \theta(t) \sin \omega_0 t dt; \quad (12-49)$$

$$z_v = \frac{2}{A_s l T_0} \int_0^{lT_0} \theta\left(t + \frac{T_0}{4}\right) \sin \omega_0 t dt, \quad (12-50)$$

причем эти составляющие, а следовательно, и оценки  $\tilde{u}(\omega)$  и  $\tilde{v}(\omega)$  имеют равные дисперсии:

$$\sigma_u^2 = \sigma_v^2 = \frac{4}{A_s^2 l^2 T_0^2} \int_0^{lT_0} \int_0^{lT_0} r_{\theta\theta}(\eta - \xi) \sin \omega_0 \xi \sin \omega_0 \eta d\xi d\eta. \quad (12-51)$$

Математическое ожидание произведения  $z_u$  на  $z_v$  определяет корреляционный момент между  $\tilde{u}(\omega)$  и  $\tilde{v}(\omega)$ , который с учетом формул (12-49) и (12-50) может быть представлен следующим образом:

$$r_{uv} = \frac{4}{A_s^2 l^2 T_0^2} \int_0^{lT_0} \int_0^{lT_0} r_{\theta\theta}\left(\frac{T_0}{4} + \eta - \xi\right) \sin \omega_0 \xi \sin \omega_0 \eta d\xi d\eta. \quad (12-52)$$

Таким образом,  $\tilde{u}(\omega)$  и  $\tilde{v}(\omega)$  образуют двумерную нормальную совокупность случайных величин с параме-

трами  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$ ,  $r_{uv}$ , которые могут быть вычислены по формулам (12-51) и (12-52). Это обстоятельство позволяет определить (см. § 4-7) эллипс рассеивания, за пределы которого с заданной доверительной вероятностью не будет выходить действительное значение амплитудно-фазовой частотной характеристики системы автоматического регулирования.

Практически в формулах (12-47) и (12-48), вместо интегрирования производится суммирование с некоторым интервалом дискретности  $\Delta t = T_0/m$ :

$$\tilde{u}(\omega_0) = \frac{2}{A_s} \frac{1}{lm} \sum_{i=0}^{lm-1} \varepsilon(i\Delta t) \sin 2\pi \frac{i}{m}; \quad (12-53)$$

$$\tilde{v}(\omega_0) = \frac{2}{A_s} \frac{1}{lm} \sum_{i=0}^{lm-1} \varepsilon\left(i\Delta t + \frac{T_0}{4}\right) \sin 2\pi \frac{i}{m}. \quad (12-54)$$

Выбор интервала дискретности  $\Delta t$  по существу определяется лишь статистическими свойствами помехи  $\theta(t)$ . Обычно интервал корреляции помехи  $\theta(t)$  оказывается намного большим периода колебаний  $T_0$ . Принимая во внимание высказанное ранее (см. § 10-5) соображение, что интервал дискретности при обработке реализаций стационарных случайных процессов практически целесообразно выбирать меньшим четверти интервала корреляции этого процесса (так как более тесные сечения процесса по существу не несут новой информации), вычисление оценок (12-53) и (12-54) можно осуществлять, выбирая  $m$  не слишком большим, например  $m=12$ .

Формула для дисперсии оценок  $\tilde{u}(\omega_0)$ ,  $\tilde{v}(\omega_0)$  (12-51) в этом случае приобретает следующий вид:

$$\sigma_{\tilde{u}}^2 = \sigma_{\tilde{v}}^2 = \frac{4}{A_s^2 l^2 m^2} \sum_{i=0}^{lm-1} \sum_{j=0}^{lm-1} \sin 2\pi \frac{i}{m} \sin 2\pi \frac{j}{m} r_{\theta\theta}[(i-j)\Delta t], \quad (12-55)$$

а формула для корреляционного момента (12-52):

$$r_{uv} = \frac{4}{A_s^2 l^2 m^2} \sum_{i=0}^{lm-1} \sum_{j=0}^{lm-1} \sin 2\pi \frac{i}{m} \times \\ \times \sin 2\pi \frac{j}{m} r_{\theta\theta}\left[\left(i-j + \frac{T_0}{4}\right)\Delta t\right]. \quad (12-56)$$

## 12.5. Определение частотных характеристик системы путем ее включения в нелинейный автоколебательный контур

Для возбуждения гармонических колебаний в идентифицируемой системе необязательно использовать специальные генераторы колебаний. Можно указать и на другой способ генерирования незатухающих колебаний, при котором используется возможность возбуждения в замкнутых нелинейных динамических контурах устойчивых автоколебаний [Л. 64, 66, 67].

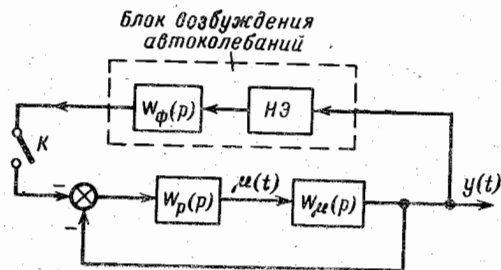


Рис. 12-9.

Схема системы в режиме идентификации в этом случае может иметь вид, указанный на рис. 12-9. В нормальном режиме работы системы регулирования ключ  $K$  разомкнут; при переходе в режим идентификации он замыкается, в результате чего выход системы — регулируемая величина  $y(t)$  через нелинейный блок возбуждения автоколебаний подается на вход системы с отрицательным знаком. При надлежащем выборе характеристик нелинейного блока в полученном таким способом новом замкнутом контуре идентификации возникают автоколебания, амплитуда и период которых могут быть по желанию изменены в нужном направлении путем изменения настройки нелинейного блока обратной связи или изменения параметров настройки регулятора.

В простейшем случае нелинейный блок может представлять собой двухпозиционное реле, характеристика которого показана на рис. 12-10,а. Для возможности изменения частоты и амплитуды автоколебаний в характеристику можно ввести зону возврата  $\Delta_B$  (рис. 12-10,б). Эта же цель может быть достигнута путем подключения к релейному элементу добавочного линейного динамического

формирующего элемента с соответствующим образом подобранными динамическими свойствами [на рис. 12-9 звено с оператором  $W_\Phi(p)$ ].

Обычно возбуждаемые в контуре автоколебания имеют достаточно высокую частоту, так что высшие гармоники на выходе нелинейного элемента практически полностью отфильтровываются в линейной части системы. Это обстоятельство позволяет проводить анализ автоколебаний методом гармонического баланса (см. § 3-4).

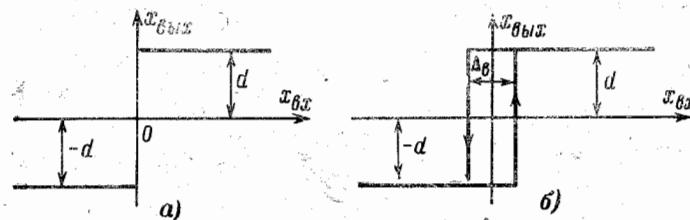


Рис. 12-10.

В соответствии с этим методом условия возникновения автоколебаний в системе рис. 12-9 записываются следующим образом:

$$\Phi(j\omega_{кр}) W_\Phi(j\omega_{кр}) W_{н.э}[j(A_{кр}, \omega_{кр})] = -1, \quad (12-57)$$

где  $W_\Phi(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика формирующего элемента;  $W_{н.э}[j(A, \omega)]$  — эквивалентная частотная характеристика нелинейного элемента;  $A_{кр}, \omega_{кр}$  — амплитуда и частота автоколебаний на входе релейного элемента;  $\Phi(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика идентифицируемой системы, связанная с характеристиками объекта  $W_{н.э}^1(p)$  и регулятора  $W_p(p)$  соотношением (5-12). В частности, если нелинейный элемент выполнен в виде релейного звена без зоны возврата, эквивалентная частотная характеристика которого определяется формулой (3-16)

$$W_{н.э}(A) = \frac{4d}{\pi A}, \quad (12-58)$$

вектор амплитудно-фазовой частотной характеристики замкнутой системы определяется по формуле

$$\Phi(j\omega_{кр}) = -\frac{\pi A_{кр}}{4d} \frac{1}{W_\Phi(j\omega_{кр})}, \quad (12-59)$$

Рассматриваемый метод позволяет получать оценки частотных характеристик лишь в ограниченном диапазоне частот, границы которого определяются динамическими свойствами нелинейного элемента и формирующего звена, а также алгоритмом функционирования регулятора. Так, для релейного элемента без зоны возврата и с формирующим элементом в виде апериодического звена границы участка оцениваемой характеристики замкнутой системы  $\Phi(j\omega)$  определяются возможным изменением положения вектора:

$$\Phi(j\omega) = -\frac{\pi A_{\text{нр}}}{4dk_{\Phi}}(jT_{\Phi}\omega + 1), \quad (12-60)$$

где  $k_{\Phi}$  и  $T_{\Phi}$  — коэффициент усиления и постоянная времени формирующего звена при изменении частоты от  $\omega=0$  до  $\omega=\infty$ , т. е. в пределах третьего квадранта комплексной плоскости.

Соответственно ограниченным является и участок оцениваемой частотной характеристики объекта, которая связана с характеристикой системы соотношением

$$W_{\mu}(j\omega) = \frac{1}{W_p(j\omega)} \frac{\Phi(j\omega)}{1 - \Phi(j\omega)}. \quad (12-61)$$

Например, если идентификация осуществляется с помощью нелинейного блока, состоящего из реле без зоны возврата и формирующего элемента в виде апериодического звена, то эта формула приобретает вид:

$$W_{\mu}(j\omega) = -\frac{c}{W_p(j\omega)} \frac{jT_{\Phi}\omega + 1}{jT_{\Phi}\omega + 1}, \quad (12-62)$$

где

$$c = \frac{\pi A_{\text{нр}}}{4dk_{\Phi} + \pi A_{\text{нр}}}.$$

Как легко видеть, в этом случае имеется возможность определить участок частотной характеристики объекта в пределах третьего квадранта комплексной плоскости. Отмеченная особенность рассматриваемого способа оценки частотных характеристик объекта может оказаться в ряде случаев полезной, в частности, когда идентификация объекта осуществляется с непосредственной целью определить оптимальную настройку включенного в систему регулятора. В этом случае как раз и требуется определять не всю характеристику системы или объекта, а лишь ее участок в существенном для системы диапазоне частот.

Недостатком рассмотренного метода является трудность оценки с его помощью параметров автоколебаний при наличии высокого уровня возмущений. Так как система в целом является нелинейной, то эти возмущения в общем случае уже не могут быть приведены к выходу системы в виде аддитивной помехи, наложенной на основную периодическую составляющую процесса. Несмотря на это, такой способ может оказаться вполне работоспособным, поскольку эквивалентную помеху в рассматриваемой схеме образуют возмущения, эффект действия которых обычно достаточно сильно подавлен основным контуром системы регулирования.

## 12-6. Определение частотных характеристик объекта изменением алгоритма функционирования регулятора

Активный эксперимент по оценке динамических характеристик объекта может осуществляться не только путем подачи на систему специальных испытательных воздействий, но также и целенаправленным изменением алгоритма функционирования регулятора.

Практически наиболее простыми и удобными разновидностями реализации подобного способа оценки частотных характеристик являются следующие:

1) изменение параметров настройки регулятора так, чтобы система регулирования вышла на границу устойчивости и начала генерировать незатухающие (практически слабо затухающие) колебания;

2) подключение к регулятору корректирующего нелинейного элемента с целью получить такой алгоритм функционирования регулятора, при котором в контуре системы регулирования возникнут устойчивые автоколебания.

В первом случае [Л. 65] при достижении системой границы устойчивости будет выполнено условие, вытекающее из критерия устойчивости Найквиста:

$$W_{\mu}(j\omega_{\text{кр}}) W_p(j\omega_{\text{кр}}) = -1, \quad (12-63)$$

откуда находится вектор частотной характеристики объекта для частоты возникших колебаний  $\omega_{\text{кр}}$ :

$$W_{\mu}(j\omega)_{\text{кр}} = -\frac{1}{W_p(j\omega_{\text{кр}})}. \quad (12-64)$$

Как видим, границы участка частотной характеристики объекта, который можно определить рассматриваемым способом, определяются областью в комплексной плоскости, которую занимает обратная частотная характеристика регулятора. Так, если в системе используется П-регулятор, то имеется возможность оценить лишь одну точку частотной характеристики объекта, расположенную на отрицательной вещественной полуоси (если, конечно, характеристика объекта пересекает эту ось).

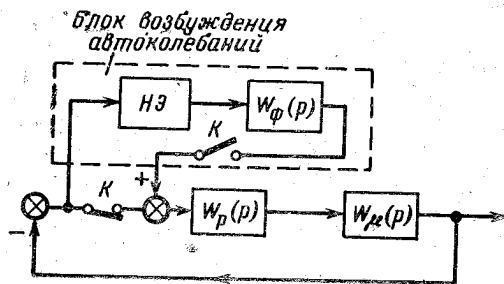


Рис. 12-11.

При наличии ПИ-регулятора можно определить характеристику системы в пределах третьего квадранта комплексной плоскости, причем при проведении экспериментов необходимо варьировать обоими параметрами настройки регулятора: его коэффициентом передачи  $k_p$  и постоянной интегрирования  $T_{и}$ . В этом случае изменением постоянной интегрирования  $T_{и}$  можно менять частоту  $\omega_{кр}$ , возникающих в системе колебаний (чем больше  $T_{и}$ , тем выше оказывается частота колебаний).

Недостаток этого способа идентификации связан с трудностью вывода системы на границу устойчивости, а также со сложностью сохранения этого режима в течение достаточно длительного времени. В этом отношении более удобным является второй способ изменения алгоритма функционирования регулятора, связанный с подключением к регулятору (обычно последовательно, как это указано на рис. 12-11) специально подобранного нелинейного динамического блока, характеристика которого подбирается таким образом, чтобы в контуре регулирования возникли устойчивые автоколебания, амплитуду и частоту которых можно было бы менять путем изменения характеристик этого блока [Л. 67, 68]. Этот нелиней-

ный блок по существу может ничем не отличаться от блока генерирования автоколебаний, который был рассмотрен в предыдущем параграфе, т. е. практически его удобнее всего выполнять в виде последовательно соединенных релейного элемента и линейного формирующего звена. Соответственно конструктивно этот блок может быть выполнен так, чтобы в зависимости от конкретных особенностей идентифицируемой системы можно было оценивать частотную характеристику подключения его к системе либо по схеме на рис. 12-9, либо по схеме на рис. 12-11.

При решении вопроса о том, какая из рассмотренных двух схем включения нелинейного блока возбуждения автоколебаний является лучшей, следует учитывать, что схема включения этого блока в виде внешнего (по отношению к идентифицируемой системе) генератора колебаний (см. рис. 12-9) оказывается значительно менее чувствительной к возмущениям, действующим на объект при проведении экспериментов. Обусловлено это тем, что эквивалентная помеха, приведенная ко входу нелинейного блока, здесь определяется отклонением регулируемой величины в процессе нормального функционирования системы регулирования. В схеме на рис. 12-11 указанная эквивалентная помеха определяется изменением отклонения регулируемой величины, которое имело бы место при отсутствии регулирования объекта.

Следует также иметь в виду, что использование схемы на рис. 12-11 обычно приводит к значительно более сильному нарушению режима нормальной эксплуатации объекта, чем при использовании схемы на рис. 12-9. Объясняется это тем, что эксперимент по схеме на рис. 12-9 проводится при наличии нормально работающего регулятора, в схеме же на рис. 12-11 происходит изменение алгоритма функционирования регулятора, причем это изменение обычно направлено в сторону ухудшения динамической точности регулирования.

Однако схема на рис. 12-11 обладает и своими преимуществами. Основным недостатком любого метода идентификации системы автоматического регулирования с использованием внешнего генератора воздействий (безразлично, используется ли при этом специальный генератор или его функции выполняет нелинейный блок, подключаемый по схеме на рис. 12-9) является то, что, прежде чем начинать идентификацию, приходится каким-то

образом определить и установить в регуляторе параметры настройки, заведомо обеспечивающие по крайней мере устойчивую работу системы.

В схеме идентификации, приведенной на рис. 12-11, это затруднение по существу исчезает, так как нелинейный элемент с характеристикой, имеющей «насыщение» (в частности, релейный элемент с характеристикой на рис. 12-10), включенный непосредственно в основной контур системы регулирования, не только способствует возбуждению автоколебаний в контуре, но выполняет также функции ограничителя амплитуды этих автоколебаний. Иначе говоря, даже если приведенная на рис. 12-11 схема при выведенном блоке возбуждения автоколебаний будет неустойчивой и в ней будут возникать колебания с бесконечно нарастающей амплитудой; после введения блока возбуждения автоколебаний амплитуда этих колебаний автоматически стабилизируется на некотором фиксированном уровне, причем этот уровень может быть по желанию установлен таким, какой окажется наиболее удобным для эксперимента и расчетов (например, уменьшением величины  $d$  характеристики реле). Кроме того, здесь упрощается процедура выделения из характеристик системы характеристики объекта (если в процессе эксперимента регистрируется лишь изменение одной координаты системы на входе релейного элемента). Действительно, условие существования автоколебаний по методу гармонического баланса здесь записывается в следующем виде:

$$W_{\mu}(j\omega_{кр}) W_{p}(j\omega_{кр}) I_{н.э}(jA_{кр}, \omega_{кр}) = -1, \quad (12-65)$$

т. е. выражение для вектора частотной характеристики объекта для частоты  $\omega_{кр}$  и амплитуды  $A_{кр}$  автоколебаний

$$W_{\mu}(j\omega_{кр}) = -\frac{1}{W_{p}(j\omega_{кр}) I_{н.э}(jA_{кр}, \omega_{кр})} \quad (12-66)$$

оказывается более простым, чем (12-61).

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ НАСТРОЙКИ  
ДЕЙСТВУЮЩИХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ**

**13-1. Итерационные алгоритмы настройки систем  
регулирования**

Отмечавшаяся ранее противоречивость в постановке задачи идентификации объектов регулирования заставляет использовать многошаговую итерационную процедуру движения к оптимуму для отыскания оптимальных параметров настройки системы. Расчеты в этом случае осуществляются с помощью рекуррентных формул [Л. 72] вида

$$c_{n+1} = F(c_n), \quad (13-1)$$

где  $c_n$  и  $c_{n+1}$  — совокупность значений параметров настройки регуляторов на двух очередных [ $n$ -м и  $(n+1)$ -м] шагах движения к оптимуму;  $F(c)$  — функция от параметров настройки регуляторов, выбранная таким образом, чтобы по мере роста  $n$  значения параметров настройки стремились к их оптимальным значениям  $c_{опт}$  (к таким значениям, при которых показатель оптимального функционирования системы, например, среднеквадратичная ошибка регулирования, достигал бы экстремального значения).

