

На правах рукописи



РАТНИКОВА ТАТЬЯНА АНАТОЛЬЕВНА

**РАЗВИТИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С «ПРОСТОЙ»
РАЦИОНАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА ДЛЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре высшей математики ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент,
Елисеев Александр Георгиевич

Официальные оппоненты: Нестеров Андрей Владимирович,
доктор физико-математических наук,
профессор,
ФГБОУ ВО «Российский экономический
университет им. Г.В. Плеханова»,
профессор кафедры информатики

Сафонов Валерий Федорович,
доктор физико-математических наук,
профессор,
ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»
профессор кафедры высшей математики

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный университет»

Защита диссертации состоится 6 октября 2021 г. в 17 ч. 00 мин. в ауд. М-714 на заседании диссертационного совета МЭИ.017 при ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» по адресу: 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.

С диссертацией можно знакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» (<http://ntb.mpei.ru>).

Автореферат разослан

2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н.

С.А. Гриценко

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Сингулярно возмущенные уравнения, начиная с работ академика А.Н. Тихонова^{1,2}, привлекают пристальное внимание различных исследователей. Это объясняется большой прикладной значимостью таких уравнений. С помощью сингулярно возмущенных уравнений описываются задачи, возникающие в квантовой механике, гидродинамике, химической кинетике. Особое место в этом перечне прикладных областей занимают задачи с нестабильным спектром предельного оператора (т.е. задачи с точками поворота или задачи со спектральными особенностями). В качестве примеров таких задач можно указать на уравнение Шредингера для туннельного перехода, задачу с классическим осциллятором, а так же на задачи механики сплошной среды и другие.

Методам решения задач со спектральными особенностями посвящены работы В.П. Маслова³, А.Б. Васильевой – В.Ф. Бутузова – Н.Н. Нефедова⁴, С.Ю. Дзядык⁵, С.А. Ломова⁶ В.Ф. Сафонова^{7,8}, А.В. Нестерова⁹ и их учеников. Настоящая работа развивает и дополняет исследования школы С.А. Ломова по методу регуляризации, который был разработан основателем этой школы в середине шестидесятых годов двадцатого столетия. Введением регуляризующих функций, содержащих в себе все нерегулярности решений от малого параметра, сингулярная задача сводилась к регулярной в пространстве бóльшей размерности. Используя схему классической теории возмущений, была построена теория разрешимости соответствующих итерационных задач в пространстве бóльшей размерности, а затем после построения асимптотического ряда по степеням малого параметра производилось сужение на регуляризующие функции, которое и приводило к построению асимптотического решения

¹ Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. – 1948. – Т. 22(64), № 2. – С. 193–204.

² Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. – 1952. – Т. 31(73), № 3. – С. 575–586.

³ Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: МГУ, 1965, 554 с.

⁴ Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973, 272 с.

⁵ Дзядык С.Ю. О поведении решений неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота с малым параметром при производной // Укр. матем. журнал. – 1973. – Т. 38, № 5. – С. 657–662.

⁶ Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981, 400 с.

⁷ Сафонов В.Ф. Метод регуляризации для сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. Ан СССР. Серия матем. – 1979. – Т. 43, № 3. – С. 628–653.

⁸ Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Асимптотические решения резонансных нелинейных сингулярно возмущенных задач в случае пересечения собственных значений предельного оператора // Итоги науки и техники. Серия «Совр. математика и ее приложения. Тематические обзоры» – 2019. – Т. 173. – С. 3–16.

⁹ Бутузов В.Ф., Нестеров А.В. Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1982. – Т. 22, № 4. – С. 865–870.

исходной сингулярно возмущенной задачи.

Одним из достоинств метода регуляризации С.А. Ломова является то, что он дает возможность построить регуляризованное асимптотическое решение во всей области интегрирования, а при определенных условиях на коэффициенты дает точное решение задачи.

Этот метод может применяться как при исследовании прикладных задач, содержащих точки поворота, так и при построении численных алгоритмов решения задач со спектральными особенностями.

