

021.398
B67

БИБЛИОТЕКА
ПО
АВТОМАТИКЕ



В.В.ВОЛГИН
Р.Н.КАРИМОВ

ОЦЕНКА
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ
ФУНКЦИЙ
В ПРОМЫШЛЕННЫХ
СИСТЕМАХ
УПРАВЛЕНИЯ



КОНТРОЛЬНЫЕ ЛИСТЫ
СРОКОВ ВОЗВРАТА
КНИГА ДОЛЖНА БЫТЬ
ВОЗВРАЩЕНА НЕ ПОЗЖЕ
УКАЗАННОГО ЗДЕСЬ СРОКА

Кол-во. срок. выдач

3421 22/10/88

476/181 18.4.86

6/12-87 31/1

3313 6.5.88

6318/111-7

775

20

3313	01.03.89	А. Волгин
3313	18.06.89	А. Волгин
3313	01.10.89	А. Волгин
3313	01.04.90	А. Волгин
3313	20.11.81	А. Волгин

849645

Библиотека по автоматике
Выпуск 600
В. В. ВОЛГИН, Р. Н. КАРИМОВ

Призорову
Валентину
Александровичу
с глубоким уважением
4/11-79

ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОМЫШЛЕННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ



МОСКВА «ЭНЕРГИЯ» 1979

849645

БИБЛИОТЕКА
Моск. Энергетич. ин-та

621.398

ББК 22.172

В 67

УДК 681.5.015.75

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

И. В. Антик, Г. Т. Артамонов, А. А. Воронов, Л. М. Закс, В. К. Левин, В. С. Малов, В. Э. Низе, Д. А. Поспелов, И. В. Прангишвили, Ф. Е. Темников, Г. М. Уланов, Ю. М. Черкасов, А. С. Шаталов

Волгин В. В., Каримов Р. Н.

В 67 Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления. — М.: Энергия, 1979. — 80 с., ил. — (Б-ка по автоматике; Вып. 600.)

30 к.

В книге рассматривается круг вопросов, связанных с экспериментальными оценками статистических характеристик случайных процессов в промышленных системах управления. Основное внимание уделяется анализу методических погрешностей оценок корреляционных функций и планированию экспериментов по определению этих оценок при недостатке априорной информации об исследуемом случайном сигнале. Для восполнения априорной информации используются результаты обработки текущей информации, содержащейся в особых точках реализации случайного сигнала.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников, интересующихся корреляционными методами исследования случайных процессов в промышленных системах управления. Она может быть полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

В 30501-095
051(01)-79 181-79. 1502000000

ББК 22.172

6Ф6.5

Владимир Владимирович Волгин,

Равиль Нургалиевич Каримов

**ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ
В ПРОМЫШЛЕННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ**

Редактор Ю. Л. Клоков

Редактор издательства А. Н. Гусяцкая

Обложка художника А. А. Иванова

Технический редактор Н. М. Бякирева

Корректор Г. А. Полонская

ИБ № 1769

Сдано в набор 24.10.78

Подписано в печать 08.12.78

Т-19987

Формат 84×108¹/₃₂ Бумага типографская № 1 Гарн. шрифта литературная

Печать высокая Усл. печ. л. 4,2 Уч.-изд. л. 5,36

Тираж 600 экз. Заказ 861 Цена 30 к.

Издательство «Энергия», 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государствен-

ном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной

торговли. 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

© Издательство «Энергия», 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышение требований к эффективности технологических процессов диктует необходимость дальнейшего совершенствования систем управления. Ввиду того что сигналы в этих системах имеют вероятностную природу, решение поставленной задачи должно опираться на статистические методы.

Применение статистических методов при анализе и синтезе промышленных систем управления имеет сравнительно короткую историю, однако в настоящее время трудно указать те задачи управления, при решении которых не возникает необходимость в статистическом подходе. Важную роль в статистических задачах управления играют корреляционные функции: возмущающих и управляющих воздействий, помех измерения, величин и сложных показателей на выходе системы, изменения параметров объекта в пространстве и во времени и т. д. Так, при синтезе автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) необходимо в оценке корреляционных функций возникает практически на всех этапах — от предпроектного обследования до ввода в действие и для всех основных функций АСУ ТП.

На стадии исследования объекта управления оценки корреляционных функций необходимы при выборе тестовых сигналов, планировании эксперимента, оценке точности характеристик объекта.

На стадии опытно-промышленной эксплуатации АСУ ТП оценки корреляционных функций необходимы в задачах контроля (оценка точности интерполяции измеряемых величин и сложных показателей, а также выбор шага дискретности, синтез алгоритмов косвенного измерения, сигнализации нарушений технологического режима, диагностики состояния оборудования и измерительных каналов), в задачах автоматического регулирования (выбор схем и анализ качества регулирования, расчет настроек регуляторов с типовыми алгоритмами, синтез оптимальных алгоритмов), в задачах оптимизации (выбор алгоритмов оптимизации, интервала усреднения и шага дискретности критерия оптимизации, оценка эффективности), в задачах программного и логического управления (пуск, остановка агрегатов, коммутационные операции).

Как известно, промышленные случайные процессы обладают некоторыми общими свойствами, отличающими их от радиотехнических, акустических и других случайных процессов. Это дает возможность сформулировать понятие математической модели промышленного случайного процесса и на ее основе разработать конкретные методы планирования эксперимента, доведя их до практических рекомендаций, формул и номограмм. В предлагаемой книге решается эта задача. В книге рассмотрены также важные для инженеров по управлению технологическими объектами вопросы, как особенности

промышленных случайных процессов, методы априорной оценки их характеристик, статистические погрешности от дискретизации и ограниченной длины реализации для конкретных классов промышленных процессов, даны рекомендации по планированию эксперимента при анализе статистических характеристик этих случайных процессов, в частности по выбору априорных моделей и оценке их параметров, по выбору длины реализации на основе априорных моделей, по выбору шага дискретности по времени, по выбору времени осреднения для процессов, нестационарных по математическому ожиданию, по выбору метода выявления скрытых периодичностей.

К характерным особенностям книги можно отнести следующие:

1. В ней сформулировано и используется понятие модели промышленного случайного процесса, обладающей рядом характерных особенностей: определенным видом нестационарности, дифференцируемостью случайной компоненты, определенным видом ее спектральной плотности и т. д.

2. Предлагаемые в книге методики широко применяют априорную информацию о случайном процессе, отраженную в статистике его нулей и максимумов. Эта информация используется при выборе априорных моделей и оценке их параметров, при выборе шага дискретности и времени осреднения текущего среднего, при оценке дисперсии и корреляционной функции при малых сдвигах.

3. Рекомендации по исследованию характеристик промышленных случайных процессов представлены в виде формул, графиков и номограмм, удобных для практического применения и позволяющих получить оценки корреляционных функций с требуемой точностью и надежностью.

4. Книга содержит ряд практических примеров анализа промышленных случайных процессов в системах управления объектами теплоэнергетики.

Материал книги дает инженеру возможность (изучает ли он случайные процессы, как сигналы, несущие информацию о технологическом процессе в системе централизованного контроля, или как возмущения в системе автоматического регулирования, или как помехи при решении задач идентификации объекта управления, оценки технико-экономических показателей, сигнализации и защиты) получить статистические характеристики случайного процесса с заданной точностью и надежностью при наименьших затратах труда, средств и времени эксперимента, что особенно важно при работе на действующем оборудовании промышленных предприятий.

Излагаемые в книге рекомендации могут быть полезны не только в промышленности, но и в других областях: в океанографии, геофизике, метеорологии, биологии, медицине.

Авторы сочли возможным не давать формулировок основных понятий теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики, которые содержатся во многих книгах, например в [2, 5, 34, 37].

Авторы признательны доктору техн. наук Э. Л. Ицковичу за полезные замечания при просмотре рукописи, доктору техн. наук С. Я. Виленкину за обсуждение отдельных вопросов и канд. техн. наук Ю. Л. Клокову за внимательное редактирование книги.

Авторы

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

При определении статистических характеристик случайного процесса необходимо отнести его к какому-либо классу случайных процессов, т. е. построить его математическую модель. Основанием для построения модели процесса является априорная информация о нем, источником которой могут служить литературные данные, точка зрения ведущих специалистов, мнение персонала, эксплуатирующего исследуемый объект, и т. д. Эта информация может быть уточнена и дополнена в ходе проведения предварительных экспериментов.

Модель представляет собой некоторую идеализацию реального процесса. Очевидно, любому реальному процессу соответствует множество моделей. Выбор конкретной модели зависит от той задачи, в которой используются характеристики исследуемого случайного процесса. С другой стороны, модель должна быть не слишком сложной и применимой к достаточно широкому кругу задач.

Классификация случайного процесса может быть проведена по различным признакам [35]. При решении задач автоматического управления наиболее важными являются такие свойства случайного процесса, как эргодичность, стационарность, тип распределения, дифференцируемость.

Специфика задач автоматического управления крупными промышленными агрегатами (малое количество агрегатов, резко различные условия их работы, индивидуальность их характеристик) во многих случаях принципиально исключает осреднение результатов статистического эксперимента по множеству, оставляя один путь анализа статистических характеристик — по одной реализации конечной длительности. Анализ результатов работ по экспериментальному исследованию статистических характеристик и изучение особенностей технологических режимов позволяют сделать вывод, что хотя промышленные случайные процессы, как правило, являются нестационарными, во многих случаях их можно рассматривать как процессы, нестационарные только относительно математического ожидания [10, 26, 35]. К таким процессам после их центрирования могут быть применены с известными оговорками выводы теории стационарных процессов [34].

Применение математического аппарата стационарных эргодических случайных процессов без предварительной проверки условий эргодичности в данной ситуации можно считать недостаточно корректным, однако осуществление такой проверки может оказаться весьма трудоемким, поскольку для этого требуется ансамбль реализаций рассматриваемого случайного процесса. Мы вынуждены довольствоваться одной единственной реализацией, что не позволяет распространить результаты анализа на случайный процесс в целом. Некоторым оправданием может служить то, что теорема об эргодичности применяется к математической модели исследуемого процесса, а результаты распространяются только на некоторые элементы мыс-

лимого множества. К тому же результаты работ по анализу статистических характеристик промышленных случайных процессов показывают, что для случайной компоненты с нулевым математическим ожиданием $X(t)$ достаточное условие эргодичности по отношению к корреляционной функции $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$ почти всегда выполняется.

Анализ данных о случайных процессах в промышленных системах управления позволяет представить модель случайного процесса в виде следующей структуры [10]:

$$Z(t) = B(t) + C(t) + X(t) + N(t). \quad (1)$$

Здесь $B(t)$ — постоянная или медленно изменяющаяся непериодическая функция; $C(t)$ — гармонические функции с фиксированными периодами; $X(t)$ — случайный процесс с нулевым математическим ожиданием; $N(t)$ — случайная помеха измерения.

Компонента $B(t)$ обусловлена медленными, постепенными изменениями условий работы или характеристик технологического оборудования и свойств сырья, например медленным изменением нагрузки агрегата по заданному графику, старением катализатора в химических реакторах, отложением солей на поверхностях нагрева теплообменников, медленным изменением зольности и влажности топлива.

Гармонические компоненты $C(t)$ формируются в результате самых разнообразных периодических явлений и операций: суточной периодичности производственного процесса, периодических технологических циклов у потребителей продукции рассматриваемой системы управления, периодических переключений оборудования.

Случайная компонента $X(t)$ формируется в результате одновременного действия множества независимых или слабо связанных друг с другом факторов, сравнимых по эффекту своего участия в образовании $X(t)$.

Помеха измерения $N(t)$ представляет собой комбинацию различных случайных процессов, которые возникают в чувствительных элементах, в каналах связи, в измерительных устройствах и преобразователях. В большинстве случаев шум измерения можно считать гауссовским случайным процессом, являющимся по отношению к измеряемому процессу белым шумом.

Обычно стараются расчленить процесс на указанные компоненты и в отдельности изучить каждую из них.

Компонента $B(t)$ может быть определена с помощью методов фильтрации. Вид этой компоненты в большинстве случаев можно определить посредством изучения диаграмм, записанных в сжатом масштабе времени.

Для определения гармонических компонент $C(t)$ можно применить один из известных методов выделения скрытых периодичностей, например посредством корреляционных функций, взаимных корреляционных функций, инверсных корреляционных функций (см. гл. 5).

Помеха измерения $N(t)$ может быть выделена одним из известных методов фильтрации [5].

Компонента $X(t)$, остающаяся после выделения из $Z(t)$ составляющих $B(t)$, $C(t)$, $N(t)$, представляет собой стационарный случайный процесс, характеристики которого могут быть определены методами статистики стационарных случайных процессов.

Естественно, не каждый случайный процесс содержит все перечисленные компоненты. Например, компоненту $B(t)$, если она постоянная, можно считать равной нулю в выходной координате аста-

тической системы автоматической стабилизации, так как регулятор поддерживает регулируемую величину в среднем на заданном уровне. Большинство процессов не содержит и периодических компонент. При планировании эксперимента по оценке статистических характеристик случайного процесса чаще всего определяющими являются свойства компоненты $X(t)$, поэтому здесь в первую очередь рассматривается именно эта компонента.

Анализ свойств физических фильтров, формирующих компоненту $X(t)$, многочисленные проверки закона распределения $X(t)$ на нормальность позволяют считать ее распределение во многих случаях близким к нормальному [24].

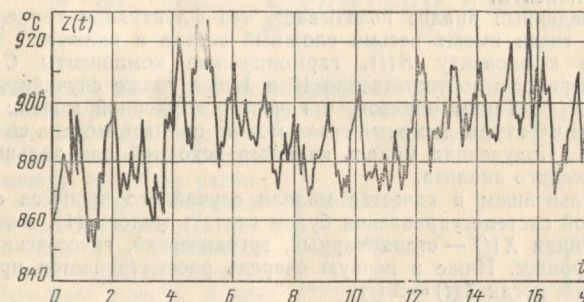


Рис. 1. Флуктуации температуры дымовых газов в районе промпароперегревателя парогенератора ПК33-83СП.

В качестве примера построения модели случайного процесса в промышленной системе управления рассмотрим флуктуации температуры дымовых газов в районе промпароперегревателя в эксплуатационном режиме парогенератора ПК-33-83СП [12]. Реализация, изображенная на рис. 1, получена при работе парогенератора в базовом режиме с нагрузкой 170—180 МВт. На парогенераторе были включены: регулятор давления пара перед турбиной «до себя», регулятор питания (по схеме стабилизации) и регуляторы промежуточного и выходного впрысков.

Флуктуации температуры дымовых газов представляют собой случайный процесс, механизм формирования которого определяется большим числом факторов, например случайными изменениями расхода и качества пылеугольного топлива, воздушного режима и т. д.

Основные эксплуатационные трудности на парогенераторе связаны с сильным шлакованием экранных поверхностей нагрева. Поэтому парогенератор несет нагрузку ниже нормальной. Через каждый час проводится паровая обдувка экранных поверхностей нагрева (длительность обдува 15—20 мин). Температура дымовых газов в межобдувочный период постепенно возрастает, а за время обдувки снижается. Таким образом, паровая обдувка приводит к появлению часовой периодической компоненты в реализациях флуктуаций температуры дымовых газов. Ввиду недостаточной эффективности обдувки средний уровень температуры газов за период кампании парогенератора (7—14 дней) постепенно (практически линейно) рас-

тет. После останова парогенератора, во время которого производится тщательная очистка поверхностей нагрева, уровень температуры снижается. Отметим еще одну эксплуатационную особенность, которую нужно учесть при построении модели. Пылепроводы от мельниц к горелкам забиваются пылью, иногда происходят «выбросы» слежавшейся пыли из пылепроводов в топку парогенератора. Поэтому примерно через каждые 10 ч производится поочередная продувка (воздухом) пылепроводов всех работающих мельниц. Обдувка длится 30—40 мин и сопровождается остановами и переключениями питателей сырого угля. Так как продувки пылепроводов носят почти периодический характер, то имеется большая вероятность появления в реализациях температуры дымовых газов еще одной периодической компоненты.

Проведенный анализ показывает, что флуктуации температуры дымовых газов имеют весьма сложный состав и включают в себя линейную компоненту $B(t)$, гармонические компоненты $C_1(t)$ и $C_2(t)$ с периодом соответственно 10 и 1 ч, а также случайную компоненту $X(t)$. Таким образом, в качестве априорной модели флуктуаций температуры дымовых газов можно принять модель со структурой (1). Полученная модель является исходной для дальнейшего статистического анализа.

В дальнейшем в качестве модели случайного процесса в промышленной системе управления будем считать модель (1), в которой составляющая $X(t)$ — стационарный, эргодический, гауссовский случайный процесс. Ниже в первую очередь рассматривается простейший случай, когда $Z(t) = X(t)$.

2. ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Существует большое число методов вычисления корреляционных функций. В этой работе рассматриваются прямые методы, получившие наибольшее распространение [29, 31, 32].

Корреляционная функция $R_x(\tau)$ стационарного эргодического случайного процесса $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием вычисляется по алгоритму

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt, \quad (2)$$

где T — длина реализации; τ — корреляционный сдвиг.

Аналогично определяется взаимная корреляционная функция $R_{xy}(\tau)$ стационарных и стационарно связанных эргодических случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с нулевым математическим ожиданием

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt. \quad (3)$$

Корреляционные функции (2) и (3) представляют собой неслучайные функции. На практике длина реализации T ограничена, поэтому вычисляемые корреляционные функции являются случайными

функциями. Они называются оценками корреляционных функций и в этой книге имеют обозначение $R^*_{xx}(\tau, T)$, $R^*_{xy}(\tau, T)$.

Оценка корреляционной функции, вычисленная по экспериментальным данным, обычно представляет ряд дискретных отсчетов в фиксированных точках t_i . При этом оценка взаимной корреляционной функции может быть получена по непрерывно-шаговому или выборочно-шаговому алгоритмам, которые имеют вид:

$$R^*_{xy}(k\Delta\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + k\Delta\tau) dt; \quad (4)$$

$$R^*_{xy}(k\Delta\tau, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i\Delta t_B) y(i\Delta t_B + k\Delta\tau). \quad (5)$$

Здесь $\Delta\tau$ — шаг дискретности корреляционного сдвига; Δt_B — шаг отбора выборочных пар (x_i, y_i) , определенным образом связанный с величинами Δt , Δt_x , Δt_y ; $N = T/\Delta t_B$; $k\Delta\tau = \tau$ (рис. 2) [7, 19].

В зависимости от соотношения между Δt_B и $\Delta\tau$ различают разные виды выборочно-шаговых алгоритмов. Парная выборка (x_i, y_i) называется максимально коррелированной, если $\Delta t_B = \Delta t_x = \Delta t_y = \Delta\tau$, и некоррелированной, если $\Delta t_B \gg \tau_{\text{кор}}$ ($\tau_{\text{кор}}$ — интервал корреляции случайного процесса).

Алгоритмы оценок корреляционной функции получаются заменой y на x в (4), (5).

Погрешности измерения корреляционной функции определяются в первую очередь причинами методического характера (ограниченность длины реализации, дискретизация процесса по времени и квантование по уровню¹). Ввиду этого основной задачей планирования эксперимента при вычислении оценки корреляционной функции по непрерывно-шаговому или выборочно-шаговому алгоритму является определение значений T , N , Δt , $\Delta\tau$, обеспечивающих требуемую точность и надежность оценки. Для определения точности оценки корреляционной функции, найденной по алгоритмам (4) и (5) при заданных T , N , Δt , $\Delta\tau$, или для выбора T , N , Δt , $\Delta\tau$, обеспечивающих требуемую точность и надежность оценки, необходимо располагать большей информацией, чем содержащаяся в интересующей нас корреляционной функции. В этих условиях для корректного решения задачи можно предложить следующий путь [22]:

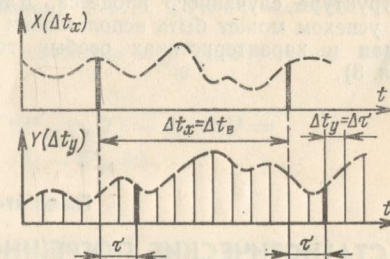


Рис. 2. Парная выборка.

¹ Вопросы выбора шага квантования по уровню в этой книге не рассматриваются; они достаточно полно освещены, например, в работах [6, 17, 28]. Оценка погрешности квантования по уровню по сравнению с другими погрешностями приведена в § 6.

1. Исследовать в общих выражениях погрешности оценок как функции T , N , Δt , $\Delta \tau$ для наиболее часто встречающихся корреляционных функций (стандартных корреляционных функций).

2. Используя априорную информацию, определить класс изучаемого процесса и найти приближенную оценку параметров корреляционной функции в стандартном классе.

3. По принятым априорным данным задаться допустимой погрешностью и выбрать необходимые значения T , N , Δt , $\Delta \tau$.

4. Вычислить оценку корреляционной функции.

5. Сопоставить вычисленную оценку с априорно заданной стандартной функцией и уточнить параметры модели. Если различие между априорной и уточненной моделями велико, то выбрать новую длину реализации и повторить вычисления.

6. Полученный результат представляется окончательно в виде одной из стандартных характеристик с оценкой точности и надежности.

Число повторных приближений зависит в основном от параметров априорной модели. Поэтому требуется точно знать, как была собрана априорная информация и следует возможно полнее включать в нее теоретические сведения о механизме возникновения и структуре случайного процесса. Для уточнения априорной модели с успехом может быть использована текущая информация, содержащаяся в характеристиках особых точек случайного процесса (см. гл. 3).

Глава вторая

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ВЫБОР ДЛИНЫ РЕАЛИЗАЦИИ

3. ДИСПЕРСИИ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Наиболее полной характеристикой оценки $R^*_{xy}(\tau, T)$ (как и любой случайной функции) являются ее многомерные функции распределения. Однако на практике приходится ограничиваться вычислением только простейших числовых характеристик оценки, таких как математическое ожидание $M[R^*_{xy}(\tau, T)]$, дисперсия $D[R^*_{xy}(\tau, T)]$, которые в свою очередь зависят не только от $R_{xy}(\tau)$ и длины реализации T , но и от высших моментов случайного процесса.

Рассмотрим непрерывно-шаговый алгоритм вычисления оценки корреляционной функции стационарных и стационарно связанных эргодических случайных процессов с нулевыми математическими ожиданиями.

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — случайные процессы, состоящие из аддитивной смеси сигналов $X_1(t)$, $Y_1(t)$ и помех $N_1(t)$, $N_2(t)$:

$$X(t) = X_1(t) + N_1(t); \quad Y(t) = Y_1(t) + N_2(t). \quad (6)$$

Оценка взаимной корреляционной функции случайных процессов (6) для конечного времени анализа T_a определяется выражением

$$R^*_{xy}(\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt,$$

где $T = T_a - \tau$.

Математическое ожидание оценки

$$\begin{aligned} M[R^*_{xy}(\tau, T)] &= M\left\{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt\right\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T M\{[X_1(t) + N_1(t)][Y_1(t + \tau) + N_2(t + \tau)]\} dt = \\ &= R_{x_1 y_1}(\tau) + R_{n_1 n_2}(\tau) = R_{xy}(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

равно самой корреляционной функции, т. е. $R^*_{xy}(\tau, T)$ является несмещенной оценкой.