Выбор функции  $F(c)$ , вообще говоря, может осуществляться самыми разнообразными способами. Так, очень распространенной формой итерационных алгоритмов является следующая:

$$c_{n+1} = c_n + \gamma_n \nabla I(c_n), \quad (13-2)$$

где

$$\nabla I(c) = \left( \frac{\partial I(c)}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial I(c)}{\partial c_n} \right)$$

— есть градиент показателя качества функционирования системы  $I(c)$  (например, среднеквадратичной ошибки регулирования). Здесь  $\partial I(c)/\partial c$  — частные производные от показателя качества функционирования системы по параметрам настройки регулятора.

При оптимизации параметров настройки систем автоматического регулирования функция  $F(c)$  обычно неизвестна. В этом случае на каждом шаге движения к оптимуму на системе регулирования ставится соответствующий эксперимент. Так, при использовании алгоритма

(13-2) на каждом шаге движения может осуществляться варьирование параметров настройки в некоторых пределах с запоминанием получаемого при этом изменения показателя качества, что позволяет оценить величину и направления градиента  $\nabla I(c)$ . Для ускорения сходимости такого алгоритма при наличии случайных помех могут быть использованы известные методы планирования многофакторных экспериментов [Л. 75] или стохастической аппроксимации [Л. 72].

Тем не менее опыт показывает, что подобная процедура движения к оптимуму оказывается крайне медленной и практически не может быть использована для решения рассматриваемого здесь круга задач. Кардинальное решение этой проблемы может быть получено, по-видимому, лишь при условии, что функция (13-1) будет формироваться с учетом оценок математической модели системы на каждом шаге движения к оптимуму. Порядок организации процедуры движения к оптимуму в этом случае может быть следующим:

1) при найденных тем или иным способом (например, по полученным аналитически характеристикам объекта или с помощью рассматриваемых далее методов предварительной оптимизации) начальных значениях параметров настройки регулятора система автоматического регулирования включается в работу;

2) убедившись в возможности работы системы при таких параметрах настройки регулятора без участия обслуживающего персонала, производят оценку математической модели всей системы автоматического регулирования в таком объеме, который будет достаточным для расчета оптимальных параметров настройки регулятора;

3) по найденной математической модели системы производится расчет оптимальных параметров настройки регулятора;

4) после установки найденных оптимальных параметров система вновь включается в работу и производится повторная оценка математической модели системы при этих новых параметрах. Если в результате нового расчета окажется, что новая настройка практически совпадает с предыдущей, то процедура поиска оптимума может считаться оконченной. В противном случае расчет оптимальных параметров настройки вновь повторяется и производится новая идентификация системы.

Практически идентификацию системы регулирования в полном объеме, включающем как оценку ее динамических характеристик во всем необходимом диапазоне частот, так и оценку статистических характеристик возмущения, целесообразно осуществлять лишь на заключительном шаге настройки системы, на первых же шагах движения к оптимуму идентификации можно выполнять в значительно менее полном объеме. Возможность подобного упрощения решения задачи оптимизации настройки вытекает из следующих особенностей системы автоматического регулирования, которые были обнаружены, когда рассматривались методы их синтеза и расчета оптимальных параметров (см. гл. 6 и 7).

1. Если система регулирования позволяет существенно уменьшить отклонения регулируемой величины по сравнению с теми отклонениями, которые имели бы место при отсутствии всякого регулирования, то это, как правило, свидетельствует о возможности расчета оптимальных параметров настройки регулятора без учета статистических характеристик действующих на систему возмущений по динамическим характеристикам регулирующих каналов объекта. Для одноконтурной системы регулирования достаточно близким к оптимальному в этом случае может считаться один из линейных унифицированных алгоритмов регулирования (чаще всего по практическим соображениям используется ПИ-регулятор), причем минимуму среднеквадратичной ошибки регулирования соответствует максимум отношения  $k_p/T_{\text{и}}$  (где  $k_p$  — коэффициент передачи регулятора,  $T_{\text{и}}$  — его постоянная интегрирования).

2. Динамические свойства регулирующих каналов объекта могут быть аппроксимированы относительно простыми аналитическими выражениями, в частности при использовании ПИ-регулятора эти характеристики могут быть аппроксимированы характеристиками апериодического звена первого порядка с запаздыванием или интегрирующего звена с запаздыванием. При этом трудность аппроксимации характеристик объекта определяется не столько тем, что приходится подбирать сложные выражения для аппроксимирующей характеристики, сколько трудностью корректно сформулировать критерий приближения аппроксимирующей характеристики к действительной. В частности, хорошее совпадение приближаемых переходных характеристик в среднем на всем интервале их изменения не гарантирует близости процессов в си-



стемах регулирования. И наоборот, можно привести примеры (см., например, рис. 7-4), когда, несмотря на резко различные динамические характеристики объектов, процессы в замкнутых системах регулирования (при использовании одного и того же регулятора) практически оказываются весьма близкими. Таким образом, необходимость в усложнении аналитического выражения для динамической характеристики объекта при его аппроксимации обычно вызывается не тем, что аппроксимация простой характеристикой невозможна, а отсутствием обоснованных априорных соображений о правильном выборе критерия приближения. При идентификации действующей системы регулирования указанное затруднение по существу снимается.

3. Расчет оптимальных параметров настройки систем более сложных, чем одноконтурные (каскадных и систем с компенсацией возмущений), в случае, когда введение добавочных информационных каналов позволяет существенно повысить динамическую точность регулирования, как правило, может быть сведен к расчету соответствующего числа эквивалентных одноконтурных систем. При этом характер преобразования добавочных регулируемых величин в сложных информационных схемах регулирования обычно выбирается таким, что закон регулирования эквивалентных одноконтурных схем соответствует линейным унифицированным законам регулирования (чаще всего ПИ-закону).

Отмеченные особенности систем автоматического регулирования позволяют осуществлять оптимизацию их параметров настройки в два приема. На первом этапе осуществляется итерационная процедура оптимизации настройки, исходя из предположения о низкочастотном характере возмущений и возможности аппроксимации динамических характеристик объекта достаточно простыми выражениями. В сложных многоконтурных системах такая итерационная процедура проводится последовательно по отдельным контурам с учетом их взаимного влияния. На втором заключительном этапе осуществляется экспериментальное определение полной математической модели системы (в том числе и статистических характеристик возмущений), по которой осуществляется уточнение параметров настройки регуляторов.

Материалы, относящиеся ко второму этапу оптимизации, были изложены в гл. 12. В настоящей главе будет

рассмотрено несколько итерационных методов настройки систем с ПИ-регуляторами, относящихся к первому этапу.

### 13-2. Оптимизация настройки системы с оценкой на каждом шаге ее весовой или переходной характеристики

Пусть полученная в результате эксперимента оценка переходной характеристики системы регулирования по каналу действия изменения задания регулятору  $s(t)$  на ошибку регулирования  $\epsilon(t)$  имеет вид, указанный на рис. 13-1. В качестве критерия приближения при аппроксимации этой характеристики может быть выбрано требование, чтобы период колебаний  $T$  и степень затухания  $\psi$  переходного процесса, оцениваемое по исходной и аппроксимирующей характеристикам, были одинаковыми. Способ определения  $T$  и  $\psi$  по переходной характеристике системы регулирования примем таким же, как и для динамической системы второго порядка (см. § 7-1), т. е. степень затухания переходного процесса будет определять по формуле (7-8):

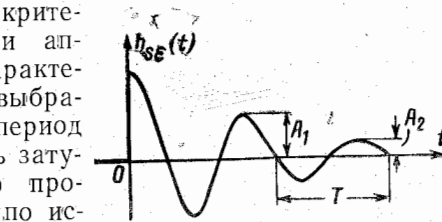


Рис. 13-1.

где  $A_1$  и  $A_2$  — две амплитуды характеристики одного знака.

$$\psi = 1 - \frac{A_2}{A_1}, \quad (13-3)$$

Правда для динамических систем с порядком уравнения более высоким, чем второй, величины  $T$  и  $\psi$ , вычисленные подобным образом, будут различными для разных пар соседних амплитуд. Практически поэтому расчетный период колебаний на участке экспериментальной переходной характеристике системы приходится выбирать спустя достаточно большое время от ее начала, когда высокочастотные составляющие переходного процесса успеют затухнуть (как показывает опыт, для этого необходимо выждать время, в течение которого характеристика 2—3 раза пересечет линию своего установившегося значения).

Если в результате эксперимента установлено, что переходный процесс в системе при параметрах настройки регулятора  $k_{p1}$  и  $T_{п1}$  имеет степень затухания  $\psi_1$  и период колебаний  $T_1$ , то это значит, что амплитудная частотная характеристика замкнутой системы регулирования  $|\Phi_{sy}(j\omega)|$  при частоте, близкой к  $\omega = 2\pi/T_1$ , должна иметь резонансный пик (рис. 7-1,б), величина которого  $M$  может быть приближенно вычислена с использованием аппроксимации системы характеристикой колебательного звена второго порядка. В результате может быть составлено уравнение

$$|\Phi_{sy}(j\omega_{рез})| = \left| \frac{W(j\omega_{рез})}{1 + W(j\omega_{рез})} \right| = M, \quad (13-4)$$

где  $W(j\omega)$  — частотная характеристика разомкнутой системы.

Решение этого уравнения позволяет получить два коэффициента аппроксимирующей характеристики объекта регулирования. Как показывает опыт, практически удовлетворительные результаты при настройке ПИ-регулятора обычно дает аппроксимация характеристики объекта характеристикой интегрирующего звена с запаздыванием

$$W_{\pi}(p) = \frac{k_{\pi}}{p} e^{-\tau p}, \quad (13-5)$$

где  $k_{\pi}$  и  $\tau$  — два подлежащих определению параметра аппроксимирующей характеристики.

Выражение для аппроксимирующей характеристики разомкнутой системы в этом случае приобретает вид:

$$W(p) = \frac{k_p k_{\pi} (T_{\pi} p + 1)}{T_{\pi} p^2} e^{-\tau p}. \quad (13-6)$$

Подставив это выражение в (13-4) и решив полученное уравнение при известных  $\omega_{рез}$  и  $M$ , можно найти численные значения коэффициентов аппроксимирующей характеристики объекта  $k_{\pi}$  и  $\tau$ , после чего обычным порядком по частотной характеристике объекта (13-5) определить оптимальные значения параметров настройки регулятора  $k_{p,опт}$  и  $T_{п,опт}$ . Найденные параметры настройки устанавливаются, и вновь экспериментально определяется переходная характеристика системы регулирования. После определения по этой характеристике новых значений  $T$  и  $\psi$  все расчеты вновь повторяются и находят новые уточненные значения оптимальных параметров  $k_p$  и  $T_{п}$ . Подобное повторение экспериментов и рас-

четов производится до тех пор, пока результат последующего шага будет практически пренебрежимо мало отличаться от результата предыдущего шага.

Указанные расчеты выполнены для всех возможных вариантов численных значений  $T$  и  $\psi$ . Результаты этих расчетов представлены на рис. 13-2 в виде графиков, построенных в зависимости от относительной величины периода колебаний  $T/T_{п}$ , где  $T_{п}$  — постоянная интегриро-

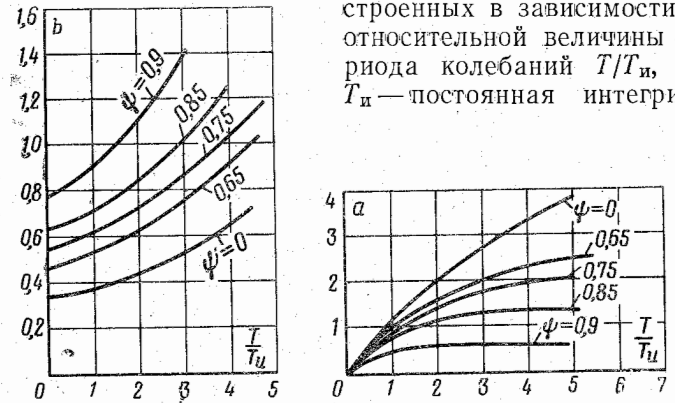


Рис. 13-2.

вания регулятора, установленная при проведении эксперимента. Поиск оптимальных параметров настройки регулятора с использованием этих графиков осуществляется по рекуррентным формулам:

$$\left. \begin{aligned} T_{п\ n+1} &= a_n T_{п\ n}; \\ k_{p\ n+1} &= b_n k_{p\ n}. \end{aligned} \right\} \quad (13-7)$$

где  $T_{п\ n}$  и  $k_{p\ n}$  — значения параметров настройки регулятора на очередном  $n$ -м шаге движения к оптимуму;  $a_n$ ,  $b_n$  — значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , взятые из графиков на рис. 13-2 по результатам опыта на  $n$ -м шаге;  $T_{п\ n+1}$ ,  $k_{p\ n+1}$  — значения параметров настройки регулятора, которые следует установить после  $n$ -го шага.

Процедура поиска имеет следующий вид:

1. При некоторых (в значительной степени произвольных) начальных значениях параметров настройки  $T_{п1}$  и  $k_{p1}$  регулятор включается в работу и с помощью методов, изложенных в § 12-2 и 12-3, оценивается переходная или весовая характеристика системы, по которой затем оцениваются значения  $\psi_1$  и  $T_1$ .

2. Вычислив величину отношения  $T_1/T_{н1}$  по графикам на рис. 13-2 определяют значения коэффициентов  $a_1$  и  $b_1$ , после чего находятся оптимальные в первом приближении значения параметров настройки регулятора:

$$T_{н2} = a_1 T_{н1}; \quad k_{p2} = b_1 k_{p1}. \quad (13-8)$$

После коррекции настройки регулятора в соответствии с полученными значениями  $k_{p2}$  и  $T_{н2}$  опыт вновь повторяется и производится повторная оценка оптимальных параметров настройки; в случае необходимости осуществляются новая корректировка параметров настройки и повторение опыта и расчета.

Такая итерационная процедура повторяется до тех пор, пока новые найденные на очередном ее шаге значения оптимальных параметров настройки не будут практически отличаться от предыдущих.

Начальная настройка регулятора должна, очевидно, удовлетворять требованию устойчивости системы. Для систем с устойчивыми объектами и с ПИ-регуляторами предварительная оценка этой настройки обычно не составляет большого труда, так как в таких системах запас устойчивости увеличивается с увеличением времени интегрирования  $T_{и}$  и с уменьшением коэффициента передачи  $k_p$ . Таким образом, регулятор перед оптимизацией настройки должен включаться при возможно большем значении  $T_{и}$  и достаточно малом  $k_p$ , а затем уже постепенным увеличением  $k_p$  добиваются появления в системе колебательных переходных процессов.

В некоторых случаях может оказаться практически более удобной оценку  $\psi$  и  $T$  осуществлять не по графику изменения регулируемой величины, а по графику возвращения регулирующего органа в свое исходное положение после того, как он будет быстро выведен из начального состояния. Следует обратить внимание, что при использовании рассмотренного метода настройки отпадает необходимость в предварительной градуировке настроечного органа коэффициента передачи регулятора (операция весьма трудоемкая для большинства реальных конструкций регуляторов); для этого достаточно знать лишь относительное влияние положения ручки этого органа на величину коэффициента передачи регулятора. Действительно, найденное из графиков на рис. 13-2 значение коэффициента  $b$  просто покажет, как следует изменить положение ручки настройки коэффициента передачи.

Истинное же значение этого коэффициента может оставаться неизвестным.

Рассмотренная итерационная процедура настройки регуляторов в принципе может быть положена в основу построения самонастраивающихся регуляторов. Для этого следует лишь к основному контуру регулирования добавить контур адаптации (см. § 5-4), который в соответствии с изложенным алгоритмом настройки осуществлял бы подачу на основной контур пробных воздействий, оценку параметров возникающего переходного процесса  $\psi$  и  $T$ , расчет требуемой коррекции параметров настройки регулятора и немедленно вслед за этим соответствующее изменение этих параметров в работающем регуляторе. Пример, иллюстрирующий возможность построения подобного самонастраивающегося регулятора, был приведен в [Л. 77]. В общем комплексе операций, которые должен выполнять контур самонастройки, по-видимому, наиболее сложной и ответственной является задача оценки параметров колебаний  $T$  и  $\psi$  переходного процесса. Ряд способов решения этой задачи можно найти, например, в [Л. 70, 71], где проблема оптимизации параметров настройки рассматривается близкой к вышеизложенной. Правда, предложенные в этих работах способы оценки степени затухания переходного процесса так же, как и способы технической реализации самонастраивающихся регуляторов, основываются на предположении, что уже начиная с первого полукослабления переходная характеристика замкнутой системы регулирования может быть аппроксимирована характеристикой системы второго порядка. Очевидно, что такое предположение чаще всего является неприемлемым для систем регулирования производственных процессов.

Трудности оценки степени затухания переходного процесса непосредственно по переходной характеристике системы могут быть устранены за счет перехода к оценке свойств системы регулирования при работе ее на границе области устойчивости при частичном или полном отказе от многшаговой итерационной процедуры приближения к оптимуму. В этом случае до начала процедуры настройки системы регулирования выводится на границу устойчивости (например, путем постепенного увеличения коэффициента передачи регулятора). После этого, используя графики на рис. 13-2, для  $\psi=0$  можно определить оптимальные в первом приближении значения пара-

метров настройки регулятора, которые и принимаются оптимальными (т. е. процедура настройки на этом считается оконченной). Частным случаем такого алгоритма настройки может считаться известный метод Циглера и Никольса [Л. 69], при использовании которого система выводится на границу устойчивости при установленной в регуляторе бесконечной большой постоянной интегрирования (т. е. когда ПИ-регулятор превращается в П-регулятор), после чего по периоду незатухающих колебаний и критической величине коэффициента передачи регулятора сразу же находят оптимальные значения  $k_p$  и  $T_{и}$ . Естественно, что за отказ от итерационной процедуры оптимизации настройки приходится платить точностью получаемых результатов. Компромиссное решение может состоять в том, что в системе, находящейся на границе устойчивости, осуществляется итерационная процедура настройки лишь одного параметра — постоянной интегрирования  $T_{и}$  [Л. 8]. В этом случае после вывода системы на границу устойчивости при некоторых начальных значениях параметров настройки регулятора  $T_{и1}$  и  $k_{p1}$  по графику на рис. 13-2 определяется лишь значение коэффициента  $a = a_1$ . После установки найденной таким образом оптимальной в первом приближении постоянной интегрирования  $T_{и2} = a_1 T_{и1}$  воздействием на величину коэффициента передачи регулятора система вновь выводится на границу устойчивости и расчет повторяется. Когда будет достигнуто такое значение периода незатухающих колебаний, при котором следующий шаг расчетов даст прежний результат, найденное значение  $T_{и}$  считается оптимальным. Затем с помощью графика на рис. 13-2 определяются значения коэффициента  $b$ , а следовательно, и оптимальное значение коэффициента передачи регулятора  $k_p$ .