Общая теория асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор $A(t)$ дискретно необратим, т.е. одна из точек спектра $\lambda_1(t)$ оператора $A(t)$ при отдельных значениях $t = t_j \in [0, T]$ обращается в ноль, а другие точки спектра в ноль не обращаются на всем отрезке $[0, T]$ и сам оператор $A(t)$ является диагонализируемым при всех значениях $t \in [0, T]$ (включая и точки необратимости $t = t^j$)¹⁰, изложены в работах С.А. Ломова и его учеников¹¹. При этом изучался лишь случай гладкой необратимости предельного оператора $A(t)$, т.е. рассматривался случай «простой» точки поворота с натуральным показателем типа $t^n a(t)$, $n \in \mathbb{N}$.^{12,13}

В данной диссертации изучаются сингулярно возмущенные задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка, задача Коши и задача на полуоси для параболического уравнения в случае «простой» точки поворота с рациональным показателем типа $t^r a(t)$, $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

Рациональная точка поворота и возникающие проблемы в процессе построения асимптотики решения сингулярно возмущенных задач ранее с точки зрения метода регуляризации не рассматривались. Исследование этих проблем и разработка соответствующего алгоритма метода регуляризации существенно дополнит теорию сингулярных возмущений, и поэтому тема настоящей работы является актуальной.

Степень разработанности темы исследования.

Полностью исследована регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенных задачи Коши и смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения в случае «простой» рациональной точки поворота при $\varepsilon \rightarrow +0$. Доказаны все теоремы, необходимые для построения асимптотического решения.

¹⁰ В этом случае точки t_j называются «простыми» точками поворота

¹¹ Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Математический сборник. – 1986. – Т. 131, № 4. – С. 544–557.

¹² Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае негладкого спектра предельного оператора // Математический сборник. – 1995. – Т. 186, № 7. – С. 25–40.

¹³ Елисеев А.Г. Об аналитических решениях по параметру сингулярно возмущенного уравнения при наличии простейшей точки поворота у предельного оператора // Вестник МЭИ. – 1995. – № 6. – С. 41–47.

Цели и задачи диссертации.

Целью работы является развитие метода регуляризации и построение алгоритма для получения регуляризованной асимптотики сингулярно возмущенных задач со спектральной особенностью предельного оператора — задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка и параболического уравнения, а также смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения в случае «простой» точки поворота с рациональным показателем при стремлении малого параметра к нулю.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить регуляризованную асимптотику решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка и задачи Коши для параболического уравнения при наличии «простой» рациональной точки поворота. Получить условия разрешимости итерационных задач для коэффициентов формального ряда и доказать асимптотическую сходимость этого ряда к точному решению данной задачи.

2. Построить регуляризованную асимптотику решения для параболического уравнения на полуоси при наличии «простой» рациональной точки поворота и получить условия существования и асимптотической сходимости формального ряда к точному решению параболической задачи.

Научная новизна.

Все полученные результаты являются новыми, основные из них состоят в следующем:

1. Выявлены и описаны существенно особые сингулярности, проведена регуляризация и получено равномерное асимптотическое решение задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка и для задачи Коши для параболического уравнения при наличии «простой» рациональной точки поворота.

2. Для данных задач Коши доказаны теоремы о разрешимости и однозначной разрешимости итерационных задач, теорема об оценке остатка асимптотического ряда и теорема о предельном переходе.

3. Выявлены и описаны существенно особые сингулярности, проведена регуляризация и получено равномерное асимптотическое решение для параболического уравнения на полуоси при наличии «простой» рациональной точки поворота.

4. Впервые введен и изучены свойства регуляризирующего сингулярного оператора для описания параболического погранслоя вблизи границы $x = 0$.

5. Доказаны теоремы о разрешимости и однозначной разрешимости итерационных задач для параболического уравнения на полуоси. С помощью

принципа максимума обосновано асимптотическое разложение построенного решения.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях сингулярно возмущенных задач. Она может служить теоретической основой для исследования задач квантовой механики и химической кинетики.

Методология и методы исследования.

В работе применяется метод регуляризации С.А. Ломова и его модификации, разработанные А.Г. Елисеевым и развитые автором для данных задач, а также методы теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту.

