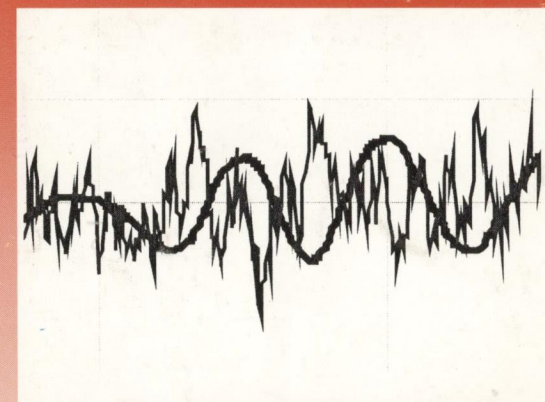


105-05

УДК 519  
621.398  
Щ 351

# МЭИ



Т.Е. Щедеркина, В.В. Волгин

**Экспериментальное определение  
моделей статики и динамики  
объектов управления**

Учебное пособие

Модели корреляционных функций

| Номер ФФ | Передаточная функция формирующего фильтра                                                                 | Нормированная корреляционная функция $\rho(\tau)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $W_1(p)$ | $\frac{K}{(T_0 \cdot p + 1) \cdot (T_0 \cdot \beta_1 \cdot p + 1) \cdot (T_0 \cdot \beta_2 \cdot p + 1)}$ | $K_1 \cdot \left( ae^{-\lambda \tau } - be^{\frac{ \tau }{T_0}} \right); \quad \lambda = \frac{1}{T_0}$ $a = \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{(1 - \beta_1) \cdot (1 - \beta_2)}; \quad b = \frac{\beta_1^3(1 + \beta_2)}{1 - \beta_1}; \quad c = \frac{\beta_2^3(1 + \beta_1)}{1 - \beta_2}$ $K_1 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2) \cdot (\beta_1 + \beta_2 \beta_2 + \beta_2)}$                                                                                       |
| $W_2(p)$ | $\frac{K}{(T_0 \cdot \alpha \cdot p + 1) \cdot (T_0^2 \cdot p^2 + T_0 \cdot \gamma \cdot p + 1)}$         | $K_1 \cdot \left[ ce^{\frac{ \tau }{T_0}} + be^{\frac{ \tau }{T_0}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4 - \gamma^2}}{2}  \tau  + \varphi\right) \right]$ $c = \alpha^3 \gamma; \quad b = 2\sqrt{\frac{(1 + \alpha^2)^2 - \alpha^2 \gamma^2}{4 - \gamma^2}};$ $K_1 = \frac{1}{\alpha^3 \gamma + \alpha^2(1 - \gamma^2) + 1}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{(1 + \alpha^2 - \alpha^2 \gamma^2)\sqrt{4 - \gamma^2}}{\gamma(1 + 3\alpha^2 - \alpha^2 \gamma^2)}\right)$ |

## ОЦЕНКА ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

## Цель работы

Целью лабораторной работы является: проведение серии параллельных опытов по определению переходных характеристик динамического объекта при наличии приведенной к выходу аддитивной помехи  $y(t)$ ; обработка результатов эксперимента по определению оценки переходной характеристики объекта с известной точностью и достоверностью.

## 5.1. Теоретическое описание

При экспериментальном определении динамических характеристик объекта регулирования широко используют переходную характеристику.

Переходная характеристика  $h(t)$  представляет собой реакцию объекта на входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1(t) \quad \text{при } t \geq 0, \\ x(t) &= 0 \quad \text{при } t < 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

при условии, что до начала воздействия выходная величина и все ее производные равнялись нулю.

Переходная характеристика  $h(t)$  дает представление о динамических свойствах объекта: наличии или отсутствии самовыравнивания, коэффициенте передачи, транспортном запаздывании, дифференцирующих свойствах, порядке дифференциального уравнения, инерционности и т.п. По переходной характеристике  $h(t)$  можно вычислить передаточную функцию и КЧХ объекта.

Организация эксперимента при определении переходной характеристики  $h(t)$  сводится к подаче на вход объекта ступенчатого воздействия формула (5.1).

При проведении эксперимента по определению  $h(t)$  в реальных условиях на переходную характеристику накладываются случайные флуктуации, вызванные как возмущениями, приложенными к объекту, так и помехами, возникающими в каналах измерения и регистрирующей аппаратуре. Структурная схема идентификации динамического объекта изображена на рис. 5.1.

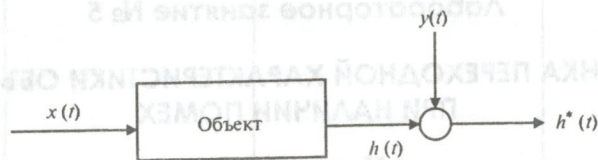


Рис. 5.1. Структурная схема идентификации динамического объекта

Помеха  $y(t)$  представляет собой стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием  $M[y(t)] = 0$  и постоянной дисперсией  $D[y(t)] = \sigma^2$ .