### 13-3. Косвенные неэкстремальные показатели оптимальной настройки систем регулирования

В рассмотренном методе настройки регулятора по существу появился новый критерий качества настройки, принципиально отличающийся от всех ранее применявшихся тем, что он не является экстремальным. Действительно, из рассмотрения расчетных графиков на рис. 13-2 следует, что настройка системы при их использовании будет окончена тогда, когда значения  $a$  и  $b$  станут равными

единице, т. е. когда степень затухания переходного процесса окажется равной примерно 0,87, а период резонансных колебаний будет примерно вдвое больше установленной при этом в регуляторе постоянной интегрирования  $T_{и}$ . Иначе говоря, вместо принятого ранее критерия оптимальной настройки

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{T_{и}}{k_p}\right)_{\text{опт}} &= \min; \\ \psi &= \psi_{\text{опт}} \end{aligned} \right\} \quad (13-9)$$

здесь принят новый:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T}{T_{и. \text{опт}}} &= 2; \\ \psi &= 0,87. \end{aligned} \right\} \quad (13-10)$$

В общем случае этот критерий может быть записан следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T}{T_{и. \text{опт}}} &= m; \\ \psi &= \psi_{\text{опт}}, \end{aligned} \right\} \quad (13-11)$$

где  $\psi_{\text{опт}}$  и  $m$  — некоторые наперед заданные числа, которые могут быть различными для различных аппроксимирующих характеристик объекта.

Очевидно, что после того, как критерий оптимальной настройки системы сформулирован в указанном виде, поиск оптимальных параметров может осуществляться не только с помощью графиков на рис. 13-2, но и с использованием других итерационных алгоритмов (если только эти алгоритмы обеспечивают сходимость последовательных приближений к оптимуму). Более того, этот поиск можно вообще осуществлять простым методом «проб и ошибок», тем более что для обычно встречающихся систем с ПИ-регуляторами можно заранее указать на направление, в котором следует менять параметры настройки регулятора для того, чтобы добиться требуемой относительной величины периода колебаний и требу-

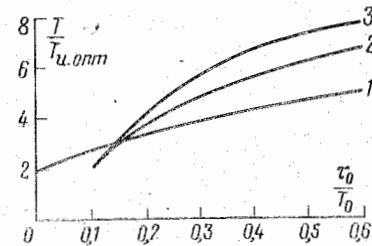


Рис. 13-3.

мой степени затухания переходного процесса (обычно период колебаний уменьшается с увеличением постоянной интегрирования регулятора, а степень затухания переходного процесса увеличивается при уменьшении его коэффициента передачи). Заметим, что в последнем случае вообще отпадает необходимость в градуировке органа настройки коэффициента передачи регулятора (даже при нелинейной зависимости коэффициента передачи от положения ручки его настроечного органа).

Естественно, что при заранее неизвестных динамических свойствах объекта использование сформулированного неэкстремального критерия приведет к появлению добавочной ошибки в определении действительного [по критерию (13-9)] оптимума настройки системы, т. е. в конечном счете к увеличению ошибки регулирования, так как действительно оптимальное значение отношения  $m = T/T_{и.опт}$  для настраиваемой системы регулирования может отличаться от принятой в (13-11) величины.

На рис. 13-3 приведены графики зависимостей величины отношения  $T/T_{и.опт}$  для систем регулирования с несколькими регулируемым объектами, которые могут считаться достаточно типовыми для систем регулирования производственных процессов: кривая 1 построена для объекта с оператором  $e^{-\tau_{\mu}p} / (T_{\mu}p + 1)$ , кривая 2 — для  $e^{-\tau_{\mu}p} / (T_{\mu}p + 1)^2$  и кривая 3 — для  $1 / (T_{\mu}p + 1)^n$  при различных  $n$ . Графики построены в зависимости от величины отношения  $\tau_0/T_0$ , причем  $\tau_0$  и  $T_0$  определяются обычным порядком по графику переходной характеристики объекта (см. рис. 11-9).

Как и следовало ожидать, величина  $m = T/T_{и.опт}$  при оптимальной настройке регулятора существенно зависит как от величины отношения  $\tau_0/T_0$ , так и от структуры частотной характеристики объекта. Однако для наиболее часто встречающихся на практике объектов отношение  $\tau_0/T_0$ , как правило, не превышает величины 0,25. Это позволяет утверждать, что величина  $T/T_{и.опт}$  для реально встречающихся систем регулирования заключена в пределах  $2,7 < T/T_{и.опт} < 5,0$ .

Эти соображения свидетельствуют о целесообразности при использовании критерия оптимальной настройки (13-11) выбирать расчетное значение  $m$  в этой формуле равным среднему значению указанного диапазона возможного изменения  $m$ , т. е. принимать в качестве

расчетного не  $m=2$ , а  $m=3,5$ . Анализ динамической точности ряда систем регулирования, настроенных в соответствии с такой величиной  $m$ , показал что увеличение среднеквадратичной ошибки регулирования в этом случае по сравнению с величиной ошибки, которая имела бы место при использовании точных методов расчета, составляет не более 20%. Это вполне допустимое ухудшение точности регулирования, особенно если иметь в виду, что рассматриваемые методы предназначены для предварительного этапа настройки.

Естественно, что при выборе конкретных численных значений косвенных неэкстремальных показателей оптимальной настройки должна быть учтена вся имеющаяся в наличии априорная информация о динамике объекта (например, если перед началом настройки имеется хотя бы приближенная переходная характеристика объекта). Расчетные значения косвенных показателей оптимальной настройки могут быть уточнены также после выполнения заключительного этапа настройки, т. е. после того, как будут осуществлены полная идентификация системы и основанный на ней расчет оптимальных параметров настройки. Эта информация может оказаться полезной в будущем, когда понадобится осуществлять периодическое уточнение параметров настройки системы во время ее постоянной эксплуатации. Необходимость в таком уточнении возникает из-за неустойчивости во времени динамических свойств объекта. Применение итерационной процедуры настройки с использованием косвенных неэкстремальных показателей позволяет в этом случае получать результаты, как правило, почти не отличающиеся от результатов, получаемых при использовании исходных экстремальных показателей.

#### 13-4. Оптимизация настройки системы с оценкой на каждом шаге одной точки частотной характеристики

Как уже отмечалось, рассмотренный в § 13-2 метод настройки системы путем оценки и аппроксимации ее переходной характеристики обладает весьма существенным недостатком, связанным с необходимостью оперировать с «хвостовой» частью переходной характеристики, когда отклонения регулируемой величины оказываются относительно малыми, сравнимыми с зоной нечувствительности регулятора и случайными помехами. Практически поэто-

му значительно более надежными являются методы оптимизации, в основу которых положены различные варианты оценок частотной характеристики системы.

Упрощение процедуры поиска оптимума в этом случае обусловлено тем, что динамика системы обычно достаточно полно определяется ограниченным числом точек ее частотной характеристики, если только эти точки принадлежат существенно для данной системы диапазону частот. Более того, опыт показывает, что при удачном

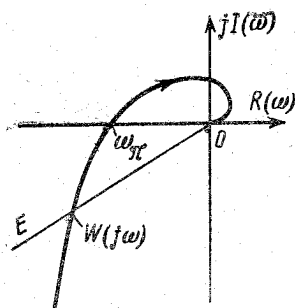


Рис. 13-4.

выборе структуры аппроксимирующей характеристики вполне удовлетворительных результатов при предварительной настройке ПИ-регулятора можно достичь, даже если оценивать одну точку частотной характеристики системы.

Для оценки частотных характеристик системы в существенном диапазоне весьма удобными являются методы идентификации, рассмотренные в § 12-5 и 12-6, когда воз-

буждение колебаний осуществляется либо включением системы в автоколебательный нелинейный контур, либо изменением алгоритма функционирования регулятора так, чтобы система вышла на границу устойчивости или в автоколебания.

Схема подключения к системе нелинейного блока возбуждения автоколебаний в этом случае ничем не отличается от схем идентификации, показанных на рис. 12-9 и 12-11.

Напомним, что существенный для расчета оптимальной настройки участок частотной характеристики разомкнутой системы регулирования расположен в пределах сектора, ограниченного отрицательной вещественной полуосью и линией OE (рис. 13-4), проведенной из начала координат под углом  $\gamma$  (7-21) к этой полуоси. Наиболее просто в пределах этого участка оценивается точка частотной характеристики, в которой она пересекает отрицательную вещественную полуось (точка для частоты  $\omega_\pi$  на рис. 13-4). Нелинейный блок в схеме оптимизации в этом случае достаточно выбрать в виде двухпозиционного реле без зоны возврата (рис. 12-10,а). Имитация

действия такого реле может быть также осуществлена (при отсутствии соответствующих технических средств) вручную.

При использовании для настройки системы схемы с изменением алгоритма функционирования регулятора (рис. 12-11) условие возникновения автоколебаний по методу гармонического баланса, когда система работает с ПИ-регулятором, здесь имеет следующий вид:

$$\frac{4d}{\pi A_1} k_{p1} \frac{j\omega_{\pi 1} T_{n1} + 1}{j\omega_{\pi 1} T_{n1}} W_\mu(j\omega_{\pi 1}) = -1. \quad (13-12)$$

Используя подходящую аппроксимацию характеристики объекта, из этого условия могут быть определены численные значения коэффициентов аппроксимирующей характеристики, после чего обычным порядком можно

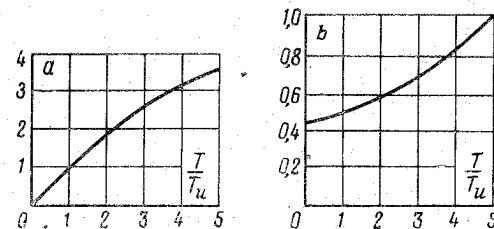


Рис. 13-5.

найти и оптимальные параметры настройки регулятора  $k_{p2}$  и  $T_{n2}$ . После установки найденных параметров настройки в регуляторе параметры автоколебаний  $\omega_\pi$  и  $A$ , естественно, изменятся и примут некоторые новые значения  $\omega_{\pi 2}$  и  $A_2$ . Это позволит получить новые уточненные значения коэффициентов аппроксимирующей характеристики объекта из условия

$$\frac{4d}{\pi A_2} k_{p2} \frac{j\omega_{\pi 2} T_{n2} + 1}{j\omega_{\pi 2} T_{n2}} W_\mu(j\omega_{\pi 2}) = -1, \quad (13-13)$$

что в свою очередь позволит получить новые уточненные значения параметров настройки регулятора  $k_{p3}$  и  $T_{n3}$  и т. д. Подобная итерационная процедура должна, очевидно, продолжаться до тех пор, пока новые уточненные значения параметров настройки практически не окажутся такими же, как и их значения на предыдущем шаге.

Расчеты могут быть существенно упрощены, если предварительно составить графики безразмерных зависимостей аналогично тому, как это было сделано в § 13-2. На рис. 13-5 показаны графики, построенные для случая аппроксимации характеристик объекта характеристикою интегрирующего звена с запаздыванием. Порядок настройки с использованием этих графиков следующий.

После того как в системе установятся автоколебания, фиксируются период  $T_1$  этих колебаний и их амплитуда на входе релейного элемента  $A_1$ . Вычислив величину отношения  $T_1/T_{ин}$  по приведенным графикам, находят значения коэффициентов  $a = a_1$  и  $b = b_1$ , после чего по формулам

$$T_{и2} = a_1 T_{ин}; k_{p2} = b_1 \frac{d}{A_1} k_{p1} \quad (13-14)$$

определяется первое приближение к оптимальной настройке регулятора. После изменения настройки регулятора в соответствии с найденными значениями вновь фиксируются значения периода  $T_2$  и амплитуды  $A_2$  автоколебаний. Вычислив новое значение отношения  $T_2/T_{и2}$ , по графикам на рис. 13-5 определяют новые значения коэффициентов  $a = a_2$  и  $b = b_2$ , что позволит определить уточненные значения параметров настройки:

$$T_{и3} = a_2 T_{и2}; k_{p3} = b_2 \frac{d}{A_2} k_{p2} \text{ и т. д.} \quad (13-15)$$

Оптимизация настройки может считаться оконченной, когда последующее уточнение параметров настройки дает результат, мало отличающийся от предыдущего. Таким образом, в рассматриваемом случае используется следующий алгоритм настройки:

$$T_{и n+1} = a_n T_{ин}; k_{p n+1} = b_n \frac{d}{A_n} k_{pn}. \quad (13-16)$$

Изложенный способ оптимизации настройки может быть практически без существенных изменений использован и при включении системы регулирования в специальный автоколебательный контур (рис. 12-9). Действительно, условие возникновения автоколебаний здесь записывается в следующем виде:

$$\frac{4d}{\pi A} \Phi_{sy}(j\omega_\pi) = -1. \quad (13-17)$$

Так как амплитудно-фазовые характеристики замкнутой и разомкнутой систем  $\Phi_{sy}(j\omega)$  и  $W(j\omega)$  пересекают

вещественную отрицательную полуось комплексной плоскости при одной и той же частоте  $\omega_\pi$ , то как при включении двухпозиционного реле без зоны возврата в контур регулирования (рис. 12-11), так и при включении его в специальный контур (рис. 12-9) период автоколебаний останется одним и тем же.

Амплитуда автоколебаний в системе, выполненной по схеме на рис. 12-11, определяется формулой

$$A_{pз} = \frac{4d}{\pi} |W(j\omega_\pi)|, \quad (13-18)$$

а в схеме на рис. 12-9 [при условии, что замкнутая система регулирования устойчива, т. е.  $|W(j\omega_\pi)| < 1$ ]

$$A_{зм} = -\frac{4d}{\pi} \Phi(j\omega_\pi) = \frac{4d}{\pi} \frac{|W(j\omega_\pi)|}{|1 - W(j\omega_\pi)|}. \quad (13-19)$$

Из последних двух выражений может быть получена следующая формула, связывающая между собой амплитуды автоколебаний обеих систем:

$$A_{pз} = \frac{A_{зм}}{1 + \frac{\pi A_{зм}}{4d}}. \quad (13-20)$$

Таким образом, итерационный алгоритм настройки в системе рис. 12-9 имеет следующий вид:

$$T_{и n+1} = a_n T_{ин}; k_{p n+1} = b_n \frac{d}{A_{зм n}} \left(1 + \frac{\pi A_{зм n}}{4d}\right) k_{pn}, \quad (13-21)$$

где  $a$  и  $b$  по-прежнему определяются по графикам на рис. 13-5.

Из формул (13-16), (13-21) и рис. 13-5 следует, что при оптимальной для рассмотренного способа настройке регулятора в схеме на рис. 12-11 выполняются условия

$$T_{опт} = 0,88 T_{и.опт}; A_{опт} = 0,49d, \quad (13-22)$$

а в схеме на рис. 12-9

$$T_{опт} = 0,88 T_{и.опт}; A_{опт} = 0,71d. \quad (13-23)$$

Записанные условия могут быть, очевидно, приняты в качестве косвенных показателей оптимальной настройки системы регулирования с ПИ-регулятором, т. е. критерий оптимальной настройки системы может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{T}{T_n} = m; \frac{A}{d} = l, \quad (13-24)$$

где  $m$  и  $l$  — некоторые заданные числа.



Этот новый показатель, как и показатель (13-11), не содержит экстремальных зависимостей. При его использовании достаточно добиться определенных заранее заданных относительных значений периода и амплитуды автоколебаний. При этом (в принципе безразлично, каким путем будет достигнут этот оптимум настройки, так что рассмотренная итерационная процедура настройки с помощью графиков на рис. 13-5 может рассматриваться лишь как одна из многих возможных упорядоченных процедур поиска оптимума.

### 13-5. Сходимость итерационной процедуры настройки систем регулирования

Итерационная процедура настройки системы регулирования, очевидно, должна сходиться к сформулированным в критерии оптимальности условиям; кроме того, эта сходимость должна быть достаточно быстрой, т. е. оптимальная настройка системы должна быть достигнута за достаточно малое число шагов.

Порядок анализа сходимости итерационных алгоритмов настройки рассмотрим на примере схемы оптимизации алгоритма настройки с применением схемы, в которой релейный элемент включен в расщелку основного контура регулирования (см. рис. 12-11). Особенность процесса настройки в этой схеме заключается в том, что постоянная интегрирования и коэффициент передачи регулятора могут настраиваться независимо друг от друга (вначале можно найти оптимальное значение постоянной интегрирования регулятора, а затем уже при неизменной постоянной интегрирования определить оптимальное значение коэффициента передачи). Объясняется это тем, что величина периода автоколебаний в рассматриваемой системе зависит только от постоянной интегрирования  $T_n$  и не меняется при изменении коэффициента передачи регулятора.

Период автоколебаний  $T$  в рассматриваемой схеме оптимизации является некоторой заранее неизвестной функцией установленной в регуляторе постоянной интегрирования  $T_n$ :

$$T = F(T_n), \quad (13-25)$$

вид которой зависит от неизвестных свойств объекта регулирования. Задача оптимизации настройки заключается в том, чтобы найти такое значение  $T_n$ , при котором будет выполнено первое из условий (13-24). Подставив это условие в (13-25) и обозначив  $T_n = x$ , получим:

$$x - \frac{1}{m} F(x) = 0. \quad (13-26)$$

Таким образом, сформулированная задача сводится к отысканию корня этого уравнения, которое может быть осуществлено методом итераций с использованием на каждом шаге рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = \frac{1}{m} F(x_n) = \frac{T_n}{m}, \quad (13-27)$$

где  $T_n$  — величина периода колебаний на  $n$ -м шаге.

Напомним, что итерационная процедура может быть применена не только к самому уравнению (13-26), но и к любому равносильному уравнению

$$x = f(x), \quad (13-28)$$

причем удачным выбором этого равносильного уравнения можно существенно ускорить сходимость процедуры итераций.