- Построение алгоритма решения методом регуляризации сингулярно возмущенных задач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и параболического уравнения, и смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения в случае «простой» рациональной точки поворота.
- Доказательство теорем, необходимых для обоснования алгоритма и построения регуляризованной асимптотики решения.

Степень достоверности и апробация результатов исследования.

Основные результаты исследования четко сформулированы и математически доказаны.

Результаты диссертации были доложены на следующих научных семинарах и конференциях:

- семинар «Теория сингулярных возмущений» кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» под руководством профессора В.Ф. Сафонова, профессора А.А. Бободжанова;
- семинар «Дифференциальные уравнения» кафедры математического и компьютерного моделирования ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» под руководством профессора Ю.А. Дубинского, профессора А.А. Амосова;
- научно-исследовательский семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Е.И. Моисеева, профессора И.С. Ломова;
- Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XXX» (3–9 мая 2019 г.);

— Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «ПОНТЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XXXI» (3–9 мая 2020 г.);

— Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (28 января – 2 февраля 2021 г.).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 101 страницу. Список цитированной литературы включает 83 наименования.

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор литературы по теме диссертации, формулируется цель работы, основные задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертационной работы.

В **первой главе** рассматривается сингулярно возмущенная задача Коши для дифференциального уравнения при наличии «простой» точки поворота с рациональным показателем.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + t^{m/n} a(t) u(t) = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0 \end{cases} \quad (1)$$

с условиями

- 1) $h(t) \in \mathbb{C}^\infty([0; T])$;
- 2) $a(t) \in \mathbb{C}^\infty([0; T])$, $\operatorname{Re} a(t) > 0 \quad \forall t \in [0; T]$;
- 3) $m, n \in \mathbb{N}$, m/n — несократимая дробь, $n \geq 2$.

В данном случае предельный оператор есть оператор умножения на функцию $A(t) = t^{m/n} a(t)$. По спектру этого оператора вводится регуляризирующая переменная

$$\tau = -\frac{\varphi(t)}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t s^{m/n} a(s) ds \quad (2)$$

и дополнительные регуляризирующие переменные

$$\sigma_i(t, \varepsilon) = e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon} s^{\frac{i+1}{n}-1} ds, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad p = m + n - 1. \quad (3)$$

Вместо искомого решения $u(t, \varepsilon)$ задачи (1) изучается функция $v(t, \tau, \sigma, \varepsilon)$, где $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1})$, такая, что ее сужение на регуляризирующие функции совпадает с искомым решением:

$$v(t, \tau, \sigma, \varepsilon) \Big|_{\tau = -\varphi(t)/\varepsilon, \sigma_i = \sigma_i(t, \varepsilon)} = u(t, \varepsilon). \quad (4)$$

Задачу для $v(t, \tau, \sigma, \varepsilon)$ можно записать в виде

$$\begin{cases} A(t)v - \dot{\varphi} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \sum_{i=0}^{p-1} \dot{\varphi} \sigma_i \frac{\partial v}{\partial \sigma_i} = \varepsilon \left(-\dot{v} - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} \frac{\partial v}{\partial \sigma_i} \right) + h(t), \\ v(0, 0, 0, \varepsilon) = u^0. \end{cases} \quad (5)$$

Вводится пространство безрезонансных решений E , элементы которого имеют вид

$$v(t, \tau, \sigma) = x(t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} y^i(t)\sigma_i + Z(t), \quad (6)$$

где $x, y^i, z \in \mathbb{C}^\infty(0, T] \cap \mathbb{C}[0, T]$.

Решение задачи (5) ищется в виде ряда по ε :

$$v(t, \tau, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^v \varepsilon^k v_k(t, \tau, \sigma), \quad v_k(t, \tau, \sigma) \in E.$$

Разложение начинается с $k = -1$, так как правая часть уравнения не принадлежит области значений предельного оператора.