Дисперсия [средний квадрат отклонения $\sigma^2_{R^*_{xy}(\tau, T)}$] оценки определяется по соотношению

$$\begin{aligned} D[R^*_{xy}(\tau, T)] &= M[R^*_{xy}(\tau, T) - R_{xy}(\tau)]^2 = \\ &= M[R^{*2}_{xy}(\tau, T)] - R^2_{xy}(\tau). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} M[R^{*2}_{xy}(\tau, T)] &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M[X(t) Y(t + \tau) X(u) Y(u + \tau)] dt du = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T P^2_{xy}(\tau, t, u) dt du. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) содержит четвертый смешанный центральный момент $P^2_{xy}(\tau, t, u)$ совместной плотности распределения случайных процессов $Y(t)$ и $X(t)$. Для стационарных процессов двойной интеграл в выражении (8) можно свести к одинарному. Полагая $\theta = u - t$, $d\theta = -dt$, после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} M[R^{*2}_{xy}(\tau, T)] &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T P^2_{xy}(\tau, t, u) dt du = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) P^2_{xy}(\tau, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив (9) в соотношение для дисперсии, будем иметь:

$$D[R^*_{xy}(\tau, T)] = \sigma^2_{R_{xy}}(\tau, T) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) P^2_{xy}(\tau, \theta) d\theta - R^2_{yx}(\tau). \quad (10)$$

Выражение для момента четвертого порядка с учетом (6) примет вид:

$$\begin{aligned} P^2_{xy}(\tau, \theta) &= M[X(0)X(\theta)Y(\tau)Y(\tau+\theta)] = \\ &= M[X_1(0)X_1(\theta)Y_1(\tau)Y_1(\tau+\theta)] + M[X_1(0)X_1(\theta)N_2(\tau)N_2(\tau+\theta)] + \\ &\quad + M[Y_1(\tau)Y_1(\tau+\theta)N_1(0)N_1(\theta)] + \\ &\quad + M[N_1(0)N_1(\theta)N_2(\tau)N_2(\tau+\theta)] + \\ &\quad + M[X_1(0)Y_1(\tau+\theta)N_1(\theta)N_2(\tau)] + \\ &\quad + M[X_1(\theta)Y_1(\tau)N_1(0)N_2(\tau+\theta)] + \\ &\quad + M[X_1(0)Y_1(\tau)N_1(\theta)N_2(\tau+\theta)] + \\ &\quad + M[X_1(\theta)Y_1(\tau+\theta)N_1(0)N_2(\tau)] = \\ &= P^2_{x_1y_1}(\tau, \theta) + R_{x_1}(\theta)R_{n_2}(\theta) + R_{y_1}(\theta)R_{n_1}(\theta) + \\ &\quad + P^2_{n_1n_2}(\tau, \theta) + R_{x_1y_1}(\tau+\theta)R_{n_1n_2}(\tau-\theta) + \\ &\quad + R_{x_1y_1}(\tau-\theta)R_{n_1n_2}(\tau+\theta) + 2R_{x_1y_1}(\tau)R_{n_1n_2}(\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $P^2_{x_1y_1}(\tau, \theta)$ и $P^2_{n_1n_2}(\tau, \theta)$ — центральные моменты четвертого порядка сигнала и помехи. Подставляя (11) в (10) и учитывая, что

$$\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) d\theta = 1,$$

получаем:

$$\begin{aligned} D[R^*_{xy}(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P^2_{x_1y_1}(\tau, \theta) - \\ &\quad - R^2_{x_1y_1}(\tau)] d\theta + \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P^2_{n_1n_2}(\tau, \theta) - \\ &\quad - R^2_{n_1n_2}(\tau)] d\theta + \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [R_{x_1}(\theta)R_{n_2}(\theta) + \\ &\quad + R_{y_1}(\theta)R_{n_1}(\theta) + R_{x_1y_1}(\theta+\tau)R_{n_1n_2}(\tau-\theta) + \\ &\quad + R_{x_1y_1}(\tau-\theta)R_{n_1n_2}(\tau+\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение (12) содержит три интеграла. Первый интеграл представляет собой дисперсию взаимной корреляционной функции при отсутствии помехи $D[R^*_{x_1y_1}(\tau, T)]$, второй — дисперсию помехи $D[R^*_{n_1n_2}(\tau, T)]$ при отсутствии сигнала. Третий интеграл обусловлен взаимным влиянием сигнала и помехи, т. е. нелинейностью операции умножения. Два первых интеграла аналогичны и зависят от четвертых моментов.

Если в (12) заменить Y_1 на X_1 и $N_2 = N_1$ на N , то получим несмещенную оценку корреляционной функции с дисперсией

$$\begin{aligned} D[R^*_x(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P^2_{x_1}(\tau, \theta) - R^2_{x_1}(\tau)] d\theta + \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P^2_n(\tau, \theta) - R^2_n(\tau)] d\theta + \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [2R_{x_1}(\theta)R_n(\theta) + R_{x_1}(\theta+\tau)R_n(\tau-\theta) + \\ &\quad + R_{x_1}(\theta-\tau)R_n(\tau+\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13) видно, что для измерения погрешности оценки $R^*(\tau, T)$ необходимо знать не только истинную корреляционную функцию, но и более полную статистическую характеристику — момент четвертого порядка распределения случайных процессов $X_1(t)$, $Y_1(t)$, $N_1(t)$ и $N_2(t)$.

Вычисление моментов четвертого порядка сопряжено со значительными трудностями. Однако для гауссовских процессов моменты любых порядков выражаются через первые и вторые моменты. Действительно, дифференцируя характеристические функции для любых $2n$ переменных величин, можно получить соотношение [34]:

$$\begin{aligned} M[X_1X_2 \dots X_{2n}] &= \sum_{\text{Все пары}} \left\{ \prod_{i \neq j}^n M[X_iX_j] \right\} = \\ &= \sum_{\text{Все пары}} \{M[X_iX_j]M[X_kX_l] \dots M[X_pX_q]\} \text{ при } i \neq j, k \neq l, p \neq q. \end{aligned} \quad (14)$$

В нашем случае $2n=4$, $X_1=x_1(0)$, $X_2=x_1(\theta)$, $X_3=y_1(\theta)$, $X_4=y_1(\tau+\theta)$, поэтому

$$P^2_{x_1y_1}(\tau, \theta) = R_{y_1}(\theta)R_{x_1}(\theta) + R_{x_1y_1}(\theta+\tau)R_{x_1y_1}(\tau-\theta) + R^2_{x_1y_1}(\tau); \quad (15)$$

$$P^2_{x_1}(\tau, \theta) = R^2_{x_1}(\theta) + R_{x_1}(\theta+\tau)R_{x_1}(\tau-\theta) + R^2_{x_1}(\tau). \quad (16)$$

Аналогичный вид будут иметь четвертые моменты и для нормальных помех $N_1(t)$ и $N_2(t)$.

В том случае, когда помеха равна нулю, дисперсии оценок $R^*_{xy}(\tau, T)$ и $R^*_x(\tau, T)$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} D[R^*_{xy}(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [R_{y_1}(\theta)R_{x_1}(\theta) + \\ &\quad + R_{xy}(\theta+\tau)R_{xy}(\tau-\theta)] d\theta; \end{aligned} \quad (17)$$

$$D[R^*_x(\tau, T)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [R^2_x(\theta) + R_x(\theta+\tau)R_x(\tau-\theta)] d\theta. \quad (18)$$

При оценке статистических свойств корреляционных функций предполагалось, что истинное значение математического ожидания m_z исследуемых процессов известно. В большинстве случаев m_z неизвестно и оценка корреляционной функции вычисляется по алгоритму

$$R_z^*(\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) - m_z^*] [z(t + \tau) - m_z^*] dt,$$

где

$$m_z^* = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt$$

— оценка математического ожидания; $z(t)$ — стационарный гауссовский эргодический случайный процесс.

Математическое ожидание оценки $R_z^*(\tau, T)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} M[R_z^*(\tau, T)] &= \frac{1}{T} \int_0^T M\{[Z(t) - m_z^*][Z(t + \tau) - m_z^*]\} dt = \\ &= R_z(\tau) - \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_z(\theta + \tau) d\theta. \end{aligned}$$

При конечных T смещение оценки

$$E_{\text{см}} = M[R_z^*(\tau, T)] - R_z(\tau) = -\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_z(\theta + \tau) d\theta \quad (19)$$

и зависит от сдвига τ .

Дисперсия оценки $R_z^*(\tau, T)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} D[R_z^*(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta_1}{T}\right) [R_z^2(\theta_1) + R_z(\theta_1 + \tau) R_z(\theta_1 - \tau)] d\theta_1 - \\ &- \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T \int_0^T [R_z(\theta_3 - \theta_2) R_z(\theta_2 - \theta_1) + R_z(\theta_3 - \theta_2 - \tau) R_z(\theta_2 - \theta_1 - \\ &- \tau)] d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 + \left[\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_z(\theta + \tau) d\theta \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_z(\theta) d\theta \right]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что первый интеграл дисперсии оценки $R_z^*(\tau, T)$ есть дисперсия несмещенной оценки.

4. КРИТЕРИЙ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Применение дисперсии в качестве критерия точности оправдано лишь при нормальном или близком к нему распределении оценки, так как только в этом случае по дисперсии можно легко определить точность оценки при заданной надежности. Распределение оценки корреляционной функции $R_{xy}(\tau, T)$ случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$ зависит от закона распределения самих процессов, от алгоритма вычисления оценки и меняется с изменением длины реализации T и корреляционного сдвига τ . В пределе при $T \rightarrow \infty$ закон распределения оценки $R^*_{xy}(\tau, T)$ вырождается в дельта-функцию. Рассмотрим законы распределения и критерий точности оценок корреляционных функций гауссовских стационарных и стационарно связанных эргодических случайных процессов, вычисленных по непрерывно-шаговому и выборочно-шаговому алгоритмам (4), (5). Приближенный закон распределения оценки корреляционной функции можно получить путем построения ряда Эджворта. Если оценка имеет конечные моменты четвертого порядка, то функция распределения оценки $F(u)$ и плотность распределения оценки $f(u)$ могут быть представлены первыми четырьмя членами разложения в ряд Эджворта [40]:

$$\begin{aligned} F(u) &\approx \Phi(u) - \frac{1}{3!} \gamma_1 \Phi^{(3)}(u) + \frac{1}{4!} \gamma_2 \Phi^{(4)}(u) + \\ &+ \frac{10}{6!} \gamma_1^2 \Phi^{(6)}(u); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f(u) &\approx \Phi^{(1)}(u) - \frac{1}{3!} \gamma_1 \Phi^{(4)}(u) + \frac{1}{4!} \gamma_2 \Phi^{(5)}(u) + \\ &+ \frac{10}{6!} \gamma_1^2 \Phi^{(7)}(u). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\Phi^{(k)}(u)$ — k -я производная функции распределения нормального закона:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (23)$$

а γ_1 и γ_2 — соответственно коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса распределения.

Расчеты показывают, что аппроксимация распределения оценки $R^*_x(\tau, T)$ первыми четырьмя членами ряда Эджворта дает вполне удовлетворительные результаты. Так, при оценке $R_x(0)$ по некоррелированной выборке погрешность аппроксимации распределения $R^*_x(0, T)$ не превосходит 8,5% при объеме выборки $h=10$ и 2,5% при $h=100$. Для коррелированной выборки и $\tau > 0$ эта погрешность будет еще меньше.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса, необходимые для построения ряда Эджворта, являются функциями τ . Рассмотрим влия-

ние τ на γ_1 и γ_2 . Используя результаты работ [5, 11, 14, 22], запишем выражения для γ_1 и γ_2 при $\tau=0$:

$$\gamma_1 = \frac{\int_0^T \int_0^T \int_0^T R_x(v-t) R_x(v-u) R_x(u-t) dt du dv}{\left[\int_0^T (T-\theta) R_x^2(\theta) d\theta \right]^{3/2}}; \quad (24)$$

$$\gamma_2 = \frac{3 \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T R_x(t-v) R_x(t-w) R_x(v-s) R_x(s-w) dt dv dw ds}{\left[\int_0^T (T-v) R_x^2(v) dv \right]^2}. \quad (25)$$

При $\tau=\infty$, как показано в [11], $\gamma_1=0$, а γ_2 уменьшается в 2 раза по сравнению с γ_2 в точке $\tau=0$.

Равенство нулю коэффициента асимметрии γ_1 и уменьшение эксцесса γ_2 дает возможность при больших τ считать оценку $R_x^*(\tau, T)$ распределенной приблизительно нормально.

Центральные моменты высоких порядков убывают с ростом τ значительно быстрее, чем сама $R_x(\tau)$, поэтому приведенные для $\tau=\infty$ рассуждения будут справедливы и для $\tau=\tau_{\text{кор}}$, соответствующем значению нормированной корреляционной функции

$$\rho_x(\tau_{\text{кор}}) = 0,05.$$

Расчеты показывают [14], что основная часть погрешности в оценке точности и достоверности ординат $R_x(\tau, T)$ с помощью нормальной функции распределения связана с коэффициентом асимметрии, а влияние эксцесса невелико. Поэтому поправка на γ_2 требуется редко.

На рис. 3 изображены графики зависимости относительной погрешности аппроксимации распределения $F(u)$ оценки $R_x^*(\tau, T)$ функцией нормального распределения $\Phi(u)$ от объема выборки $h = T/\tau_{\text{кор}}$. Из графиков видно, что уже при относительно малой выборке $T/\tau_{\text{кор}} \geq 10$ погрешность аппроксимации распределения оценки $R_x^*(\tau, T)$ функцией нормального закона распределения не превышает 3,8% при $\tau=0$ и 0,57% при $\tau=\tau_{\text{кор}}$.

Анализ закона распределения оценки для выборочно-шагового алгоритма позволил установить, что для дискретной коррелированной и некоррелированной парной выборок распределение оценки практически совпадает с распределением для непрерывного-шагового алгоритма [11].

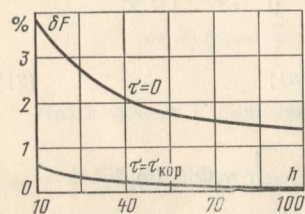


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности аппроксимации функции распределения оценки $R_x^*(\tau, T)$ функцией нормального распределения от объема выборки.

Дисперсия может служить мерой точности оценки только тогда, когда указано само значение оценки. Поэтому вместо дисперсии целесообразнее использовать коэффициент изменчивости оценки

$$F_{R_x}(\tau, T) = \sigma_{R_x}(\tau, T) / R_x(\tau). \quad (26)$$

Однако ни дисперсия, ни коэффициент изменчивости не дают информации о надежности оценки. Для устранения этого недостатка применяют метод интервальных оценок. Интервальная оценка позволяет по оценке ординат $R_x^*(\tau, T)$ указать интервал, в котором с заданной доверительной вероятностью α будут находиться ординаты неизвестной истинной корреляционной функции. Указанный интервал называют доверительным, а границы интервала — доверительными границами.

Исследования доверительных интервалов на ординаты корреляционной функции при $\tau=0$ и $\tau=\infty$ для широкого класса случайных процессов с дробно-рациональными спектральными плотностями и широкого диапазона длин реализаций $10 \leq T/\tau_{\text{кор}} \leq 100$ показали, что относительная разница в доверительных интервалах, полученных при аппроксимации рядом Эджворта и по нормальному закону распределения, не превосходит 9% при доверительной вероятности 0,80 и 18% при доверительной вероятности 0,95 [14]. Это дает возможность применять нормальный закон распределения для построения доверительных интервалов практически всегда, так как при $T/\tau_{\text{кор}} < 10$ доверительные интервалы для оценки ординат $R_x^*(\tau, T)$ настолько велики, что информационная ценность оценки становится сомнительной.

В дальнейшем в пределах допустимой точности будем считать оценку корреляционной функции $R_x^*(\tau, T)$ нормально распределенной.

При нормальном законе распределения оценки $R_x^*(\tau, T)$ вероятность того, что доверительный интервал $(R_x^*(\tau, T) \pm \Delta)$ покрывает истинное значение $R_x(\tau)$, будет равна:

$$P\{R_x^*(\tau, T) - R_x(\tau) \leq \Delta\} = 2\Phi[\Delta/\sigma_{R_x}(\tau, T)] = 2\Phi(u) = \alpha. \quad (27)$$

Используя выражение (27), можем записать:

$$\Delta = u \sigma_{R_x}(\tau, T). \quad (28)$$

Значение u легко находится по заданной вероятности попадания $R_x(\tau)$ в интервал $(R_x^*(\tau, T) \pm \Delta)$ из таблиц функции $\Phi(u)$. Например, для $\alpha = 2\Phi(u) = 0,95$ по таблицам $\Phi(u)$ [34] находим: $u = 1,96$, $\Delta = 1,96 \sigma_{R_x}(\tau, T)$.

Относительный доверительный интервал $1 \pm \delta$ можно определить через коэффициент изменчивости F_{R_x} :

$$\delta = \frac{\Delta}{R_x(\tau)} = u \frac{\sigma_{R_x}(\tau, T)}{R_x(\tau)} = u F_{R_x}(\tau, T). \quad (29)$$

Здесь $R_x(\tau)$ — стандартная корреляционная функция, аппроксимирующая экспериментальную оценку $R_x^*(\tau, T)$.



5. ВЫБОР ДЛИНЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Выражение (28) показывает, что доверительный интервал для оценки $R_x^*(\tau, T)$ определяется заданной доверительной вероятностью и дисперсией оценки $\sigma^2_{R_x}(\tau, T)$. В свою очередь из (18) следует, что $\sigma^2_{R_x}(\tau, T)$ сложным образом зависит от длины реализации T и вида корреляционной функции $R_x(\tau)$.

Детальный анализ (18) показывает, что дисперсия оценки (или ее огибающая для немонокорреляционных функций) с ростом τ монотонно убывает [15] и практически стабилизируется уже при $\tau = \tau_{кор}$.

Для $\tau = 0$

$$D[R_x^*(0, T)] = \frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_x^2(\theta) d\theta. \quad (30)$$

Для $\tau \geq \tau_{кор}$

$$D[R_x^*(\tau, T)] \approx \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_x^2(\theta) d\theta. \quad (31)$$

Из (30), (31), пренебрегая небольшим различием в T ($\tau_{кор} \ll T_a$), можно видеть, что $D[R_x^*(\tau, T)]$ с ростом τ от 0 до $\tau_{кор}$ уменьшается в 2 раза.

Формулы (30), (31) имеют более простую структуру, чем (18), и могут быть положены в основу выбора длины реализации T по заданной доверительной вероятности в точках $\tau = \tau_{кор}$ и $\tau = 0$. В качестве опорной точки для выбора T возьмем $\tau = \tau_{кор}$, которая является одной из важнейших характеристик случайного процесса и широко применяется на практике, например при оценке спектральной плотности, при некоррелированных измерениях.

Формула (31) для $T/\tau_{кор} > 10$ примет вид:

$$D[R_x^*(\tau_{кор}, T)] \approx \frac{2\sigma_x^4}{T} \int_0^\infty \rho_x^2(\theta) d\theta. \quad (32)$$

Здесь σ_x^2 — дисперсия случайного процесса.

Вводя в (32) коэффициент изменчивости при $\tau = \tau_{кор}$ и учитывая, что $\rho_x(\tau_{кор}) = 0,05$, получаем:

$$TF^2_{R_x}(\tau_{кор}, T) \approx 800 \int_0^\infty \rho_x^2(\theta) d\theta. \quad (33)$$

Формула (33) является основой для номограмм по выбору длины реализации при вычислении оценок корреляционных функций для заданных доверительных интервалов или заданного F_{R_x} [см. (29)].

Анализ случайных процессов в промышленных системах управления показывает, что спектральную плотность компоненты $X(t)$ этих процессов в большинстве случаев можно описать посредством выражений:

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{(T_0^2\omega^2 + 1)(T_0^2\beta_1^2\omega^2 + 1)(T_0^2\beta_2^2\omega^2 + 1)}, \quad (34)$$

где $0 \leq \beta_1 \leq 1, 0 \leq \beta_2 \leq 1$;

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{(T_0^2\alpha^2\omega^2 + 1)[(1 - T_0^2\omega^2)^2 + T_0^2\beta^2\omega^2]}, \quad (35)$$

где $0 \leq \alpha \leq \infty, 0 \leq \beta \leq 2$.

Корреляционные функции, соответствующие (34) и (35), имеют вид:

$$R_x(\lambda) = \sigma_x^2 k (ae^{-|\lambda|} + be^{-|\lambda|/\beta_1} - ce^{-|\lambda|/\beta_2}), \quad (36)$$

где

$$\lambda = \frac{\tau}{T_0}; \quad a = \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)};$$

$$b = \frac{\beta_1^3(\beta_2 + 1)}{1 - \beta_1}; \quad c = \frac{\beta_2^3(\beta_1 + 1)}{1 - \beta_2};$$

$$k = \frac{1}{(\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \beta_2)(\beta_2 - \beta_1)};$$

$$R_x^r(\lambda) = \sigma_x^2 k \left(ae^{-|\lambda|/\alpha} + be^{-|\lambda|/\beta/2} \sin\left(\frac{\sqrt{4 - \beta^2}}{2}|\lambda| + \varphi\right) \right), \quad (37)$$

где

$$a = \alpha^3\beta; \quad b = 2\sqrt{\frac{(1 + \alpha^2)^2 - \alpha^2\beta^2}{4 - \beta^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{(1 + \alpha^2 - \alpha^2\beta^2)\sqrt{4 - \beta^2}}{\beta(1 + 3\alpha^2 - \alpha^2\beta^2)};$$

$$k = \frac{1}{1 + \alpha^2 - \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta}.$$

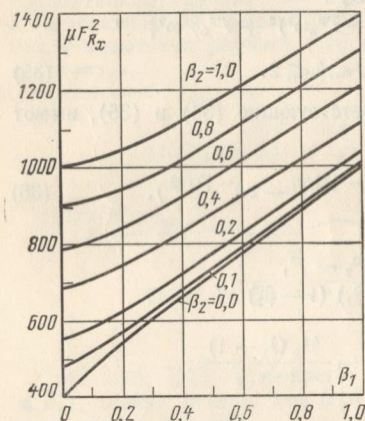
Номограммы по выбору необходимой длины реализации при определении оценок корреляционных функций вида (36) и (37), вычисленные по (33), приведены на рис. 4 и 5. Здесь $\mu = T/T_0$.

Для определения длины реализации по этим номограммам необходимо:

1) задать относительный доверительный интервал $1 \pm \delta$ и доверительную вероятность $\alpha = 2\Phi(u)$;

2) по таблице функции $\Phi(u)$ найти значение u ;

- 3) вычислить коэффициент изменчивости $F_{R_x}(\tau_{\text{кор}}, T)$ по (29);
- 4) используя априорную информацию, оценить параметры исследуемого случайного процесса;
- 5) по номограммам на рис. 4 или 5 выбрать длину реализации T ;
- 6) вычислить оценку корреляционной функции;
- 7) сопоставить полученную оценку с априорной моделью и, если различие велико, уточнить длину реализации или доверительные интервалы.



Пример. Найти длину реализации для вычисления оценки корреляционной функции случайного процесса с точностью, характеризуемой $\delta=1$ в точке $\tau=\tau_{\text{кор}}$ при доверительной вероятности 0,95. Априорная модель процесса имеет корреляционную функцию вида (36) с параметрами $\beta_1=\beta_2=1$ и $T_0=2$ мин.

Рис. 4. Номограмма для определения необходимой длины реализации при вычислении корреляционной функции вида (36).

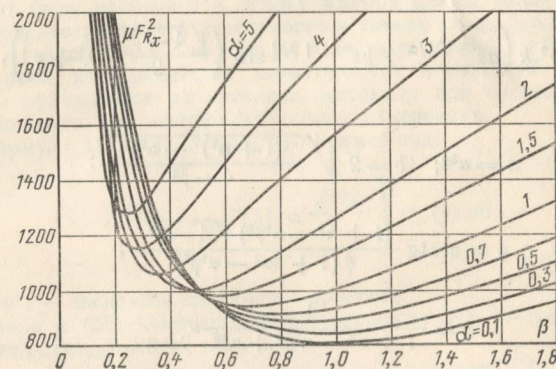


Рис. 5. Номограмма для определения необходимой длины реализации при вычислении корреляционной функции вида (37).

По таблице функции $\Phi(u)$ находим $u=1,96$. Определяем $F_{R_x}(\tau_{\text{кор}}, T) = \delta/u = 0,51$. По номограмме (рис. 4) находим $\mu F_{R_x}^2 = 1400$. Отсюда $\mu = 1400/0,26 = 5400$ или $T = \mu T_0 = 10\ 800$ мин.

В некоторых задачах в качестве меры точности используют не δ , а непосредственно коэффициент изменчивости $F_{R_x}(\tau_{\text{кор}}, T)$. Например, при оценке спектральной плотности по оценке корреляционной функции, имеющей монотонный характер, рекомендуется определять время усечения τ_y из уравнения

$$D[R_x^*(\tau_y, T)] = R_x^2(\tau_y),$$

т. е. при $F_{R_x}(\tau_y, T) = 1$ [43].