В частности, если правую часть уравнения (13-28) выбрать в виде

$$f(x) = ax, \quad (13-29)$$

где  $a$  является известной функцией отношения  $F_a(x)/x$  для выбранной аппроксимирующей системы (заданной, например, графиком на рис. 13-5), то будет получен алгоритм (13-16). Равносильность уравнений (13-26) и (13-28) в этом случае следует из того, что при оптимальном значении  $x$  отношение  $F_a(x)/x$  принимает значение  $m$ , а коэффициент  $a$  становится равным единице.

Обратите внимание, что формула (13-27) определяет новый итерационный алгоритм настройки, а именно величина  $T_n$  на каждом шаге выбирается равной периоду автоколебаний на предыдущем шаге, деленному на величину  $m$ . В частности, при использовании критерия оптимальности (13-22)  $m = 0,88$ .

Процесс приближения к оптимальному значению  $T_n$  при использовании обоих алгоритмов (13-16) и (13-27) иллюстрирует рис. 13-6, где движение к оптимуму показано пунктирными стрелками. При использовании обычного итерационного алгоритма (13-27) движение от начального значения  $T_{n1}$  до оптимального в первом приближении значения  $T_{n2}$  осуществляется по прямой  $AB$ , параллельной оси абсцисс, до пересечения с  $OG$  (рис. 13-6,а). При использовании улучшенного алгоритма (13-16) движение происходит вдоль графика зависимости  $T$  от  $T_n$  для системы с выбранной аппроксимацией характеристик объекта (рис. 13-6,б), что способствует ускорению сходимости. При точной аппроксимации оптимум настройки будет достигнут за один шаг.

Иначе говоря, использование промежуточной аппроксимации объекта с помощью графиков типа рис. 13-5 может рассматриваться как специальный прием построения равносильного уравнения (13-28), использующий некоторую априорную информацию о динамике объекта, что естественно, позволяет улучшить сходимость итерационной процедуры.

Рассмотрим поэтому лишь условия сходимости простого итерационного алгоритма (13-27). Как известно [Л. 19], достаточным условием сходимости этого алгорит-

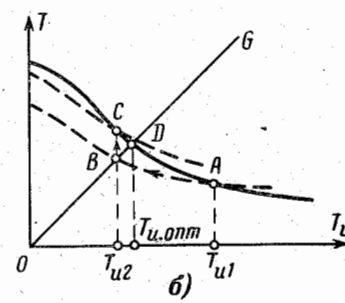
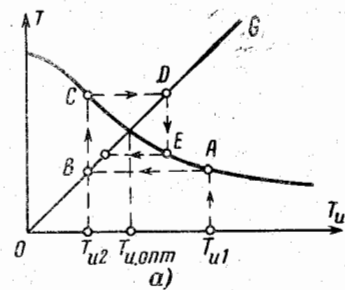


Рис. 13-6.



ма является условие сжимающего отображения

$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \leq q < 1 \quad (13-30)$$

на всем отрезке возможного изменения  $x$ . Для рассматриваемого случая эта формула переписывается следующим образом:

$$\left| \frac{dF(x)}{dx} \right| \leq mq < m. \quad (13-31)$$

Зависимость  $F(x) = T(T_n)$  в неявном виде определяется условием баланса фаз в разомкнутом контуре системы регулирования

$$\arg [W_p(j\omega) W_\mu(j\omega)] = -\pi, \quad (13-32)$$

которое для системы с ПИ-регулятором приобретает вид:

$$\arctg \frac{1}{\omega T_n} + \varphi_\mu(\omega) = \pi \quad (13-33)$$

(здесь фазовой характеристике объекта  $\varphi_\mu(\omega)$  приписан знак „-“).

Заметим, что при  $T_n = 0$  частота автоколебаний соответствует частоте амплитудно-фазовой характеристики объекта при фазовом сдвиге  $-\pi/2$ , а при  $T_n \rightarrow \infty$  эта частота соответствует фазовому сдвигу  $-\pi$ .

Для определения производной  $dT/dT_n$  из формулы (13-33) можно использовать обычный прием дифференцирования функций, заданных в неявном виде. В результате условие (13-31) принимает следующий вид:

$$\left| \frac{2\pi}{\omega T_n + (1 - \omega^2 T_n^2) \omega \frac{d\varphi_\mu(\omega)}{d\omega}} \right| \leq mq < m, \quad (13-34)$$

где  $\omega$  определяется из уравнения (13-33).

В близкой окрестности точки оптимальности при  $T = mT_n$  последняя формула может быть записана следующим образом:

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 + 1}{\frac{2\pi}{m}} \omega \frac{d\varphi_\mu(\omega)}{d\omega}} \right| \leq q < \frac{1}{m}, \quad (13-35)$$

из которой после некоторых преобразований можно получить:

$$\left| \omega \frac{d\varphi_\mu(\omega)}{d\omega} \right| > \frac{\frac{4\pi}{m}}{\frac{4\pi^2}{m^2} + 1}, \quad (13-36)$$

причем  $\omega$  является решением уравнения (13-33) при  $T = mT_n$

$$\operatorname{tg} [\pi - \varphi_\mu(\omega)] = \frac{m}{2\pi}. \quad (13-37)$$

В частности, для  $m=0,9$  формулы (13-36) и (13-37) записываются следующим образом:

$$\left| \omega \frac{d\varphi_\mu(\omega)}{d\omega} \right| > 0,275; \quad (13-38)$$

$$\varphi_\mu(\omega) = -172^\circ. \quad (13-39)$$

Выполнение найденных условий гарантирует сходимость процедуры оптимизации в достаточно малой окрестности точки оптимума, т. е. когда начальное значение  $T_n$  выбрано не слишком далеким от его отыскиваемого оптимального значения.

Расчеты, проведенные для целого ряда типовых объектов как по формуле (13-34), так и (13-38), свидетельствуют, что найденные условия практически всегда выполняются, причем при  $T_{н1} > T_{н.опт}$  оптимум настройки обычно достигается за два-три шага. Объясняется это тем, что в этом диапазоне наклон графика характеристики  $T(T_n)$  оказывается весьма малым.

Перейдем теперь к итерационному алгоритму для настройки коэффициента передачи регулятора  $k_p$ .

При неизменном значении постоянной интегрирования регулятора  $T_n = T_{н.опт}$  амплитуда автоколебаний  $A$  линейно зависит от величины коэффициента передачи регулятора  $k_p$ .

Однако в общем случае градуировка органа настройки коэффициента передачи регулятора может отсутствовать и, следовательно, функциональная зависимость амплитуды автоколебаний  $A$  от положения ручки органа настройки  $\alpha$  может оказаться неизвестной. Соответственно поиск оптимального положения ручки органа настройки  $\alpha = \alpha_{опт}$ , при котором амплитуда автоколебаний примет заданное значение, определяемое вторым условием (13-24), может быть сведен к отысканию корня  $\alpha$  уравнения

$$ld - A = 0. \quad (13-40)$$

Заменяем это уравнение равносильным

$$\alpha = \frac{ld}{A} \alpha. \quad (13-41)$$

Тогда итерационная процедура отыскания корня  $\alpha_{опт}$  будет определяться следующей рекуррентной формулой:

$$\alpha_{n+1} = \frac{ld}{A_n} \alpha_n. \quad (13-42)$$

т. е. положение ручки настройки коэффициента передачи на каждом последующем шаге нужно изменить во столько раз, во сколько раз амплитуда автоколебаний на предыдущем шаге отличается от ее желаемого значения.

Сходимость этой процедуры определяется условием

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{ld}{A} \alpha \right] \leq q < 1, \quad (13-43)$$

т. е.

$$\left| \frac{A - \alpha \frac{dA}{d\alpha}}{A^2} \right| \leq \frac{q}{ld} < \frac{1}{ld}. \quad (13-44)$$

В частности, в достаточно малой окрестности точки оптимума, как следует из этого условия, достаточно, чтобы касательная к характеристике органа настройки  $A=A(\alpha)$  имела положительный угловой коэффициент. Если же эта характеристика линейна во всем рабочем диапазоне изменения  $\alpha$ , левая часть неравенства (13-44) обращается в нуль, что свидетельствует о том, что в этом случае оптимум настройки  $k_p$  достигается за один шаг. Еще раз подчеркнем, что при этом истинный вид зависимости  $k_p$  от  $\alpha$  может оставаться неизвестным.

### 13-6. Оптимизация настройки системы с оценкой ее частотной характеристики при частоте резонанса

Хотя точка пересечения частотной характеристики системы с отрицательной полуосью расположена в пределах участка, имеющего наиболее существенное значение для расчета оптимальной настройки регуляторов, тем не менее может оказаться, что истинная частотная характеристика системы и аппроксимирующая ее характеристика, совпадая в указанной точке, будут заметно различаться при частоте резонанса системы. Это может привести к тому, что система регулирования, настроенная в соответствии с критерием (13-24), не будет обладать должным запасом устойчивости. Этот недостаток может быть в значительной степени устранен либо путем увеличения числа точек, в которых добиваются совпадения аппроксимирующей характеристики с истинной, либо соответствующим смещением точки, в которой осуществляется аппроксимация характеристик системы в более близкую окрестность частоты резонанса.

Простейшая реализация первого способа уточнения настройки сводится к тому, что число точек аппроксимации увеличивается до двух, причем в качестве второй точки выбирается точка частотной характеристики с нулевой частотой [Л. 73, 74]. Для этого, однако, необходимо перед началом итерационной процедуры оптимизации настройки знать значение частотной характеристики объекта при нулевой частоте, т. е. знать величину коэффициента передачи объекта  $k_\mu$ . При таком способе аппроксимации можно использовать в качестве аппроксимирующей характеристику, зависящую уже не от двух, а от трех варьируемых параметров, например характеристику инерционного звена первого порядка с запаздыванием. Подставив выражение для частотной характеристики такого звена (11-38) в уравнение (13-12), можно по полу-

ченным из эксперимента значениям амплитуды и частоты автоколебаний определить два коэффициента аппроксимирующей характеристики: постоянную времени и время запаздывания (коэффициент передачи звена, как об этом уже говорилось, должен быть к началу процедуры настройки известен). Располагая указанными сведениями о свойствах объекта, можно, используя, например, графики, приведенные на рис. 11-12, найти оптимальные в первом приближении параметры настройки регулятора  $k_{p2}$  и  $T_{из2}$ . Последующие уточнения оптимальных параметров настройки производятся обычным порядком. Естественно, что и в этом случае для упрощения расчетов могут быть заранее составлены соответствующие номограммы или графики (типа графиков, приведенных на рис. 13-5).

Возможность повышения точности настройки без увеличения точек аппроксимации, а лишь за счет соответствующего смещения точки аппроксимации в более близкую окрестность частоты резонанса базируется на том, что вектор частотной характеристики системы регулирования на частоте резонанса, как правило, занимает весьма стабильное положение в комплексной плоскости вне зависимости от того, какими динамическими свойствами обладает объект регулирования [Л. 75, 76]. Так, анализ целого ряда систем с достаточно характерными для производственных процессов объектами показывает, что при расчетной величине показателя колебательности  $M=1,6$  вектор амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы на резонансной частоте по модулю близок в среднем к значению 0,8, а его аргумент — к значению  $-150^\circ$ . Соответственно можно легко подсчитать, что вектор характеристики замкнутой системы  $\Phi_{sy}(j\omega)$  при частоте резонанса в этом случае по модулю должен быть равным 1,6, а его аргумент —  $99^\circ$ . Это утверждение иллюстрирует рис. 13-7, где показаны частотные характеристики оптимально настроенных систем регулирования с объектами, обладающими следующими операторами:

$$W_\mu(p) = 1/(T_\mu p + 1)^2 \text{ (кривая 1); } W_\mu(p) = e^{-0,1T_\mu p}/(T_\mu p + 1) \text{ (кривая 2); } W_\mu(p) = 1/(T_\mu p + 1)^3 \text{ (кривая 3); } W_\mu(p) = e^{-1,3T_\mu p}/(T_\mu p + 1)^2 \text{ (кривая 4).}$$

Из сказанного вытекает следующий косвенный показатель оптимальности настройки:

Система регулирования с ПИ-регулятором может считаться настроенной оптимально, если вектор ее частотной характеристики в разомкнутом состоянии, соответствующий периоду  $T = mT_{и}$  (где  $T_{и}$  — установленная в регуляторе постоянная интегрирования), располагается под углом  $-150^\circ$  и модуль его равен 0,8. При отсутствии каких-либо добавочных сведений о динамике объекта расчетную величину  $m$  по-прежнему целесообразно выбирать равной  $m = 3,5$ .

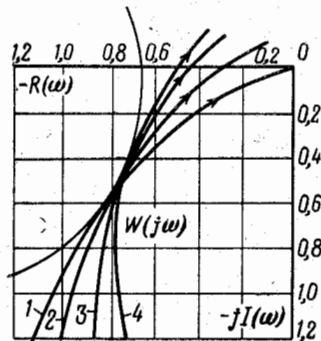


Рис. 13-7.

Рассмотрим вначале возможную процедуру настройки системы по сформулированному критерию с использованием схемы включения нелинейного блока в расщелку контура регулирования (рис. 12-11). Из

условия гармонического баланса следует, что эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного блока при частоте  $\omega$  и амплитуде  $A$  автоколебаний связан с амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы регулирования соотношением

$$W_{н.э}[j(A, \omega)] = -\frac{1}{W(j\omega)},$$

причем при оптимальной настройке регулятора он должен (в соответствии с принятым косвенным критерием) принять значение

$$W_{н.э}[j(A, \omega)] = -\frac{1}{0,8e^{-j150^\circ}} = 1,25e^{-j30^\circ}. \quad (13-45)$$

Этому условию удовлетворяет, например, двухпозиционный релейный элемент с зоной возврата или релейный элемент без зоны возврата, но с включенным последовательно к нему линейным инерционным звеном первого порядка, постоянная времени  $T_{\phi}$  и коэффициент передачи  $k_{\phi}$  которого удовлетворяют требованиям

$$\left. \begin{aligned} \arctg T_{\phi} \omega_{рез} &= 30^\circ; \\ \frac{k_{\phi}}{\sqrt{1 + T_{\phi}^2 \omega_{рез}^2}} \frac{4d}{\pi A} &= 1,25. \end{aligned} \right\} \quad (13-46)$$

Учитывая, что период колебаний при оптимальной настройке регулятора должен удовлетворять условию (13-11), последние формулы могут быть переписаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_{\phi} &= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{2\pi} mT_{и.опт} = 0,092mT_{и.опт}; \\ k_{\phi} &= 1,24 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 30^\circ} \frac{\pi A}{4d} = 1,13 \frac{A}{d}. \end{aligned} \right\} \quad (13-47)$$

Эти формулы позволяют для рассматриваемого случая сформулировать критерий оптимальной настройки системы следующим образом.

Настройка системы регулирования с ПИ-регулятором может считаться оптимальной, если при включении в расщелку контура регулирования релейного двухпозиционного элемента без зоны гистерезиса с линейным инерционным звеном первого порядка, постоянная времени которого  $T_{\phi}$  связана с установленной в регуляторе постоянной интегрирования  $T_{и}$  соотношением

$$T_{\phi} = 0,09mT_{и}. \quad (13-48)$$

в системе возникают автоколебания с параметрами

$$\left. \begin{aligned} T &= mT_{и}; \\ A &= \frac{4dk_{\phi}}{1,24\pi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 30^\circ}} = 0,89k_{\phi}d. \end{aligned} \right\} \quad (13-49)$$

В частности, для усредненного значения  $m = 3,5$  последние формулы принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} T &= 3,5T_{и}; \\ T_{\phi} &= 0,32T_{и}; \\ A &= 0,89k_{\phi}d. \end{aligned} \right\} \quad (13-50)$$

Поскольку частота автоколебаний в рассматриваемой схеме оптимизации не зависит от коэффициента усиления контура, настройки постоянной интегрирования и коэффициента передачи регулятора можно осуществлять последовательно и независимо друг от друга.

Настройка постоянной интегрирования может по-прежнему интерпретироваться как решение уравнения (13-25) методом итераций. Как показывает опыт, здесь достаточно быструю сходимость дает простейший итерационный алгоритм, определяемый формулой (13-27).

Достаточное условие сходимости этого алгоритма по-прежнему выражается формулой (13-31), в которой  $F(x) = T(T_n)$  определяется в неявном виде уравнением

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi} \frac{T}{T_n} + \operatorname{arctg} 2\pi s \frac{T_n}{T} + \varphi_\mu \left( \frac{2\pi}{T} \right) = \pi, \quad (13-51)$$

где  $s = T_\phi / T_n$ . Произведя обычным порядком дифференцирование этой формулы, получим следующее достаточное условие сходимости:

$$\left| \frac{T^3 \left[ 1 + \left( \frac{2\pi s T_n}{T} \right)^2 \right] - T^2 T_n \left[ 1 + \left( \frac{2\pi s T_n}{T} \right)^2 \right] - 4\pi^2 s T_n^3 \left[ 1 + \left( \frac{T}{2\pi T_n} \right)^2 \right] - 4\pi^2 s T_n^2 T \left[ 1 + \left( \frac{T}{2\pi T_n} \right)^2 \right]}{-4\pi^2 T_n^2 \left[ 1 + \left( \frac{T}{2\pi T_n} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{2\pi s T_n}{T} \right)^2 \right] \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}} \right| < m. \quad (13-52)$$

В частности, при  $m = 3,5$  и  $s = 0,32$  левая часть неравенства близка к нулю, что свидетельствует о быстрой сходимости итерационного алгоритма практически для любых объектов (обычно оптимум достигается за 2—3 шага).

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, доказывается и сходимость процедуры настройки коэффициента передачи регулятора. При линейной характеристике органа настройки оптимум здесь также достигается за один шаг.

Аналогичным образом могут быть получены формулы для показателя оптимальности и алгоритма настройки для схемы оптимизации с включением нелинейного релейного звена и формирующего аperiodического звена в специальный контур настройки (см. рис. 12-9). Учитывая связь между векторами амплитудно-фазовой характеристики замкнутой и разомкнутой системы, показатель оптимальности может быть сформулирован следующим образом.

Система с ПИ-регулятором может считаться настроенной оптимально, если при периоде колебаний  $T = 3,5T_n$  ( $T_n$  — постоянная интегрирования, установленная в регуляторе) вектор амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы имеет модуль, равный 1,6, и фазу  $-99^\circ$ .