Итерационная задача записывается в развернутом виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = 0, \quad \dot{y}_k^i(t) = 0, \\ t^{m/n} a(t) z_k = h(t) \delta_k^0 - \dot{z}_{k-1}(t) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} y_{k-1}^i(t), \\ x_k(0) + z_k(0) = u^0 \delta_k^0, \quad k = \overline{-1, \infty}, \end{cases} \quad (7)$$

если $k - 1 = -2$, то слагаемое с таким индексом равно нулю.

Вводится оператор

$$\mathcal{L}_0 = (-\dot{\varphi}(t)) \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1} (-\dot{\varphi}(t)) \sigma_i \frac{\partial}{\partial \sigma_i} + A(t).$$

Для того, чтобы решить итерационные задачи (7), сформулированы и доказаны теорема разрешимости уравнения $\mathcal{L}_0 v = h(t)$ в E (в двух случаях **1** и **2**) и теорема единственности. Здесь $h(t) \in E$ и имеет следующую структуру:

$$h(t) = h_1(t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} h_2^i(t)\sigma_i + h_3(t). \quad (8)$$

Теорема 1.1 (разрешимость). Пусть дано уравнение в пространстве E

$$\mathcal{L}_0 v = h(t), \quad (9)$$

1. Пусть:

1) $h(t) \in \mathbb{C}^\infty[0, T]$;

2) выполнены условия 2) и 3) задачи (1).

Тогда (9) разрешимо в E тогда и только тогда, когда

$$h_1(t) \equiv 0, \quad h_2^i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad h_3^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right]}.$$

2. Пусть

1) неоднородность (8) такова, что $h_3(t) = t^{-\frac{s}{n}} f(t)$, $f(t) \in \mathbb{C}^\infty[0, T]$, $1 \leq s \leq (n-1)$;

2) выполнены условия 2) и 3) задачи (1).

Тогда (9) разрешимо в E тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} h_1(t) &\equiv 0, \quad h_2^i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ f^{(k)}(0) &= 0, \quad \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right]}, \quad \text{если } 0 \leq \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} < 1; \\ f^{(k)}(0) &= 0, \quad \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right] + 1}, \quad \text{если } \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} \geq 1. \end{aligned}$$

Теорема 1.2 (единственность). Пусть в пространстве E дано уравнение

$$\mathcal{L}_0 v = 0, \quad Gv = v(0, 0, 0, \varepsilon) = 0 \quad (10)$$

и выполнены условия теоремы 1.1. Если, кроме того, функция

$$\mathcal{L}_1 v + \dot{v} \quad (11)$$

удовлетворяет теореме разрешимости, то решение (10) только нулевое.

В каждом из двух случаев **1** и **2** теоремы 1.1 структура асимптотического решения задачи (1) имеет свою специфику.

1. $h(t)$ — гладкая функция на $[0, T]$.

Главный член асимптотики решения имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{\text{гл}}(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \sigma_{n(k+1)-1}(t, \varepsilon) + u^0 e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\}\right]} \frac{\tilde{h}_0^{(k)}(0)}{k!} \sigma_{n(k+1)-1-n\left\{\frac{m}{n}\right\}}(t, \varepsilon) - t^{1-\left\{\frac{m}{n}\right\}} h_0(t), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{где } t^{1-\{r\}} h_0(t) = \frac{h(t) - \sum_{k=0}^{[r]} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k}{t^r a(t)}, \quad \tilde{h}_0(t) = -(h_0(t) + t \dot{h}_0(t)), \quad r = \frac{m}{n}.$$

2. $h(t)$ разлагается в обобщенный ряд Маклорена–Тейлора:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k h(0)}{k!} \frac{t^{(r+1)k}}{(r+1)^k},$$

где $D = \frac{1}{t^r} \frac{d}{dt}$ — оператор дробного дифференцирования.

Сингулярности в этом случае выглядят так:

$$\sigma(t, \varepsilon) = e^{-\varphi(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_1(t, \varepsilon) = e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon} ds, \quad \varphi(t) = \frac{t^{r+1}}{r+1},$$

а регуляризованный ряд имеет вид:

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \sigma + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t) \sigma_1(t, \varepsilon) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t).$$

При этом главный член регуляризованной асимптотики после сужения на регуляризующие функции записывается в форме

$$u_{\text{гл}}(t) = \frac{1}{\varepsilon} h(0) \sigma_1(t, \varepsilon) + u^0 e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + t h_0(t), \quad (13)$$

где $t^{r+1} h_0(t) = h(t) - h(0)$.