При подаче на вход объекта ступенчатого возмущения по формуле (5.1) на выходе объекта получим сумму:

$$h^*(t) = h(t) + y(t). \quad (5.2)$$

Выбор метода статистической обработки экспериментальных оценок  $h^*(t)$  зависит от частотных свойств помехи  $y(t)$ . Если  $y(t)$  имеет относительно низкочастотный характер, то для получения представительной оценки переходной характеристики используют множество в объеме  $n$  реализаций  $h^*(t)$ .

В качестве представительной оценки  $h(t)$  обычно принимают среднеарифметическое значение [11]:

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i^*(t), \quad (5.3)$$

где  $h_i^*(t) = h_i(t) + y(t)$ .

Полученная оценка (5.3) обладает свойствами состоятельности и несмещенности.

В качестве оценки точности переходной характеристики  $\tilde{h}(t)$  используется доверительный коридор, ширина которого равна  $\pm \Delta h(t)$ . Показателем надежности оценки  $\tilde{h}(t)$  является вероятность  $P$  того, что доверительный коридор накрывает истинную характеристику  $h(t)$ . Построение доверительного коридора осуществляется при условии, что вероятности пребывания каждого  $j$ -го сечения  $\tilde{h}_j(t)$  при  $j = 0, 1, \dots, m$  внутри доверительного коридора  $\pm \Delta h(t)$  заданы и равны между собой:

$$P_1 = P_2 = \dots = P_j = \dots = P_{\text{зад}}. \quad (5.4)$$

Вычисление оценки  $\tilde{h}(t)$  производится в отдельных временных сечениях  $t_j = j \times \Delta t$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ;  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ ). Шаг дискретности  $\Delta t$  между соседними отсчетами выбирается, исходя из допустимой погрешности восстановления промежуточных точек кривой  $\tilde{h}_j(t)$ . Обычно для объектов 2-го и 3-го порядка, принимают число интервалов  $m \leq 12$ .

Учитывая, что в каждом  $j$ -м сечении оценок переходных характеристик  $h_i^*(t)$  имеется  $n$  независимых, нормально распределенных случайных величин  $h_{ij}^*$ , можно записать:

$$P(|\tilde{h}_j - h_j| < \Delta h_j) = P_{\text{зад}}, \quad (5.5)$$

где  $\Delta h_j$  — ширина доверительного интервала в  $j$ -м сечении, определяемая с помощью распределения Стьюдента:

$$\Delta h_j = \pm t_{P_{\text{зад}}} \cdot \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}. \quad (5.6)$$

В выражении (5.6) оценка  $\sigma$  — усредненное по  $(m+1)$  сечению значение среднего квадратического отклонения случайной величины  $h_{ij}^*$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^m \tilde{\sigma}_j^2}{m+1}} \quad (5.7)$$

с дисперсией в  $j$ -м сечении, определяемой по выражению:

$$\tilde{\sigma}_j^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^n (h_{ij}^* - \tilde{h}_j)^2 \right)}{n-1}. \quad (5.8)$$

Величину  $t_{P_{\text{зад}}}$  можно найти в зависимости от заданной доверительной вероятности  $P_{\text{зад}}$  и числа степеней свободы  $f = n - 1$ .

Для определения надежности оценки переходной характеристики  $\tilde{h}_j(t)$  при условии, что ширина доверительного коридора численно равна ширине доверительного интервала  $\Delta h(t)$  [формула (5.6)] на  $\tilde{h}_j(t)$ ,

следует вычислить вероятность того, что доверительный коридор  $\pm \Delta h(t)$  накроет истинные значения  $h_j(t)$  во всех сечениях<sup>3</sup>:

$$P[h_1, \dots, h_j, \dots, h_m \subset \tilde{h}_j \pm \Delta h(t)] \cong P_j^{m+1} (1 - K_m) + K_m \cdot P_j, \quad (5.9)$$

где обобщенный коэффициент корреляции между сечениями  $K_m$  определяется по выражению:

$$K_m = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^m \frac{|\arcsin \hat{r}_{kl}|}{N}, \quad (5.10)$$

где  $\hat{r}_{kl}$  — оценки коэффициентов нормированной корреляционной матрицы:

$$|\hat{r}_{kl}| = \frac{|\hat{K}_{kl}|}{\bar{\sigma}_k \cdot \bar{\sigma}_l} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \hat{r}_{01} & \hat{r}_{02} & \hat{r}_{03} & \dots & \hat{r}_{0m} \\ & 1 & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} & \dots & \hat{r}_{1m} \\ & & 1 & \hat{r}_{23} & \dots & \hat{r}_{2m} \\ & & & 1 & \dots & \hat{r}_{km} \\ & & & & \dots & 1 \end{vmatrix}}{N}, \quad (5.11)$$

$$N = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (5.12)$$

Оценки коэффициентов корреляционной матрицы  $|\hat{K}_{kl}|$  могут быть вычислены по экспериментальным данным, согласно выражению:

$$\hat{K}_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^n [h^*_i(t_k) - \tilde{h}(t_k)] [h^*_i(t_l) - \tilde{h}(t_l)]}{(n-1)}. \quad (5.13)$$

Для расчета вероятности (5.9) и коэффициента  $K_m$  (5.10) необходимо предварительно осуществить проверку значимости коэффициентов нормированной корреляционной матрицы (5.11), полученных по экспериментальным данным.