Для того чтобы при  $T = 3,5T_n$  получить дополнительный фазовый сдвиг  $-81^\circ$ , фазосдвигающее звено должно иметь постоянную времени

$$T_\phi = 3,5 T_n. \quad (13-53)$$

Из условия возникновения автоколебаний

$$\frac{4d}{\pi A} W_\phi(j\omega) \Phi(j\omega) = -1; \quad (13-54)$$

следует, что при оптимальной настройке, когда

$$T = 3,5T_n; \left| W_\phi \left( j \frac{2\pi}{3,5T_n} \right) \right| = 0,16 k_\phi \left| \Phi \left( j \frac{2\pi}{3,5T_n} \right) \right| = 1,6, \quad (13-55)$$

амплитуда автоколебаний будет определяться формулой

$$A = 0,32 k_\phi d. \quad (13-56)$$

Эта формула совместно с (13-55) и (13-53) может рассматриваться как другая формулировка косвенного показателя оптимальности, а именно: настройка системы может считаться оптимальной, если в схеме на рис. 12-9 с фазосдвигающим звеном в виде инерционного звена первого порядка с постоянной времени, определяемой формулой (13-53) возникнут автоколебания, параметры которых определяются формулами (13-55) и (13-56).

Из условия (13-54) может быть найден для каждого конкретного значения  $\omega$  и  $A$  вектор частотной характеристики объекта

$$W_\mu(j\omega) = \frac{1}{W_p(j\omega)} \frac{1}{1 + \frac{4d}{\pi A} W_\phi(j\omega)}, \quad (13-57)$$

по которому, используя подходящую аппроксимацию, можно рассчитать оптимальную настройку регулятора. Можно также (аналогично тому, как это было сделано в § 13-2 и 13-3), задавшись подходящей структурой аппроксимирующей характеристики, произвести расчеты для всех возможных на практике вариантов и результаты свести в удобные для последующего использования графики или номограммы. На рис. 13-8 приведен подобный график, использование которого заключается в следующем:

1. Система регулирования при некоторых начальных

значениях параметров настройки регулятора  $k_{p1}$  и  $T_{ин1}$ , обеспечивающих ее устойчивую работу, включается в действие. В фазосдвигающем звене устанавливается постоянная времени  $T_{ф1}$ , вычисленная по формуле (13-53), и включается контур настройки по схеме на рис. 12-9.

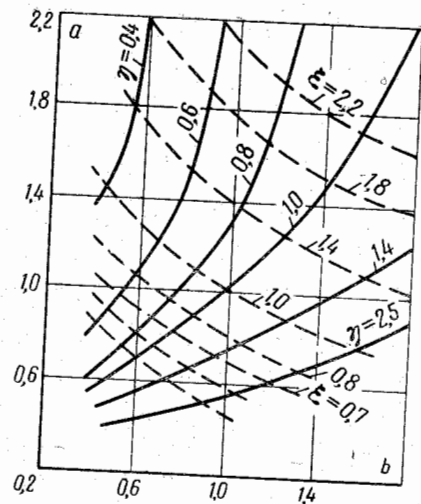


Рис. 13-8.

Точка пересечения соответствующих кривых на рис. 13-8 определяется значением коэффициентов  $a$  и  $b$ , отложенных на координатных осях. Вычисления производятся по рекуррентным формулам:

$$T_{ин\ n+1} = \frac{1}{a_n} T_{ин}; \quad k_{p\ n+1} = \frac{1}{b_n} k_{pn}. \quad (13-59)$$

Следует обратить внимание на то, что в рассматриваемой схеме оптимизации настройки простой итерационный алгоритм типа (13-27), вообще говоря, оказывается неприменимым из-за возможности возникновения неустойчивой работы основного контура системы регулирования.

### 13-7. Оптимизация настройки системы с помощью внешнего генератора колебаний

Сформулированные выше косвенные показатели оптимальности настройки позволяют организовать поиск оптимума в действующей системе и в том случае, когда система вводится в колебательный режим присоедине-

2. Зарегистрировав частоту и амплитуду возникших автоколебаний (величина амплитуды этих колебаний может быть установлена путем изменения  $k_{ф}$  или  $d$ ), вычисляют коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{3,5T_{ин}}{T}; \\ \eta &= 3,1 \frac{AT_{ф}}{dk_{ф}T}. \end{aligned} \right\} (13-58)$$

Точка пересечения соответствующих кривых на рис. 13-8 определяется значением коэффициентов  $a$  и  $b$ , отложенных на координатных осях. Вычисления производятся по рекуррентным формулам:

нием к ней (обычно со стороны задатчика регулятора) специального генератора колебаний.

В соответствии с условием оптимальной настройки, связывающим период резонансных колебаний с оптимальной величиной постоянной интегрирования регулятора, период колебаний на первом шаге оптимизации следует выбрать равным  $T = mT_{ин}$  (где  $T_{ин}$  — постоянная интегрирования, установленная в регуляторе). Зарегистрировав установившиеся колебания выходной переменной системы (регулируемой величины) и оценив отношение амплитуд выходных и входных колебаний и сдвиг по фазе между ними, можно определить вектор амплитудно-фазовой характеристики объекта при частоте колебаний эксперимента

$$W_{\mu}(j\omega) = \frac{1}{k_p} \frac{j 2\pi \frac{T_{ин}}{T} \Phi_{св}(j\omega)}{\left(j 2\pi \frac{T_{ин}}{T} + 1\right) [1 - \Phi_{св}(j\omega)]} \quad (13-60)$$

или при  $T/T_{ин} = 3,5$

$$W_{\mu}(j\omega) = \frac{0,87}{k_p} \frac{\Phi_{св}(j\omega)}{1 - \Phi_{св}(j\omega)} e^{j29^\circ}. \quad (13-61)$$

Далее обычным порядком, используя подходящую аппроксимацию характеристики объекта, можно оценить первое приближение к оптимуму настройки, скорректировать соответствующим образом настройку регулятора и изменить период генерируемых колебаний в соответствии с новым значением постоянной интегрирования. Такая процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто условие

$$\Phi_{св}(j\omega) = 1,6e^{-j99^\circ}. \quad (13-62)$$

Для облегчения расчетов на рис. 13-9 приведена номограмма для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  итерационного алгоритма

$$\left. \begin{aligned} T_{ин\ n+1} &= \frac{1}{a_n} T_{ин}; \\ k_{p\ n+1} &= \frac{1}{b_n} k_{pn}. \end{aligned} \right\} (13-63)$$

На этой номограмме по оси абсцисс отложены значения сдвига по фазе, а по оси ординат — отношения амплитуд выходных и входных колебаний.

Период колебаний на каждом шаге должен выбираться по формуле

$$T_n = 3,5T_{ин}. \quad (13-64)$$

Для использования изложенного метода оптимизации необходимо хотя бы ориентировочно знать порядок оптимального значения постоянной интегрирования, с которого следует начинать оптимизацию. В этом отношении метод является менее удобным, чем методы, основанные на возбуждении автоколебаний с помощью нелинейных звеньев. Однако он имеет и свои достоинства, одним из важнейших из них является возможность осуществления оптимизации при наличии сильных случайных возмущений, действующих на объект в процессе проведения оптимизации. Для оценки вектора характеристики  $\Phi_{sy}(j\omega)$  в этих условиях применимы обычные статистические методы.

### 13-8. Техническое обеспечение процедуры оптимизации настройки систем регулирования

В соответствии с изложенными выше двумя основными принципами настройки по частотным характеристикам блоки возбуждения колебаний могут быть двух типов: генераторы импульсов или синусоидальных колебаний и нелинейные блоки, с помощью которых формируется замкнутая автоколебательная система.

Для генерирования колебаний могут быть использованы любые генераторы синусоидальных колебаний инфранизких частот, обладающие достаточно высокой стабильностью средней линии в течение времени оптимизации (поскольку промышленные объекты могут обладать относительно большой инерционностью, генератор должен обеспечить генерирование колебаний в течение достаточно длительного времени, иногда порядка нескольких часов). В частности, для настройки электронных регуляторов могут быть использованы простые и надежные генераторы колебаний, выполненные на обычных электромеханических шаговых искателях, обладающих практически очень высокой стабильностью. Наличие в сигнале, вырабатываемом таким генератором, высших гармоник, обусловленных шаговым характером изменения сигнала, может не приниматься во внимание, так как вблизи оптимума настройки частота основной гармоники близка к резонансной частоте системы, так что высшие

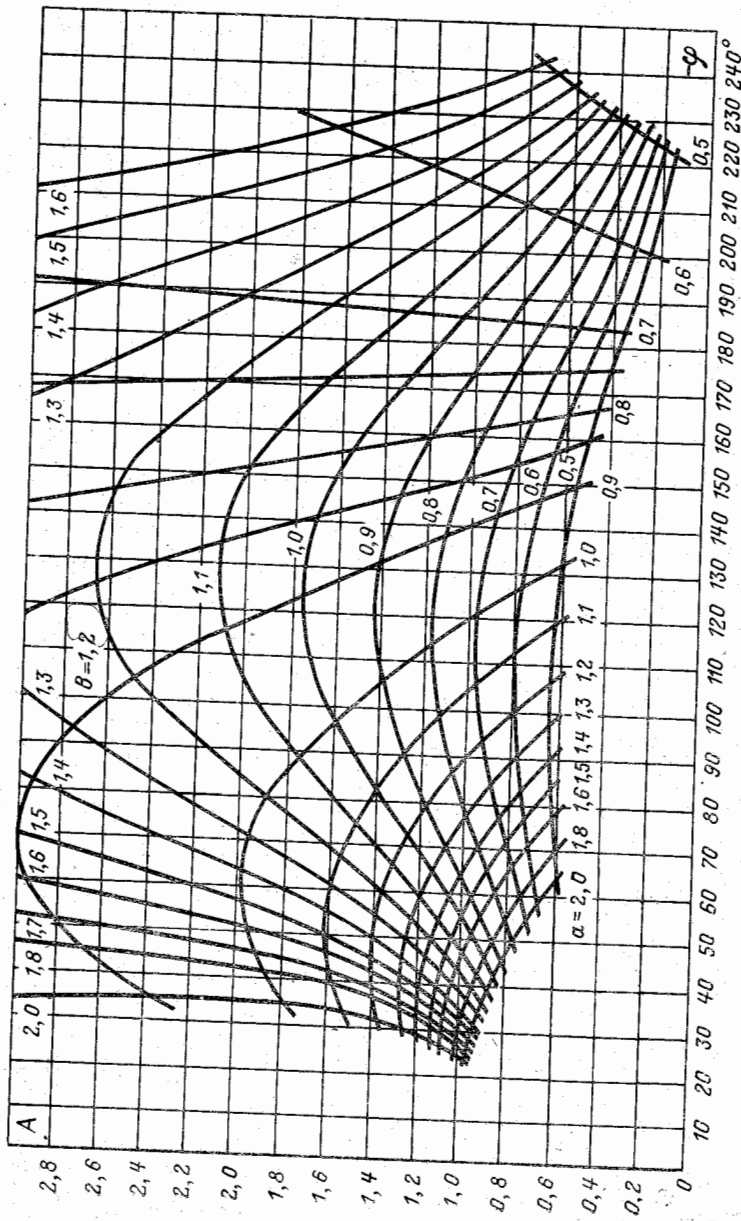


Рис. 13-9.

гармоники с частотами порядка трехкратной и выше оказываются практически полностью отфильтрованными.

В качестве примера нелинейного блока возбуждения автоколебаний рассмотрим блок, предназначенный для оптимизации настройки системы автоматического регулирования, выполненных на электронной аппаратуре регулирования МЗТА — регулирующих приборах РПИБ [Л. 79, 80].

Принципиальная схема варианта этого блока приведена на рис. 13-10.

Сигнал с выхода измерительного блока регулирующего прибора (зажим 25 по заводской маркировке) подается через разделительный ламповый каскад на вход любого автоматического потенциометра ПСР, снабженного сигнальными контактами (на схеме контакты К).

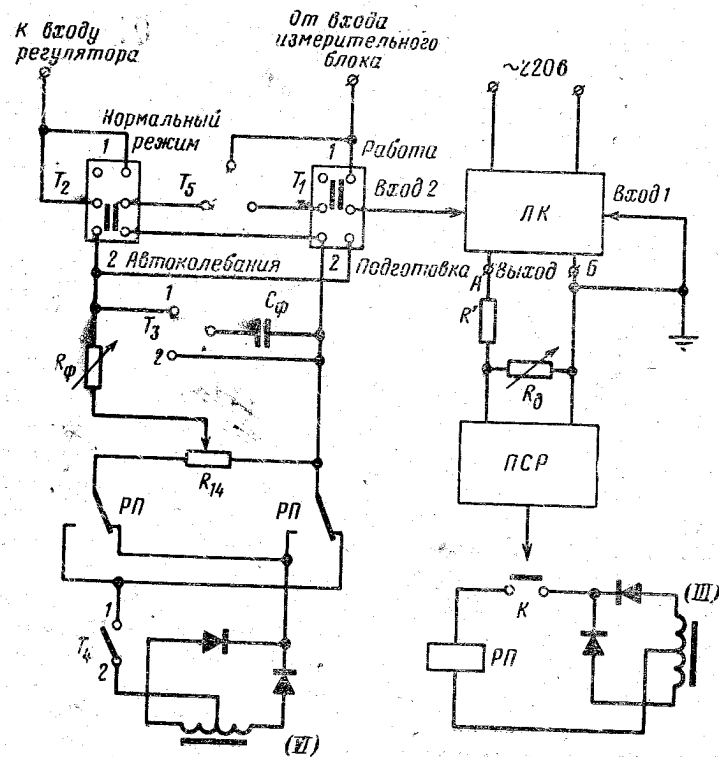


Рис. 13-10.

Этот потенциометр выполняет две функции: регистрирует выход измерительного блока регулятора, по которому осуществляется оценка амплитуды и периода автоколебаний, и с помощью сигнальных контактов К формирует релейную характеристику блока. Ламповый разделительный каскад ЛК может быть выполнен по обычной схеме первого каскада РПИБ; он необходим для исключения влияния потенциометра на работу регулятора.

Релейный сигнал, сформированный контактами К, подается через промежуточное реле РП на апериодическое звено, выполненное на конденсаторе  $C_{\phi}$  и резисторе  $R_{\phi}$ , после чего он подводится ко входу электронного блока регулирующего прибора (зажим 14).

Тумблер  $T_1$  служит для контроля уровней сигнала на выходе реле и формирующего звена перед началом процедуры оптимизации; для этого его ручку следует перевести в положение *Подготовка*. Регистрация амплитуды колебаний на входе релейного звена и уровня сигнала на его выходе осуществляется одним и тем же потенциометром. Это удобно в том отношении, что не требуется специальной градуировки шкалы прибора, так как в расчетах требуется оперировать лишь с величиной отношения амплитуды входа к уровню сигнала на выходе реле.

С помощью тумблера  $T_2$  осуществляется перевод системы регулирования из режима нормального функционирования в режим оптимизации (*Автоколебания*). Тумблер  $T_3$  служит для отключения конденсатора  $C_{\phi}$  и его разряда при подготовке уровня выходного сигнала реле РП. Величина этого сигнала устанавливается переменным резистором  $R_{\phi}$ . Тумблер  $T_5$  позволяет подключить рассматриваемый блок возбуждения автоколебаний к системе регулирования либо по схеме на рис. 12-9 (верхнее положение), либо по схеме на рис. 12-11 (нижнее положение).

Диапазон шкалы потенциометра устанавливается с помощью сменного резистора  $R_{\phi}$ .



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Примеры расчетов

Ниже приводится иллюстрация изложенных выше расчетных методов на примере регулирования температуры перегретого пара парогенератора электростанции (см. рис. 9-5).

Схема регулируемого объекта приведена на рис. П-1. Регулирующим воздействием является изменение расхода воды на впрыскивающий пароохладитель, осуществляемое перемещением клапана на впрыске  $\mu(t)$ , возмущающими воздействиями — изменение нагрузки блока, изменение тепловыделения в топке, изменение давления охлаждающей воды и т. д.

Рассматриваются следующие задачи:

- 1) аппроксимация экспериментальных переходных характеристик;
- 2) приближенное определение оптимальных параметров ПИ-регулятора по переходной характеристике;

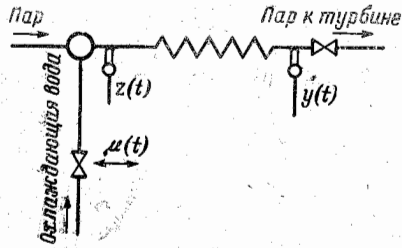


Рис. П-1.

3) перестроение переходных характеристик объекта в частотные;

4) расчет оптимальных параметров настройки ПИ- и ПИД-регуляторов по частотной характеристике объекта с учетом вариаций параметров;

5) построение графиков процессов регулирования при оптимальной настройке регуляторов;

6) расчет оптимальных параметров каскадной схемы регулирования с введением добавочной регулируемой величины — изменения температуры пара непосредственно за пароохладителем  $z(t)$ ;

7) расчет оптимальных параметров системы регулирования с компенсацией возмущений, когда контролируемым возмущением является изменение паровой нагрузки парогенератора;

8) расчет оптимальных параметров настройки цифрового регулятора;

9) расчет оптимальных параметров настройки импульсного регулятора с амплитудной модуляцией.

#### 1. Аппроксимация переходной характеристики объекта (§ 11-4)

Экспериментальная переходная характеристика объекта, характеризующая изменение температуры пара за пароперегревателем при изменении расхода воды на впрыск, приведена на рис. П-2 (блок 300 Мвт с газомазутным котлом ПК-41; режим работы при

74%-ной нагрузке). Штрих-пунктирными линиями показаны границы доверительных интервалов для этой характеристики. Координаты точки перегиба переходной характеристики объекта могут быть приняты равными:  $t_n = 82$  сек и  $h_n = 1,08$  град·ч/м. Поскольку установившееся значение характеристики равно  $3,32$  град·ч/т, то относительное значение характеристики в точке перегиба будет равно  $b = 1,08/3,32 = 0,325$ .

Принимая  $n = 3$  по графикам, приведенным на рис. 11-11, находим  $T_{a2}/T_{a1} = 0,4$ ;  $t_{п.а}/T_{a1} = 1,5$ ;  $T_{a1}/T_0 = 0,39$ .

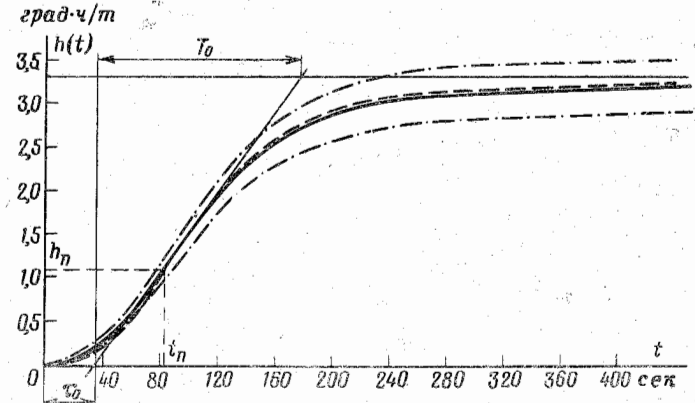


Рис. П-2.