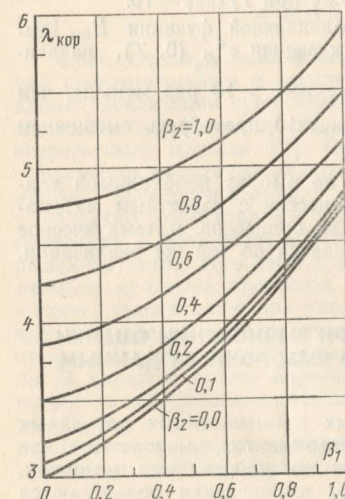


Рис. 6. Номограмма для определения относительного интервала корреляции $\lambda_{\text{кор}}$ корреляционной функции вида (36).

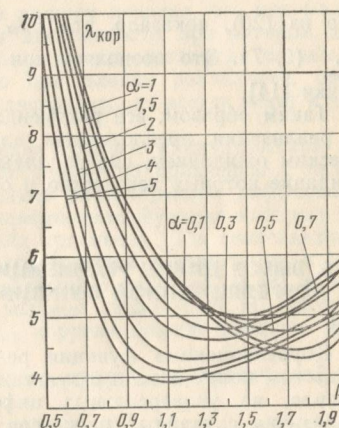


Рис. 7. Номограмма для определения относительного интервала корреляции $\lambda_{\text{кор}}$ корреляционной функции вида (37).

В большинстве случаев время усечения можно брать равным интервалу корреляции корреляционной функции $\tau_{\text{кор}}$.

Номограммы, приведенные на рис. 4 и 5, позволяют выбрать длину реализации и при построении относительного доверительного интервала на оценку корреляционной функции $R_x^*(0, T)$. При $\tau=0$ из (29) и (33) получим:

$$\delta = 0,07 u F_{R_x}(\tau_{\text{кор}}, T). \quad (38)$$

Методика определения длины реализации остается прежней.

Например, для рассмотренной выше модели при $\delta=0,2$, $u=1,96$ имеем $F_{R_x}(\tau_{\text{кор}}, T) = 1,45$. По номограмме (рис. 4) находим $\mu F_{R_x}^2 = 1400$. Отсюда $\mu = 1400/2,1 = 667$, или $T = 667 \cdot 2 = 1334$ мин.

На рис. 6 и 7 приведены номограммы для определения относительного интервала корреляции $\tau_{\text{кор}}/T_0 = \lambda_{\text{кор}}$ корреляционных функций, позволяющие при известных длинах реализации T и параметрах моделей (36), (37) определить число некоррелированных интервалов $h = T/\tau_{\text{кор}}$ и проверить выполнение гипотезы о близости распределения оценки к нормальному.

Расчеты, проведенные по формуле (20), показали, что замена в алгоритме расчета корреляционных функций математического ожидания его оценкой практически не оказывает влияния на дисперсию оценки корреляционной функции уже при $T/\tau_{\text{кор}} = 10$.

Сравнение смещения оценки корреляционной функции $E_{\text{см}}$ [см. (19)] и ее среднего квадратического отклонения $\sigma_{R_x}^*(0, T)$, найденного из (20), показало, что $E_{\text{см}}$ в среднем в 10 раз меньше, чем $\sigma_{R_x}^*(0, T)$. Это позволяет при $T/\tau_{\text{кор}} \geq 10$ пренебречь смещением оценки [14].

Таким образом, все рекомендации по выбору необходимой длины реализации, предложенные для процессов с известным математическим ожиданием, справедливы и для процессов, математическое ожидание которых неизвестно и оценивается по той же реализации.

6. ВЫБОР ДЛИНЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПО ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

Корреляционные функции реальных промышленных случайных процессов, полученные в результате экспериментов, вычисляются, как правило, на универсальных цифровых вычислительных машинах. Реализации случайных процессов перед вычислением подвергаются дискретизации по времени и квантованию по уровню. Здесь мы рассмотрим только влияние шага дискретности по времени на вычисленные значения оценки корреляционной функции. Задача выбора оптимального шага дискретности по времени из условия восстановления корреляционной функции непрерывного случайного процесса по дискретным данным решена в гл. 4.

Алгоритм вычисления оценки корреляционной функции центрированного стационарного эргодического случайного процесса по выборочным данным был приведен в гл. 1 [см. (5)].

Дисперсия оценки корреляционной функции стационарного гауссовского процесса имеет вид [5, 33]:

$$D[R_x^*(i\Delta\tau, N)] = \frac{1}{N_z} \left[R_z(0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \left(1 - \frac{r}{N_z}\right) R_z(r\Delta\tau) \right], \quad (39)$$

где $z = x(k\Delta\tau)x(k\Delta\tau + i\Delta\tau)$; N_z — число парных выборок временной последовательности Z ; $R_z(r\Delta\tau)$ — корреляционная функция последовательности парных выборок Z .

Рассмотрим оценку дисперсии и необходимой длины реализации для всех типов выборочных последовательностей.

В этом случае

$$D[R_x^*(i\Delta\tau, N)] = \frac{1}{N-1} [R_x^2(0) + R_x^2(i\Delta\tau)] + \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{r}{N-1}\right) [R_x^2(i\Delta\tau) + R_x(i\Delta\tau + i\Delta\tau) R_x(i\Delta\tau - i\Delta\tau)]. \quad (40)$$

Сравнительный анализ дисперсий оценок корреляционных функций по непрерывным и дискретным данным показал, что при малых длинах реализации существует шаг дискретности, при котором дисперсия оценки по выборочным данным меньше дисперсии оценки по непрерывным данным [5]. Однако при длинах реализации, представляющих практический интерес, дискретизация всегда ведет к увеличению дисперсии оценки.

Оценим относительное увеличение средней квадратической погрешности в выборочно-шаговом алгоритме по сравнению с непрерывно-шаговым. При этом ограничимся рассмотрением дифференцируемых случайных процессов, корреляционная функция которых монотонно уменьшается при увеличении аргумента. Для сопоставления прироста средней квадратической погрешности в выбранном классе нужен параметр, отражающий характерные свойства $R_x(\tau)$ и шаг $\Delta\tau$. В качестве такого параметра возьмем число точек m , приходящихся на интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$ корреляционной функции: $m = \tau_{\text{кор}}/\Delta\tau$.

Определим относительный прирост средней квадратической погрешности $\epsilon(m)$ в следующем виде:

$$\epsilon(m) = \frac{\sigma_R(\Delta\tau, N) - \sigma_R(\tau, T)}{\sigma_R(\tau, T)}. \quad (41)$$

Рассмотрим $\epsilon(m)$ при $\tau = 0$ для корреляционных функций вида

$$R_x(\tau) = \frac{\sigma_x^2}{1-\beta} \left(e^{-\gamma|\tau|} - \beta e^{-\frac{\gamma}{\beta}|\tau|} \right) \text{ при } \beta \rightarrow 0; \quad (42)$$

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\frac{\gamma^2 \tau^2}{4}}. \quad (43)$$

Первая корреляционная функция соответствует однократно-дифференцируемому случайному процессу, вторая — бесконечно дифференцируемому, т. е. эти процессы являются граничными в рассматриваемом классе.

Для непрерывно-шагового алгоритма дисперсии оценок корреляционных функций (42), (43) выражаются формулами:

$$\mu D[R_x^*(0, \mu)] = \frac{2\sigma_x^4(\beta^2 + 3\beta + 1)}{1 + \beta}; \quad (44)$$

$$\mu D[R_x^*(0, \mu)] = 2\sigma_x^4 \sqrt{2\pi}, \quad \mu = T\gamma. \quad (45)$$

Для выборочно-шагового алгоритма имеем:

$$D[R^*_x(\lambda_{\text{кор}}/m, \mu)] = \frac{4\sigma^4_x \lambda_{\text{кор}}}{\mu m} \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} \Delta \lambda} + \frac{\beta^2}{2 \operatorname{th} \frac{\lambda_{\text{кор}}}{m\beta}} - \frac{\beta}{\operatorname{th} \frac{\lambda_{\text{кор}}(1+\beta)}{2m\beta}} \right]; \quad (46)$$

$$D[R^*_x(\lambda_{\text{кор}}/m, \mu)] = \frac{4\sigma^4_x \lambda_{\text{кор}}}{\mu m} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{2\lambda_{\text{кор}}^2 k^2}{4m^2}} + \frac{2\lambda_{\text{кор}} \sigma^4_x}{m}. \quad (47)$$

Здесь $\lambda = \tau\gamma$; $\Delta\lambda = \Delta\tau\gamma$; $\lambda_{\text{кор}} = \tau_{\text{кор}}\gamma$; $\mu = T\gamma$.

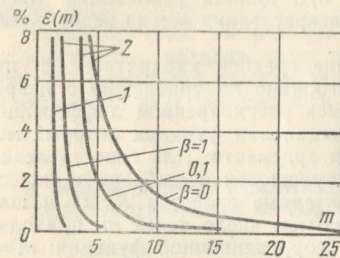


Рис. 8. График зависимости относительной погрешности $\varepsilon(m)$ от числа точек на интервале корреляции $\tau_{\text{кор}}$ корреляционной функции.

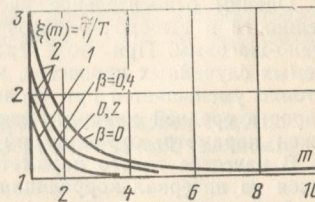


Рис. 9. График зависимости относительного увеличения длины реализации $\xi(m)$ от числа точек m на интервале корреляции $\tau_{\text{кор}}$ корреляционной функции.

Кривые зависимости $\varepsilon(m)$, полученные в результате подстановки (44)–(47) в (41), изображены на рис. 8. Кривая 1 соответствует корреляционной функции (43), а кривые 2 — функции (42) при различных β . Отметим, что случай $\beta=0$ ($\rho_x(\lambda)=e^{-|\lambda|}$) соответствует недифференцируемому случайному процессу. Кривые на рис. 8 показывают, что при $m=\text{const}$ влияние шага дискретности на точность вычисленных значений меньше у тех процессов, которые имеют более высокий порядок непрерывных производных. Из рис. 8 видно, что для $m>10$ прирост средней квадратической погрешности за счет дискретизации во времени дифференцируемых случайных процессов рассмотренного класса менее 0,5%, т. е. пренебрежимо мал по сравнению с погрешностью от длины реализации.

Подобные же выводы можно сделать и об относительном увеличении длины реализации $\xi(m)=T/T$, обусловленном дискретизацией по времени при неизменном значении дисперсии (рис. 9).

Расчеты, проведенные для класса осциллирующих корреляционных функций, показали, что и для них прирост средней квадратической погрешности за счет дискретизации при $m \geq 10$ менее 0,5%.

При дискретизации процесса по времени, как правило, приходится прибегать и к квантованию его по уровню. Удельный вес ошибки от квантования по уровню для широкого класса случайных процессов весьма мал [28, 31]. Например, уже при шаге квантования, равном 1/4 среднего квадратического значения процесса, прирост относительной погрешности оценки $R^*_x(0, T)$ составляет 0,5%, т. е. пренебрежимо мал по сравнению с погрешностью от длины реализации.

Таким образом, при вычислении оценки $R^*_x(\tau, T)$ определяющей является ошибка от длины реализации. Выбор длины реализации для оценок, вычисляемых как по непрерывным, так и по выборочным квантованным данным можно производить по одним и тем же формулам, если на интервал корреляции корреляционной функции приходится не менее 10 точек.

Некоррелированная парная выборка $\Delta t_b = \tau_{\text{кор}} = m\Delta\tau$

Если $\Delta t_b = \tau_{\text{кор}}$, то парная выборка является некоррелированной: $R_z(r\Delta t) \approx 0$. Следовательно, формула (39) упрощается

$$D[R^*_x(i\Delta\tau, N)] \approx \frac{1}{N_z} R_z(0) = \frac{1}{N_z} \{M[Z^2] - R^2_x(i\Delta\tau)\} = \frac{1}{N_z} [R^2_x(0) + R^2_x(i\Delta\tau)]. \quad (48)$$

Вводя обозначение $\tau = i\Delta\tau$ и учитывая, что $R_x(\tau) = \sigma^2_x \rho_x(\tau)$, получаем:

$$D[R^*_x(\tau, N_z)] \approx \frac{\sigma^4_x}{N_z} [1 + \rho^2_x(\tau)]. \quad (49)$$

Ввиду того что некоррелированная парная выборка позволяет применить аппарат классической теории оценок, целесообразно сравнить ее с непрерывно-шаговым алгоритмом и выяснить возможность применения при решении практических задач. Для сравнения этих алгоритмов оценки корреляционных функций воспользуемся приближенной формулой оценки дисперсии по непрерывно-шаговому алгоритму

$$D[R^*_x(\tau, T)] = \frac{2B\sigma^4_x}{T} [1 + \rho^2_x(\tau)], \quad (50)$$

где

$$B = \int_0^{\infty} \rho^2_x(\tau) d\tau.$$

При фиксированной длине реализации $T = \tau_{\text{кор}} N_z$ относительный прирост ε средней квадратической погрешности $\sigma_{R_x}(\tau, N_z)$ по сравнению со средней квадратической погрешностью $\sigma_{R_x}(\tau, T)$ будет иметь вид:

$$\varepsilon = \left[\frac{\tau_{\text{кор}} - 2B}{2B} \right]^{1/2}. \quad (51)$$

Относительное увеличение длины реализации ξ при неизменном значении дисперсии оценки определяется выражением

$$\xi = \tilde{T}/T = \tau_{\text{кор}}/2B, \quad (52)$$

где $T = N_z \tau_{\text{кор}}$.

Выясним пределы изменения значения ξ для класса экспоненциальных корреляционных функций, рассмотренных выше.

Если

$$\rho_{x_1}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|},$$

то

$$\tau_{\text{кор}} = 3,0/\gamma, \quad B = 0,5/\gamma \quad \text{и} \quad \xi = 3,0.$$

Если

$$\rho_{x_2}(\tau) = e^{-\gamma^2 \tau^2/4},$$

то

$$\tau_{\text{кор}} = \sqrt{12/\gamma^2}, \quad B = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\gamma} \quad \text{и} \quad \xi = 1,38.$$

Отсюда видно, что для рассматриваемого класса случайных процессов вычисление оценки корреляционной функции по некоррелированной парной выборке ведет к увеличению длины реализации в 1,38—3 раза. Для некоторых других классов случайных процессов (например, для процессов с осциллирующими корреляционными функциями) увеличение длины реализации может быть более значительным, поэтому к использованию алгоритма некоррелированной парной выборки надо подходить осторожно.

Анализ доверительных интервалов на оценку $R^*_{xy}(\tau, T)$ производился выше в предположении о нормальности закона распределения случайного процесса $X(t)$. Между тем учет даже простейших особенностей изменения координат промышленного случайного процесса (ограничение на величину сигнала, зависимость его амплитуды от знака) позволяет считать, что законы распределения отличаются от нормального.

Дисперсия оценки $R^*_{xy}(\tau, T)$ негауссовских процессов с нулевым математическим ожиданием имеет вид:

$$D[R^*_{xy}(\tau, T)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [R^2_{xx}(\theta) + R_x(\theta + \tau) R_x(\theta - \tau) + K_{4,x}(\tau, \theta, \tau + \theta)] d\theta.$$

Здесь $K_{4,x}$ — четвертый совместный кумулянт случайного процесса $X(t)$, характеризующий вероятностную связь между четырьмя значениями процесса (для гауссовских процессов $K_{4,x} = 0$).

Для достаточно широкого класса случайных процессов значение $K_{4,x}$ пропорционально эксцессу распределения самого случайного процесса $X(t)$ [14]. Для случайных процессов с положительным эксцессом ($\gamma_2 > 0$) дисперсия $R^*_{xy}(\tau, T)$ и доверительные интервалы увеличиваются, а для процессов с отрицательным эксцессом ($\gamma_2 < 0$) — уменьшаются по сравнению с дисперсией и доверительными интервалами процесса с нормальным распределением.

Анализ гистограмм законов распределения промышленных случайных процессов показывает, что подавляющее большинство таких процессов имеет отрицательный эксцесс. Поэтому для построения доверительных интервалов можно пользоваться приведенными выше рекомендациями, относящимися к гауссовским процессам. При этом будет иметь место некоторое завышение доверительных интервалов. Однако оно распространяется лишь на малые τ , ибо значение $K_{4,x}$ быстро уменьшается с ростом τ и влияние негауссовости на доверительные интервалы становится пренебрежимо малым.

7. ВЫБОР ДЛИНЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Дисперсия оценки взаимной корреляционной функции стационарных эргодических случайных процессов имеет вид (12). Основная трудность определения дисперсии в этом случае, так же как и в случае корреляционной функции, заключается в необходимости вычисления моментов четвертого порядка для сигнала и помехи.

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — эргодические, гауссовские, стационарные и стационарно связанные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_x^2 , σ_y^2 . Дисперсия оценки их взаимной корреляционной функции определяется выражением (17).

Оценка дисперсии по формуле (17) — задача также довольно трудная, так как интеграл в ней весьма сложен для вычисления. Относительно простые соотношения можно получить для дисперсии $R^*_{xy}(\tau, T)$ в точках $\tau > \tau_{\text{кор}}$ и $\tau = 0$. Полагая в (17) $\tau \geq \tau_{\text{кор}}$, будем иметь:

$$D[R^*_{xy}(\tau_{\text{кор}}, T)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_x(\theta) R_y(\theta) d\theta \quad (53)$$

или

$$D[R^*_{xy}(\tau_{\text{кор}}, T)] = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_y^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \rho_y(\theta) d\theta. \quad (54)$$

Подынтегральное выражение для эргодических процессов представляет собой быстро убывающую функцию. Поэтому соотношение (54) справедливо и для $\tau = \tau_{\text{кор}}$, определяемого из условия $\rho_{xy}(\tau_{\text{кор}}) = 0,05$. При достаточно больших T

$$D[R^*_{xy}(\tau_{\text{кор}}, T)] \approx \frac{2\sigma_x^2 \sigma_y^2}{T} \int_0^\infty \rho_x(\theta) \rho_y(\theta) d\theta. \quad (55)$$

Формула (54) применима как при $\tau > 0$, так и при $\tau < 0$, т. е. предельные значения дисперсии оценки $R^*_{xy}(\tau)$ при $|\tau| \geq \tau_{\text{кор}}$ одинаковы.

При $\tau=0$

$$D[R_{xy}^*(0, T)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [R_x(\theta) R_y(\theta) + R_{xy}^*(\theta) R_{yx}(\theta)] d\theta. \quad (56)$$

Для получения упрощенных формул дисперсии при $|\tau| < |\pm \tau_{\text{кор}}|$ были использованы простые аппроксимации точных формул. Анализ дисперсий ряда оценок взаимных корреляционных функций случайных процессов с дробно-рациональными спектральными плотностями (34), (35) показал, что кривые дисперсии удовлетворительно аппроксимируются сравнительно простой формулой [11]

$$D[R_{xy}^*(\tau, T)] \approx (2B\sigma_x^2\sigma_y^2/T) [1 + a^2_{xy}(\tau, T)], \quad (57)$$

где коэффициент B определяется по выражению

$$B = TD[R_{xy}^*(\tau_{\text{кор}}, T)]/\sigma_x^2\sigma_y^2 = \int_0^\infty \rho_x(\theta)\rho_y(\theta) d\theta, \quad (58)$$

а постоянную a можно найти по методу наименьших квадратов.

Коэффициент B можно оценить по приближенной формуле

$$B \approx \int_0^{\tau_{\text{кор. мин}}} \rho_x^*(\theta)\rho_y^*(\theta) d\theta. \quad (59)$$

Здесь $\tau_{\text{кор. мин}}$ — наименьший из двух интервалов корреляции корреляционных функций $\rho_x(\theta)$, $\rho_y(\theta)$.

Ввиду того что найденная дисперсия оценки корреляционной функции также представляет собой лишь оценку, а сама исследуемая оценка лишь приближенно нормальна, неблагоприятно искать ошибку в оценке с большой степенью точности. Поэтому для случайных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью с погрешностью аппроксимации дисперсии не более 10% можно принять a постоянным и равным 1,5.

Формула (57) является точной при $|\tau| \geq |\pm \tau_{\text{кор}}|$.

Квадрат коэффициента изменчивости определяется выражением

$$F^2_{R_{xy}} \approx \frac{2B}{T} \left[1,5 + \frac{1}{\rho_{xy}^2(\tau)}\right]. \quad (60)$$

Отсюда при известном $F_{R_{xy}}$ можно найти необходимую длину реализации:

$$T \approx \frac{2B}{F^2_{R_{xy}}} \left[1,5 + \frac{1}{\rho_{xy}^2(\tau)}\right]. \quad (61)$$

8. ВЫБОР ДЛИНЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассмотрим частные случаи оценки точности взаимных корреляционных функций применительно к задаче идентификации линейных стационарных объектов при действии случайных помех $N(t)$ (рис. 10). Для упрощения будем считать, что входной (опорный) сигнал $v(t)$ и помеха $N(t)$ стационарны, не коррелированы и имеют нулевые средние значения. Тогда выходной сигнал $Y(t)$ будет также стационарным.

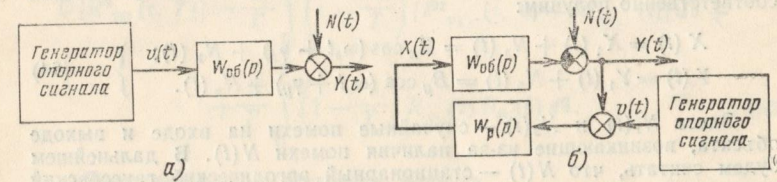


Рис. 10. Схемы идентификации объекта.

а — в разомкнутой системе; б — в замкнутой системе.

Взаимная корреляционная функция между опорным $v(t)$ и выходным сигналом $y(t)$ будет равна:

$$R_{vy}(\tau) = \int_0^\infty k_{об}(\tau) R_v(\tau - t) dt \quad (62)$$

для схемы на рис. 10, а и

$$R_{vy}(\tau) = \int_0^\infty k_{об}(\tau) R_{vx}(\tau - t) dt \quad (63)$$

для схемы на рис. 10, б.

В (62) и (63) $k_{об}(t)$ — импульсная характеристика объекта, обращающаяся в нуль на отрицательной полуоси t . Для определения $k_{об}(t)$ необходимо вычислить взаимные корреляционные функции между опорным сигналом $v(t)$ и сигналами $x(t)$, $y(t)$.

При идентификации корреляционные функции вычисляются по конечной длине реализации T и полученные оценки $R_{vx}^*(\tau, T)$, $R_{vy}^*(\tau, T)$ будут зависеть от T и свойств опорного сигнала и помехи.

Во многих задачах идентификации мощность опорного сигнала приходится выбирать такой, чтобы не происходило существенного нарушения режима нормальной эксплуатации объекта. Вследствие этого сигнал на выходе и помеха могут иметь мощности одного порядка. В подобной ситуации для получения лучшего отношения сигнала к помехе применяют корреляционный метод.

Выбор типа опорного сигнала зависит от поставленной задачи, методов ее решения и конкретных особенностей объекта. Например, при определении частотных характеристик используют гармонический сигнал [1], стационарные случайные сигналы [41] или псевдослучайные бинарные последовательности различных типов [22, 42].

Ниже исследуются погрешности оценок взаимных корреляционных функций для следующих опорных сигналов: гармонической функции, псевдослучайного бинарного сигнала и случайного сигнала с гауссовским распределением.

Опорный сигнал — гармоническая функция

При подаче на систему (рис. 10,б) гармонического сигнала $v(t) = A \cos \omega_0 t$ с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$ на входе и выходе объекта соответственно получим:

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X_1(t) + N_1(t) = B_x \cos(\omega_0 t + \varphi_x) + N_1(t); \\ Y(t) &= Y_1(t) + N_2(t) = B_y \cos(\omega_0 t + \varphi_y) + N_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Здесь $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — случайные помехи на входе и выходе объекта, возникающие из-за наличия помехи $N(t)$. В дальнейшем будем считать, что $N(t)$ — стационарный эргодический гауссовский процесс с нулевым средним.