<sup>3</sup> Формула (5.9) не лишена недостатков, так как представляет собой грубую аппроксимацию многомерного нормального распределения. Так, в частности, надежность оценки переходной характеристики зависит от числа интервалов разбиения  $m$ .

Значимость оценок коэффициентов корреляции следует проверить путем сравнения умноженных на  $\sqrt{n-1}$  рассчитанных значений оценок с критическим коэффициентом корреляции для заданной доверительной вероятности и числа  $n$  [13]:

$$|\hat{r}_{kl}| \cdot \sqrt{n-1} > R_{\text{крит}}(P_{\text{дов}}, n). \quad (5.14)$$

Значения критического коэффициента корреляции в формуле (5.14) можно найти, используя табл. 5.1.

При выполнении условия (5.14) следует с принятой доверительной вероятностью отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции  $H_0: r_{kl} = 0$  и принять альтернативную гипотезу  $H_1: r_{kl} \neq 0$  о статистической значимости коэффициента корреляции.

Таблица 5.1

Критические значения  $R_{\text{крит}}(P_{\text{дов}}, n)$

| $P_{\text{дов}}$<br>Объем $n$ | 0,9  | 0,95 | 0,99 | 0,999 | $P_{\text{дов}}$<br>Объем $n$ | 0,9  | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|-------------------------------|------|------|------|-------|-------------------------------|------|------|------|-------|
| 5                             | 1,65 | 1,90 | 2,29 | 2,62  | 11                            | 1,65 | 1,90 | 2,32 | 2,68  |
| 6                             | 1,65 | 1,90 | 2,29 | 2,62  | 12                            | 1,65 | 1,91 | 2,35 | 2,73  |
| 7                             | 1,65 | 1,90 | 2,29 | 2,62  | 13                            | 1,65 | 1,92 | 2,37 | 2,77  |
| 8                             | 1,65 | 1,90 | 2,29 | 2,62  | 14                            | 1,65 | 1,92 | 2,39 | 2,81  |
| 9                             | 1,65 | 1,90 | 2,29 | 2,62  | 15                            | 1,65 | 1,92 | 2,40 | 2,85  |
| 10                            | 1,65 | 1,90 | 2,29 | 2,62  | 16                            | 1,65 | 1,93 | 2,41 | 2,87  |

## 5.2. Задание и порядок выполнения работы

1. В соответствии с исходными данными, представленными в табл. 5.1 (вариант задается преподавателем), смоделировать в среде MathCAD объект с приведенной к выходу низкочастотной помехой (рис. 5.1);
2. Провести модельный эксперимент (использовать вариант программы, предоставляемый преподавателем) в объеме  $n$  полученных оценок переходных характеристик.
3. Совместить на одном графике  $n$  полученных оценок переходных характеристик.
4. Произвести обработку результатов модельного эксперимента, используя вышеизложенную методику.
5. Оформить отчет, содержащий результаты эксперимента, результаты обработки исходных данных. Сделать заключение об оценке точности и надежности динамической характеристики объекта исследования.

### 5.3. Контрольные вопросы

1. Какие методы следует использовать для определения представительной оценки переходной характеристики объекта регулирования, если известно, что помеха имеет низкочастотный характер; высокочастотный характер?
2. Какими частотными свойствами должна обладать помеха, приведенная к выходу объекта, в данной работе?
3. В чем различие переходной характеристики и кривой разгона?
4. Что означает постановка задачи определения оценки переходной характеристики с известной точностью и надежностью?
5. Как определить оценку точности усредненной по серии экспериментов переходной характеристики?
6. От каких факторов зависит ширина доверительного интервала?
7. От каких факторов зависит ширина доверительного коридора?
8. Чему равна вероятность попадания истинной переходной характеристики в доверительный коридор, если  $K_m = 0$  и  $K_m = 1$ ?
9. Как обеспечить требуемую точность оценки экспериментальной переходной характеристики?

Таблица 5.2

Исходные данные

| №         | 1    | 2    | 3     | 4    | 5    | 6     | 7    | 8    | 9     | 10   |
|-----------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|
| $K_{фф}$  | 3    | 2    | 2.5   | 3    | 3.5  | 2.5   | 2    | 3    | 2.5   | 3    |
| $T_{фф}$  | 60   | 60   | 60    | 60   | 60   | 60    | 60   | 60   | 60    | 60   |
| $\beta_1$ | 0,5  | 0,5  | 0,5   | 0,5  | 0,5  | 0,5   | 0,5  | 0,5  | 0,5   | 0,5  |
| $\beta_2$ | 0,25 | 0,25 | 0,25  | 0,25 | 0,25 | 0,25  | 0,25 | 0,25 | 0,25  | 0,25 |
| $K_{об}$  | 3    | 4    | 5     | 6    | 3    | 4     | 5    | 4    | 3     | 2    |
| $T_{1об}$ | 10   | 10   | 10    | 10   | 10   | 10    | 10   | 10   | 10    | 10   |
| $T_{2об}$ | 12   | 12   | 12    | 12   | 12   | 12    | 12   | 12   | 12    | 12   |
| $n$       | 10   | 10   | 8     | 7    | 6    | 5     | 5    | 9    | 8     | 7    |
| $m$       | 12   | 5    | 10    | 5    | 12   | 6     | 10   | 5    | 12    | 6    |
| $P_{дов}$ | 0,9  | 0,95 | 0,975 | 0,9  | 0,95 | 0,975 | 0,9  | 0,95 | 0,975 | 0,95 |

## СТАТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

### Цель работы

Освоение различных методов поиска экстремума целевой функции статического объекта, работающего в условиях помех.