Из графика характеристики на рис. П-2 находим  $T_0 = 142$  сек и, следовательно,  $T_{a1} = 0,39 \cdot 142 = 55$  сек, а величина  $T_{a2} = 0,4 T_{a1} = 0,4 \cdot 55 = 22$  сек. Расчетная величина  $t_{п.а}$  оказалась, таким образом, равной  $t_{п.а} = 1,5 T_{a1} = 1,5 \cdot 55 = 82$  сек, что совпадает со значением  $t_n$ , взятым из графика. Таким образом, во введении запаздывания нет необходимости и частотная характеристика объекта может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$W_a(p) = \frac{3,32}{(55p + 1)(22p + 1)}, \quad \frac{\text{град}}{\text{м/час}}, \quad (\text{П-1})$$

а соответствующая ей переходная характеристика  $h_a(t)$  показана на рис. П-2 пунктиром. Годограф характеристики  $W_a(j\omega)$  показан на рис. П-3 пунктиром.

Соответственно границы доверительного интервала для частотной характеристики  $W_a(j\omega)$  на рис. П-3 показаны штрих-пунктиром.

#### 2. Приближенный расчет оптимальных параметров настройки ПИ-регулятора по переходной характеристике объекта (§ 11-5)

Если остановиться на аппроксимации переходной характеристики объекта характеристикой инерционного звена первого порядка с запаздыванием, то, используя формулы (11-42) и (11-43), найдем:

$$T_a = (1 - 0,325) 142 = 96 \text{ сек};$$



$$\tau_a = 82 - (1,025 \cdot 0,325 - 0,625 \cdot 0,325^2) \cdot 142 = 144 \text{ сек},$$

$$\text{т. е. } T_a/\tau_a = 2,2.$$

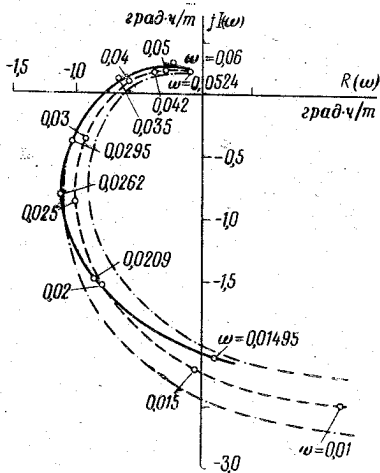


Рис. П-3.

дует установить коэффициент передачи, на 10% меньше найденного значения.

### 3. Перестроение переходной характеристики в частотные (§ 11-3)

Зададимся периодом колебаний  $T_0 = 210 \text{ сек}$  ( $\omega = 2\pi/T_0 = 0,0295 \text{ 1/сек}$ ) и выберем на переходной характеристике участок длительностью  $nT_0/2 = 420 \text{ сек}$ , вне пределов которого она принимает практически установившееся значение. Значения переходной характеристики  $h(t)$  в равноотстоящие дискретные моменты времени через интервал  $\Delta t = T_0/6 = 35 \text{ сек}$  приведены в табл. П-1.

Таблица П-1

$t, \text{сек}$	0	35	70	105	140	175	210
$h(t)$	0	0,2	0,82	1,63	2,3	2,71	2,95

Продолжение

$t, \text{сек}$	245	280	315	350	385	420
$h(t)$	3,08	3,12	3,15	3,19	3,22	3,24

Из графиков, приведенных на рис. 11-12 для этого значения  $T_a/\tau_a$ , находим  $k_{a, \text{кр}} = 1,5$ ;  $T_{н, \text{кр}}/\tau_a = 1,5$ , т. е. оптимальные значения параметров настройки ПИ-регулятора могут быть приняты следующими:  $k_{р, \text{опт}} = 1,5/3,32 = 0,45 \text{ т/град} \cdot \text{ч}$ ;  $T_{н, \text{опт}} = 1,5 \cdot 44 = 66 \text{ сек}$ .

Из графика переходной характеристики на рис. П-2 видно, что неточность ее задания может быть учтена вариацией коэффициента передачи объекта на  $\pm 10\%$  от его среднего значения.

Поскольку более опасным с точки зрения уменьшения необходимого запаса устойчивости системы является увеличение коэффициента усиления разомкнутого контура, в регуляторе сле-

Подсчитанные по формулам (11-32) значения выхода объекта при возмущающем воздействии в виде прямоугольных колебаний с единичной амплитудой и выбранным периодом:  $z_0 = -0,34$ ,  $z_1 = -1,1$ ,  $z_2 = -0,66$ .

Соответствующие графики приведены на рис. П-4. С помощью формул (11-27) (11-26) вычисляются значения коэффициентов  $a_1$  и  $b_1$  и определяются модуль и аргумент вектора искомой характеристики

$$b_1 = \frac{1}{3} \left[ -0,34 + \frac{1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times (-1,1) - \frac{1}{2} (-0,66) - \right.$$

$$\left. -0,34 - \frac{1}{2} (1,1) + \frac{1}{2} (0,66) \right] = -0,373;$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} (-0,66 - 1,1 - 1,1 - 0,66) = -0,99;$$

$$A = \frac{\sqrt{(-0,373)^2 + (-0,99)^2}}{1,27} = 1,01;$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{-0,373}{-0,99} = 159^\circ 30'.$$

Таблица П-2

$T, \text{сек}$	$\omega, \text{1/сек}$	$A$	$\varphi, \text{град}$
420	0,01495	2,1	-87
300	0,0209	1,71	-120
240	0,0262	1,40	-145
210	0,0295	1,01	-160
180	0,0349	0,684	-190
150	0,042	0,41	-205
120	0,0524	0,34	-228

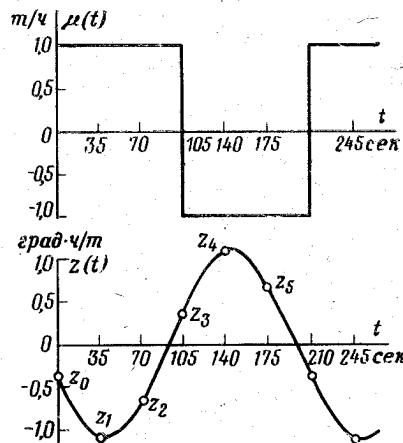


Рис. П-4.

Результаты подобных расчетов для нескольких других значений  $T$  приведены в табл. П-2. Построенный по этим данным годограф частотной характеристики объекта приведен на рис. П-3 (сплошная кривая).

### 4. Расчет оптимальных параметров ПИ-регулятора по частотной характеристике объекта (§ 7-3)

Необходимые построения, выполненные по частотной характеристике объекта  $W_a(j\omega)$ , определяемой формулой (П-1), для значений постоянной интегрирования регулятора  $T_{н} = 45, 60$  и  $120 \text{ сек}$  приведены на рис. П-5.

Задавшись расчетной величиной  $M = 1,6$ , получим величину угла  $\gamma = 38^\circ$ , под которым проводится луч  $OE$ . Для  $T_{н} = 120 \text{ сек}$  радиус

окружности, касающейся указанного луча и частотной характеристики разомкнутой системы, оказался равным  $r=1,96$  град·ч/т. Поэтому предельно допустимая величина коэффициента передачи (7-22)  $k_p = 1/1,96 = 0,51$  т/град·ч.

Подобным же образом определяются предельные значения коэффициента передачи регулятора и для других выбранных значений  $T_u$ . Граница области заданного запаса устойчивости, полученная

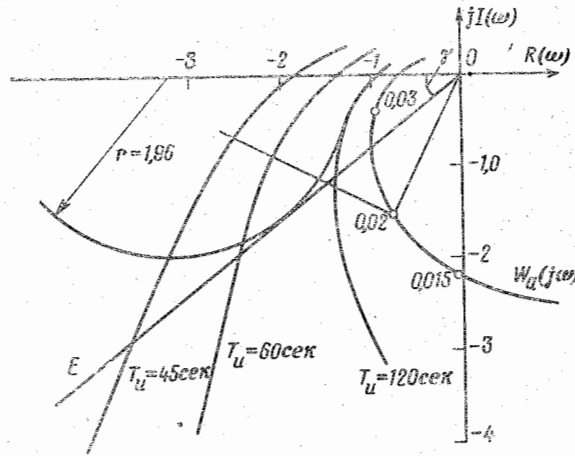


Рис. П-5.

в результате таких расчетов, приведена на рис. П-6 сплошной линией. Как видно из этого графика, оптимальные значения параметров настройки регулятора при низкочастотных возмущениях равны:

$$k_{p, \text{опт}} = 0,31 \text{ т/град} \cdot \text{ч}; T_{и, \text{опт}} = 60 \text{ сек.}$$

Границы той же области, построенные для частотных характеристик объекта, расположенных вдоль границ доверительного интервала  $W_a(j\omega)$ , показаны на рис. П-6 штрих-пунктирными линиями. Соответственно оптимальная настройка регулятора, учитывающая погрешность в исходном задании свойств объекта, будет определяться следующими числами:

$$k_{p, \text{опт}} = 0,27 \text{ т/град} \cdot \text{ч}; T_{и, \text{опт}} = 57 \text{ сек.}$$

Таким образом, если бы была уверенность, что исходная характеристика объекта задана без погрешностей, средне-

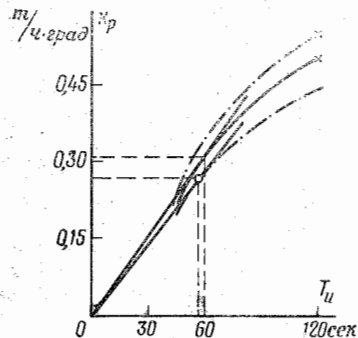


Рис. П-6.

квадратичную ошибку регулирования можно было бы уменьшить примерно на 9%.

### 5. Расчет оптимальных значений параметров настройки ПИД-регулятора (§ 7-4)

На рис. П-7 показаны необходимые построения для определения параметров настройки ПИД-регулятора при  $\alpha=2,0$ , по которым обычным порядком строится граница области заданного запаса устойчивости (рис П-8) и находятся:  $k_{p, \text{опт}}=1,03$  т/град·ч и  $T_{и, \text{опт}}=28,5$  сек.

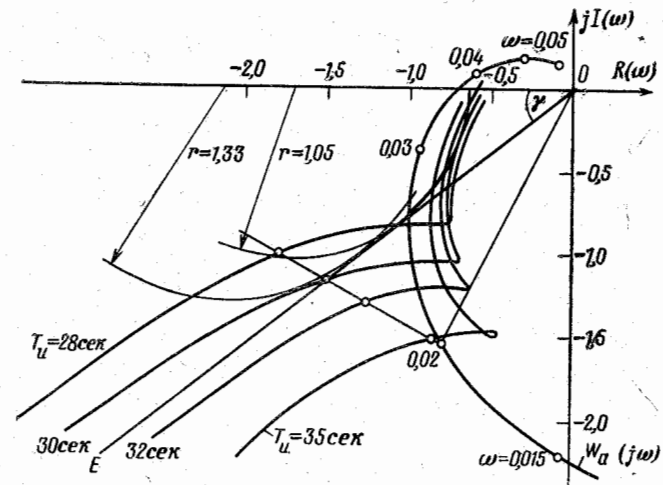


Рис. П-7.

После проведения аналогичных расчетов для других значений  $\alpha=0,25; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5$  по построенной зависимости  $(k_p/T_{и})_{\text{макс}} = f(\alpha)$  (рис. П-9) определяется значение  $\alpha$ , соответствующее наи-

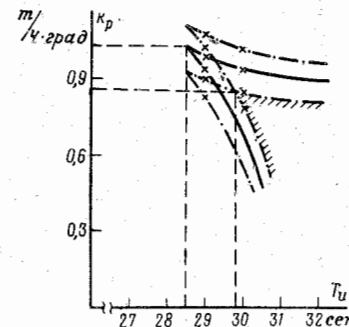


Рис. П-8.

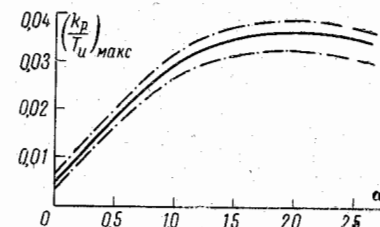


Рис. П-9.

большей величине отношения  $(k_p/T_{ин})_{\max}$ . Из рис. П-9 видно, что  $\alpha_{\text{опт}}=2,0$ , т. е.  $T_{д.\text{опт}}=57$  сек. Это же значение сохраняется и при учете возможных вариаций параметров объекта, что следует из соответствующих кривых, показанных на рис. П-9 штрих-пунктиром.

Оптимальные значения параметров настройки ПИД-регулятора, учитывающие возможные вариации параметров объекта в пределах границ доверительных интервалов частотной характеристики, равны:  $k_{p.\text{опт}}=0,86$  т/град·ч;  $T_{и.\text{опт}}=29,8$  сек,  $T_{д.\text{опт}}=59,6$  сек.

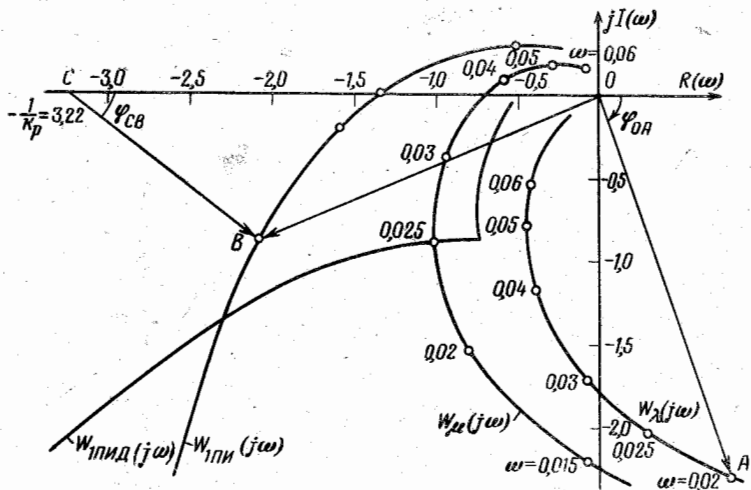


Рис. П-10.

Таким образом, наличие точной информации о динамике объекта позволило бы уменьшить среднеквадратичную ошибку регулирования примерно на 20%.

#### 6. Построение графиков процессов регулирования при оптимальной настройке регуляторов (§ 7-5)

В качестве расчетного возмущающего воздействия выберем возмущение паровой нагрузкой котла. Частотная характеристика объекта по этому каналу может быть представлена следующим выражением:

$$W_{\lambda}(p) = \frac{3,62}{(40p + 1)(30p + 1)}$$

На рис. П-10 приведены годограф этой характеристики, а также годографы характеристик разомкнутой системы для ПИ— $W_{\text{ПИ}}(j\omega)$  и ПИД— $W_{\text{ПИД}}(j\omega)$  регуляторов при найденных оптимальных значениях параметров настройки регуляторов для единичного значения  $k_p$ .

Результаты расчетов частотных характеристик для системы с ПИ-регулятором, представленные в табл. П-3, выполнены по формулам

$$A(\omega) = \frac{OA}{CBk_p}; \quad \varphi(\omega) = \varphi_{OA} - \varphi_{CB},$$

где  $OA, CB$  — модули, а  $\varphi_{OA}, \varphi_{CB}$  — аргументы векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{CB}$ .

Таблица П-3

$\omega$	0	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,04	0,05
$OA$	3,62	3,22	2,83	2,41	2,045	1,725	1,23	0,9
$CB$	$\infty$	4,32	2,29	1,5	1,7	2,09	2,76	3,04
$\varphi_{OA}, \text{град}$	0	-38	-55	-70	-82	-92	-108	-120
$\varphi_{CB}, \text{град}$	-90	-87	-70	-35	-6	+3	+9	+9
$A_{\gamma}$	0	2,4	3,98	5,22	4,0	2,6	1,64	1,1
$\varphi_{\gamma}, \text{град}$	90	49	15	-35	-76	-95	-117	-129

По этим данным на рис. П-11 построены амплитудные и фазовые частотные характеристики замкнутой системы с ПИ— (кривые  $A_{\text{ПИ}}$  и  $\varphi_{\text{ПИ}}$ ) и ПИД-регуляторами (кривые  $A_{\text{ПИД}}$  и  $\varphi_{\text{ПИД}}$ ). Из графика амплитудной частотной характеристики  $A_{\text{ПИ}}$  находится резонансная

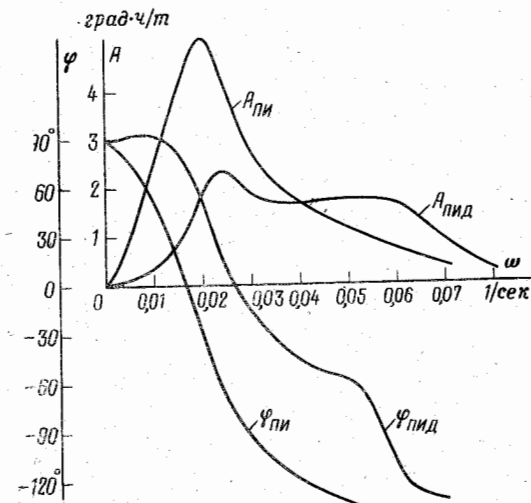


Рис. П-11.

частота системы с ПИ-регулятором  $\omega_{рез} \approx 0,02$  1/сек, и следовательно, частоты необходимых гармоник разложения выбираем равными:  $\omega_1=0,00286$  1/сек;  $\omega_3=0,0086$  1/сек;  $\omega_5=0,0143$  1/сек;  $\omega_7=0,02$  1/сек;  $\omega_9=0,0257$  1/сек;  $\omega_{11}=0,0314$  1/сек;  $\omega_{13}=0,0372$  1/сек.

Значения амплитудной и фазовой частотных характеристик, а также значения вещественной и мнимой характеристик для этих частот, вычисленные по формулам

$$R(\omega_k) = A(\omega_k) \cos \varphi(\omega_k);$$

$$J(\omega_k) = A(\omega_k) \sin \varphi(\omega_k),$$

приведены в табл. П-4.