Так как $v(t)$ и $N(t)$ не коррелированы, то

$$R_{vx}(\tau) = \frac{AB_x}{2} \cos(\omega_0 \tau + \varphi_x); \quad (65)$$

$$R_{vy}(\tau) = \frac{AB_y}{2} \cos(\omega_0 \tau + \varphi_y); \quad (66)$$

$$R_{vv}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (67)$$

Из этих формул можно определить модуль и фазу вектора частотной характеристики объекта:

$$M_{об}(\omega_0) = \frac{\max |R_{vy}(\tau)|}{\max |R_{vx}(\tau)|} = \frac{B_y}{B_x};$$

$$\varphi_{об}(\omega_0) = \varphi_y(\omega_0) - \varphi_x(\omega_0).$$

Точность оценки характеристик $M_{об}(\omega)$ и $\varphi_{об}(\omega)$ зависит от точности оценок взаимных корреляционных функций $R^*_{vx}(\tau, T)$, $R^*_{vy}(\tau, T)$. Задача исследования точности оценок взаимных корреляционных функций при идентификации объекта в замкнутой системе мало отличается от той же задачи при идентификации объекта в разомкнутой системе. В дальнейшем ограничимся исследованием точности оценки $R^*_{vy}(\tau, T)$ при идентификации объекта в разомкнутой системе. Для получения характеристик точности оценки $R^*_{vx}(\tau, T)$ надо в формулах оценок точности заменить индекс y на x .

Пусть помеха $N(t)$ и сигнал $v(t)$ являются стационарными функциями с нулевыми средними значениями. Тогда математическое ожидание и дисперсия оценки $R^*_{vy}(\tau)$ можно найти по формулам

(7) и (12), подставив вместо $X(t)$, $N_1(t)$ соответственно $v(t)$ и $N_1(t) = 0$.

Математическое ожидание оценки $R^*_{vy}(\tau, T)$ является асимптотически несмещенной оценкой $R^*_{vy_1}(\tau, T)$. Действительно, по формуле (7) получим:

$$M[R^*_{vy}(\tau, T)] = \frac{1}{T} \int_0^T M\{[Y_1(t) + N(t)]v(t + \tau)\} dt = R_{vy_1}(\tau).$$

Дисперсия оценки $R^*_{vy}(\tau, T)$ будет равна:

$$\begin{aligned} D[R^*_{vy}(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P^2_{vy_1}(\tau, \theta) - R^2_{vy_1}(\tau)] d\theta + \\ &+ \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_{y_1}(\theta) R_n(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (68)$$

Вычислим момент четвертого порядка

$$\begin{aligned} P^2_{vy_1}(\tau, \theta) &= M[v(t_1)v(t_2)Y_1(t_3)Y_1(t_4)] = \\ &= M[A^2 \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 B^2 \cos(\omega_0 t_3 + \varphi) \cos(\omega_0 t_4 + \varphi)] = \\ &= \frac{A^2 B^2}{2} [M\{\cos \omega_0(t_1 + t_2 - t_3 - \varphi/\omega_0) + \cos \omega_0(t_2 + t_3 - t_1 + \varphi/\omega_0) + \\ &+ \cos \omega_0(t_1 + t_3 - t_2 + \varphi/\omega_0) + \cos \omega_0(t_1 + t_2 + t_3 + \varphi/\omega_0)\} \times \\ &\times \cos(\omega_0 t_4 + \varphi)] = \frac{A^2 B^2}{8} \{\cos \omega_0(t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - 2\varphi/\omega_0) + \\ &+ \cos \omega_0(t_2 + t_3 - t_1 - t_4) + \cos \omega_0(t_1 + t_3 - t_2 - t_4)\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Обозначив $t_1 - t_2 = \theta$, $t_3 - t_4 = \theta$, $t_2 - t_3 = \tau - \theta$, $t_1 - t_4 = \tau + \theta$, будем иметь:

$$P^2_{vy_1}(\tau, \theta) = \frac{A^2 B^2}{8} \{\cos 2\omega_0 \theta + \cos 2(\omega_0 \tau - \varphi) + 1\}. \quad (70)$$

Подставив (70), (66) в (68) и произведя некоторые преобразования, найдем:

$$\begin{aligned} D[R^*_{vy}(\tau, T)] &= \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \theta) \frac{A^2 B^2}{8} \{\cos 2\omega_0 \theta + \\ &+ 2 \sin 2\omega_0 \tau \sin 2\varphi\} d\theta + \frac{A^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_n(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (71)$$

Отметим, что первый член соотношения (71) — периодическая функция, не стремящаяся к нулю при $T \rightarrow \infty$ [процессы $v(t)$ и $Y(t)$, будучи эргодическими по отношению к математическому ожиданию, не эргодичны по отношению к корреляционной функции].

Дисперсия (71) при $\tau=0$ не зависит от фазы φ . Если оценка вычисляется по длине реализации, кратной целому числу периодов, то первый член дисперсии (71) обращается в нуль при любых τ . Действительно, при целом числе периодов:

$$\begin{aligned} R_{vy}^*(\tau, T) &= \frac{1}{T} \int_0^T [B \cos(\omega_0 t + \varphi) + n(t)] A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) dt = \\ &= \frac{AB}{2} \cos(\omega_0 \tau + \varphi) + \frac{A}{T} \frac{\sin(2\omega_0 T + \omega_0 \tau + \varphi)}{2\omega_0} - \\ &- \frac{A}{T} \frac{\sin(\omega_0 \tau + \varphi)}{2\omega_0} + \frac{A}{T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 (t + \tau) dt = \\ &= \frac{AB}{2} \cos(\omega_0 \tau + \varphi) + \frac{A}{T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 (t + \tau) dt. \end{aligned} \quad (72)$$

Отсюда

$$D[R_{vy}^*(\tau, T)] = \frac{A^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_n(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \quad (73)$$

Если применить для оценки частотных характеристик объекта метод, изложенный в [1], то достаточно найти взаимные корреляционные функции только в точке $\tau=0$. Для определения амплитуды и фазы объекта на частоте ω_0 надо вычислить:

$$R_{v_1y}(0, \omega_0) = \frac{AB}{2} \cos \varphi = \frac{A^2}{2} U(\omega_0); \quad (74)$$

$$R_{v_2y}(0, \omega_0) = \frac{AB}{2} \sin \varphi = \frac{A^2}{2} V(\omega_0). \quad (75)$$

Здесь $U(\omega_0)$ и $V(\omega_0)$ — действительная и мнимая частотные характеристики объекта.

Из уравнений (74), (75) получаем:

$$M_{05}(\omega_0) = \frac{2}{A^2} [R_{v_1y}^2(0, \omega_0) + R_{v_2y}^2(0, \omega_0)]^{1/2} = [U^2(\omega_0) + V^2(\omega_0)]^{1/2};$$

$$\varphi_{05}(\omega_0) = \arctg \frac{V(\omega_0)}{U(\omega_0)} = \arctg \frac{R_{v_2y}(0, \omega_0)}{R_{v_1y}(0, \omega_0)}.$$

Из (72) видно, что оценки $U^*(\omega_0)$, $V^*(\omega_0)$, а значит, и $M_{05}^*(\omega_0)$, $\varphi_{05}^*(\omega_0)$ при конечном T будут смещенными,

Для дисперсии оценок $U^*(\omega_0)$, $V^*(\omega_0)$ на основе (73) — (75) при целом числе периодов получим:

$$D[U^*(\omega_0)] = D[V^*(\omega_0)] = \frac{4}{A^2 T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_n(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \quad (76)$$

Интеграл (76) с точностью до постоянного коэффициента при $T \gg \tau_{\text{кор}}$ представляет собой спектральную плотность помехи на частоте ω_0 . Следовательно,

$$D[U^*(\omega_0)] = D[V^*(\omega_0)] = \frac{2S_n(\omega_0)}{A^2 T}. \quad (77)$$

Подставив (77), (74) и (75) в выражение для коэффициента изменчивости (см. § 4), получим:

$$F_U = \frac{V_2}{B \cos \varphi} \left[\frac{S_n(\omega_0)}{T} \right]^{1/2}; \quad (78)$$

$$F_V = \frac{V_2}{B \sin \varphi} \left[\frac{S_n(\omega_0)}{T} \right]^{1/2}. \quad (79)$$

Формулы (78), (79) позволяют найти необходимую длину реализации T при заданном коэффициенте изменчивости F .

Заметим, что $U^*(\omega_0)$ и $V^*(\omega_0)$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения. $M_{05}^*(\omega_0)$ и $\varphi_{05}^*(\omega_0)$ — модуль и фаза плоского вектора с независимыми, нормально распределенными компонентами, имеющими одинаковые дисперсии. Отсюда $M_{05}^*(\omega_0)$ будет иметь обобщенное релеевское распределение.

Опорный сигнал — псевдослучайная бинарная последовательность

Как и в предыдущем случае, рассмотрим только оценку взаимной корреляционной функции $R_{vy}^*(\tau, T)$ для разомкнутой системы (см. рис. 10,а). Дисперсия оценки определяется формулой (68).

Если бинарный сигнал синтезирован на основе линейных рекуррентных последовательностей, то его корреляционная функция имеет периодический характер с известным значением дисперсии хвостовой части (рис. 11). Отсюда следует, что и дисперсия взаимной корреляционной функции при отсутствии помехи также будет заранее известна. Поэтому выражение для дисперсии оценки (68) можно рассматривать без первого интеграла, так как на него можно ввести коррекцию в оценку взаимной корреляционной функции. Как правило, такая коррекция не обязательна ввиду того, что дисперсия хвостовой части корреляционной функции равна σ_v^2/N [22].

Таким образом, дисперсия оценки $R_{vy}(\tau, T)$ практически зависит только от помехи:

$$D[R_{vy}(\tau, T)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_v(\theta) R_n(\theta) d\theta. \quad (80)$$

Здесь

$$R_v(\tau) = \begin{cases} \sigma_v^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta}\right) & \text{при } 0 < |\tau| \leq \Delta; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \Delta. \end{cases} \quad (81)$$

Пусть помеха описывается корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = \sigma_n^2 \rho_n(\tau).$$

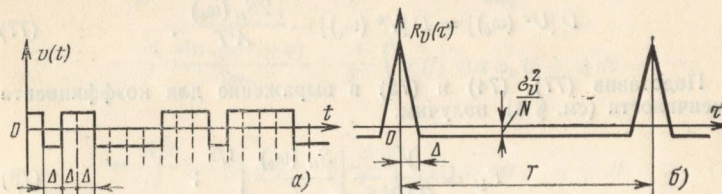


Рис. 11. Бинарный псевдослучайный сигнал.
а — реализация; б — корреляционная функция.

Тогда

$$D[R^*_{vy}(\tau, T)] = \frac{2\sigma_v^2 \sigma_n^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \left(1 - \frac{\theta}{\Delta}\right) \rho_n(\theta) d\theta. \quad (82)$$

При $T > \Delta > \tau$ получим:

$$D[R^*_{vy}(\tau, T)] = \frac{2\sigma_v^2 \sigma_n^2}{T} \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{\theta}{\Delta}\right) \rho_n(\theta) d\theta. \quad (83)$$

Следует отметить, что в промышленных системах автоматического регулирования максимальная мощность помех имеет место в диапазоне частот, низкочастотном по отношению к частотам объекта. С другой стороны, опорный сигнал $v(t)$ синтезируют так, чтобы он являлся по отношению к объекту белым шумом. Отсюда можно утверждать, что длительность тактового интервала Δ во много раз меньше интервала корреляции $\tau_{кор}$ корреляционной функции помехи, т. е. значение $R_n(\tau)$ на интервале Δ практически постоянно. Поэтому

$$D[R^*_{vy}(\tau, T)] \leq \frac{2\sigma_v^2 \sigma_n^2}{T} \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{\theta}{\Delta}\right) d\theta. \quad (84)$$

Произведя интегрирование в (84), получим:

$$D[R^*_{vy}(\tau, T)] \leq \sigma_v^2 \sigma_n^2 \frac{\Delta}{T}. \quad (85)$$

Выражение (85) показывает, что дисперсия взаимной корреляционной функции при фиксированной длине реализации тем меньше, чем меньше Δ , т. е. чем ближе опорный сигнал к белому шуму. Но это лишь кажущееся повышение точности оценки $R^*_{vy}(\tau, T)$, так как при постоянном значении дисперсии сигнала $v(t)$ с уменьшением Δ уменьшаются и абсолютные значения ординат оценки $R^*_{vy}(\tau, T)$.

Для выяснения степени влияния величины Δ на точность оценки необходимо рассмотреть коэффициент изменчивости

$$F_{R_{vy_1}} = \frac{\sigma_n \sigma_v}{R_{vy_1}(\tau)} \left[\frac{\Delta}{T} \right]^{1/2}. \quad (86)$$

Исследуем на простейшем примере количественную зависимость между Δ и $F_{R_{vy_1}}$. Пусть опорный сигнал $v(t)$ подается на вход объекта, переходная характеристика которого имеет вид:

$$h(t) = 1 - e^{-t/T_{об}}. \quad (87)$$

Тогда

$$R_{vy_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} h(\tau - t) R'_v(t) dt. \quad (88)$$

Подставив (87) и (81) в (88), получим:

$$R_{vy_1}(\tau) = \begin{cases} \sigma_v^2 \left[\frac{\tau}{\Delta} + 1 - \frac{T_{об}}{\Delta} \left(1 - e^{-\frac{\tau + \Delta}{T_{об}}}\right) \right] & \text{при } -\Delta < \tau < 0; \\ \sigma_v^2 \left\{ 1 - \frac{\tau}{\Delta} + \frac{T_{об}}{\Delta} \left[1 + e^{-\frac{\tau}{T_{об}}} \left(e^{-\frac{\Delta}{T_{об}}} - 2 \right) \right] \right\} & \text{при } 0 < \tau < \Delta; \\ \sigma_v^2 \frac{T_{об}}{\Delta} \left(e^{-\frac{2\Delta}{T_{об}}} - 2e^{-\frac{\Delta}{T_{об}}} + 1 \right) & \text{при } \tau > \Delta. \end{cases} \quad (89)$$

Для конкретности рассмотрим $R_{vy_1}(\tau)$ в точке $\tau = 0$. Из (89) найдем:

$$R_{vy_1}(0) = \sigma_v^2 \left[1 - \frac{T_{об}}{\Delta} (1 - e^{-\Delta/T_{об}}) \right].$$

Разложим $e^{-\Delta/T_{об}}$ в ряд Тейлора. После простейших преобразований будем иметь:

$$R_{vy_1}(0) = \sigma_v^2 \frac{\Delta}{T_{об}} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \frac{\Delta}{T_{об}} + \dots \pm \frac{1}{n!} \left(\frac{\Delta}{T_{об}} \right)^{n-2} \mp \dots \right]. \quad (90)$$

Так как $\Delta \ll T_{об}$, в (90) можно ограничиться первым членом, поэтому

$$R_{vy_1}(0) \approx \sigma_v^2 \frac{\Delta}{2T_{об}}. \quad (91)$$

Подставляя (91) в (86), получаем:

$$F_{R_{vy_1}} \approx \frac{2\sigma_n T_{об}}{\sigma_v} \left[\frac{1}{\Delta T} \right]^{1/2}. \quad (92)$$

Отсюда видно, что при достаточно малых Δ коэффициент изменчивости оценки $F_{R_{vy_1}}$ тем больше, чем меньше Δ .

Опорный сигнал — гауссовский процесс

Дисперсия оценки взаимной корреляционной функции при идентификации по разомкнутой схеме (рис. 10,а) определяется соотношением (68). Подставив в (68) выражение (57) при $a=1,5$ и $x=v$, получим:

$$D[R^*_{vy}(\tau, T)] \leq \frac{1}{T} \{2\sigma_v^2 \sigma_{y_1}^2 B[1 + 1,5\rho_{vy_1}^2(\tau)] + 2\sigma_v^2 \sigma_n^2 A\}. \quad (93)$$

Здесь

$$A = \int_0^\infty \rho_v(\theta) \rho_n(\theta) d\theta.$$

С учетом (93) коэффициент изменчивости будет иметь вид:

$$F^2_{R_{vy_1}} \approx \frac{2}{T\rho_{vy_1}^2(\tau)} \left\{ B[1 + 1,5\rho_{vy_1}^2(\tau)] + \frac{\sigma_n^2 A}{\sigma_{y_1}^2} \right\}. \quad (94)$$

Отсюда необходимая длина реализации

$$T \approx \frac{2}{F^2_{R_{vy_1}} \rho_{vy_1}^2(\tau)} \left\{ B[1 + 1,5\rho_{vy_1}^2(\tau)] + \frac{\sigma_n^2 A}{\sigma_{y_1}^2} \right\}. \quad (95)$$

Формулы (93), (94) могут быть применены и для оценки дисперсии и коэффициента изменчивости оценок взаимных корреляционных функций в задачах идентификации объектов по данным пассивных экспериментов, так как в этом случае есть основание предполагать, что процессы гауссовские.

Проведенный анализ показывает, что точность оценки взаимной корреляционной функции в задаче идентификации в значительной степени зависит от характера полезного сигнала и помехи. В отношении составляющей коэффициента изменчивости, обусловленной влиянием помехи, все сигналы (детерминированные и случайные) эквивалентны. Однако общая погрешность оценки $R_{vy_1}(\tau)$ меньше при детерминированных и псевдослучайных сигналах. В этом случае составляющая погрешности, зависящая только от свойств опорного сигнала, всегда может быть заранее учтена или подбором вида сигнала сведена к нулю.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

До сих пор мы предполагали, что статистические характеристики случайного процесса известны, и, исходя из этого, определяли необходимую длительность эксперимента. Анализ случайного процесса будет, по всей вероятности, бесполезным, если исследователь не имеет модели этого процесса. С точки зрения практики познания такой подход является естественным. Действительно, прежде чем произвести первое наблюдение даже простейшей независимой величины, мы должны указать, каковы природа и свойства этой величины, т. е. использовать априорную информацию. Чем полнее априорная информация, тем точнее и с меньшими затратами труда можно получить необходимые данные. Поэтому большое значение имеет формализация методов сбора, обработки и использования априорной информации. На основе анализа этой информации составляется модель исследуемого процесса, выбирается аппаратура, разрабатывается методика проведения эксперимента. Однако числовые значения случайного процесса, которые нужны для оценки необходимой длины реализации, шага дискретности, скорости записи реализации на диаграммной бумаге, установить не удается. В этих условиях для пополнения информации прибегают к многократной процедуре обработки экспериментальных данных. По первой, произвольной, записи реализации вычисляют оценки статистических характеристик, по которым планируют новый эксперимент, и т. д. Такие многократные повторные вычисления характеристик требуют больших затрат труда.

Число повторных приближений можно значительно уменьшить, если найти дополнительный источник априорной информации, позволяющий определить грубую оценку интересующей нас характеристики случайного процесса. В большинстве случаев таким источником информации могут служить особые точки (нули, экстремумы и точки перегиба) случайного процесса. Особые точки ценны тем, что их характеристики могут быть получены независимо от корреляционной функции и несут дополнительную информацию, которая позволяет совместно с оценкой корреляционной функции более полно охарактеризовать случайный процесс.

В этой главе рассматриваются возможности математического описания случайных процессов на основе использования информации об особых точках.

9. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСОБЫХ ТОЧЕК СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

К статистическим характеристикам особых точек случайного процесса относятся: среднее число пересечений n_{ex} процессом $X(t)$ заданного уровня C , среднее число максимумов m_{0x} , среднее число перегибов λ_{0x} .

Рассмотрим характеристики особых точек для стационарного гауссовского процесса $X(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $R_x(\tau)$.

Среднее число пересечений стационарным гауссовским процессом $X(t)$ заданного уровня C определяется соотношением [30, 39]

$$n_{cx} = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{R'_x(\tau)}{\sqrt{1 - R_x^2(\tau)}} \right] e^{-\frac{c^2}{2\sigma^2 x}}. \quad (96)$$

Для дифференцируемых в среднеквадратичном процессах, применив к выражению (96) правило Лопиталя, получим:

$$n_{cx} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-R''_x(0)}{R_x(0)} \right] \frac{1}{2} e^{-\frac{c^2}{2\sigma^2 x}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\rho''_x(0)} e^{-\frac{c^2}{2\sigma^2 x}}. \quad (97)$$

Здесь $R''_x(\tau) = d^2 R_x(\tau) / d\tau^2$.

Принимая $C=0$, находим среднее число пересечений процессом нулевого уровня в единицу времени (среднее число нулей):

$$n_{0x} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-R''_x(0)}{R_x(0)} \right]^{1/2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\rho''_x(0)} = \frac{1}{\pi \sigma^2 x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \right]^{1/2}. \quad (98)$$

Среднее число максимумов m_{0x} представляет собой среднее число нулей n_{10x} положительной производной процесса. Применяя (96) к производной процесса $X(t)$, будем иметь:

$$n_{10x} = n_{0\dot{x}} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{R'_x(\tau)}{\sqrt{1 - R_x^2(\tau)}} \right], \quad (99)$$

где $\dot{x} = dx/dt$. Для дважды дифференцируемых процессов

$$m_{0x} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R_x^{(IV)}(0)}{-R''_x(0)} \right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\rho_x^{(IV)}(0)}{-\rho''_x(0)} \right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega} \right]^{1/2}. \quad (100)$$

Общее среднее число максимумов и минимумов процесса равно удвоенному значению m_{0x} и представляет собой среднее число нулей производной процесса $n_{0\dot{x}}$.

Аналогичным образом можно определить характеристики особых точек для k -й производной процесса. Отметим, что большинство случайных процессов в промышленных системах автоматического управления удовлетворяет условиям неограниченной дифференцируемости и, следовательно, имеет конечное число особых точек производной

любого порядка. Однако ввиду ограниченной разрешающей способности физических приборов непосредственным прямым подсчетом удастся оценить характеристики особых точек не выше второго порядка, т. е. n_{0x} , m_{0x} .

В дальнейшем будет использоваться еще одна характеристика особых точек — отношение среднего числа максимумов к среднему числу нулей случайного процесса: $z = m_{0x}/n_{0x}$. Эта характеристика может служить «мерой колебательности» случайного процесса.

Значение z может изменяться от 0,5 до ∞ . При этом $z = \infty$ соответствует однократно дифференцируемому процессу, а $z = 0,5$ соответствует гладкому случайному процессу, подобному синусоиде. Действительно, для процесса с корреляционной функцией вида

$$\rho_x(\tau) = \frac{1}{1 - \beta} (e^{-\gamma|\tau|} - e^{-\gamma|\tau|/\beta})$$

имеем:

$$n_{0x} = \frac{\gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\beta}}, \quad m_{0x} = \infty, \quad z = \infty.$$

Для синусоидальной функции $X(t) = A \sin \omega t$, $n_{0x} = \omega/\pi$, $m_{0x} = \omega/2\pi$, $z = 0,5$.

Отсюда следует, что чем больше значение z , тем сильнее изрезан процесс.

Из формул (98), (100) видно, что характеристики особых точек определяются через корреляционные функции самого случайного процесса и его производных. Если оценить характеристики особых точек любых порядков, то получим такую же полную информацию о процессе, какую можем получить по корреляционной функции и спектральной плотности. При этом особые точки дают информацию о производных корреляционной функции в виде чисел, получение которых по экспериментальным кривым оценки корреляционной функции требует предварительной аппроксимации $R_x(\tau)$ аналитическим выражением.

Изложим некоторые способы оценки характеристик случайного процесса на основе использования информации о его особых точках.

10. ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ОСОБЫМ ТОЧКАМ

Оценка дисперсии

Используем для оценки дисперсии среднее число пересечений процессом заданного уровня C :

$$n_{cx} = n_{0x} e^{-\frac{c^2}{2\sigma^2 x}}. \quad (101)$$

Отсюда

$$\sigma^2_x = \frac{C^2}{2 \ln \frac{n_{cx}}{n_{0x}}}. \quad (102)$$

Таким образом, для оценки дисперсии достаточно измерить среднее число пересечений процессом двух заданных уровней.

Оценка корреляционной функции при малых сдвигах

Разложим корреляционную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $\tau=0$:

$$R_x(\tau) = R_x(0) + \frac{1}{2!} R''_x(0) \tau^2 + \frac{1}{4!} R^{(IV)}_x(0) \tau^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{(2n)}_x(0)}{(2n)!} \tau^{2n}. \quad (103)$$

При малых τ можно ограничиться тремя членами разложения в ряд:

$$R_x(\tau) = R_x(0) + \frac{1}{2} R''_x(0) \tau^2 + \frac{1}{24} R^{(IV)}_x(0) \tau^4 + O(\tau^6).$$

Выразив производные корреляционной функции через характеристики особых точек, получим:

$$R^*_x(\tau) = R_x(0) - \frac{1}{2} R_x(0) n^2_{0x} \tau^2 + \frac{1}{6} R_x(0) \pi^4 n^2_{0x} m^2_{0x} \tau^4 = \sigma^2_x \left(1 - \frac{1}{2} n^2_{0x} \tau^2 + \frac{1}{6} n^2_{0x} m^2_{0x} \tau^4 \right). \quad (104)$$

Выражение (104) представляет собой знакочередующийся ряд. При достаточно малых τ члены этого ряда убывают и для оценки остаточного члена ряда можно воспользоваться свойством знакочередующихся рядов, согласно которому остаточный член сходящегося знакочередующегося ряда имеет знак первого отброшенного члена и меньше его по абсолютной величине. При малых τ для $\nu+1$ раз дифференцируемого случайного процесса можем записать:

$$R^*_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{R^{(2k)}_x(0)}{(2k)!} \tau^{2k} + \delta_{\nu}(\tau), \quad (105)$$

где

$$|\delta_{\nu}(\tau)| \leq \left| \frac{R^{(2(\nu+1))}_x(0)}{[2(\nu+1)]!} \tau^{2(\nu+1)} \right| \quad (106)$$

— остаточный член ряда.