### 6.1. Теоретическое описание

Оптимизация объектов управления, технологических процессов является одной из наиболее важных и распространенных задач в научных и инженерных исследованиях. Под оптимизацией объекта управления следует понимать определение наилучших условий, решений, значений параметров, уровней факторов, обеспечивающих экстремум целевой функции. Примерами задач оптимизации могут служить: определение оптимальных нагрузок теплосилового оборудования на ТЭС и АЭС, при которых достигается минимум суммарного расхода топлива (минимум приведенных затрат) на производство электрической и тепловой энергии; выбор оптимального состава генерирующего оборудования; выбор оптимальных значений режимных параметров оборудования; определение оптимальных параметров настройки регуляторов в замкнутых АСР при минимизации какого-либо из критериев качества регулирования и т.д.

Задача статической оптимизации объекта исследования может быть сформулирована следующим образом: определить такие значения  $m$  управляемых входных воздействий или факторов объекта [3, 12]

$$\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots, x_m^*),$$

при которых функция цели, являющаяся критерием оптимизации, достигает экстремума (минимума или максимума):

$$Y(\bar{X}^*) = Y(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_m^*) \rightarrow \min(\max). \quad (6.1)$$

В общем случае переменные  $x_i$  связаны между собой  $k$  уравнениями или неравенствами связи:

$$G_j(\bar{X}^*) \geq 0, \quad j = 1 \div k. \quad (6.2)$$

Оптимизация объекта управления может рассматриваться как задача поиска локального, глобального, условного или безусловного

экстремума функции цели в зависимости от степени сложности исследуемого объекта (количества откликов и факторов, вида статической зависимости (6.1), наличия ограничений по факторам и функции цели).

Все существующие методы оптимизации [3, 11] можно разбить на два основных класса: теоретические и экспериментальные (поисковые). В теоретических методах предполагают, что известна математическая модель объекта и задача может быть решена одним из известных аналитических методов поиска экстремума функции (прямой, метод множителей Лагранжа и т. д.). Экспериментальные методы используются при отсутствии математической модели объекта. Однако при этом имеется возможность измерять функцию цели при различных вариациях факторов.

Существуют различные поисковые методы, отличающиеся организацией движения к экстремуму и способом выбора направления движения, например, следующие методы: покоординатный (Гаусса—Зайделя), градиентный, симплексный, метод случайного поиска, метод крутого восхождения и т. д. Эти методы применимы как для исследования физических объектов, так и для различного рода задач чисто вычислительного плана, например, поиск минимума дисперсии в плоскости параметров настройки регулятора, поиск минимума суммарных тепловых потерь котла в зависимости от ряда влияющих факторов. Главным отличием процедуры поиска оптимума в вычислительном эксперименте является отсутствие неконтролируемых факторов (случайной ошибки опыта) в отличие от исследования непосредственно на объектах.

Поисковые методы предусматривают последовательное локальное изучение поверхности отклика по результатам ряда экспериментов. Направление движения из некоторой исходной точки зависит как от локальных свойств поверхности отклика, так и от выбранной стратегии поиска экстремума функции цели. Многократная последовательная процедура изучения поверхности отклика [формула (6.1)] и продвижение в факторном пространстве обеспечивает, в конечном итоге, определение значений факторов, соответствующих экстремуму целевой функции.

### Градиентный метод поиска экстремума функции цели

Метод основан на предварительном определении градиента целевой функции, так как эта информация позволяет в процессе оптими-

зации совершать движение в направлении наиболее быстрого возрастания или уменьшения функции цели.

Градиентом непрерывной функции цели в заданной точке факторного пространства  $\bar{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  является вектор, определяемый по выражению:

$$\text{grad} Y(\bar{X}^0) = \frac{\partial Y}{\partial x_1} \cdot \vec{l}_1 + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \cdot \vec{l}_2 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial x_m} \cdot \vec{l}_m, \quad (6.3)$$

где  $\vec{l}_i$  — единичный направляющий вектор координатной оси.