Обоснование асимптотической сходимости построенных регуляризованных рядов к точному решению задачи (1) проводится с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.3. Пусть задана задача

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t, \varepsilon) + t^r a(t) u(t, \varepsilon) = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \quad (14)$$

с условиями:

- 1) $h(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T])$;
- 2) $a(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T]) \quad \forall t \in [0, T], \operatorname{Re} a(t) > 0$;
- 3) $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, $n \geq 2$.

Тогда $\exists C > 0$, что верна оценка

$$\left\| u(t, \varepsilon) - \sum_{k=-1}^n \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0, T]} \leq C \varepsilon^{n+1},$$

$$\text{где } \|f(t)\|_{\mathbb{C}[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|.$$

Доказана теорема о предельном переходе в задаче (1).

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия теорем 1.1, 1.2 и дополнительные условия точечной разрешимости $h^{(i)}(0) = 0$, $i = \overline{0, k}$, $k = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$. Тогда для любого $t \in [\delta; T]$, $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = u_0(t),$$

$$\text{где } u_0(t) = \frac{h(t)}{\dot{\varphi}(t)} = t^{1-\{\frac{m}{n}\}} h_0(t).$$

В качестве примера рассмотрен частный случай для $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ и приведены точные и приближенные решения задач для разных правых частей при разных значениях r и ε .

Во **второй главе** строится решение сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «простой» точки поворота с рациональным показателем.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) - t^{m/n} a(t) u + h(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (15)$$

И пусть выполнены условия:

- 1) $h(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R \times [0, T])$, функция $h(x, t)$ и все ее производные ограничены на $\{R \times [0, T]\}$;
 - 2) $k(x) \in \mathbb{C}^\infty(R)$, $k(x) \geq k_0 > 0$, $\exists M > 0 : k(x) < M(x^2 + 1)$,
 $|k'(x)| < M\sqrt{x^2 + 1} \forall x \in R$;
 - 3) $f(x) \in \mathbb{C}^\infty(R)$, функция $f(x)$ и все ее производные ограничены на R ;
 - 4) $a(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T])$, $\operatorname{Re} a(t) > 0 \forall t \in [0, T]$;
 - 5) $m, n \in N$, $p = m + n - 1$, $m/n = r$ — несократимая дробь, $n \geq 2$.
- (16)

Основываясь на результатах главы 1, сингулярности задачи (15) имеют вид:

$$e^{-\varphi(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_i(t, \varepsilon) = e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon} s^{\frac{i+1}{n}-1} ds,$$

где $\varphi(t) = \int_0^t s^{m/n} a(s) ds$, $i = \overline{0, (p-1)}$, $p = m + n - 1$, $\tau = -\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$.

Согласно методу регуляризации, вводится расширенная функция $\tilde{u}(x, t, \tau, \sigma)$, где $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}\}$ такая, что ее сужение на регулирующие функции

$$\tilde{u}(x, t, \tau, \sigma) \Big|_{\tau = -\varphi(t)/\varepsilon, \sigma_i = \sigma_i(t, \varepsilon)} = u(x, t)$$

дает решение задачи (15).

В результате получается задача для расширенной функции $\tilde{u}(x, t, \tau, \sigma, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} -q(t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1} (-q(t) \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma_i} + q(t) \tilde{u} = \\ \quad = -\varepsilon \left(\dot{\tilde{u}} + \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma_i} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + h(x, t), \\ \tilde{u}(x, 0, 0, 0, \varepsilon) = f(x). \end{cases} \quad (17)$$

В дальнейшем волну будем опускать.

Вводится пространство безрезонансных решений E , элементы которого имеют вид

$$v(x, t) = X(x, t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x, t)\sigma_i + W(x, t),$$

где $X(x, t), Z^i(x, t), W(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R \times (0, T]) \cap \mathbb{C}(R \times [0, T])$.