Определим, до каких значений τ применима формула (104). Кривая $R^*_x(\tau)$, построенная по (104), имеет точки минимума и перегиба с координатами τ_m и τ_n . С помощью формулы остаточного члена ряда нетрудно показать, что все ординаты оценки (104) при $\tau \leq \tau_n$ с большой точностью будут совпадать с истинными значениями корреляционной функции. При сдвигах $\tau > \tau_n$ различие между $R^*_x(\tau)$ и $R_x(\tau)$ становится заметным. При $\tau > \tau_m$ $R^*_x(\tau)$ стремится к бесконечности. Из (104) получаем:

$$\tau_n = \frac{1}{\pi m_{0x}} \sqrt{\frac{4}{3}}; \quad \tau_m = \frac{1}{\pi m_{0x}} \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (107)$$

Чем выше порядок последней непрерывной производной случайного процесса, тем больше (при неизменном $\tau_{кор}$) значение τ_n и, следовательно, $R^*_x(\tau)$ и $R_x(\tau)$ будут совпадать на большем интервале. Рассмотрим два примера. Пусть даны нормированные корреляционные функции:

$$\rho_{1x}(\tau) = (1 + |\tau| + \tau^2/3) e^{-|\tau|}; \quad (108)$$

$$\rho_{2x}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4} \right\}, \quad (109)$$

первая из которых соответствует дважды дифференцируемому, а вторая — бесконечно дифференцируемому процессу.

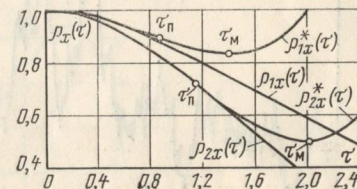


Рис. 12. Графики корреляционных функций $\rho_x(\tau)$ и их аппроксимаций $\rho^*_x(\tau)$ по особым точкам при малых τ .

Разложив функции (108) и (109) в ряд Тейлора и найдя производные в нуле, получим:

$$\rho^*_{1x}(\tau) = 1 - \tau^2/6 + \tau^4/24; \quad \tau_{1n} = \sqrt{2/3}; \quad (110)$$

$$\rho^*_{2x}(\tau) = 1 - \tau^2/4 + \tau^4/32; \quad \tau_{2n} = \sqrt{4/3}. \quad (111)$$

На рис. 12 изображены кривые $\rho_{1x}(\tau)$, $\rho^*_{1x}(\tau)$, $\rho_{2x}(\tau)$, $\rho^*_{2x}(\tau)$, построенные по соотношениям (108) — (111). Из рисунка видно, что при $\tau \leq \tau_n$ совпадение кривых достаточно хорошее. Например, для функции $\rho_{2x}(\tau)$ в точке $\tau = \tau_n$ абсолютная и относительная погрешности соответственно равны:

$$\Delta_{2x}(\tau_n) = 0,006; \quad \delta_{2x}(\tau_n) = 0,8\%.$$

Таким образом, для оценки $R_x(\tau)$ вблизи начала координат надо по реализации найти значения n_{0x} , m_{0x} и вычислить значение τ_n . Формулу (104) можно использовать без поправочного члена до $\tau = \tau_n$ и с учетом поправочного члена (106) до $\tau = \tau_m$.

11. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим некоторые приближенные методы оценки параметров корреляционной функции и спектральной плотности по характеристикам особых точек случайных процессов. Предлагаемые методы не требуют большой вычислительной работы и могут быть полезны как при планировании экспериментов по определению оценок $R_x(\tau)$ (определение длины реализации, шага дискретности по времени), так и при грубой оценке характеристик случайных сигналов в системах

регулирования. Следует отметить, что эти методы базируются на ряде допущений о классе и структуре случайного процесса, поэтому не во всех случаях удастся оценить погрешность приближения.

Будем искать априорные модели $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ в классе стационарных гауссовских процессов со спектральными плотностями (34), (35) и спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{(T^2 \omega^2 + 1)^k}, \quad (112)$$

где $k \geq 3$.

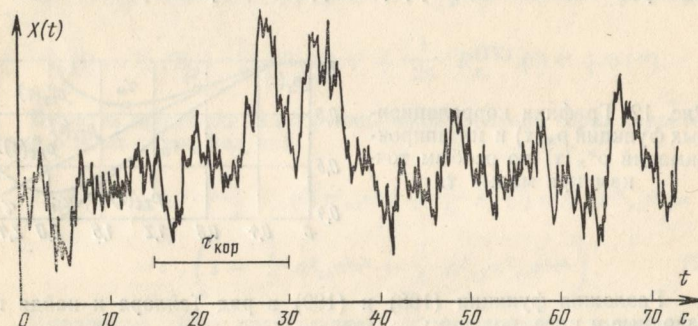


Рис. 13. Реализация процесса, близкого к нормальному марковскому, $\rho_x(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}$, $\gamma = 0,2$ 1/с, $\tau_{кор} = 15$ с.

Рассмотрим ряд встречающихся на практике ситуаций.

1. Реализация случайного процесса сильно «изрезана», подсчет максимумов невозможен, пересечения со средним значением имеют вид плотных серий, где отделить одно пересечение от другого и сосчитать нули также практически невозможно. В этом случае в (34), (36) можно принять $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда

$$\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|/T_0}. \quad (113)$$

Процесс с функцией $\rho_x(\tau)$ вида (113) является нормальным процессом Маркова. Среднее число нулей n_{0x} для такого процесса равно бесконечности. Из физических соображений ясно, что, несмотря на бесконечное число точек пересечений процессом среднего уровня, временами появляются интервалы конечной (не равной нулю) длительности. Бесконечное среднее число нулей объясняется тем, что пересечения располагаются сериями, в которых число пересечений бесконечно. Процесс, близкий к марковскому, приведен на рис. 13.

Из сказанного выше следует, что реальный физический процесс нельзя описать корреляционной функцией вида (113). Однако если в (34) β_1 и $\beta_2 \ll 1$, то реальный процесс в крупномасштабных явлениях приближается к марковскому и для исследования крупномасштабных явлений можно применить математический аппарат марковских процессов.

Интересующее нас значение T_0 можно оценить по среднему числу выбросов $n_b(\tau)$ длительности, выше заданной τ_b [38]:

$$n_b(\tau) = \frac{1}{\pi T_0} (e^{2\tau_b/T_0} - 1)^{-1/2}. \quad (114)$$

На рис. 14 приведена кривая $\tau_b n_b(\tau) = f(\tau_b/T_0)$, построенная по зависимости (114).

Из рис. 14 видно, что пара значений τ_b , $n_b(\tau)$ неоднозначно определяет значение T_0 . Для получения T_0 необходимо использовать две пары значений τ_b и $n_b(\tau)$. Можно рекомендовать следующий порядок действий при определении T_0 :

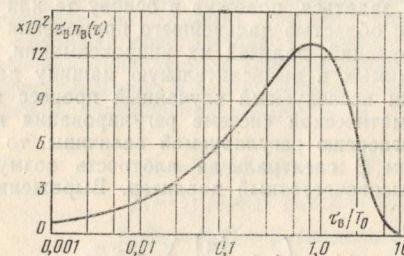


Рис. 14. К определению параметров нормального марковского процесса.

- 1) оценить ориентировочно среднее значение процесса;
- 2) задаться значением τ_{b1} и подсчитать все выбросы N_{b1} , τ выше длительности τ_{b1} на отрезке T ;
- 3) найти среднее число выбросов выше заданной длительности $n_{b1}(\tau) = N_{b1}/T$;
- 4) по значениям $\tau_{b1} n_{b1}(\tau)$ и τ_{b1} найти значения T_{011} и T_{012} ;
- 5) повторить п. 2—4 для τ_{b2} и найти T_{021} , T_{022} ;
- 6) из найденных пар значений T_0 выбрать два, близких между собой, и определить T_0 как их среднее арифметическое.

Условием применимости формулы (114) является малость по сравнению с T_0 суммы всех остальных постоянных времени формирующего фильтра. Косвенным критерием применимости (114) может служить близость осредняемых значений T_0 .

2. Реализация случайного процесса изрезана, достоверный подсчет максимумов практически невозможен, однако возможен подсчет числа нулей. В этом случае можно принять $\beta_2 = 0$. Тогда

$$\rho_x(\tau) = \frac{1}{1-\beta} (e^{-|\tau|/T_0} - \beta e^{-|\tau|/\beta T_0}). \quad (115)$$

Для определения двух неизвестных T_0 и β необходимы два уравнения. Первое уравнение нетрудно получить, подставив вторую производную выражения (115) в формулу (98). В результате этого получим:

$$T_0^2 \beta = \frac{1}{\pi^2 n_{0x}}. \quad (116)$$

В качестве второго уравнения можно воспользоваться соотношением (114), если задаться достаточно большой длительностью выброса τ_b . Чем больше β , тем больше надо выбирать τ_b . При $\tau_b n_b(\tau) < 0,01$ с погрешностью менее 3% вместо (114) можно записать:

$$\tau_b n_b(\tau) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\tau_b}{T_0(1+\beta)} e^{-\frac{\tau_b}{T_0(1+\beta)}}. \quad (117)$$

Если ограниченность длины реализации случайного процесса служит препятствием для сколько-нибудь достоверной оценки среднего числа выбросов $n_b(\tau)$, то задача априорного определения характеристик модели случайного процесса (115) осложняется и значением β придется задаться, положив в основу те или иные соображения, связанные с областью дальнейшего применения вычисляемых корреляционных функций, задач их аппроксимации, ограничениями на объем вводимых в вычислительную машину данных и т. п.

Например, если исследуемый случайный процесс является возмущением в автоматической системе регулирования и необходимо оценить сверху дисперсию регулируемой величины, то надо задаться $\beta=1$. При этом β спектральная плотность возмущения будет иметь наиболее высокочастотный характер. Выражение (115) примет вид:

$$\rho_x(\tau) = \left(1 + \frac{|\tau|}{T_0}\right) e^{-|\tau|/T_0}.$$

Если целью оценки параметров корреляционной функции по особым точкам является планирование эксперимента по определению математического ожидания или корреляционной функции процесса, то для оценки сверху погрешностей определения m_x и $\rho_x(\tau)$ надо принять $\beta \ll 1$. В частности, при $\beta=0,05$ дисперсия оценки математического ожидания будет завышена в 2,4 раза, а дисперсия оценки корреляционной функции — в 2 раза, если на самом деле $\beta=1$.

Минимально возможное β зависит и от возможности дальнейшей аппроксимации полученной оценки $\rho_x(\tau)$, определяемой максимально возможным числом точек отсчета m на интервале корреляции корреляционной функции и числом точек m_β на интервале корреляции экспоненты с показателем степени $|\tau|/T_0\beta$. Если принять в качестве минимально допустимого $m_\beta=2$, то для $\beta=0,1$ $m=30$; для $\beta=0,05$ $m=40$ и для $\beta=0,025$ $m=70$. Большое число точек на интервале корреляции корреляционной функции затрудняет как считывание ординат случайного процесса, так и дальнейшие вычисления на цифровой ЭВМ.

Практический опыт показывает, что применение модели (115) имеет смысл до $\beta_{\min} \approx 0,05 \div 0,03$. При меньших β ввиду близости процесса к марковскому можно ориентироваться на модель (113).

3. Реализация случайного процесса дает возможность произвести подсчет как нулей, так и максимумов. Этот случай с практической точки зрения наиболее важен, так как при правильном выборе скорости записи случайного процесса практически всегда удается наблюдать не только его нули, но и максимумы.

1) Если $z = m_{0x}/n_{0x} \geq 1,5$, то в качестве спектральной плотности такого случайного процесса можно принять выражение (34), а корреляционной функции — выражение (36).

Нули и максимумы дают только два уравнения для определения трех неизвестных: T_0 , β_1 и β_2 . Эти уравнения можно получить, подставляя вторую и четвертую производные выражения (36) в формулы (98), (100):

$$T_0^2 (\beta_1 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2) = \frac{1}{\pi^2 n_{0x}^2}; \quad (118)$$

$$T_0^2 \frac{\beta_1 \beta_2}{1 + \beta_1 + \beta_2} = \frac{1}{4\pi^2 m_{0x}^2}. \quad (119)$$

Для восполнения отсутствия третьего уравнения выражения (34) и (36) придется упростить, задавшись либо значением β_1 (β_2), либо соотношением между ними. При этом, как и в случае 2, в основу можно положить соображения, связанные с областью дальнейшего применения вычисляемых корреляционных функций, их вычислением и представлением в аналитическом виде.

Простейшие соотношения между β_1 и β_2 могут быть записаны так:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \text{ (модель 1);}$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta \text{ (модель 2);}$$

$$\beta_2/\beta_1 = \beta_1/1 = \beta \text{ (модель 3).}$$

Преобразуя с учетом этих соотношений (118) и (119), будем иметь:

для модели 1

$$\beta = (z^2 - 1,25) - \sqrt{(z^2 - 1,25)^2 - 1}; \quad (120)$$

$$T_0 = \frac{1}{\pi n_{0x} \sqrt{\beta(2+\beta)}}; \quad (121)$$

для модели 2

$$\beta = (z^2 - 1,25) - \sqrt{(z^2 - 1,25)^2 - 1}; \quad (122)$$

$$T_0 = \frac{1}{\pi n_{0x} \sqrt{2\beta + 1}}; \quad (123)$$

для модели 3

$$\beta = (z - 0,5) - \sqrt{(z - 0,5)^2 - 1}; \quad (124)$$

$$T_0 = \frac{1}{\pi n_{0x} \sqrt{\beta(1+\beta+\beta^2)}}. \quad (125)$$

Анализ $\int_0^\infty \rho_x(\tau) d\tau$, характеризующего дисперсию оценки математического ожидания случайного процесса [5], $\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) d\tau$, характеризующего дисперсию оценки корреляционной функции (см. § 5), и анализ интервала корреляции $\tau_{кор}$ для $\rho_x(\tau_{кор}) = 0,05$ в диапазоне $z = 1,5 \div 10,5$ показал, что для этих характеристик модель 1 является

оценкой сверху, модель 2 — оценкой снизу, а модель 3 занимает промежуточное положение. Таким образом, при необходимости оценить указанные характеристики «с запасом» надо ориентироваться на формулы (120), (121).

Анализ кривых спектральных плотностей показал, что наиболее низкочастотному процессу при $z=1,5+3,0$ соответствует модель 3, а при больших z — модель 1. Наиболее высокочастотному процессу во всем рассматриваемом диапазоне z соответствует модель 2. При-

Таблица 1
Значение коэффициента β

Модель	z						
	1,56	1,75	2,24	2,84	3,77	5,55	10,53
1,2	0,55	0,30	0,135	0,074	0,039	0,017	0,0046
3	0,71	0,50	0,32	0,22	0,16	0,10	0,05

менение той или иной модели определяется постановкой задачи исследования и ролью исследуемого случайного процесса. Так, например, при необходимости оценить сверху составляющую дисперсии ошибки регулирования в автоматической системе регулирования в случае $z=4$ надо принять модель 1, если это шум измерения, и модель 2, если это возмущающее воздействие.

В табл. 1 приведены некоторые значения z и соответствующие им β для моделей 1—3. Расчеты показывают, что при больших z и малых β аппроксимация экспериментальных корреляционных функ-

Таблица 2
Число точек m на интервале корреляции

Модель	z		
	1,7	2,84	5,55
1	6	37	121
2	11	44	188
3	10	44	207

ций выражением (36) требует очень малого шага дискретности случайного процесса, что затрудняет считывание его ординат и дальнейшие вычисления на цифровой ЭВМ. В табл. 2 приведено число точек m на интервале корреляции для минимально допустимого $m_2 = 2$ (см. случай 2) при разных z .

При аппроксимации экспериментальных корреляционных функций в случае больших z можно принять более простые модели вида (115) и даже вида (113), если это согласуется с целью определения корреляционной функции.

2) Если $\sqrt{3}/2 < z < 1,5$, то в качестве спектральной плотности такого случайного процесса можно принять выражение (112), которому соответствует корреляционная функция

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 e^{-|\tau|/T_0}}{T_0 2^{2k-1} (k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(2k-m-2)! (2\tau/T_0)^m}{m! (k-m-1)!}. \quad (126)$$

Подставив производные выражения (126) в (98) и (100), будем иметь:

$$n_{0x} = \frac{1}{\pi T_0} \sqrt{\frac{1}{2k-3}}; \quad (127)$$

$$m_{0x} = \frac{1}{2\pi T_0} \sqrt{\frac{3}{2k-5}}. \quad (128)$$

Из соотношений (127), (128) можно получить выражения для коэффициентов

$$T_0 = \frac{1}{\pi n_{0x}} \left[\frac{4z^2 - 3}{8z^2} \right]^{1/2}; \quad (129)$$

$$k = \frac{20z^2 - 9}{8z^2 - 6}. \quad (130)$$

3) Если $0,5 < z < \sqrt{3}/2$, то в качестве априорной модели корреляционной функции такого процесса надо выбрать осциллирующую корреляционную функцию (37). Подставив производные выражения (37) в (98) и (100), найдем:

$$n_{0x} = \frac{1}{\pi T_0} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha\beta}}; \quad (131)$$

$$m_{0x} = \frac{1}{2\pi T_0} \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}. \quad (132)$$

Одним из коэффициентов модели приходится задаться (например, коэффициентом α).

Если $\sqrt{3}/2 < z < 1,5$, но априорная информация о свойствах исследуемого случайного процесса заставляет предполагать, что его корреляционная функция будет иметь осциллирующий характер, то лучше использовать не модель (126), а тоже модель (37).

Таким образом, для грубой оценки параметров корреляционной функции и спектральной плотности необходимо:

1) записать в сжатом масштабе времени отрезок реализации случайного процесса длительностью T ;

- 2) оценить ориентировочно среднее значение процесса;
- 3) подсчитать общее число нулей N_{0x} и общее число максимумов M_{0x} ;
- 4) вычислить n_{0x} , m_{0x} по формулам: $n_{0x} = N_{0x}/T$; $m_{0x} = M_{0x}/T$;
- 5) определить меру колебательности процесса $z = m_{0x}/n_{0x}$;
- 6) по значению z выбрать вид априорной модели и определить параметры $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$.

Для аппроксимации экспериментальных корреляционных функций выражением (115) при малых β или выражением (36) при малых β_1 , β_2 (больших z) необходим весьма малый шаг дискретности по времени, что требует введения в вычислительную машину очень большого объема информации (см. табл. 2). Если же при аппроксимации использовать информацию о n_{0x} и m_{0x} , полученную по той же реализации (информацию, безвозвратно теряемую при дискретизации процесса), то можно значительно снизить требование к Δt_x , так как теперь нет необходимости детально описывать начальный участок корреляционной функции. Дополнительную информацию о среднем числе нулей и максимумов процесса можно использовать посредством соотношения (116) для модели (115) и соотношений (118), (119) для модели (36).

Высокочастотная помеха измерения $N(t)$, наложенная на изучаемый случайный процесс $X(t)$, размывает линию записи реализации и увеличивает наблюдаемое число нулей и максимумов [24]. Для исключения ошибок в оценке n_{0x} и m_{0x} , вызванных $N(t)$, можно применить фильтрацию низкочастотными фильтрами, например фильтром текущего среднего (см. § 15).

При грубой оценке n_{0x} и m_{0x} допустимо сглаживание реализации вручную.

В заключение заметим, что точность оценки характеристик случайного процесса по особым точкам зависит от точности оценок характеристик самих особых точек. Точные формулы дисперсии среднего числа особых точек приведены в [39]. Более удобные для практического применения приближенные формулы приведены в [21, 22]. Анализ точности оценок n_{0x} и m_{0x} показал, что она существенно зависит от вида и параметров корреляционной функции (спектральной плотности). Так, чтобы получить коэффициент изменчивости среднего числа нулей не более 10%, для (34) при $\beta_2=0$ (однократно дифференцируемый случайный процесс) надо иметь длину реализации не менее 150 нулей, если $\beta_1=0,1$, и не менее 90 нулей, если $\beta_1=1$. При повышении порядка дифференцируемости процесса необходима длина реализации уменьшается.

Например, для (34) при $\beta_1=\beta_2=1$ необходимое число нулей будет равно 60.

Для случайных процессов, соответствующих (35), необходимая длина реализации, выраженная через число нулей, меньше, чем для (34). Например, для $\alpha=0$ (однократно дифференцируемый случайный процесс) необходимое число нулей уменьшается от 90 до 9 при изменении β от 2 до 0,2.

Рассмотрение коэффициента изменчивости среднего числа максимумов показало, что длина реализации, необходимая для оценки среднего числа пересечений процессом нулевого уровня, достаточна и для оценки среднего числа максимумов, если его подсчитывать по общему среднему числу максимумов и минимумов.

При этом погрешность оценки m_{0x} будет меньше, чем погрешность n_{0x} .

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Оценка корреляционной функции, вычисленная по шаговому алгоритму, представляет собой ряд дискретных отсчетов в фиксированных точках τ_i . Эти точки разбивают интервал $[\tau_0, \tau_1]$ на l смежных (в общем случае неравных) подынтервалов $[\tau_0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, ..., $[\tau_{l-1}, \tau_l]$. При выборе шага дискретности необходимо оценить погрешность замены непрерывной корреляционной функции ее дискретами.

Под погрешностью дискретизации понимается погрешность интерполяции непрерывной функции по ее дискретным отсчетам.

Точность интерполяции промежуточных значений при данном шаге характеризуется методической и неустранимой погрешностями. Методическая погрешность зависит от типа интерполяционной формулы и числа ее членов, а неустраняемая — от точности исходных значений функции.

При выборе способа интерполяции приходится решать противоречивую задачу увеличения точности без чрезмерного повышения частоты отсчетов интерполируемой функции.

Сравнительная оценка точности различных интерполяционных формул показала, что в большинстве случаев этим противоречивым требованиям удовлетворяет линейная интерполяционная формула Лагранжа [21].

Если использовать остаточный член классической формулы Лагранжа, то можно получить удобные соотношения для определения связи шага дискретности Δt с методической погрешностью интерполяции η^0 промежуточных точек корреляционных и взаимных корреляционных функций стационарных и стационарно связанных случайных процессов.

Приведем сначала решение задачи для случая взаимной корреляционной функции.

Случайные процессы, между которыми определяется взаимная корреляционная функция, могут быть любой степени сложности. Примером могут служить процессы, исследуемые при идентификации систем по данным нормальной эксплуатации и по данным, полученным при подаче на систему сигналов от генераторов шума. Если в первом случае процессы на входе дифференцируемы, то во втором, как правило, стремятся применять недифференцируемый сигнал, близкий к белому шуму.

Введем некоторые ограничения на входной и выходной процессы. Положим, что выходной процесс $Y(t)$ формируется в результате фильтрации входного случайного процесса $X(t)$ линейной системой с постоянными параметрами. Далее будем считать, что входной и выходной процессы имеют конечные дисперсии, нулевые математические ожидания, а динамические свойства системы таковы, что выходной процесс имеет гауссовское распределение и дифференцируем по крайней мере дважды. При этих ограничениях решение задачи выбора шага дискретности будет зависеть от типа входного сигнала и алгоритма вычисления корреляционной функции.

Рассмотрим сначала непрерывно-шаговый алгоритм.