Допустим, что объект исследования вблизи заданной точки факторного пространства может быть описан приближенно линейной моделью:

$$Y(\bar{X}^0) \approx b_0 + b_1(x_1 - x_1^0) + b_2(x_2 - x_2^0) + \dots + b_m(x_m - x_m^0), \quad (6.4)$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — коэффициенты модели в некоторой окрестности точки  $\bar{X}^0$ , ограниченной сферой радиуса  $r$ :

$$r = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots + (\delta x_m)^2}. \quad (6.5)$$

Разложив функцию цели (6.1) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\bar{X}^0$  и ограничившись линейными членами разложения, получим:

$$Y(\bar{X}) \approx Y(\bar{X}^0) + \frac{\partial Y}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial Y}{\partial x_m}(x_m - x_m^0). \quad (6.6)$$

Из выражений (6.4) и (6.6) следует, что для всех входных переменных исходной точки факторного пространства  $\bar{X}^0$  справедливо соотношение:

$$b_i = \frac{\delta Y}{\delta x_i}. \quad (6.7)$$

Для определения приближенных значений оценок коэффициентов (6.7) необходимо организовать пробные движения из точки  $\bar{X}^0$  по каждому из факторов с величиной пробного шага  $\Delta x_i = \pm r$ . В случае двух факторов запишем составляющие вектор — градиента целевой функции по каждой переменной:

$$b_1 = \frac{y(x_1^0 + \rho; x_2^0) - y(x_1^0 - \rho; x_2^0)}{2\rho}, \quad (6.8)$$

$$b_2 = \frac{y(x_1^0; x_2^0 + \rho) - y(x_1^0; x_2^0 - \rho)}{2\rho},$$

которые можно определить после совершения эксперимента с пробными шагами.

Далее следует рассчитать координаты новой рабочей точки  $\bar{X}^1$  в факторном пространстве:

$$\bar{X}^1 = \bar{X}^0 + a \cdot \text{grad} Y(\bar{X}^0), \quad (6.9)$$

где  $a$  — величина рабочего шага, а градиент целевой функции определяется составляющими (6.8) в случае двух входных переменных.

Например, для  $x_1$  и  $x_2$  координаты рабочей точки  $\bar{X}^1$  рассчитываются по выражению:

$$x_1^1 = x_1^0 + b_1 \cdot a; \quad x_2^1 = x_2^0 + b_2 \cdot a. \quad (6.10)$$

Движение по градиенту осуществляется из каждой новой рабочей точки факторного пространства до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$|\text{grad} Y(\bar{X}^k)| \approx 0, \quad (6.11)$$

что соответствует незначимости составляющих градиента (6.8) в  $k$ -й точке  $\bar{X}^k$ :  $b_i^k \leq \varepsilon$ . Здесь  $\varepsilon$  — малое значение, которым следует задаться.

Таким образом, достигается окрестность точки экстремума целевой функции.

### Симплексный метод поиска экстремума функции цели

Симплексный метод оптимизации в отличие от градиентного позволяет совмещать пробное и рабочее движение. Идея симплексного метода заключается в исследовании локального участка поверхности отклика и принятии решения о направлении движения по относительным значениям функции  $Y(\bar{X})$  в различных точках факторного пространства, являющихся вершинами симплекса.

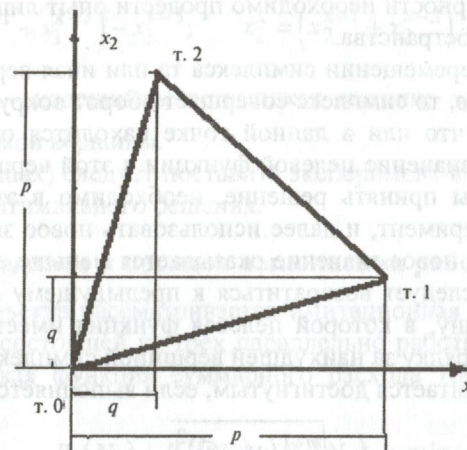


Рис. 6.1. Исходный симплекс с вершинами (т. 0, т. 1, т. 2)

Симплексом называется выпуклая фигура в многомерном пространстве, число вершин которой превышает размерность этого пространства на единицу. Например, в двухмерном пространстве симплексом является треугольник, в трехмерном — тетраэдр и т.д. Симплекс называется регулярным, если расстояния между вершинами равны.

Для задания координат вершин исходного регулярного симплекса необходимо одну из вершин поместить в начало координат, а остальные расположить так, чтобы ребра, исходящие из нулевой вершины (т. 0), образовывали одинаковые углы с соответствующими координатными осями (рис. 6.1). Тогда координаты вершин симплекса (т. 1, т. 2) могут быть определены, если известны значения  $p, q, m$ :

$$p = \frac{1}{m\sqrt{2}}(n-1+\sqrt{m+1}); \quad q = \frac{1}{m\sqrt{2}}(\sqrt{m+1}-1), \quad (6.12)$$

где  $m$  — размерность факторного пространства.

Путем последовательного отбрасывания вершин, в которых при поиске максимума (минимума) значения функции цели оказываются минимальными (максимальными), можно совершать перемещение в факторном пространстве до достижения области оптимума. Перемещение осуществляется через центр грани, противолежащей «наихудшей» вершине симплекса. Для построения последующего симплекса

прежней размерности необходимо провести опыт лишь в одной точке факторного пространства.