Таблица П-4

k	$\omega_k$	A ПИ	$\varphi$ ПИ, град	$R(\omega_k)$	$J(\omega_k)$	$r_k$	$j_k$
1	0,00286	0,47	83	0,057	0,466	0,057	0,466
3	0,0086	2,0	61	0,97	1,75	0,323	0,583
5	0,0143	3,8	20	3,57	1,3	0,714	0,26
7	0,0200	5,2	-35	-4,26	-2,98	0,709	-0,426
9	0,0257	3,84	-78	0,8	-3,76	0,089	-0,417
11	0,0314	2,5	-100	-0,435	-2,46	-0,04	-0,224
13	0,0372	1,87	-114	-0,776	-1,7	-0,06	-0,131

Проверяем возможность ограничения в формулах (7-42) семью слагаемыми:

$$y_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^7 j_k = 0,07,$$

что удовлетворяет точности расчета.

Интервал вычисления графика переходного процесса

$$\Delta t = \frac{14 \pi}{48 \omega_{рез}} = 45 \text{ сек.}$$

Результаты расчетов, выполненные по формулам (7-42), приведены в табл. П-5, а график переходного процесса — на рис. П-12.

Результаты аналогичных расчетов для ПИД-регулятора при  $\omega_1=0,005$  1/сек,  $\Delta t=26$  сек приведены в табл. П-6.

Таблица П-5

t, сек	0	45	90	135	180	225	270
y(t)	0,07	1,14	2,16	1,8	0,52	-0,40	-0,81

Продолжение

t, сек	315	360	405	450	495	540
y(t)	-0,445	-0,068	0,16	0,17	0,05	-0,122

Таблица П-6

t, сек	0	26	52	68	104	130	156
y(t)	0,05	0,480	0,928	0,487	0,08	-0,21	-0,342

Продолжение

t, сек	182	208	234	260	286	312
y(t)	-0,345	-0,264	-0,168	0,082	0,162	0,172

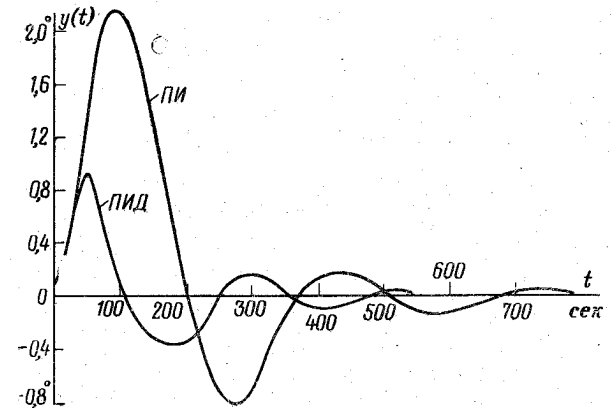


Рис. П-12.

### 7. Расчет оптимальных значений параметров настройки каскадной системы регулирования с введением добавочной регулируемой величины — температуры пара непосредственно за пароохладителем (§ 9-3)

Обработка экспериментальных характеристик объекта по каналу действия  $\mu(t)$  на добавочную регулируемую величину  $z(t)$  (см. рис. 9-5 и П-1) показала, что оператор этого канала определяется выражением

$$W_{\mu z}(p) = \frac{2,49(80p + 1)}{(100p + 1)(10p + 1)}$$

Обычно в рассматриваемом случае используется схема регулирования с дифференциатором (см. рис. 9-1,а).

По годографу частотной характеристики эквивалентного объекта  $W_{\mu z}(j\omega)$ , построенному по формуле (9-28), обычным порядком выполняется расчет оптимальных параметров настройки эквивалентного ПИ-регулятора:  $k_{р.в.опт} = 0,825$  град·ч/т;  $T_{и.в.опт} = 51$  сек.

Оптимальные параметры настройки дифференциатора в каскадной системе регулирования:  $k_{д.опт} = 1,21$  т/град·ч и  $T_{д.опт} = 51$  сек.

Годограф частотной характеристики эквивалентного объекта для расчета оптимальных значений параметров регулятора  $W_{\mu z}^p(j\omega)$ , построенный по формуле (9-37), приведен на рис. П-13. Из этого графика непосредственно видно, что при использовании идеального ПИ-регулятора имеется возможность установить в нем сколь угодно большой коэффициент передачи и, следовательно, получить систему, полностью устраняющую действие возмущений, идущих со стороны регулирующего органа. Практически отыскание действительного значения параметров настройки в этих случаях приходится откладывать на период наладки системы на действующем объекте, когда можно учесть реальные свойства используемой аппаратуры регулирования.

### 8. Расчет системы с компенсацией возмущения (§ 9-4)

Амплитудно-фазовая характеристика  $W_{\lambda}(j\omega)$  объекта по каналу действия рассматриваемого возмущения была приведена выше (см. рис. П-10).

Годограф идеальной частотной характеристики компенсирующего устройства  $W_{\mu z}^{ид}(j\omega)$ , построенный по формуле (9-43), приведен на рис. П-14. Ограничимся выбором компенсирующего устройства из условий наилучшего совпадения характеристик реальной и идеальной систем при резонансной и нулевой частотах. Если в основном контуре регулирования используется ПИ-регулятор, то, как следует из рис. П-5, при оптимальной настройке этого регулятора резонансная частота системы будет равна  $0,018$  1/сек. На рис. П-14 соответствующая точка характеристики  $W_{\mu z}^{ид}(j\omega)$  обозначена буквой С. Следовательно, в качестве простейшего компенсирующего устройства можно выбрать реальное дифференцирующее звено, частотная характеристика которого  $W_d(j\omega)$  представляет собой полуокружность, проходящую через начало координат и точку С. Диаметр этой окружности оказался равным  $12$  град·ч/т. Это число и определяет оптимальное значение коэффициента передачи дифференциатора:  $k_d = 12$  град·ч/т.

Простейший расчет показывает, что для того, чтобы при указанном значении  $k_d$  частотная характеристика дифференциатора проходила через точку С при  $\omega = 0,018$  1/сек, постоянная времени дифференциатора должна быть равной  $T_d = 5,1$  сек.

### 9. Расчет оптимальной настройки цифровых регуляторов (§ 8-7)

Рассмотрим выбор алгоритма вычислительного устройства цифровых регуляторов для одноконтурной схемы регулирования рассматриваемого объекта.

**И-регулятор.** При выборе вычислительного устройства (8-48) и выполнении условия (8-41) оператор регулятора (8-39) будет совпадать с оператором непрерывного И-регулятора (6-13). Годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы при единичном значении коэффициента передачи этого регулятора

$$W_1(j\omega) = \frac{3,32}{j\omega(j\omega 55 + 1)(j\omega 22 + 1)^2}$$

приведен на рис. П-15. Радиус окружности, касающейся одновременно амплитудно-фазовой характеристики и линии  $OE$ , оказался равным

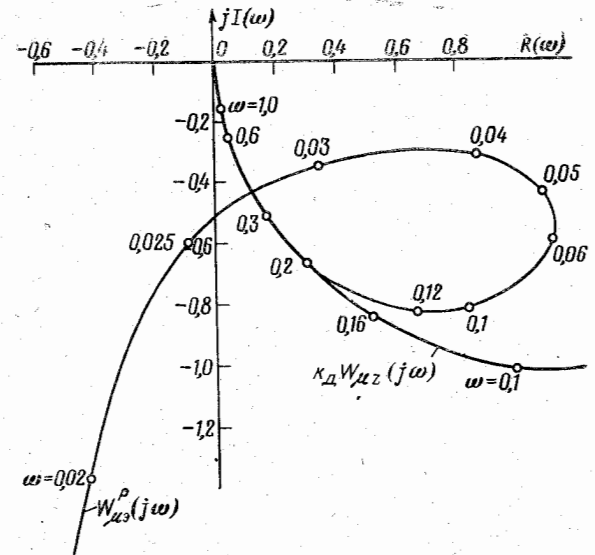


Рис. П-13.

400. В соответствии с формулой (7-22) предельно допустимое по условию сохранения системой запаса устойчивости (при  $M=1,6$ ) значение коэффициента передачи регулятора  $0,0025$  т/град·ч. Поскольку

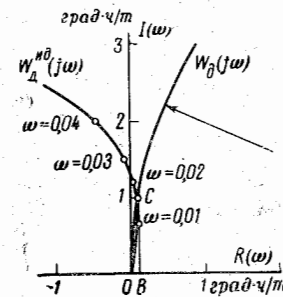


Рис. П-14.

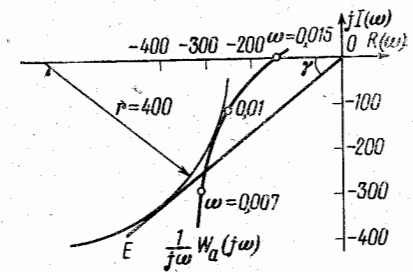


Рис. П-15.

амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы в рассматриваемом случае не зависит от периода квантования, граница области заданного запаса устойчивости в плоскости двух параметров настройки регулятора  $k_{рн}$  и  $T$  будет определяться прямой, параллельной оси  $T$  (рис. П-16, прямая 1).

Перейдем к определению предельно допустимых значений  $k_{рн}$  и  $T$ , при которых еще выполняется условие отсутствия пульсаций

квантования. Условие (8-67) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\left| \frac{3,32k_{p,прИ}}{j\frac{\pi}{T_{пр}} \left( j\frac{\pi}{T_{пр}} 55 + 1 \right) \left( j\frac{\pi}{T_{пр}} 22 + 1 \right)^3} \right| = \Delta,$$

т. е.

$$k_{p,прИ} = \frac{\pi\Delta}{3,32T_{пр}} \sqrt{\left( 1 + \frac{55^2\pi^2}{T_{пр}^2} \right) \left( 1 + \frac{22^2\pi^2}{T_{пр}^2} \right)^3}.$$

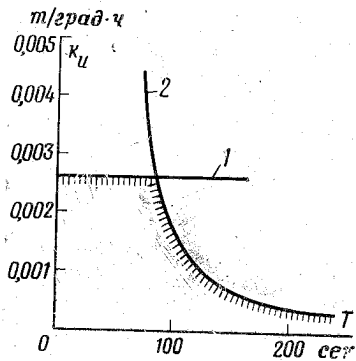


Рис. П-16.

На рис. П-16 этой зависимости для  $\Delta=0,05$  соответствует кривая 2. Область, в которой одновременно выполняется как условие сохранения требуемого запаса устойчивости, так и условие отсутствия пульсаций квантования на рис. П-16 заштрихована. Легко показать, что наибольшей достижимой точности работы системы регулирования соответствует установка в регуляторе наибольшего допустимого значения его коэффициента передачи, т. е. граница указанной области при заданном  $T$  определяет оптимальное значение этого коэффициента. Интересной особенностью рассмотренной системы является то, что при увеличении периода квантования от нуля вплоть до величины, равной 86 сек, точность работы системы остается практически неизменной (совпадает с точностью работы системы с непрерывным И-регулятором). Столь большое возможное увеличение периода квантования без потери точности регулирования объясняется относительно очень малыми скоростями протекания переходных процессов в системе. График процесса регулирования в рассматриваемой системе для  $T=86$  сек при единичном ступенчатом воздействии приведен на рис. П-17.

**П-регулятор.** Если вычислительное устройство регулятора имеет оператор, определяемый формулой (8-56), амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы регулирования в соответствии с (8-57) при единичном значении  $k_p$  будет определяться формулой

$$W(j\omega) = \frac{3,32}{(j\omega 55 + 1)(j\omega 22 + 1)^3} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T}.$$

Поскольку

$$\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} = \frac{\sin \frac{T}{2} \omega}{\frac{T}{2} \omega} e^{-j\frac{T}{2} \omega},$$

при малых значениях  $T$  эта формула может быть заменена более простой приближенной

$$W(j\omega) \approx \frac{3,32e^{-j\frac{T}{2} \omega}}{(j\omega 55 + 1)(j\omega 22 + 1)^3},$$

т. е. квантование сигнала эквивалентно введению в контур регулирования запаздывания, равного половине периода квантования, что, естественно, не может не сказаться на достижимой точности регулирования.

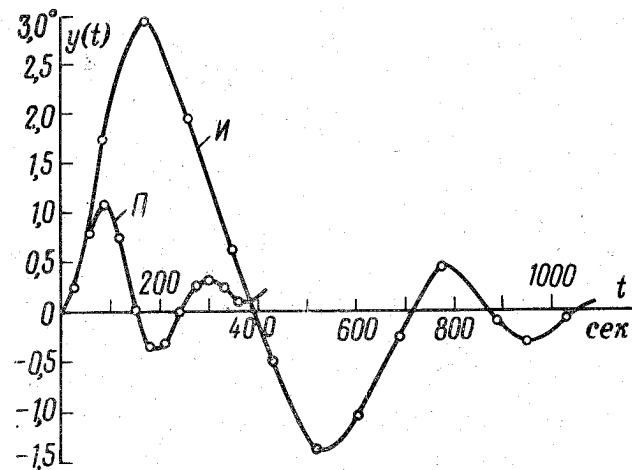


Рис. П-17.

Семейство годографов амплитудно-фазовых характеристик разомкнутой системы, построенных по приведенной формуле для нескольких значений  $T$ , показано на рис. П-18. После обычной их обработки (см. § 7-3) можно получить границу области заданного запаса устойчивости в плоскости параметров  $T$  и  $k_{pI}$ , которая для  $M=1,6$  приведена на рис. П-19 (кривая 1).

Условие малости ошибки квантования (8-67) записывается следующим образом:

$$\left| \frac{3,32k_{p,прП}}{\left( j\frac{\pi}{T_{пр}} 55 + 1 \right) \left( j\frac{\pi}{T_{пр}} 22 + 1 \right)^3} \right| \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \Delta,$$

т. е.

$$k_{p,пр} = \frac{\pi\Delta}{2 \cdot 3,32} \sqrt{\left( 1 + \frac{55^2\pi^2}{T_{пр}^2} \right) \left( 1 + \frac{22^2\pi^2}{T_{пр}^2} \right)^3}.$$

График этой зависимости для  $\Delta=0,005$  показан на рис П-19 (кривая 2).

Область, в которой выполняются оба ограничения на величину параметров настройки, на рис. П-19 заштрихована. Легко видеть, что наибольшей динамической точности работы системы в рассматриваемом случае соответствует точка в этой области, соответствующая наибольшей допустимой величине коэффициента передачи регулятора, т. е. работа регулятора с периодом квантования, близ-

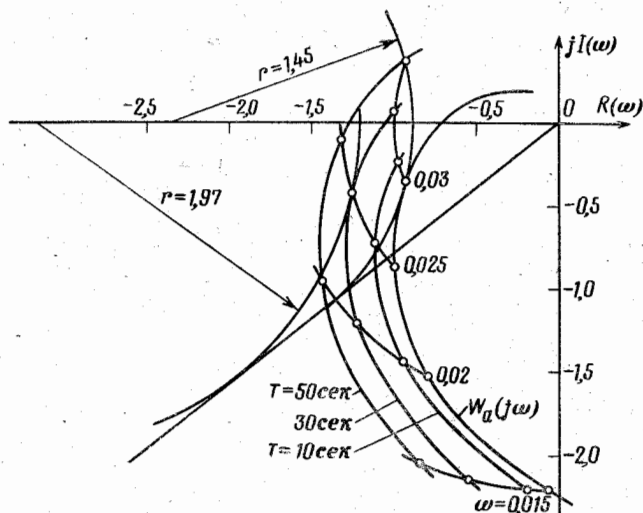


Рис. П-18.

ким к нулю. С увеличением периода квантования допустимая величина коэффициента передачи уменьшается, причем вначале превалирующим оказывается условие сохранения систем и требуемого запаса устойчивости. Задавшись величиной допустимого уменьшения коэффициента передачи регулятора по сравнению с непрерывным регулятором (при  $T=0$ ), можно, используя полученный график, определить максимально допустимую величину периода квантования. Например, если потребовать, чтобы при переходе от аналогового к цифровому П-регулятору ухудшение точности регулирования составляло не более 10%, из этого графика можно определить, что период квантования не должен превышать 8 сек. Столь сильное сокращение допустимой величины периода квантования по сравнению с рассмотренной выше системой с И-регулятором объясняется, во-первых, тем, что цифровой регулятор лишь приблизительно реализует требуемый П-закон регулирования, а во-вторых, тем, что П-регулятор обеспечивает намного более быстрое протекание переходных процессов в системе, чем И-регулятор (соответствующий график процесса регулирования показан на рис. П-17).

### 10. Расчет настройки импульсного регулятора с амплитудной модуляцией (§ 8-8)

Поскольку оператор импульсного регулятора без корректирующих устройств определяется формулой (8-84), амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы регулирования в этом случае будет иметь вид:

$$W(j\omega) = \frac{3,32 k_{p.и} (1 - e^{-j\tau_u \omega})}{\tau_{и} (j55\omega + 1) (j22\omega + 1)^2 (j\omega)^2}$$

Семейство годографов этих характеристик для единичного коэффициента передачи  $k_{и}=1$  и различных значений  $\tau_{и}$  показано на рис. П-20. По этим характеристикам обычным порядком находятся значения предельного (по соображению сохранения системой тре-

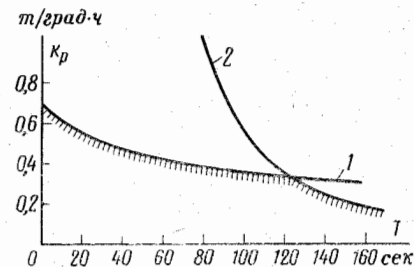


Рис. П-19.

буемого запаса устойчивости) коэффициента передачи  $k_{и}$  для каждого из выбранных значений  $\tau_{и}$ . Соответствующие прямые в плоскости параметров  $k_{и}$  и  $T$  приведены на рис. П-21 (семейство прямых 1).

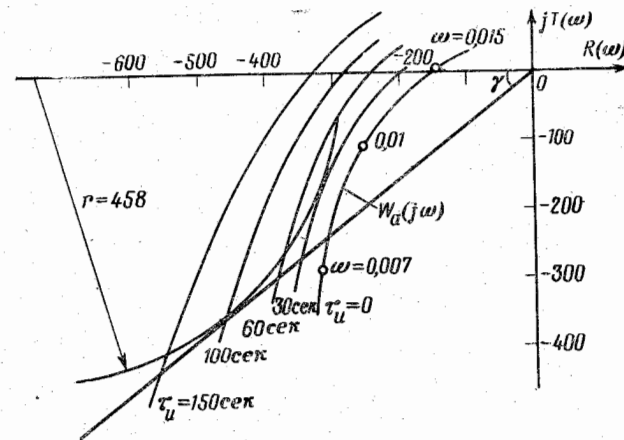


Рис. П-20.