12. ВХОДНОЙ СИГНАЛ — ГАУССОВСКИЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Пусть заданы значения корреляционной функции в дискретных точках аргумента с шагом $\Delta\tau$. Построим по этим значениям интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов. Если ограничиться первыми двумя членами формулы Лагранжа (линейная интерполяция), то неустранимая погрешность, зависящая в этом случае только от длины реализации, останется неизменной при любом шаге дискретности $\Delta\tau$. Методическая погрешность $\delta(\tau)$ определится соотношением [3]:

$$\delta(\tau) = R_{xy}(\tau) - \Psi_{xy}(\tau) \leq \frac{R''_{xy}(\tau)}{2!} (\tau - \tau_{i+1})(\tau - \tau_i), \quad (133)$$

где $\Psi_{xy}(\tau)$ — интерполирующая корреляционная функция, а τ принадлежит интервалу между двумя значениями аргумента (τ_{i+1} , τ_i). Правая часть выражения (133) принимает наибольшее по модулю значение при $\tau = (\tau_i + \tau_{i+1})/2$. Следовательно,

$$|\delta(\tau)| \leq \sup_{v \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |R''_{xy}(v)| \frac{\Delta\tau^2}{8} \quad (134)$$

или для нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{xy}(\tau)$:

$$|\eta_{xy}(\tau)| \leq \sup_{v \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |\rho''_{xy}(v)| \frac{\Delta\tau^2}{8}. \quad (135)$$

Выразим вторую производную $\rho_{xy}(\tau)$ через ее спектральные моменты:

$$-\rho''_{xy}(v) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{xy}(\omega) e^{jv\omega} d\omega. \quad (136)$$

Здесь $S_{xy}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$; σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения этих процессов. Используя свойство определенного интеграла, можем записать:

$$|\rho''_{xy}(v)| \leq \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S_{xy}(\omega) e^{jv\omega}| d\omega. \quad (137)$$

Подынтегральное выражение в (137) можно преобразовать к виду

$$|S_{xy}(\omega) e^{jv\omega}| = |S_{xy}(\omega)| \leq [S_x(\omega) S_y(\omega)]^{1/2}. \quad (138)$$

Подставив (138) в (137), получим:

$$|\rho''_{xy}(v)| \leq \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) S_y(\omega)]^{1/2} \omega^2 d\omega. \quad (139)$$

Применим к интегралу выражения (139) неравенство Шварца:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 [S_x(\omega) S_y(\omega)]^{1/2} d\omega \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega \right]^{1/2}, \quad (140)$$

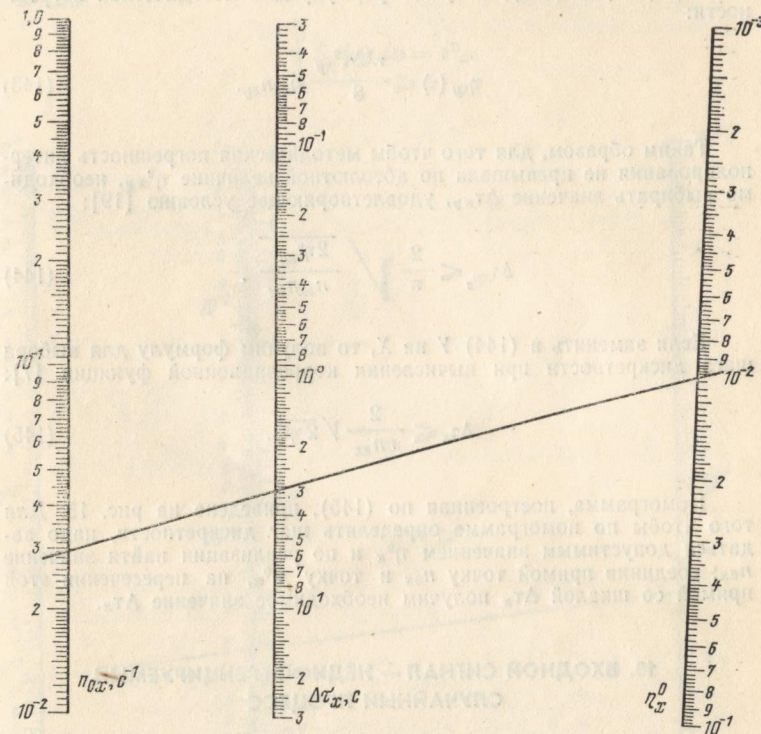


Рис. 15. Номограмма для определения шага дискретности по времени при вычислении корреляционной функции случайных процессов.

тогда (139) можно заменить более сильным неравенством

$$|\rho''_{xy}(v)| \leq \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega \right]^{1/2}. \quad (141)$$

Но (см. § 9)

$$\frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \right]^{1/2} = n_{0,x} \pi; \quad (142)$$

$$\frac{1}{\sigma_y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \right]^{1/2} = n_{xy} \pi.$$

Здесь n_{0x} и n_{0y} — соответственно среднее число пересечений процессами $X(t)$ и $Y(t)$ своих математических ожиданий. Подставив в (135) (141) и (142), получим формулу для методической погрешности:

$$\eta_{xy}(\tau) \leq \frac{\pi^2 \Delta \tau_{xy}^2}{8} n_{0x} n_{0y}. \quad (143)$$

Таким образом, для того чтобы методическая погрешность интерполирования не превышала по абсолютной величине η_{xy}^0 , необходимо выбрать значение $\Delta \tau_{xy}$, удовлетворяющее условию [19]:

$$\Delta \tau_{xy} \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2\eta_{xy}^0}{n_{0x} n_{0y}}}. \quad (144)$$

Если заменить в (144) Y на X , то получим формулу для выбора шага дискретности при вычислении корреляционной функции [7]:

$$\Delta \tau_x \leq \frac{2}{\pi n_{0x}} \sqrt{2\eta_x^0}. \quad (145)$$

Номограмма, построенная по (145), приведена на рис. 15. Для того чтобы по номограмме определить шаг дискретности, надо задаться допустимым значением η_x^0 и по реализации найти значение n_{0x} ; соединив прямой точку n_{0x} и точку η_x^0 , на пересечении этой прямой со шкалой $\Delta \tau_x$ получим необходимое значение $\Delta \tau_x$.

13. ВХОДНОЙ СИГНАЛ — НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

В задачах идентификации в качестве входного (опорного) сигнала $X(t)$ широко применяется белый шум. При использовании белого шума задача определения динамических характеристик значительно упрощается. Случайные процессы, близкие по своим свойствам к белому шуму, могут быть получены с помощью различных генераторов шума.

В этом случае оценить максимум второй производной $\rho_{xy}(\tau)$ по среднему числу нулей входного и выходного процессов невозможно, так как процесс на входе не дифференцируем и, кроме того, может иметь распределение, отличное от нормального. Однако для оценки $\Delta \tau_{xy}$ мы можем более полно использовать выходной процесс системы как процесс, содержащий информацию и о входном сигнале, и о свойствах системы.

Нетрудно убедиться, что $\rho_{xy}(\tau)$ будет дважды дифференцируема, если дважды дифференцируем выходной процесс $Y(t)$, и для нее

справедливо неравенство (139). Применяя к (139) неравенство Шварца, получаем:

$$|\rho''_{xy}(v)| \leq \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \right]^{1/2}. \quad (146)$$

Однако

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2,$$

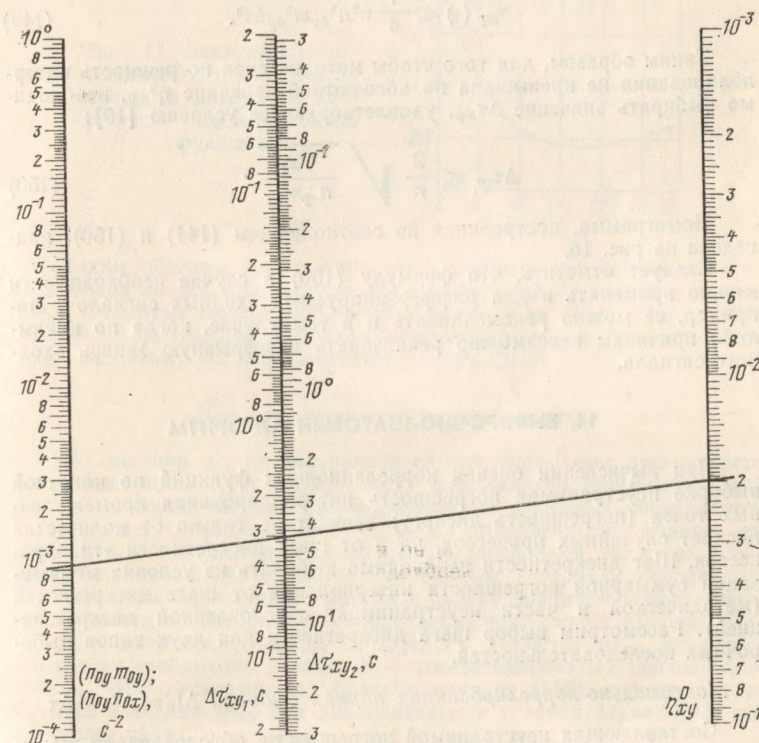


Рис. 16. Номограмма для определения шага дискретности по времени при вычислении взаимной корреляционной функции случайных процессов.

поэтому

$$|\rho''_{xy}(v)| \leq \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{\sigma_y^2} [R_y^{(IV)}(0)] = \rho_y^{(IV)}(0). \quad (147)$$

Выражение (147) показывает, что максимальная величина квадрата второй производной $\rho_{xy}(\tau)$ не может превышать четвертой производной корреляционной функции выходного процесса при $\tau=0$.

Выразим $\rho_y^{(IV)}(0)$ через среднее число нулей n_y и среднее число максимумов m_{oy} процесса $Y(t)$. Решив (98) и (100) относительно $\rho_y^{(IV)}(0)$, получим:

$$\rho_y^{(IV)}(0) = 4\pi^4 n_y^2 m_{oy}^2 \Delta \tau^2. \quad (148)$$

Подставляя (147) в (135) и учитывая (148), будем иметь:

$$\eta_{xy}(\tau) \leq \frac{1}{4} \pi^2 n_y^2 m_{oy}^2 \Delta \tau^2. \quad (149)$$

Таким образом, для того чтобы методическая погрешность интерполирования не превышала по абсолютной величине η_{xy}^0 , необходимо выбрать значение $\Delta \tau_{xy}$, удовлетворяющее условию [19]:

$$\Delta \tau_{xy} \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_{xy}^0}{n_y m_{oy}}}. \quad (150)$$

Номограмма, построенная по соотношениям (144) и (150), приведена на рис. 16.

Следует отметить, что формулу (150) в случае необходимости можно применять и для дифференцируемых входных сигналов. Например, ее можно рекомендовать и в том случае, когда по каким-либо причинам невозможно реализовать непрерывную запись входного сигнала.

14. ВЫБОРОЧНО-ШАГОВЫЙ АЛГОРИТМ

При вычислении оценок корреляционных функций по конечной выборке неустраняемая погрешность интерполирования промежуточных точек (погрешность дискрет) зависит не только от количества дискрет случайных процессов, но и от шага дискретности этих процессов. Шаг дискретности необходимо выбирать из условия минимизации суммарной погрешности интерполяции от шага дискретности (методической и части неустраняемой, обусловленной дискретизацией). Рассмотрим выбор шага дискретности для двух типов выборочных последовательностей.

Максимально-коррелированная парная выборка $\Delta t_y = \Delta t_x = \Delta t$

Составляющая неустраняемой погрешности, обусловленная шагом дискретности процесса при конечных длинах, была исследована в § 6. Там показано, что относительный прирост средней квадратической погрешности при $m \geq 10$ пренебрежимо мал по сравнению с погрешностью от длины реализации.

Сравнение нормированной относительной дисперсии процесса неустраняемой погрешности Δ от дискретизации с методической погрешностью позволяет сделать вывод, что и в выборочно-шаговом алгоритме при выборе шага дискретности надо ориентироваться на методическую погрешность, так как значение ее при $m \geq 10$ и $h \geq 10$ во много раз больше Δ [7].

В качестве иллюстрации соотношения Δ и η_x^0 приведен рис. 17, на котором для корреляционной функции (42) ($\beta=0,1$) при $h=10$ изображено отношение Δ/η_x^0 , как функция числа точек m на интервале корреляции $\tau_{кор}$. Для многократно дифференцируемых случайных процессов отношение Δ/η_x^0 будет еще меньше. Так, для корреляционной функции (43) при $m=2$ и $h=10$ оно равно 0,0027 и резко уменьшается с ростом m . Можно показать, что вывод о соотношении погрешностей Δ и η_x^0 , полученный для корреляционных функций, будет справедлив и для взаимных корреляционных функций.

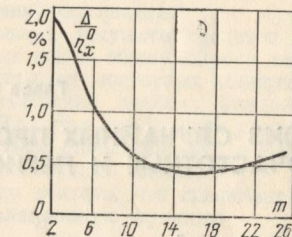


Рис. 17. Зависимость отношения Δ/η_x^0 от числа точек m на интервале корреляции корреляционной функции.

Таким образом, для выбора шага дискретности случайных процессов при вычислении корреляционных функций по выборочно-шаговому алгоритму можно пользоваться формулами (144), (145), (150) при условии, что на интервал корреляции приходится не менее 10 точек. Этому условию соответствует $\eta_x^0 \leq 0,05$.

Некоррелированная парная выборка

До сих пор мы рассматривали случай, когда шаг дискретности $\Delta \tau_{xy}$ был равен шагу дискретности максимально коррелированной парной выборки. Однако при исследовании взаимных корреляционных функций в промышленных системах управления встречается ситуация, при которой один из процессов [обозначим его через $Y(t)$] измеряется с шагом, большим или равным интервалу корреляции. В этом случае приходится вычислять оценку взаимной корреляционной функции по алгоритму некоррелированной парной выборки [4].

Для вычисления оценки $R_{xy}^*(\tau, T)$ с шагом $\Delta \tau_{xy}$ по этому алгоритму необходимо процесс $X(t)$ дискретизировать с шагом $\Delta t_x = \Delta \tau_{xy}$. Шаг дискретности Δt_x выбирается по (150), исходя из требуемого значения η_{xy}^0 при дополнительном условии $\Delta t_x = \Delta t_y/k$, где k — целое число.

Предлагаемая методика выбора шага дискретности может быть распространена и на дифференцируемые негауссовские процессы. В этом случае шаг дискретности также удастся связать со средним числом пересечений случайным процессом уровня C . Соответствующее выражение имеет вид:

$$n_{cx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x W_x(C) \sqrt{\rho''_x(0)}.$$

Здесь $W_x(C)$ — функция, зависящая от плотности вероятности случайного процесса на уровне C .

Подставляя значение $\rho''_x(0)$ из этого выражения в (135), получаем формулу максимальной погрешности линейной интерполяции корреляционной функции на интервале $\Delta\tau$:

$$\eta_x(\tau) \leq \frac{\pi}{16} \frac{n^2_{cx} \Delta\tau^2_x}{\sigma^2_x W^2_x(C)},$$

откуда

$$\Delta\tau_x \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_x W_x(C)}{n_{cx}} \sqrt{\eta^0_x}.$$

Глава пятая

АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, СОДЕРЖАЩИХ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ

Модель случайного процесса, приведенная в гл. 1 [см. (1)], содержит в общем случае наряду с $X(t)$ ряд других компонент. Рассмотрим некоторые вопросы статистического анализа общей модели (1).

15. ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Компонента $B(t)$ может содержать как непериодические детерминированные, так и случайные составляющие. Однако случайные составляющие $B(t)$ не могут быть статистически описаны в пределах длины реализации, достаточной для анализа компоненты $X(t)$.

Если на длине реализации случайного процесса укладывается весьма малое число периодов какой-либо из гармоник $C(t)$, сравнимой по мощности с $X(t)$, то эту гармонику также будем относить к компоненте $B(t)$.

Низкочастотность [по сравнению со спектром $X(t)$] спектра компоненты $B(t)$ позволяет выделить ее в математическое ожидание $M(t)$, которое можно надежно оценить фильтрацией.

Выбор способа фильтрации зависит от того, какого вида функции содержатся в математическом ожидании. Если $B(t)$ удается аппроксимировать сравнительно небольшим числом отрезков прямых или парабол, то для определения коэффициентов $B(t)$ можно применить метод наименьших квадратов [5, 30, 35]. Если же число этих отрезков велико, то целесообразнее использовать низкочастотный фильтр с простейшей импульсной характеристикой. В качестве такого фильтра на практике применяют, например, фильтр текущего среднего [5, 34, 35] с частотной характеристикой

$$\Phi_n(j\omega) = \left(\frac{\sin \omega \Delta T / 2}{\omega \Delta T / 2} \right)^n, \quad (151)$$

где n — кратность текущего среднего,

Фильтр осуществляет преобразование поступающего на его вход случайного процесса $Z(t)$ согласно соотношению

$$M_{zn}(t) = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} Z_{n-1}(t + \tau) d\tau. \quad (152)$$

Фильтр текущего среднего, естественно, не является оптимальным фильтром [5], однако он обладает важным достоинством — простотой реализации алгоритма, позволяющей в ряде случаев производить текущее осреднение исследуемого процесса еще на стадии предварительной обработки исходной информации.

Переменным параметром фильтра текущего среднего является интервал осреднения ΔT . Значение его в общем случае зависит от выбранного критерия оптимальности, от частотных свойств составляющих $X(t)$ и $M_z(t)$, от соотношения средних квадратических отклонений этих составляющих. Для того чтобы дать рекомендации по выбору ΔT , необходимо задаться определенными моделями составляющих $X(t)$, $M_z(t)$ и критерием оптимальности.

В первом приближении можно считать, что стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \sigma^2_x e^{-|\tau|}, \quad (153)$$

а математическое ожидание $M_z(t)$ имеет вид:

$$M_z(t) = A_c \cos(\omega_c t + \varphi). \quad (154)$$

В качестве критерия оптимальности примем минимум дисперсии оценки $M^*_z(t)$. Дисперсия $M^*_z(t)$ записывается следующим образом:

$$D[M^*_z(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [|\Phi_n(\omega)|^2 S_x(\omega) + |\Phi_n(\omega) - 1|^2 S_{M_z}(\omega)] d\omega, \quad (155)$$

где $S_x(\omega)$, $S_{M_z}(\omega)$ — соответственно спектральные плотности $X(t)$ и $M_z(t)$.

Спектральные плотности, соответствующие (153), (154), имеют вид:

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma^2_x \gamma}{\gamma^2 + \omega^2}; \quad (156)$$

$$S_{M_z}(\omega) = \frac{\pi A_c^2}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]. \quad (157)$$

Подставив (156), (157) в (155), нетрудно получить выражения дисперсии оценки математического ожидания. Далее, дифференцируя эти выражения по ΔT и приравнявая полученные зависимости нулю, находим формулы для оптимального значения ΔT [13]:

однократное сглаживание

$$\alpha^2 \frac{1}{\Delta T^2 \gamma^2} [\Delta T \gamma - 2 + e^{-\Delta T \gamma} (\Delta T \gamma + 2)] + \left(1 - \frac{\sin \Delta T \omega_c / 2}{\Delta T \omega_c / 2} \right) \times \\ \times \left(\cos \Delta T \omega_c / 2 - \frac{\sin \Delta T \omega_c / 2}{\Delta T \omega_c / 2} \right) = 0; \quad (158)$$

трехкратное сглаживание

$$\alpha^2 \frac{1}{\Delta T^6 \gamma^6} [e^{-3\Delta T \gamma} (\Delta T \gamma + 2) - 4e^{-2\Delta T \gamma} (\Delta T \gamma + 3) + 5e^{-\Delta T \gamma} (\Delta T \gamma + 6) + 0,183\Delta T^5 \gamma^5 - \Delta T^3 \gamma^3 + 10\Delta T \gamma - 20] - \left[\left(\frac{\sin \Delta T \omega_c / 2}{\Delta T \omega_c / 2} \right)^5 - \left(\frac{\sin \Delta T \omega_c / 2}{\Delta T \omega_c / 2} \right)^2 \right] \times \left(\cos \Delta T \omega_c / 2 - \frac{\sin \Delta T \omega_c / 2}{\Delta T \omega_c / 2} \right) = 0. \quad (159)$$

Здесь $\alpha = \sigma_x \sqrt{2} / A_c$ — отношение средних квадратических отклонений процессов $X(t)$ и $M_z(t)$.

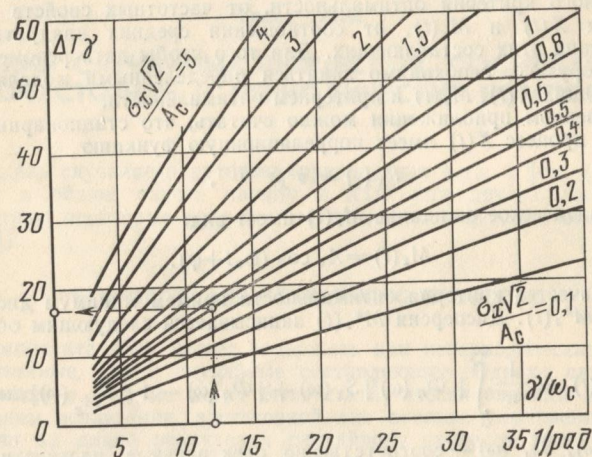


Рис. 18. Номограмма для определения интервала сглаживания при $M_z(t) = A_c \cos \omega_c t$ и $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\gamma|\tau|}$ (однократное сглаживание).

Для $\omega_c = 0,01$ рад/с, $\gamma = 0,12$ с, $\gamma / \omega_c = 12$ рад, $\alpha = 0,5$ получаем: $\Delta T \gamma = 16,8$, $\Delta T = 140$ с.

Номограммы для определения оптимального значения ΔT , построенные по уравнениям (158) и (159), приведены на рис. 18 и 19. Результаты, полученные при допущениях (153) и (154), можно в приближении распространить на более широкий класс процессов $X(t)$ и $M_z(t)$. Действительно, если

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{a_{2n}\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + a_2\omega^2 + 1},$$

то, учитывая, что на низких частотах спектральная плотность в основном определяется значением a_2 , можно принять $\gamma = 1/a_2$. Значение a_2 можно найти по характеристикам особых точек процесса $X(t)$.

Процесс $M_z(t)$ на короткой длине реализации может быть аппроксимирован кривой, близкой к гармонической функции, с какой-то средней частотой ω_c и средней амплитудой A_c . Для оценки средних значений ω_c и A_c реализацию следует записать в сжатом масштабе времени так, чтобы запись образовала отчетливую полосу, характеризующую изменение математического ожидания $M_z(t)$.

Исследования показали, что в широком диапазоне изменения $\alpha = 0,1 \div 5$ и $\gamma / \omega_c = 1 \div 50$ разница в значениях минимумов дисперсий одно- и трехкратного среднего весьма незначительна и лежит в пре-

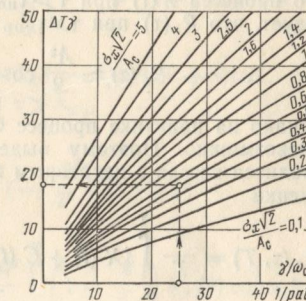


Рис. 19. Номограмма для определения интервала сглаживания при $M_z(t) = A_c \cos \omega_c t$ и $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\gamma|\tau|}$ (трехкратное сглаживание).

делах точности расчета, а оптимальное значение ΔT трехкратного среднего примерно в 1,5 раза меньше, чем однократного. Отсюда следует, что применение однократного среднего дает вдвое меньшее сокращение длины реализации, чем применение трехкратного, и, таким образом, при коротких длинах реализации более целесообразно.

16. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ СКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ

Выявление периодической компоненты по отрезку отдельной реализации является по существу задачей об установлении следующего факта: содержит ли процесс периодическую компоненту или же «игра случайных факторов» привела к появлению этой периодичности. Как показал Е. С. Слуцкий [36], случайные, сильно коррелированные последовательности могут дать реализации, совпадающие с гармоническими функциями с вероятностями, сколь угодно близкими к единице. Из сказанного следует, что проблема выделения периодичностей в случайных процессах может быть корректно поставлена только в случае априорной информации о наличии периодической компоненты.

Пусть случайный процесс $Z(t)$ состоит из двух компонент: стационарной гауссовской эргодической компоненты $X(t)$ с нулевым средним значением и гармонической компоненты $C(t)$ со случайной, равномерно распределенной на интервале 2π фазой

$$Z(t) = X(t) + C(t) = X(t) + A \cos(\omega t + \varphi). \quad (160)$$

Необходимо по конечной длине реализации T случайного процесса $Z(t)$ оценить параметры гармонической компоненты A , ω , φ . Рассмотрим методы решения этой задачи.