Если при перемещении симплекса та или иная вершина сохраняет свое положение, то симплекс совершает оборот вокруг этой вершины. Это означает, что или в данной точке находится оптимум целевой функции, или значение целевой функции в этой вершине определено неверно. Чтобы принять решение, необходимо в этой точке вновь провести эксперимент, и далее использовать новое значение целевой функции. Если новое значение оказывается меньше, чем в остальных вершинах, то следует возвратиться к предыдущему симплексу и отбросить вершину, в которой целевая функция имеет величину, следующую по порядку за наихудшей вершиной симплекса.

Оптимум считается достигнутым, если выполняется условие:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{m+1}} \leq \varepsilon, \quad (6.13)$$

где  $\varepsilon$  — малая величина;  $y_i$  — измеренные значения целевой функции в каждой  $i$ -й вершине;  $\bar{y}$  — среднее значение целевой функции в вершинах последнего симплекса.

В качестве примера рассмотрим поиск экстремума целевой функции  $Y(x_1, x_2)$ . В соответствии с формулой (6.12) получено для  $m = 2$ :  $p = 0,966$ ,  $q = 0,259$ .

Координаты вершин исходного симплекса следует рассчитать по выражениям (рис. 6.1):

- для вершины т. 1

$$x_1^1 = x_1^0 + p \cdot \Delta x; \quad x_2^1 = x_2^0 + q \cdot \Delta x;$$

- для вершины т. 2

$$x_1^2 = x_1^0 + q \cdot \Delta x; \quad x_2^2 = x_2^0 + p \cdot \Delta x.$$

Зеркальное отображение вершины с максимальным (при поиске минимума) значением функции отклика имеет координаты:

$$x_1^3 = (x_1^0 + x_1^1) - x_1^2; \quad x_2^3 = (x_2^0 + x_2^1) - x_2^2, \quad (6.14)$$

где т. 2 — отбрасываемая вершина симплекса.

В общем случае для  $k$ -й вершины симплекса координаты рассчитываются следующим образом:

$$x_1^k = (x_1^{k-1} + x_1^{k-2}) - x_1^{k-3}; \quad x_2^k = (x_2^{k-1} + x_2^{k-2}) - x_2^{k-3}, \quad (6.15)$$

где  $x_i^{k-1}, x_i^{k-2}$  — координаты оставшихся вершин;  $x_i^{k-3}$  — координаты отбрасываемой вершины.

В точке min (max) следует поставить эксперимент второго порядка для уточнения оптимального решения.

## 6.2. Задание и порядок выполнения работы

1. В качестве объекта рассматривается имитационная модель тепловой станции, состоящей из трех параллельно работающих энергоблоков. Целевая функция суммарного расхода топлива на ТЭС имеет вид:

$$B_{\text{сум}} = B_1(N_1) + B_2(N_2) + B_3(N_3) \rightarrow \min, \quad (6.16)$$

где  $B_i(N_i)$  — расходная характеристика  $i$ -го энергоблока.

Ограничения, учитываемые при поиске минимума целевой функции: на заданную суммарную электрическую нагрузку ТЭС

$$N_{\text{зад}} = N_1 + N_2 + N_3;$$

на допустимый диапазон изменения мощности каждого энергоблока

$$N_i^{\min} \leq N_i \leq N_i^{\max}.$$

На целевую функцию накладывается помеха, являющаяся стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией.

2. В качестве варьируемых факторов следует использовать мощности первого и второго блока, измеряя при этом суммарный расход топлива на ТЭС.
3. Реализовать эксперимент, варьируя  $N_1, N_2$  с использованием градиентного метода. Принять величины пробного и рабочего шага, равными 5 и 2; погрешность  $\varepsilon \leq 0,03$  ( $\varepsilon \leq 0,01$ ).
4. Реализовать эксперимент, варьируя  $N_1, N_2$  с использованием симплексного метода. Принять  $\Delta x = 5$ ;  $\Delta x = 2$  погрешность  $\varepsilon \leq 0,03$  ( $\varepsilon \leq 0,01$ ).
5. Оформить отчет, который должен содержать:
  - а) исходные данные и условия проведения эксперимента;
  - б) формулировку задачи оптимизации;

- в) результаты промежуточных экспериментов и расчетов;
- г) графическое отображение перемещения факторов в двумерном факторном пространстве;
- д) результаты оптимального решения;
- е) сравнительный анализ результатов, полученных разными поисковыми методами оптимизации.

### 6.3. Контрольные вопросы

1. В чем заключается процедура поиска экстремума целевой функции?
2. Чем отличаются между собой различные поисковые методы оптимизации?
3. Как записывается целевая функция при наличии ограничений на факторы?
4. Какие методы направленного поиска используют организацию оптимального движения в область экстремума?
5. Каково назначение пробного и рабочего шага в градиентном методе?
6. Как и почему изменяется величина рабочего шага на пути к оптимуму при использовании метода градиента?
7. В чем основное отличие градиентного метода от симплексного?
8. Что служит критерием достижения экстремума целевой функции при использовании градиентного и симплексного методов оптимизации?

## УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПАКЕТ STADIA<sup>4</sup>

Универсальный статистический пакет STADIA является наиболее популярным из отечественных статистических пакетов. Первая версия статистического пакета STADIA 1.5 (автор — А.П. Кулаичев, НПО «Информатика и компьютеры») для IBM/PC под DOS была разработана по инициативе профессора МГУ В.В. Налимова в 1988 г. С 1997 по 2007 г. осуществлен выпуск последующих версий STADIA под Windows 95, 98, ME, NT, 2000, XP.

### 1. Составные компоненты [14]

Основные архитектурные компоненты статистической системы вызываются из верхней командной строки или нажатием быстрых клавиш F1-F10.

Электронная таблица является центральным компонентом и предназначена для ввода, хранения, просмотра и редактирования исходных данных. В этой таблице данные представляются в виде матрицы или вектора, где столбцы соответствуют переменным или выборкам, а строки — значениям переменных, измерениям или объектам. Элементы таблицы могут содержать как числовые, так и символьные (номинальные) значения.

Возможности работы с электронной таблицей становятся доступны при активизации страницы пакета Dat. Доступный объем электронной таблицы определен конкретной модификацией статистического пакета (базовый комплект — 4096 чисел).

Файловая подсистема обеспечивает ввод различного типа информации из дисковых файлов и запись данных на диск, вызывается по нажатию клавиш F3, F4 или из выкидного меню пункта «Файлы» верхней командной строки, а также по нажатию левых кнопок в инструментальной строке экрана.

Блок преобразований предназначен для выполнения различных преобразований над исходными данными (алгебраические, логические, матричные, комбинаторные и другие преобразования) и вызов его производится по нажатию клавиши F8 или же по выполнению пункта «Преобразования» из верхней командной строки.

Калькулятор обеспечивает оперативное выполнение различных вспомогательных вычислений по вводимым выражениям и вызывается по нажатию клавиши F7 или же по выполнению пункта «Вычисления» из верхней командной строки.

Графопостроитель обеспечивает построение различных графиков исходных данных по нажатию клавиши F6 или же по выполнению пункта «График» из верхней командной строки.

Графический редактор позволяет редактировать графики данных и графики результатов анализа, сохранять их в дисковых файлах или выводить на печать. Возможности редактирования графиков в виде инструментальной линейки кнопок становятся доступными при активизации любой из страниц графиков  $Gr_i$ ,  $i = 1—15$  (максимальное количество графиков равно 15).

Блок статистики содержит набор процедур, реализующих вычисления по наиболее употребительным статистическим методам и вызов его меню производится по нажатию клавиши F9 или же по выполнению пункта «Статистика» из верхней командной строки.

<sup>4</sup> Учебная версия STADIA доступна по адресу: <http://statsoft.msu.ru/stadia.zip>.

*Текстовый редактор* результатов позволяет просматривать и редактировать выдачу числовых результатов анализа, сохранять ее в дисковом файле, выдавать на печать, переносить во внешние пакеты. Текстовый редактор становится доступным при активизации страницы результатов анализа Rez.

*Экранный справочник* состоит из серии разделов с сетью перекрестных электронных ссылок и содержит описание всех операций и математических методов, а его вызов производится по нажатию клавиши F1 или же по выполнению пункта «Помощь» из верхней командной строки.

## 2. Порядок диалога

Экранное пространство (таблица данных) включает в себя постоянные строки и панели.

*Строка заголовка.* В этой строке располагаются кнопки закрытия, свертывания и расширения головного окна.

*Командная строка.* Вторая командная строка содержит команды и выкидные списки команд на выполнение основных операций, часть из которых дублируются инструментальными кнопками и «горячими» клавишами быстрого вызова: Файл; Графики — F6; Калькулятор — F7; Преобразования — F8; Статистика — F9; Окна; Помощь — F1.

*Строка кнопок.* Третья строка инструментальных кнопок с пиктограммами дублирует наиболее часто выполняемые операции. В этой строке располагается окно редактирования текущей ячейки электронной таблицы, указывается число определенных переменных и размер текущей переменной, а также присутствуют постоянные кнопки ряда операций, одинаково работающие для любой активной страницы, а именно:

чтение и запись содержимого активной страницы;  
операции с буфером обмена: вырезание, копирование и вставка;  
выдача на печать содержимого активной страницы;  
изменение шрифта активной страницы.

*Рабочее окно.* Основная часть экрана составляет рабочее пространство пользователя, в котором он и проводит большую часть времени: вводит данные, обдумывает результаты анализа и просматривает графики и т.п. Это пространство организовано в форме страничной картотеки.

*Строка подсказки и закладок.* Последняя строка экспонирует оперативные подсказки к пунктам и полям ввода различных меню:

«Ввести файл из дискового архива в рабочее окно Dat, Rez, Gr1, Gr2».

Подсказка появляется, если задержать мышь на некотором экранном элементе.

## 3. Командная строка

Система выкидных меню верхней командной строки включает три разворачивающихся пункта: файлы, окна и помощь. Другие пункты верхней командной строки не являются выкидными, и их исполнение сразу приводит к вызову соответствующих макрокомпонентов и реализующих их диалогов (Открыть — F3, Сохранить — F4, Очистить — F5, Печать — F2; Принтер; Выход — F10).