Условие отсутствия пульсаций квантования (8-85) здесь принимает вид:

$$k_{н.пр} = 0,303\Delta \frac{\frac{\tau_{и}}{T_{пр}} \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\tau_{и}}{T_{пр}} \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{T_{пр}} \times \sqrt{\left(55^2 \frac{\pi^2}{T_{пр}^2} + 1\right) \left(22^2 \frac{\pi^2}{T_{пр}^2} + 1\right)^3}$$

Графики, построенные по этой зависимости для различных (по тем же, что и на рис. П-20) значений  $\tau_{и}$  при  $\Delta=0,05$ , приведены также на рис. П-21 (семейство кривых 2).

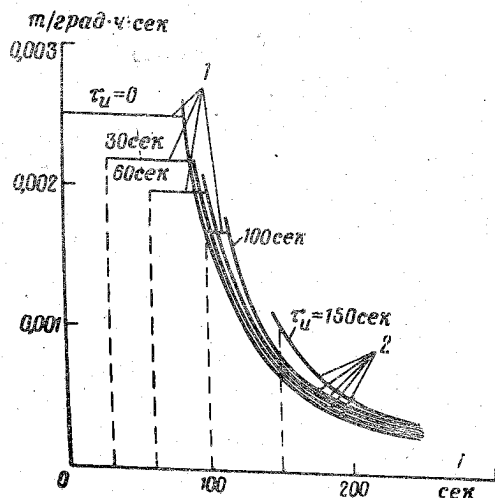


Рис. П-21.

Так, если остановиться на длительности импульса  $\tau_{и}=30$  сек, то оптимальное значение коэффициента передачи регулятора должно быть равным  $k_{н}=0,0022$  т/град·ч·сек, период квантования в этом случае может выбираться любым, в пределах от  $T=30$  сек до  $T=90$  сек. В зависимости от выбранной величины  $T$  коэффициент амплитудной модуляции будет определяться соотношением (8-86).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. М., «Энергия», 1965.
2. Розенфельд А. С., Яхинсон Б. И. Переходные процессы и обобщенные функции. М., «Наука», 1966.
3. Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. Переходные процессы в линейных системах. М., Физматгиз, 1961.
4. Греневский Г. Кибернетика без математики. М., «Советское радио», 1964.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. М., Физматгиз, 1963.
6. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. «Наука», 1968.
7. Дудников Е. Г. Основы автоматического регулирования тепловых процессов. М., Госэнергоиздат, 1956.
8. Ротач В. Я. Расчет настройки промышленных систем регулирования. М., Госэнергоиздат, 1961.
9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
10. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.
11. Булгаков Б. В. Колебания. М., ГИТТЛ, 1954.
12. Харкевич А. А. О ценности информации.— «Проблемы кибернетики», 1960, вып. 4.
13. Стратонович Р. Л. О ценности информации.— «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1965, № 5.
14. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М., «Наука», 1967.
15. Ицкович Э. Л., Трахтенгерц Э. А. Алгоритмы централизованного контроля и управления производством. М., «Советское радио», 1967.
16. Дуэль М. А. Автоматическое управление блочными энергоустановками с применением вычислительных машин. Киев, «Техніка», 1969.
17. Плетнев Г. П. Автоматическое регулирование и защита теплоэнергетических установок электрических станций. М., «Энергия», 1970.
18. Балакирев В. С., Дудников Е. Г., Цирилин А. М. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М., «Энергия», 1967.
19. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1966.
20. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., «Наука», 1966.
21. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., «Наука», 1967.
22. Чувствительность автоматических систем.— Труды Международного симпозиума по чувствительности систем автоматического управления. М., «Наука», 1968.
23. Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М., Физматгиз, 1963.
24. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
25. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М., Госэнергоиздат, 1962.



26. Хутский Г. И. Приспосабливающиеся системы автоматического управления для тепловых электрических станций. Минск, «Наука и техника», 1968.
27. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1958.
28. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М., Машгиз, 1962.
29. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
30. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964.
31. Ротач В. Я. Импульсные системы автоматического регулирования. М., «Энергия», 1964.
32. Ротач В. Я., Ланина М. А. К вопросу о выборе алгоритмов работы цифровых автоматических регуляторов тепловых процессов.— Доклады научно-технической конференции МЭИ. М., изд. МЭИ, 1965.
33. Ольденбург Р. Пропорциональное шаговое регулирование как средство получения оптимального процесса регулирования в системах с постоянным запаздыванием.— В кн.: Автоматическое регулирование. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
34. Копелович А. П. Инженерные методы расчета при выборе автоматических регуляторов. М., Металлургиздат, 1960.
35. Ротач В. Я., Стафейчук Б. Г. Импульсное регулирование объектов с запаздыванием.— «Известия вузов. Энергетика», 1966, № 6.
36. Стефани Е. П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1960.
37. Урсул А. Д. Природа информации. М., Политгиздат, 1968.
38. Фалькович В. Н. Динамические характеристики электронных регуляторов РПИБ.— «Приборостроение», 1968, № 5.
39. Ротач В. Я., Хаджийски М. Б. Синтез информационных систем косвенного действия.— «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1966, № 3.
40. Акофф Р. А. О природе систем.— «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1971, № 3.
41. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.
42. Смирнов Н. В., Дуин-Барковский И. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., Физматгиз, 1959.
43. Веселова Г. П., Грибанов Ю. И. Об оптимальном шаге выборки при вычислении корреляционных функций случайных процессов на цифровых вычислительных устройствах.— «Автоматика и телемеханика», 1968, № 12.
44. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М., Физматгиз, 1963.
45. Gaupe A. C. The distribution of the variance ratio in random samples of any size drawn from non-normal invariables.— «Biometrika», 1950, v. 37.
46. Виленкин С. Я. Статистические методы исследования систем автоматического регулирования. М., «Советское радио», 1967.
47. Ицкович Э. Л. Статистические методы при автоматизации производства. М., «Энергия», 1964.
48. Клоков Ю. Л., Журавлев Л. В. Метод оценки условного времени затухания корреляционных функций некоторого класса случайных процессов.— «Автоматика и телемеханика», 1965, № 10.
49. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления. Под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1965.
50. Солодовников В. В., Усков А. С. Статистический анализ объектов регулирования. М., Машгиз, 1960.
51. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Адаптивные модели в системах управления. М., «Советское радио», 1966.
52. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Области применения различных методов идентификации.— «Автоматика и телемеханика», 1969, № 6.
53. Милсум Д. Анализ биологических систем управления. М., «Мир», 1968.
54. Ротач В. Я., Хаджийски М. Б. О синтезе систем автоматического регулирования производственных процессов.— «Автоматика и телемеханика», 1966, № 9.
55. Сергиевская Е. Н. Определение оптимальных настроек электронных регуляторов.— «Теплоэнергетика», 1957, № 3.
56. Ротач В. Я., Носков А. И. Определение передаточной функции регулируемого объекта по его временной характеристике.— «Известия вузов. Энергетика», 1965, № 1.
57. Давыдов Н. И., Дудникова И. П., Дудник в С. Г. Методика определения частотных характеристик промышленных объектов регулирования. М., «Теплоэнергетика», 1956, № 9.
58. Ротач В. Я. К вопросу о выборе оптимального опорного сигнала в оценке корреляционных функций возмущений при идентификации САР.— Доклады научно-технической конференции МЭИ. Автоматизация производственных процессов. М., изд. МЭИ, 1969.
59. Ротач В. Я., Хаджийски М. Б., Пикина Г. А., Каримов Р. Н. Практические вопросы идентификации тепловых объектов. Автоматизация производственных процессов. Доклады научно-технической конференции МЭИ. М., изд. МЭИ, 1967.
60. Davies W. Random signal testing for evaluating system dynamics.— «Wireless World», 1966, 72, № 8.
61. Briggs M. A., Godfrey K. R., Hammond P. H. Estimation of process dynamic characteristics by correlations methods. Using pseudo random signals. Preprints of the IFAC Symposium. Prague, 1967.
62. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
63. Ротач В. Я., Арленинов И. К. О реализации оптимальных по Винеру регуляторов с учетом случайных вариаций параметров объекта.— Доклады научно-технической конференции МЭИ. Автоматизация производственных процессов. М., изд. МЭИ, 1969.
64. Ротач В. Я., Кузицин В. Ф. Итерационные алгоритмы настройки и самонастройки систем автоматического регулирования тепловых процессов.— «Теплоэнергетика», 1968, № 12.
65. Ротач В. Я. К вопросу об определении амплитудно-фазовых характеристик регулируемого участка.— «Теплоэнергетика», 1957, № 10.
66. Ротач В. Я. Экспериментальное определение частотных характеристик участков регулирования путем включения их в нелинейную автоколебательную систему.— «Известия вузов. Электромеханика и автоматика», 1958, № 4.
67. Ротач В. Я., Беляев Г. Б., Плетнев Г. П. Определе-

ние частотных характеристик промышленных объектов регулирования с помощью полуавтоматической аппаратуры.— В кн.: Теплосиловое оборудование. М., Изд. ЦИТЭИ.

68. Метод Гольдфарба в теории регулирования. Под ред. Я. З. Ципкина. М., Госэнергоиздат, 1962.

69. Ziegler J., Nichols N. Optimum settings for automatic controllers.— Trans. ASME, 1942, vol. 64.

70. Приспосабливающиеся автоматические системы. Под ред. Э. Мишкина и Л. М. Брауна. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

71. Кунцевич В. М. Испульные самонастраивающиеся и экстремальные системы автоматического управления. Киев, Техніка, 1966.

72. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.

73. Рубашкин С. А. Исследование типовой системы автоматического регулирования питания и топлива пылеугольных прямоточных котлов. Канд. дисс. М., ВТИ им. Ф. Э. Дзержинского, 1968.

74. Лейкин С. И. К вопросу о выборе оптимальных параметров настройки промышленных САР.— Доклады научно-технической конференции ЛТИ им. Ленсовета. Л., изд. ЛТИ, 1966.

75. Ротач В. Я., Кузищин В. Ф. Реализация принципов адаптации в тепловых системах автоматического регулирования.— Доклады научно-технической конференции МЭИ. Автоматизация производственных процессов. М., изд. МЭИ, 1967.

76. Ротач В. Я., Кузищин В. Ф. Об алгоритмах оптимизации и идентификации САР производственных процессов.— Доклады научно-технической конференции МЭИ. Автоматизация производственных процессов. М., изд. МЭИ, 1969.

77. Ротач В. Я. Расчет настроек регуляторов по динамическим характеристикам системы регулирования.— Труды МЭИ, М.— Л., Госэнергоиздат, 1957, т. XXIX.

78. Ротач В. Я. Об одном принципе построения простейших самонастраивающихся регуляторов.— «Известия вузов. Электромеханика и автоматика». 1958, № 1.

79. Ротач В. Я., Кузищин В. Ф. Устройство для настройки систем автоматического регулирования. Авт. свид. № 253207.— Бюлл. изобрет., 1969, № 30.

80. Кузищин В. Ф., Фалькович В. Н. Аппаратура для получения частотных характеристик и оптимизации САР с электронными регуляторами.— Сборник докладов НТК МЭИ. М., изд. МЭИ, 1969.

81. Волгин В. В. Выбор структуры и параметров устройств компенсации промышленных комбинированных систем регулирования при низкочастотных возмущениях.— «Приборостроение», № 1, 1966.

82. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М., «Энергия», 1970.

83. Ицкович Э. Л., Цатурова И. А. Выбор параметров реализации случайного стационарного процесса при расчете оценки его корреляционной функции.— «Автоматика и телемеханика», 1969, № 2.

84. Волгин В. В., Каримов Р. Н. О выборе длины реализации при вычислении корреляционной функции по экспериментальным данным случайных процессов.— «Автоматика и телемеханика», 1967, № 6.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------	---

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

#### *Линейные автоматические системы регулирования*

Глава первая. Дифференциальные уравнения линейных систем	13
1-1. Системы односторонней передачи воздействий	13
1-2. Линейные системы преобразования воздействий	19
1-3. Особенности решения дифференциальных уравнений линейных динамических систем	25
Глава вторая. Динамические характеристики линейных систем	34
2-1. Весовые и переходные характеристики динамических систем	34
2-2. Частотные характеристики динамических систем	38
2-3. Преобразования Фурье и Лапласа	42
2-4. Амплитудно-фазовые характеристики динамических систем	48
2-5. Вычисление реакции системы на заданное воздействие с помощью преобразования Фурье	52
2-6. Динамические характеристики элементарных динамических звеньев	55
Глава третья. Замкнутые динамические системы	62
3-1. Типовые структурные схемы систем	62
3-2. Устойчивость линейных динамических систем с обратной связью	67
3-3. Критерий устойчивости Найквиста	70
3-4. Автоколебания в замкнутых нелинейных динамических системах	75
Глава четвертая. Преобразование случайных воздействий линейными динамическими системами	83
4-1. Случайные величины	83
4-2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	85
4-3. Нормальный закон распределения	87
4-4. Функции случайной величины	90
4-5. Функции нескольких случайных величин	94

4-6. Математическое ожидание и дисперсия линейной функции нескольких случайных величин	100
4-7. Вероятностная зависимость	103
4-8. Характеристики случайных процессов	106
4-9. Преобразование случайных воздействий линейными динамическими системами	110
4-10. Преобразование случайных воздействий линейной стохастической системой	115
4-11. Синтез оптимальных динамических систем, минимизирующих среднеквадратичную ошибку	118

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### *Синтез систем регулирования по динамическим характеристикам объекта*

Глава пятая. Основные принципы построения автоматических систем регулирования	124
5-1. Обыкновенные и экстремальные системы регулирования	124
5-2. Динамическая точность систем регулирования	131
5-3. Принцип накопления возмущений	134
5-4. Обыкновенные и самонастраивающиеся регуляторы	140
5-5. Динамические характеристики систем регулирования	143
5-6. Предельная динамическая точность регулирования	147
Глава шестая. Алгоритмы функционирования промышленных регуляторов	154
6-1. Системы высокой предельной динамической точности регулирования	154
6-2. Типовые законы регулирования	158
6-3. Техническая реализация регуляторов	165
Глава седьмая. Расчет оптимальных параметров регуляторов по динамическим характеристикам объекта	174
7-1. Критерии оптимальной настройки регуляторов	174
7-2. Выбор параметров регуляторов в системах с высокой предельной динамической точностью при наличии ограничения на запас устойчивости	181
7-3. Графо-аналитический расчет оптимальных параметров регуляторов	185
7-4. Особенности расчетов систем с ПИД-регулятором	193
7-5. Анализ процессов регулирования при детерминированных воздействиях	198
7-6. Выбор алгоритма функционирования регуляторов при неточном задании свойств объекта	202
7-7. Определение алгоритмов функционирования регуляторов, работающих в широком диапазоне нагрузок объекта	205
Глава восьмая. Автоматические системы регулирования с цифровыми и импульсными регуляторами	208
8-1. Системы с цифровыми регуляторами	208

8-2. Модулированные последовательности дельта-импульсов	111
8-3. Системы преобразования последовательностей дельта-импульсов	217
8-4. Расчетная схема систем регулирования с цифровыми регуляторами	222
8-5. Системы с цифровыми регуляторами в режиме непрерывного регулирования	226
8-6. Алгоритмы вычислительных устройств цифровых регуляторов	230
8-7. Расчет оптимальных параметров настройки цифровых регуляторов	235
8-8. Системы регулирования с импульсными регуляторами	242
8-9. Особенности расчета систем регулирования с широтной модуляцией импульсов	248

### Глава девятая. Системы регулирования с добавочными информационными каналами

9-1. Способы повышения предельной динамической точности автоматических систем регулирования	253
9-2. Условия высокой предельной динамической точности систем с добавочными информационными каналами	261
9-3. Каскадные схемы регулирования	265
9-4. Системы с компенсацией возмущений	275
9-5. Системы косвенного регулирования	283
9-6. Многосвязные системы регулирования	287

## ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

### *Идентификация объектов и оптимизация настройки действующих автоматических систем регулирования*

Глава десятая. Элементы теории статистических оценок параметров	296
10-1. Понятие о статистических оценках	296
10-2. Оценка математического ожидания случайной величины	299
10-3. Оценка дисперсии случайной величины	305
10-4. Оценка корреляционного момента случайных величин	310
10-5. Оценка корреляционной функции стационарного случайного процесса	315
Глава одиннадцатая. Идентификация объектов регулирования	323
11-1. Активные и пассивные методы идентификации	323
11-2. Оценка переходных характеристик объектов	334
11-3. Перестроение переходных характеристик в частотные	341
11-4. Аппроксимация экспериментальных переходных характеристик объектов регулирования	344
	439

11-5. Приближенный расчет оптимальных параметров регуляторов непосредственно по переходной характеристике объекта . . . . .	351
11-6. Оценка корреляционных функций возмущений . . . . .	354
<b>Глава двенадцатая. Идентификация объектов в действующих автоматических системах регулирования . . . . .</b>	<b>356</b>
12-1. Особенности идентификации автоматических систем регулирования . . . . .	356
12-2. Оценка весовой характеристики системы регулирования . . . . .	363
12-3. Оценка весовой характеристики системы регулирования с помощью псевдослучайного сигнала . . . . .	366
12-4. Оценка частотных характеристик систем регулирования . . . . .	372
12-5. Определение частотных характеристик системы путем ее включения в нелинейный автоколебательный контур . . . . .	376
12-6. Определение частотных характеристик объекта изменением алгоритма функционирования регулятора . . . . .	379
<b>Глава тринадцатая. Итерационные методы оптимизации настройки действующих автоматических систем регулирования . . . . .</b>	<b>383</b>
13-1. Итерационные алгоритмы настройки систем регулирования . . . . .	383
13-2. Оптимизация настройки системы с оценкой на каждом шаге ее весовой или переходной характеристики . . . . .	387
13-3. Косвенные неэкстремальные показатели оптимальной настройки систем регулирования . . . . .	393
13-4. Оптимизация настройки системы с оценкой на каждом шаге одной точки частотной характеристики . . . . .	395
13-5. Сходимость итерационной процедуры настройки систем регулирования . . . . .	400
13-6. Оптимизация настройки системы с оценкой ее частотной характеристики при частоте резонанса . . . . .	404
13-7. Оптимизация настройки системы с помощью внешнего генератора колебаний . . . . .	410
13-8. Техническое обеспечение процедуры оптимизации настройки систем регулирования . . . . .	413
Приложение . . . . .	416
Литература . . . . .	433