Известно, что корреляционная функция $R_z(\tau)$ аддитивных сигналов $X(t)$ и $C(t)$ равна сумме корреляционных функций слагаемых:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_c(\tau).$$

Корреляционная функция любой гармонической функции $C(t)$ в области сдвига τ имеет такую же периодичность, как и $C(t)$ во временной области t . Корреляционная функция эргодического случайного процесса $X(t)$ при $\tau > \tau_{\text{кор}}$ практически равна нулю. Отсюда следует, что $R_z(\tau)$ при $\tau > \tau_{\text{кор}}$ содержит только функцию $R_c(\tau)$:

$$R_z(\tau) \approx \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \text{ при } \tau \geq \tau_{\text{кор}}. \quad (161)$$

Однако на практике процесс бесконечной длительности реализовать невозможно. Поэтому выделение гармонической компоненты производится всегда с некоторым приближением.

Оценка

$$R_z^*(\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) + C(t)] [X(t + \tau) + C(t + \tau)] dt$$

является несмещенной, так как

$$\begin{aligned} M[R_z^*(\tau, T)] &= M \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) + C(t)] [X(t + \tau) + \right. \\ &\quad \left. + C(t + \tau)] dt \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T M \{ [X(t) + C(t)] [X(t + \tau) + \\ &\quad + C(t + \tau)] \} dt = \frac{1}{T} \int_0^T [R_x(\tau) + R_c(\tau)] dt = R_x(\tau) + R_c(\tau). \end{aligned} \quad (162)$$

Дисперсия оценки определяется соотношением (13) при замене $N(t)$ на $C(t)$:

$$\begin{aligned} D[R_z(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P_x^2(\tau, \theta) - R_x^2(\tau)] d\theta + \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [P_c^2(\tau, \theta) - R_c^2(\tau)] d\theta + \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [2R_x(\theta) R_c(\theta) + R_x(\theta + \tau) R_c(\tau - \theta) + \\ &\quad + R_x(\theta - \tau) R_c(\tau + \theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (163)$$

Подставив в (163) выражения четвертых моментов для $X(t)$ и $C(t)$, получим:

$$\begin{aligned} D[R_z^*(\tau, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [R_x^2(\theta) + R_x(\theta + \tau) R_x(\theta - \tau)] d\theta + \\ &\quad + \frac{A^4}{4T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \cos 2\omega_0 \theta d\theta + \frac{A^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [2R_x(\theta) \cos \omega_0 \theta + \\ &\quad + R_x(\theta + \tau) \cos \omega_0 (\tau - \theta) + R_x(\tau - \theta) \cos (\theta + \tau)] d\theta. \end{aligned} \quad (164)$$

В интересующем нас случае при $\tau > \tau_{\text{кор}}$

$$\begin{aligned} D[R_z^*(\tau_{\text{кор}}, T)] &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_x^2(\theta) d\theta + \\ &\quad + \frac{A^4}{4T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \cos 2\omega_0 \theta d\theta + \frac{2A^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R_x(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (165)$$

Если каждая точка корреляционной функции вычисляется по длине реализации, кратной целому числу периодов, то второй интеграл в (165) равен нулю (см. § 8):

$$\begin{aligned} D[R_z^*(\tau_{\text{кор}}, T)] &= \frac{2\sigma_x^4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x^2(\theta) d\theta + \\ &\quad + \frac{2A^2\sigma_x^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (166)$$

Для вычисления первого интеграла этого выражения можно использовать результаты § 5, а второго интеграла — § 8.

Эффективность корреляционных методов выявления скрытой периодичности будем оценивать по коэффициенту изменчивости оценки гармонической компоненты. В данном случае

$$\begin{aligned} F_{R_c}^2 &= \frac{D[R_z^*(\tau_{\text{кор}}, T)]}{A^4/4} = \frac{8\sigma_x^4}{A^4 T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x^2(\theta) d\theta + \\ &\quad + \frac{8\sigma_x^2}{A^2 T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (167)$$

Обозначив отношение дисперсии случайной компоненты к дисперсии периодической компоненты через α^2 , получим:

$$F_{R_c}^2 = \frac{2\alpha^4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x^2(\theta) d\theta + \frac{4\alpha^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \quad (168)$$

Отсюда при заданном допустимом значении F_{R_c} можно найти необходимую длину реализации:

$$T = \frac{2\alpha^2}{F_{R_c}^2} \left\{ \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [\alpha^2 \rho_x^2(\theta) + 2\rho_x(\theta) \cos \omega_0 \theta] d\theta \right\}. \quad (169)$$

Достоинством этого метода выявления скрытой периодичности является то, что он применим при неполной (и даже при полном отсутствии) информации о параметрах гармонической компоненты. Основной недостаток метода — большая погрешность оценки параметров гармонической компоненты. Для уменьшения ее надо иметь очень большие длины реализации. Ввиду низкой точности метода его можно рекомендовать для выявления только такой гармонической компоненты, у которой период меньше интервала корреляции случайной компоненты $\tau_{кор}$.

Метод взаимной корреляционной функции

Если известно точное значение частоты гармонической компоненты, то для оценки параметров $C(t)$ целесообразнее использовать взаимную корреляционную функцию между процессом $Z(t)$ и гармонической компонентой $C_1(t)$ с произвольной амплитудой A_1 :

$$R_{zc_1}(\tau) = M[Z(t)C_1(t+\tau)] = M[X(t)C_1(t+\tau)] + M[C(t)C_1(t+\tau)].$$

Учитывая некоррелированность $X(t)$ и $C(t)$, получаем:

$$R_{zc_1}(\tau) = M[C(t)C_1(t+\tau)] = R_{cc_1}(\tau). \quad (170)$$

Нетрудно убедиться, что эта задача ничем не отличается от задачи оценки взаимной корреляционной функции между опорным гармоническим сигналом и выходом объекта, которая была рассмотрена в § 8.

Пусть $C(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$; $C_1(t) = A_1 \cos \omega t$, тогда

$$R_{zc_1}(\tau) = \frac{A_1 A}{2} \cos(\omega \tau + \varphi).$$

Математическое ожидание оценки равно взаимной корреляционной функции самой гармонической компоненты:

$$M[R_{zc_1}^*(\tau, T)] = M\left[\frac{1}{T} \int_0^T Z(t)C_1(t+\tau) dt\right] = M\left[\frac{1}{T} \int_0^T C(t)C_1(t+\tau) dt\right] = R_{zc_1}(\tau) = R_{cc_1}(\tau).$$

Дисперсия оценки определяется выражением

$$D[R_{zc_1}^*(\tau, T)] = \frac{A^2 A_1^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) [\cos 2\omega \theta - 2 \sin 2\omega \tau \sin 2\varphi] d\theta + \frac{\sigma_x^2 A_1^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega \theta d\theta. \quad (171)$$

При вычислении каждой точки $R_{zc_1}^*(\tau)$ по целому числу периодов

$$D[R_{zc_1}^*(\tau, T)] = \frac{\sigma_x^2 A_1^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega \theta d\theta. \quad (172)$$

Коэффициент изменчивости оценки равен:

$$F_{R_{cc_1}}^2 = \frac{2\alpha^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega \theta d\theta. \quad (173)$$

Достоинством этого метода выявления скрытой периодичности является большая точность по сравнению с методом корреляционной функции [см. (169) и (173)]. Недостаток метода заключается в том, что он требует полной априорной информации о частотах гармонических составляющих.

Метод инверсной корреляционной функции

Введем понятие инверсной корреляционной функции $R_{zz}^-(\tau)$ случайного процесса $Z(t)$ [20]. Инверсной корреляционной функцией процесса будем называть функцию взаимной корреляции между процессом $Z(t)$ и его зеркальным отражением $\bar{Z}(t) = Z(-t)$ относительно оси ординат. Таким образом,

$$R_{zz}^-(\tau) = M[Z(t)\bar{Z}(t+\tau)].$$

С учетом (160) получаем:

$$R_{zz}^-(\tau) = M[C(t)\bar{C}(t+\tau)] + M[X(t)\bar{X}(t+\tau)] + M[X(t)\bar{C}(t+\tau)] + M[\bar{X}(t+\tau)C(t)]. \quad (174)$$

В (174) все слагаемые, кроме первых двух, равны нулю. Следовательно,

$$R_{zz}^-(\tau) = R_{cc}^-(\tau) + R_{xx}^-(\tau). \quad (175)$$

Рассмотрим статистические свойства инверсной корреляционной функции.

Математическое ожидание оценки $R_{zz}^*(\tau, T)$

$$M[R_{zz}^*(\tau, T)] = R_{cc}^-(\tau) + M[R_{xx}^*(\tau, T)] \quad (176)$$

представляет собой смещенную оценку корреляционной функции $R_{cc}^-(\tau)$ периодической компоненты. Величина смещения равна математическому ожиданию инверсной корреляционной функции случайной компоненты $X(t)$:

$$\begin{aligned} M[R_{xx}^*(\tau, T)] &= M\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(\tau - t) dt\right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(2t - \tau) dt. \end{aligned} \quad (177)$$

Из этого соотношения следует, что $R_{zz}^*(\tau, T)$ является асимптотически несмещенной оценкой $R_{cc}^-(\tau)$. При достаточно больших T смещение можно сделать пренебрежимо малым. Например, для $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\gamma|\tau|}$ имеем:

$$M[R_{xx}^*(\tau, T)] = \frac{\sigma_x^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\gamma|2t-\tau|} dt = \frac{\sigma_x^2}{2\gamma T} [2 - e^{-\gamma(T-\tau)} - e^{-\gamma\tau}].$$

При $\gamma = 1$, $\tau = 0$, $T = 20\tau_{\text{кор}}$, $M[R_{xx}^*(\tau, T)] = \sigma_x^2/120$, т. е. не превышает 1% дисперсии случайной компоненты.

При достаточно большой длине реализации можно считать, что инверсная корреляционная функция стационарного случайного процесса $Z(t)$ равна инверсной корреляционной функции ее периодической составляющей $C(t)$. Последняя нулю не равна, ибо $C(t)$ и $C(-t)$ отличаются друг от друга только начальными фазами.

Если в точке $t=0$ начальная фаза $C(t)$ равна φ , то начальная фаза $C(-t)$ будет равна $180-\varphi$. В этом случае

$$\begin{aligned} R_{zz}^-(\tau) &= R_{cc}^-(\tau) = M[A \cos(\omega t + \varphi) A \cos(\omega t + \omega\tau + 180 - \varphi)] = \\ &= (A^2/2) \cos(\omega\tau - 2\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, инверсная корреляционная функция позволяет определить начальную фазу и амплитуду гармонической компоненты.

Для получения выражения дисперсии оценки $R_{zz}^*(\tau, T)$ воспользуемся данными § 3. Если в левой части (6) заменить $X(t)$ на

$Z(t)$, $Y(t)$ на $Z(-t)$, а в правой — $X_1(t)$ на $X(t)$, $Y_1(t)$ на $X(-t)$, $N_1(t)$ на $C(t)$, $N_2(t)$ на $C(-t)$, то дисперсия оценки $R_{zz}^*(\tau, T)$ по своей структуре совпадает с (12) и будет равна:

$$\begin{aligned} D[R_{zz}^*(\tau, T)] &= \frac{4}{T^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} [P_{xx}^*(t, t_1, \tau) - R_{xx}^-(\tau)] dt dt_1 + \\ &+ \frac{4}{T^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} [P_{cc}^*(t, t_1, \tau) - R_{cc}^-(\tau)] dt dt_1 + \\ &+ \frac{4}{T^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} [2R_x(t_1 - t) R_c(t - t_1) + R_x(t_1 + t - \tau) R_c(\tau - \\ &- t_1 - t) + R_x(\tau - t_1 - t) R_c(t_1 + t - \tau)] dt dt_1. \end{aligned} \quad (178)$$

Подставив в (178) выражения четвертых моментов и произведя вычисления по длине T , кратной целому числу периодов гармонической компоненты, а также пренебрегая членами порядка $1/T^2$, получим:

$$\begin{aligned} D[R_{zz}^*(\tau, T)] &= \frac{2\sigma_x^4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x^2(\theta) d\theta + \\ &+ \frac{2A^2\sigma_x^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (179)$$

Формула (179) совпадает с формулой (166) для дисперсии оценки корреляционной функции $R_x(\tau)$. Учет корреляции $X(t)$ и $X(-t)$ увеличит дисперсию оценки $R_{zz}^*(\tau, T)$ на величину порядка $1/T^2$, поэтому (179) дает удовлетворительные результаты уже при длинах реализации $T \approx 10\tau_{\text{кор}}$.

Коэффициент изменчивости оценки $R_{cc}^*(\tau, T)$ будет равен:

$$F_{R_{cc}^*}^2 = \frac{2\sigma_x^4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x^2(\theta) d\theta + \frac{4\sigma_x^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \rho_x(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta. \quad (180)$$

Таким образом, метод выявления периодической компоненты по инверсной корреляционной функции не уступает методу ее оценки по корреляционной функции.

Преимуществом этого метода относительно корреляционного преобразования является возможность оценки начальной фазы гармонической составляющей, а относительно метода взаимного корреляционного преобразования — отсутствие требования априорной информации о частоте периодической компоненты.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОМЫШЛЕННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим примеры использования предлагаемых в данной работе методик для оценки статистических характеристик некоторых сигналов в системах управления котельными агрегатами.

17. ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПАРОВОЙ НАГРУЗКИ ПРОМЫШЛЕННОЙ КОТЕЛЬНОЙ

Потребитель пара — красильный цех предприятия текстильной промышленности. Изменение расхода пара является возмущающим воздействием для систем регулирования питания и (в первом приближении) давления пара.

Перестроенный в сжатом масштабе времени отрезок реализации флуктуаций расхода пара приведен на рис. 20. После приближенной визуальной оценки математического ожидания было определено среднее число нулей процесса $n_{0x} = 0,025$ 1/мин. Уверенно опреде-

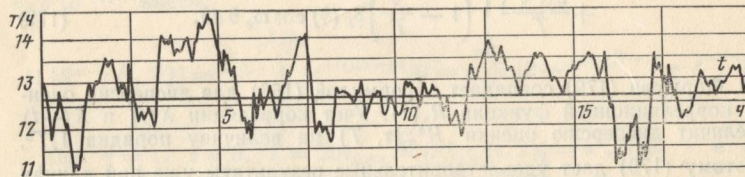


Рис. 20. Флуктуации паровой нагрузки промышленной котельной.

лить среднее число максимумов невозможно ввиду большой изрезанности реализации и грубости ее записи эксплуатационным расходомером. Поэтому в качестве априорной модели корреляционной функции принята модель вида (115).

Вспользуемся для оценки $T^{\circ}_0 = T_0(1 + \beta)$ информацией о среднем числе выбросов длительности выше заданной. Для $\tau_{в1} = 45$ мин получим: $n_{в1}(\tau) = 0,0028$ 1/мин и $\tau_{в1} n_{в1}(\tau) = 0,126$.

Из графика на рис. 14 определяем: $\tau_{в1}/T^{\circ}_{011} = 0,631$ и $\tau_{в1}/T^{\circ}_{012} = 1,02$, откуда $T^{\circ}_{011} = 71,3$ мин и $T^{\circ}_{012} = 44$ мин. Для $\tau_{в2} = 9$ мин таким же образом находим: $T^{\circ}_{021} = 73,3$ мин и $T^{\circ}_{022} = 7,6$ мин. В качестве априорного значения T°_0 примем 72,3 мин.

Решая совместно уравнение

$$T^{\circ}_0 \beta = \frac{1}{\pi^2} 1600 \text{ мин}^2$$

и уравнение $T_0(1 + \beta) = 72,3$ мин, находим: $T_0 = 70$ мин, $\beta = 0,033$.

По техническим условиям экспериментальное определение корреляционной функции должно обеспечить при $\tau = \tau_{кор}$ точность, характеризующую $\delta = 1$ при доверительной вероятности 0,75. Если $2\Phi(u) = 0,75$, то $u = 1,16$ и максимально допустимое значение коэффициента изменчивости $F_{Rx} = \delta/u = 0,86$.

Для $F_{Rx} = 0,86$ по рис. 4 получаем требуемую относительную длину реализации $\mu = T/T_0 = 583$, тогда $T = \mu T_0 = 583 \cdot 70 = 40\,810$ мин или 28,3 сут.

Частые изменения нагрузки котельной исключают возможность получения такой длины реализации. Реально удалось получить длину реализации продолжительностью 3600 мин (2,5 сут).

Шаг дискретности по времени был выбран по номограмме на рис. 15. Для $\eta^{\circ}_x = 0,015$ и $n_{0x} = 0,025$ 1/мин $\Delta t = 4,5$ мин. Для удобства считывания ординат процесса с диаграмм прибора уменьшаем его до $\Delta t = 3,75$ мин.

Визуальный анализ диаграмм позволил сделать заключение о постоянстве математического ожидания процесса. Оно было выделено как среднее арифметическое и равно 12,6 т/ч.

На рис. 21 изображена оценка корреляционной функции флуктуаций расхода пара $R^*_x(\tau)$ и ее аппроксимация выражением, (т/ч)²,

$$R^*_a(\tau) = 0,36(e^{-0,0156|\tau|} - 0,0322e^{-0,485|\tau|}); \quad (181)$$

τ измеряется в минутах.

Значения T_0 и β , полученные в результате аппроксимации: $T_0 = 67,5$ мин и $\beta = 0,0322$.

Вычислим доверительные интервалы на значения корреляционной функции при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_{кор} = 67,5 \cdot 3,04 = 205$ мин (отношение $\tau_{кор}/T_0 = 3,04$ определено из номограммы на рис. 6). При вычислении учтем, что $\tau_{кор}/\Delta t = 54,6 \gg 10$ и дискретизация не сказывается на точности оценки ординат корреляционной функции. Учтем также, что $T/\tau_{кор} = 17,6 > 10$ и смещением оценки корреляционной функции, вызванным использованием в алгоритме ее расчета оценки математического ожидания, можно пренебречь.

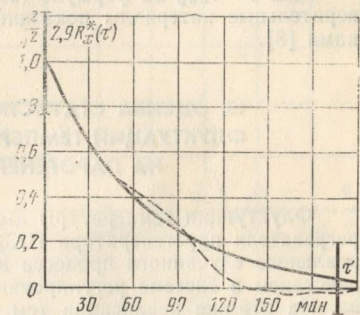


Рис. 21. Оценка корреляционной функции флуктуаций расхода пара (штриховая линия) и ее аппроксимация (сплошная линия).

Из номограммы на рис. 4 для $\beta = 0,0322$ находим $\mu F_x^2 = 423$.
Относительная длина реализации

$$\mu = \frac{T}{T_0} = \frac{3600}{67,5} = 53,4,$$

откуда

$$F_{R_x} = \left[\frac{423}{53,4} \right]^{1/2} = 2,82.$$

При доверительной вероятности $2\Phi(u) = 0,75$ $u = 1,16$. Значение δ для $\tau = 0$ определим по формуле (38):

$$\delta = 0,07 \cdot u F_{R_x} = 0,07 \cdot 1,16 \cdot 2,82 = 0,229.$$

Для $\tau = \tau_{\text{кор}}$ по формуле (29) получаем $\delta = 3,27$. Найденные доверительные интервалы показаны на рис. 21 вертикальными отрезками [8].

18. ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФЛУКТУАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЫМОВЫХ ГАЗОВ НА ПАРОГЕНЕРАТОРЕ ПКЗЗ-8ЗСП

Флуктуации температуры дымовых газов в области промпароперегревателя парогенератора ПКЗЗ-8ЗСП, рассмотренные как пример реального случайного процесса в § 1, являются возмущающим воздействием в системе регулирования температуры пара промпарогрева. На отрезке реализации (см. рис. 1) можно заметить линейную компоненту $B(t)$ и периодическую компоненту $C(t)$, обусловленную продувкой пылепроводов, существование которых предполагается на основании априорной информации о режиме эксплуатации парогенератора. Однако ожидаемую часовую периодическую компоненту, обусловленную обдувкой экранных поверхностей нагрева, визуально обнаружить не удалось. Поэтому на первом этапе исследования принята упрощенная модель флуктуаций температуры дымовых газов:

$$Z(t) = B(t) + C_1(t) + X_1(t), \quad (182)$$

которая в явном виде не содержит компоненты с часовым периодом.

Среднее число нулей компоненты $X_1(t)$ составляет $n_{0x_1} = 0,059$ 1/мин. Задаваясь допустимой погрешностью $\eta_{0x_1}^0 = 0,05$, по номограмме на рис. 15 получим шаг дискретности по времени $\Delta\tau_{x_1} = 3,42$ мин. Для удобства дискретизации округляем его до $\Delta\tau_{x_1} = 3,0$ мин.

Располагаемая длина реализации составила $T = 2880$ мин (48 ч). Интервал корреляции корреляционной функции [25]:

$$\tau_{\text{кор}} \approx \frac{2}{n_{0x_1}} \approx \frac{2}{0,059} \approx 33,9 \text{ мин.}$$

Следовательно, располагаемый объем выборки $h = T/\tau_{\text{кор}} = 85$. Для случайных процессов в промышленных системах управления такую выборку можно считать довольно большой.

Реализация была переведена в дискретную форму с шагом дискретности $\Delta t_z = 3,0$ мин. По дискретным данным посредством метода наименьших квадратов оценена линейная компонента $B(t)$, °С:

$$B(t) = [862 + 0,7t],$$

где t — время, ч.

Оценка корреляционной функции «остатка» $Z(t) - B(t)$ приведена на рис. 22. Из рисунка следует, что реализация, как и ожидалось, содержит периодические компоненты, обусловленные обдувкой поверхностей нагрева и продувками пылепроводов. Периоды их

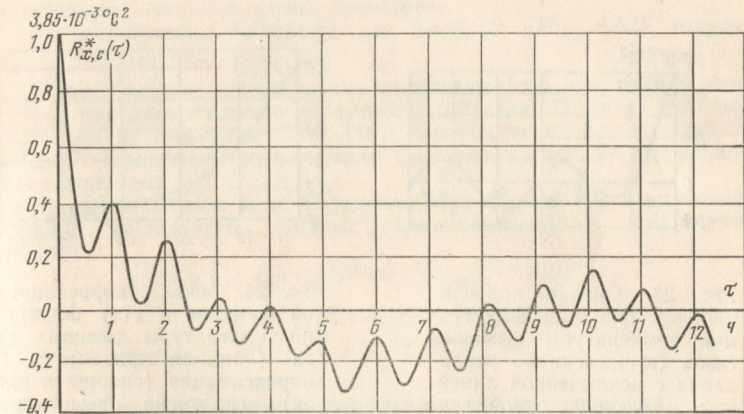


Рис. 22. Оценка корреляционной функции флуктуаций температуры дымовых газов. Математическое ожидание выделено уравнением прямой.

соответственно равны примерно 60 и 600 мин. Компонента $C_1(t)$ имеет малое число периодов на длине реализации, поэтому оценить ее по корреляционной функции не удастся из-за большой погрешности. Она была оценена методом взаимной корреляционной функции. Выявленная на ЭВМ периодическая компонента $C_1(t)$ состоит из двух гармоник. Однако амплитуда одной из них пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой другой. Поэтому можно принять, что $C_1(t)$ является гармонической функцией:

$$C_1(t) = 13 \cos(0,0105t - 0,803),$$

где t — время, мин, а $C_1(t)$ измеряется в градусах Цельсия.

После вычитания $C_1(t)$ из реализации $Z(t) - B(t)$ была вычислена оценка корреляционной функции «остатка» $X_1(t)$ (рис. 23). Из рисунка видно, что корреляционная функция $R_{x_1}(t)$ может быть представлена в виде двух составляющих, одна из которых соответствует компоненте случайного процесса $X(t)$, а другая — гармонической компоненте $C_2(t)$. На длине реализации укладывается примерно 47 периодов компоненты $C_2(t)$, поэтому параметры этой компоненты можно оценить по корреляционной функции процесса $X_1(t)$. В результате оценки получено: частота $\omega_2 = 0,102$ рад/мин, амплитуда $A_2 = 8,35^\circ\text{С}$.