*Файлы.* Выкидное меню пункта «Файлы» включает операции чтения, записи, очистки, печати текущей страницы, настройки принтера и выхода из STADIA. Работа этих пунктов дублируется быстрыми функциональными клавишами F2 – F5; F9.

*Универсальные операции.* Операции чтения, записи, очистки, печати из пункта «Файлы», операции с буфером обмена и настройки шрифта из пункта «Окна» действуют одинаково в различных контекстах: электронная таблица, результаты анализа, графики.

## 4. Настройки

*Вычислительные параметры.* Установка вычислительных параметров касается:

- а) числа значащих цифр в экранной выдаче результатов анализа (исходное число равно 4);
- б) критического уровня значимости нулевой гипотезы для выдачи словесной интерпретации результатов анализа и доверительных интервалов (исходное значение уровня значимости равно 0,05 или доверительной вероятности 0,95).

Изменение этих значений производится из подпункта «Установки» выпадающего меню пункта «Окна», вслед за ним появляется экранный бланк с полями ввода значений этих двух параметров. После ввода новых значений следует нажать кнопку «Утвердить» или клавишу Enter.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: Высш. шк. — 479 с.
2. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 1. Случайные величины и процессы: учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Сизых. — М.: Радио и связь, 2003. — 400 с.
3. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): учебн. пособие / Под ред. Г.К. Круга. — М.: Высш. школа, 1983. — 216 с., ил.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — 3-е изд., исправл. — М.: Наука. 1964. — 576 с.
5. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1973. — 392 с.
6. Волгин В.В. Модели случайных процессов для вероятностных задач синтеза АСУ. Часть 1. Генеральная совокупность реализаций. Эргодность. Единственная реализация. М.: Издательство МЭИ, 1998. — 64 с.
7. Волгин В.В., Каримов Р.Н. Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления. — М.: Энергия, 1979. — 64 с.
8. Русскоязычный сайт по MathCAD и другим математическим пакетам: <http://www.exponenta.ru/>
9. Панько М.А. Расчет и моделирование автоматических систем регулирования в среде MathCAD: учебное пособие. — М.: Издательство МЭИ, 2004. — 112 с.
10. Волгин В.В., Щедеркина Т.Е. Определение вероятностных характеристик случайных процессов: методическое пособие. — М.: Издательство МЭИ, 2004. — 27 с.
11. Лабораторные работы по курсу «Теория эксперимента». Ч.1. / В.В. Волгин, И.А. Саков, Т.Е. Щедеркина. — М.: МЭИ, 1988. — 24 с.
12. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1971. — 283 с.
13. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. — М.: Наука, 1971. — 192 с.
14. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006. — 512 с.

## Содержание

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение.....                                                                                                      | 3  |
| Лабораторное занятие № 1. Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин .....                    | 4  |
| 1.1. Теоретическое описание .....                                                                                  | 4  |
| 1.2. Задание и порядок выполнения работы.....                                                                      | 10 |
| 1.3. Контрольные вопросы.....                                                                                      | 10 |
| Лабораторное занятие №2 .....                                                                                      | 12 |
| Лабораторное занятие № 2. Описательная статистика. Статистическая проверка гипотез .....                           | 12 |
| 2.1. Теоретическое описание .....                                                                                  | 12 |
| 2.2. Задание и порядок выполнения работы.....                                                                      | 16 |
| 2.3. Контрольные вопросы.....                                                                                      | 18 |
| Лабораторное занятие № 3. Определение статической модели объекта управления по данным пассивного эксперимента..... | 19 |
| 3.1. Теоретическое описание .....                                                                                  | 19 |
| 3.2. Задание и порядок выполнения работы.....                                                                      | 23 |
| 3.3. Контрольные вопросы.....                                                                                      | 25 |
| Лабораторное занятие № 4. Определение вероятностных характеристик случайных процессов .....                        | 25 |
| 4.1. Теоретическое описание .....                                                                                  | 25 |
| 4.2. Задание и порядок выполнения работы.....                                                                      | 27 |
| Порядок выполнения работы .....                                                                                    | 28 |
| 4.3. Контрольные вопросы.....                                                                                      | 32 |
| Лабораторное занятие № 5. Оценка переходной характеристики объекта при наличии помех .....                         | 37 |
| 5.1. Теоретическое описание .....                                                                                  | 37 |
| 5.2. Задание и порядок выполнения работы.....                                                                      | 41 |
| 5.3. Контрольные вопросы.....                                                                                      | 42 |
| Лабораторное занятие № 6 .....                                                                                     | 43 |
| Лабораторное занятие № 6. Статическая оптимизация объектов управления .....                                        | 43 |
| 6.1. Теоретическое описание .....                                                                                  | 43 |
| 6.2. Задание и порядок выполнения работы.....                                                                      | 49 |
| 6.3. Контрольные вопросы.....                                                                                      | 50 |
| Универсальный статистический пакет STADIA.....                                                                     | 50 |
| Библиографический список.....                                                                                      | 54 |