Оценка корреляционной функции компоненты $X(t)$, полученная посредством вычитания из корреляционной функции $R_{x_1}(\tau)$ корреляционной функции компоненты $C_2(t)$, °C²:

$$R_{c_2}(\tau) = 35 \cos 0,102\tau,$$

где t — время, мин, приведена на рис. 24. При аппроксимации ее выражением (115) была использована информация о среднем числе нулей случайного процесса $X_1(t)$, представляющего собой сумму

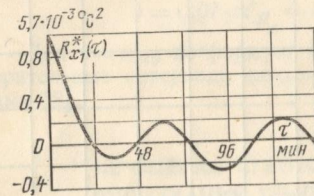


Рис. 23. Оценка корреляционной функции флуктуаций температуры дымовых газов (вычислена по реализации с исключенной линейной и низкочастотной гармонической компонентами).

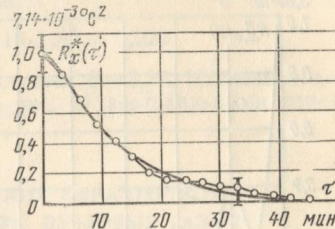


Рис. 24. Оценка корреляционной функции $R_x^*(\tau)$ флуктуаций температуры дымовых газов (ломаная кривая) и ее аппроксимация (сплошная кривая) (получена вычитанием корреляционной функции более высокочастотной гармонической компоненты из графика на рис. 23).

компоненты $X(t)$ и гармонической компоненты $C_2(t)$. Для такого процесса справедливо соотношение [2]:

$$n_{0x_1} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\omega_2^2 A_2^2 / 2 + \sigma_x^2 n_{0x}^2 \pi^2}{A_2^2 / 2 + \sigma_x^2} \right]^{1/2}. \quad (183)$$

Здесь A_2^2 — квадрат амплитуды периодической компоненты $C_2(t)$; σ_x^2 , n_{0x} — соответственно среднее квадратическое отклонение и среднее число нулей процесса $X(t)$.

Подставляя в (183) выражение для $\pi^2 n_{0x}^2$ из (116) и разрешая полученное уравнение относительно β , будем иметь:

$$\beta = \frac{\sigma_x^2}{T_0^2 [n_{0x_1}^2 \pi^2 \sigma_x^2 + (A_2^2 / 2) (n_{0x_1}^2 \pi^2 - \omega_2^2)]}. \quad (184)$$

Постоянная $T_0 = 11,8$ мин определена по оценке корреляционной функции, построенной в полулогарифмических координатах:

$$\sigma_x = 11,85^\circ\text{C}, \quad A_2 / \sqrt{2} = 5,92^\circ\text{C}, \quad n_{0x_1} = 0,059 \text{ 1/мин}, \quad \omega_2 = 0,102 \text{ рад/мин}.$$

Из (184) получаем $\beta = 0,169$. Аппроксимация оценки $R_x^*(\tau)$ приведена на рис. 24.

Для определения доверительных интервалов на ординаты корреляционной функции были вычислены $\tau_{\text{кор}} = 11,8 \cdot 3,2 = 37,8$ мин (номограмма на рис. 6); $\frac{\tau_{\text{кор}}}{\Delta\tau} = \frac{37,8}{3} = 12,6$; $\frac{T}{\tau_{\text{кор}}} = \frac{2880}{37,8} = 76,2$; $\mu = \frac{T}{T_0} = \frac{2880}{11,8} = 244$.

Так как $\tau_{\text{кор}} / \Delta\tau > 10$ и $T / \tau_{\text{кор}} \gg 10$, то дискретизация процесса не сказывается на точности оценки ординат корреляционной функции, а смещением оценки $R_x(\tau)$, вызванным влиянием оценки математического ожидания, можно пренебречь.

Из номограммы на рис. 4 для $\beta = 0,169$ $\mu F_{R_x}^2 = 525$, откуда $F_{R_x} = (525 / 244)^{1/2} = 1,47$.

Относительные доверительные интервалы $1 \pm \delta$ для $\tau = 0$ и $\tau = \tau_{\text{кор}}$ при доверительной вероятности $2\Phi(u) = 0,75$ ($u = 1,16$), вычисленные по формулам (38), (29), соответственно равны: $1 \pm 0,12$ и $1 \pm 1,7$. Доверительные интервалы выделены на рис. 24 вертикальными отрезками.

В окончательном виде выражение для оценки корреляционной функции температуры дымовых газов записывается следующим образом:

$$R_x^*(\tau) = 169 (e^{-0,085|\tau|} - 0,169 e^{-0,5|\tau|}) + 35 \cos 0,102\tau + 85 \cos 0,0105\tau,$$

где τ — в минутах, а $R_x^*(\tau)$ — в °C² [12].

19. ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СИГНАЛА РАДИАЦИОННОГО ПИРОМЕТРА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ПАРОГЕНЕРАТОРЕ ТП-87

Сигнал радиационного пирометра является косвенным показателем тепловыделения в топке парогенератора и применяется в схемах регулирования подачи топлива.

По отрезку реализации, содержащему 93 нуля и 100 максимумов, определено: $n_{0x} = 8,1$ 1/мин, $m_{0x} = 8,66$ 1/мин, $z = 1,07$. Особенности процессов топливоподачи и горения заставляют предполагать осциллирующий характер корреляционной функции, вследствие чего в качестве ее априорной модели была выбрана модель (37).

Задавшись значением $\alpha = 1$, по формулам (131), (132) найдем $\beta = 1,15$ и $T_0 = 0,0268$ мин.

Требования к точности оценки корреляционной функции характеризуются $\delta = 0,15$ для $R_x^*(0, T)$ при доверительной вероятности 0,95. Отсюда коэффициент изменчивости [см. (38)]:

$$F_{R_x} = \frac{\delta}{0,07u} = \frac{0,15}{0,07 \cdot 1,96} = 1,09.$$

По номограмме на рис. 5 находим необходимую длину реализации. Для $\alpha = 1$ и $\beta = 1,15$ $\mu F_{R_x}^2 = 1055$, откуда

$$T = \frac{T_0 \mu F_{R_x}^2}{F_{R_x}^2} = \frac{0,0268 \cdot 1055}{1,2} = 23,5 \text{ мин}.$$

Шаг дискретности по времени был выбран по номограмме на рис. 15. Для $\eta^0_x=0,025$ и $n_{0x}=8,1$ 1/мин $=0,135$ 1/с находим $\Delta t=1,05$ с.

Оценка корреляционной функции, рассчитанная по длине реализации $T=24$ мин с шагом дискретности $\Delta t=1$ с, приведена на рис. 25. Там же приведена ее аппроксимация с параметрами $\alpha=1,0$, $\beta=1,15$, $T_0=0,0268$ мин $=1,61$ с, т. е. с параметрами, принятыми для априорной модели. Выражение для $R^*_a(\tau)$ имеет вид, (мВ)²:

$$R^*_a(\tau) = 0,158 [e^{-0,621|\tau|} + 1,74e^{-0,358|\tau|} \sin(0,508|\tau| + 0,346)],$$

где τ — время, с.

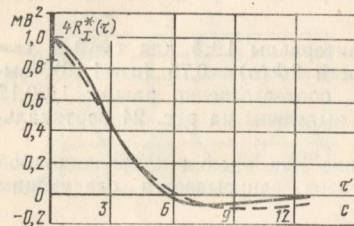


Рис. 25. Оценка корреляционной функции сигнала радиационного пирометра (штриховая линия) и ее аппроксимация (сплошная линия).

Достаточно хорошее совпадение экспериментальной оценки с априорной моделью не требует уточнения длины реализации. Из номограммы на рис. 7 $\tau_{кор}/T_0=5,8$, откуда $\tau_{кор}=9,3$ с и $T/\tau_{кор}=155 \gg 10$, следовательно, смещением оценки, вызванным влиянием оценки математического ожидания, можно пренебречь. Отношение $\tau_{кор}/\Delta t$ близко к десяти и влиянием погрешности от дискретизации на точность оценки ординат корреляционной функции тоже можно пренебречь.

Доверительный интервал на оценку $R^*_x(0, T)$ указан на рис. 25 вертикальным отрезком [15].

20. ОЦЕНКА НИЗКОЧАСТОТНОЙ КОМПОНЕНТЫ ФЛУКТУАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЫМОВЫХ ГАЗОВ НА ПАРОГЕНЕРАТОРЕ 51СП-230-100

Отрезок реализации флуктуаций температуры дымовых газов изображен на рис. 26 (реализация перестроена в сжатом масштабе времени без учета мелких выбросов). Из рисунка видно, что процесс нестационарен по математическому ожиданию. Априори известно, что основной вклад в эту нестационарность вносят обдувки поверхностей нагрева парогенератора, производимые 3 раза в смену. Для исследования эффективности обдувок необходимо определить характер изменения математического ожидания процесса.

Согласно априорным данным обдувочные устройства включаются и выключаются не строго периодически. Поэтому более правильно считать в данном случае изменение математического ожидания не компонентой $C(t)$, а компонентой $B(t)$. Применим для выявления $B(t)$ фильтрацию трехкратным текущим средним.

Визуальный анализ реализации длиной 15 ч позволил оценить среднюю амплитуду и среднюю частоту колебаний $B(t)$: $A_c=4,8^\circ\text{C}$, $\omega_c=0,0373$ рад/мин.

Дисперсия процесса σ^2_x оценивалась по числу пересечений процессом двух уровней [см. (102)]. Она равна 71°C^2 .

Среднее число нулей процесса n_{0x} и среднее число максимумов m_{0x} равны соответственно 0,188 и 0,358 1/мин. Отсюда $z=1,9$. В качестве априорной модели спектральной плотности процесса $X(t)$ примем модель 1 (см. § 11), занимающую при этом z по частотным

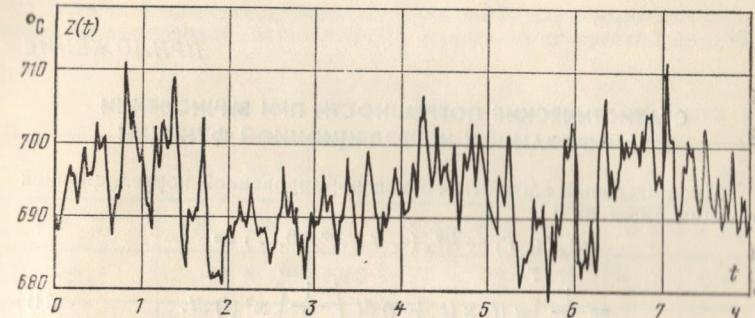
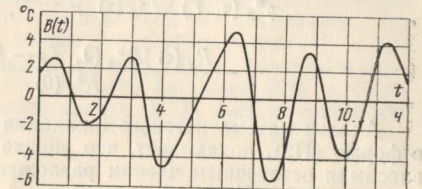


Рис. 26. Отрезок реализации флуктуаций температуры дымовых газов.

свойствам среднее положение между моделями 2 и 3. Из формул (120) и (121) находим $\beta=0,21$, $T_0=2,49$ мин. Отсюда

$$\gamma = \frac{1}{T_0(1+2\beta)} = \frac{1}{2,49(1+2 \cdot 0,21)} = 0,283 \text{ 1/мин.}$$

Рис. 27. Отрезок низкочастотной компоненты флуктуаций температуры дымовых газов, полученной в результате фильтрации процесса трехкратным текущим средним.



Полученные данные позволяют определить входные параметры α и γ/ω_c номограммы на рис. 19:

$$\alpha = \frac{\sigma_x \sqrt{2}}{A_c} = \frac{8,43 \sqrt{2}}{4,8} = 2,48; \quad \frac{\gamma}{\omega_c} = \frac{0,283}{0,0373} = 7,58 \text{ 1/рад.}$$

Из номограммы определяем $\Delta T\gamma=14,3$, следовательно, $\Delta T=51$ мин.

Отрезок компоненты $B(t)$, полученной в результате фильтрации процесса, приведен на рис. 27 [23].

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ НОРМИРОВАННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Множительный алгоритм оценки нормированной корреляционной функции имеет вид:

$$\rho^*_x(\tau, T) = R^*_x(\tau, T) / R^*_x(0, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt / \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (\text{П1})$$

Рассмотрим максимально коррелированную выборку [44]. Структура выражения (П1) позволяет предполагать, что для нормированной корреляционной функции сходимость к гауссовскому закону распределения будет хуже, чем для ненормированной. Используем для аппроксимации закона распределения оценки $\rho_x(\tau, T)$ кривые Пирсона [45]. Разлагая (П1) в окрестности точки $[R_x(\tau), R_x(0)]$ в кратный ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами разложения, получаем:

$$\rho^*_x(\tau, T) = \rho_x(\tau) + \frac{[R^*_x(\tau, T) - R_x(\tau)]}{R_x(0)} - \frac{R_x(\tau) [R^*_x(0, T) - R_x(0)]}{R_x^2(0)} + \theta. \quad (\text{П2})$$

Анализ математического ожидания оценки $\rho^*_x(\tau, T)$, записанной в форме (П2), показывает, что оценка несмещенная, а погрешность, вносимая остаточным членом разложения θ , уже при $h = T/\tau_{\text{кор}} \geq 30$ не превышает 6%.

Дисперсия оценки (П2) определяется выражением [5]

$$D[\rho^*_x(\tau, T)] = \frac{D[R^*_x(\tau, T)]}{R_x^2(0)} - \frac{2R_x(\tau) \text{cov}[R^*_x(0, T) R^*_x(\tau, T)]}{R_x^3(0)} + \frac{R_x^2(\tau) D[R^*_x(0, T)]}{R_x^4(0)} = \frac{1}{T} \int_0^\infty [\rho^2_x(t) + \rho_x(t + \tau) \rho_x(t - \tau) - 4\rho_x(\tau) \rho_x(t) \rho_x(t - \tau) + 2\rho^2_x(\tau) \rho^2_x(t)] dt. \quad (\text{П3})$$

Погрешность линейного приближения при определении дисперсии по (П3) не превышает 2% при $h \geq 30$.

Для определения третьего (M_3) и четвертого (M_4) моментов распределения $\rho^*_x(\tau, T)$ надо знать M_3 и M_4 распределения $R^*_x(\tau, T)$. Как показано в (14), для широкого класса случайных процессов с дробно-рациональными спектральными плотностями различие в M_3 и M_4 при одинаковых h не превышает 10%, что позволяет использовать для определения M_3, M_4 , асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 простейшую модель корреляционной функции вида (113).

В табл. 1 приведены значения $\sqrt{h}\gamma_1$ и $h\gamma_2$ для дискретных значений нормированной корреляционной функции в интервале 0,9—0,05.

Таблица 1

$\rho_x(\tau)$	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,00
$\sqrt{h}\gamma_1$	135	94	27	13,5	6,3	1,0	0,3	0,28
$h\gamma_2$	$17 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	1060	77	33	17	11,3	6,0
$h_{\text{мин}}$	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$	900	65	30	10	—

Подставив в формулу критерия типа распределения Пирсона [45]

$$\chi = \frac{\gamma_1^2 (\gamma_2 + 6)^2}{4(4\gamma_2 - 3\gamma_1^2 + 12)(2\gamma_2 - 3\gamma_1^2)}$$

значения γ_1 и γ_2 для конкретных h и $\rho_x(\tau)$, можно определить тип распределения, найти его параметры и вычислить доверительные интервалы на оценку $\rho^*_x(\tau, T)$. Анализ табл. 1 показывает, что исследуемое распределение при малых τ относится к типу I, а при больших τ — к типу IV. В последней строке табл. 1 приведены значения $h_{\text{мин}}$, начиная с которых с ошибкой не более 10% для построения доверительных интервалов на $\rho^*_x(\tau, T)$ можно применять нормальное распределение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакирев В. С., Дудников Е. Г., Цирлин А. М. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М.: Энергия, 1967.
2. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применение. М.: Наука, 1965.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
4. Веселова Г. П., Грибанов Ю. И. Об оптимальном шаге выборки при вычислении корреляционных функций случайных процессов на цифровых вычислительных устройствах. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 12, с. 110—117.
5. Виленкин С. Я. Статистические методы исследования систем автоматического регулирования. М.: Советское радио, 1967.
6. Влияние ошибок квантования случайного процесса на точность измерения корреляционной функции. — В кн.: Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. Труды III Всесоюзного симпозиума. Л.: ВНИИЭП, 1970, с. 71—76. Авт.: В. А. Геранин, А. Я. Гончарова, Н. А. Миронов, А. Н. Продеус.
7. Волгин В. В., Каримов Р. Н. О выборе шага дискретности по времени при вычислении корреляционной функции случайных процессов. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 5, с. 37—43.
8. Волгин В. В., Каримов Р. Н. О выборе длины реализации при вычислении корреляционной функции по экспериментальным данным случайных процессов. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 6, с. 53—62.
9. Волгин В. В., Каримов Р. Н. К вопросу оценки характеристик измеримых случайных возмущающих воздействий. — В кн.: Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1966—1967 гг. М.: МЭИ, 1967, с. 32—45.
10. Волгин В. В., Каримов Р. Н. Постановка задачи измерения корреляционных функций промышленных случайных процессов. — В кн.: Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1968—1969 гг. М.: МЭИ, 1969, с. 29—36.
11. Волгин В. В., Каримов Р. Н. Выбор критерия точности и некоторые вопросы измерения оценок корреляционных функций. — В кн.: Материалы XXXIII научно-технической конференции. Саратов: СПИ, 1970, с. 3—11.
12. Волгин В. В., Каримов Р. Н., Корецкий А. С. Учет реальных возмущающих воздействий и выбор критериев качества регулирования при сравнительной оценке качества регулирования тепловых процессов. — Теплоэнергетика, 1970, № 3, с. 25—30.
13. Волгин В. В., Каримов Р. Н., Усенко В. В. Оптимизация параметров сглаживания фильтра текущего среднего. — В кн.: Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1968—1969 гг. М.: МЭИ, 1969, с. 37—46.
14. Волгин В. В., Саков И. А. Построение доверительных интервалов на корреляционные функции, рассчитанные по экспериментальным данным. — Автоматика, 1974, № 2, с. 32—38.
15. Волгин В. В., Щедеркина Т. Е. Планирование эксперимента по определению статистических характеристик промышленных случайных процессов с осциллирующими корреляционными функциями. — Изв. вузов. Сер. Энергетика, 1973, № 5, с. 97—103.
16. Горбенко В. С. Вычисление ожидаемой среднеквадратичной ошибки при экспериментальном определении одномерных функций распределения вероятностей. — Изв. вузов. Сер. Радиотехника, 1962, № 2, с. 234—242.
17. Губарев В. В. К вопросу о статистических характеристиках шумов квантования нормальных сигналов. — Автоматика, 1968, № 3, с. 91—96.
18. Ицкович Э. Л. Статистические методы при автоматизации производства. М.: Энергия, 1964.
19. Каримов Р. Н. Оценка шага дискретности по времени при измерении взаимной корреляционной функции случайных процессов. — Изв. вузов. Сер. Энергетика, 1968, № 12, с. 72—77.
20. Каримов Р. Н. Об одном корреляционном методе выявления скрытой периодичности. — В кн.: Материалы XXXII научно-технической конференции. Саратов: СПИ, 1969, с. 47—49.
21. Каримов Р. Н. О применении характеристик особых точек для определения интервала дискретизации по времени. — В кн.: Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. Труды V Всесоюзного симпозиума. Л.: ВНИИЭП, 1972, с. 77—83.
22. Каримов Р. Н., Волгин В. В. Статистические характеристики случайных сигналов в системах автоматического управления. Саратов: СПИ, 1971.
23. Каримов Р. Н., Усенко В. В. Исследование реальных эксплуатационных возмущений на котле 51СП-230-100. — В кн.: Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1968—1969 гг. М.: МЭИ, 1969, с. 62—70.
24. Клоков Ю. Л. Оценка шага дискретности по времени при вычислении спектральных плотностей случайных процессов. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 3, с. 356—367.
25. Клоков Ю. Л., Журавлев Л. В. Метод оценки условного времени затухания корреляционных функций некоторого класса случайных процессов. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 10, с. 1695—1702.
26. Клоков Ю. Л., Маслеников И. М. О методике экспериментального определения статистических характеристик случайных процессов в промышленных системах регулирования. — В кн.: Комплексная автоматизация химических производств. Труды МИХМ. М.: Машгиз, 1963, т. XXV, с. 102—113.
27. Клоков Ю. Л., Цирлин А. М. Центрирование реализаций случайных процессов при помощи ЦВМ. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 3, с. 403—407.
28. Косякин А. А., Филаретов Г. Ф. Погрешности цифровых корреляторов, вызванные квантованием по уровню. — В кн.: Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1965 г. М.: МЭИ, 1965, с. 71—79.
29. Котюк А. Ф., Ольшевский В. В., Цветков Э. И. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1967.
30. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Советское радио, 1969.
31. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972.

32. Постоенко Ю. К. Об алгоритмах вычисления оценки корреляционной функции. — В кн.: Научные труды СИБВИМ. Новосибирск: Западно-сиб. кн. изд-во, 1964, вып. 2, с. 89—100.
33. Полляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Советское радио, 1971.
34. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962.
35. Романенко А. Ф., Сергеев Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М.: Советское радио, 1968.
36. Слуцкий Е. Е. Сложение случайных причин, как источник циклических процессов. — Вопросы конъюнктуры. М.: Финансовое изд-во НКФ СССР, 1927, вып. 1, с. 34—64.
37. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960.
38. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961.
39. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
40. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
41. Хуснутдинов Г. Н., Яроловичи Р. В. Погрешность воспроизведения образцовой корреляционной функции. — В кн.: Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. Труды IV Всесоюзного симпозиума. Л.: ВНИИЭП, 1971, с. 61—67.
42. Чхартишвили Г. С. Метод идентификации динамических объектов с помощью сигналов специального вида. — Изв. вузов. Сер. Приборостроение, 1972, № 12, с. 43—51.
43. Lomnicki Z. A., Zaremba S. K. On estimating the spectral density function of a stochastic process. — Journ. Roy. Statist. Soc. B, 1957, vol. 19, p. 13.
44. Волгин В. В., Саков И. А. Погрешности измерения нормированной корреляционной функции и ее параметров. — В кн.: Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. Труды VIII Всесоюзного симпозиума. Л.: ВНИИЭП, 1975, с. 41—48.
45. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971.
46. Волгин В. В., Соколов С. В. К вопросу об осреднении комплексных случайных процессов. — В кн.: Труды МЭИ, вып. 212. М.: МЭИ, 1975, с. 44—46.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава первая. Постановка задачи исследования статистических характеристик случайных процессов	5
1. Модель процесса	5
2. Задачи планирования эксперимента при измерении корреляционных функций	8
Глава вторая. Статистические погрешности при вычислении корреляционных функций и выбор длины реализации	10
3. Дисперсии оценок корреляционных функций	10
4. Критерий точности оценки корреляционной функции	15
5. Выбор длины реализации при вычислении оценки корреляционной функции	18
6. Выбор длины реализации при вычислении оценки корреляционной функции по выборочным данным	22
7. Выбор длины реализации при вычислении оценки взаимной корреляционной функции гауссовских процессов	27
8. Выбор длины реализации при вычислении оценки взаимной корреляционной функции в задаче идентификации	29
Глава третья. Использование особых точек для оценки характеристик случайных процессов	37
9. Статистические характеристики особых точек стационарных гауссовских процессов	37
10. Приближенная оценка характеристик случайных процессов по особым точкам	39
11. Оценка параметров корреляционной функции и спектральной плотности	41
Глава четвертая. Дискретизация случайных процессов при вычислении корреляционных функций	49
12. Входной сигнал — гауссовский дифференцируемый случайный процесс	50
13. Входной сигнал — недифференцируемый случайный процесс	52
14. Выборочно-шаговый алгоритм	54
Глава пятая. Анализ случайных процессов, содержащих низкочастотные и периодические компоненты	56
15. Фильтрация случайного процесса	56
16. Корреляционные методы выявления скрытых периодичностей	59
Глава шестая. Экспериментальная оценка статистических характеристик случайных процессов в промышленных системах управления	66
17. Оценка корреляционной функции флуктуаций паровой нагрузки промышленной котельной	66
	79

18. Оценка статистических характеристик флуктуаций температуры дымовых газов на парогенераторе ПК33-83СП	68
19. Оценка корреляционной функции сигнала радиационного пирометра, установленного на парогенераторе ТП-87	71
20. Оценка низкочастотной компоненты флуктуаций температуры дымовых газов на парогенераторе 51СП-230-100	72
Приложение. Статистические погрешности при вычислении нормированной корреляционной функции	74
Список литературы	76