Решение задачи (17) ищется в виде ряда по ε :

$$u = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, t, \tau, \sigma), \quad \text{где } u_k \in E : \quad (18)$$

$$u_k = X_k(x, t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z_k^i(x, t)\sigma_i + W_k(x, t)$$

где $X_k(x, t), Z_k^i(x, t), W_k(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R \times (0, T]) \cap \mathbb{C}(R \times [0, T])$.

Используя (18), получаем серию итерационных задач. Для удобства задачи записываются покомпонентно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_k(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial X_{k-1}(x, t)}{\partial x} \right), \\ \dot{Z}_k^i(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial Z_{k-1}^i(x, t)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n} a(t) W_k(x, t) = -\dot{W}_{k-1}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial W_{k-2}(x, t)}{\partial x} \right) - \\ \quad - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_{k-1}^i(x, t) + \delta_0^k h(x, t), \\ X_k(x, 0) + W_k(x, 0) = \delta_k^0 f(x), \quad k = \overline{-1, \infty}; \text{ если индекс } (k-1) \leq -2, \\ \quad (k-2) \leq -2, \text{ то слагаемые по определению равны } 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

Вводится оператор

$$\mathcal{L}_0 = -q(t) \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1} (-q(t)\sigma_i) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} + q(t)I$$

(I — единичный оператор).

Для того чтобы решить итерационные задачи (19), доказывается теорема о разрешимости уравнения $\mathcal{L}_0 u = h(x, t)$ в пространстве E (в двух случаях).

Теорема 2.1 (разрешимость). *Пусть в пространстве E дано уравнение*

$$\mathcal{L}_0 u = h(x, t). \quad (20)$$

1. Пусть

1) $h(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R \times [0, T])$;

2) выполнены условия 1)–5) задачи (15);

3) функция $h(x, t) \in E$ имеет вид

$$h(x, t) = h_1(x, t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} h_2^i(x, t)\sigma_i + h_3(x, t). \quad (21)$$

Тогда уравнение (20) разрешимо в E тогда и только тогда, когда:

а) $h_1(x, t) \equiv 0$;

б) $h_2(x, t) \equiv 0$;

в) $\forall k = 0, \overline{\left[\frac{m}{n}\right]} \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k}(h_3(x, 0)) = 0$.

2. Пусть функция $h(x, t)$ вида (21) такова, что

1) $h_3(x, t) = t^{-\frac{s}{n}} f(x, t)$, $f(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R, [0, T])$, $1 \leq s \leq (n-1)$;

2) выполнены условия 1)–5) задачи (15).

Тогда (20) разрешимо в E тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &\equiv 0, \quad h_2^i(x, t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ f^{(k)}(x, 0) &= 0, \quad \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right]}, \quad \text{если } 0 \leq \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} < 1, \\ f^{(k)}(x, 0) &= 0, \quad \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right] + 1}, \quad \text{если } \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} \geq 1. \end{aligned}$$

Доказана также теорема единственности.

Теорема 2.2 (единственность). Пусть в пространстве E дано уравнение

$$\mathcal{L}_0 u = 0, \quad Gu = u(x, 0, 0, 0, \varepsilon) = 0 \quad (22)$$

и выполнены условия теоремы 2.1. Если, кроме того, функция

$$\mathcal{L}_1 u + \partial_t u \quad (23)$$

удовлетворяет теореме 2.1 разрешимости, то решение (22) только нулевое.

Используя теоремы 2.1 и 2.2, вычислен главный член асимптотики в виде суммы

$$\begin{aligned} u_{\text{гл}}(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j h(x, 0)}{\partial t^j} \sigma_{n(j+1)-1}(t, \varepsilon) + f(x) e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + \\ &+ \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \frac{t}{j!} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^j h(x, 0)}{\partial t^j} \right) \right) \sigma_{n(j+1)-1} + \\ &+ \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\}\right]} \left(-\frac{1}{j!} \frac{\partial^j h_1(x, 0)}{\partial t^j} \right) \sigma_{n(j+1)-s-1}(t, \varepsilon) + t^{1-\left\{\frac{m}{n}\right\}} h_0(x, t), \quad (24) \end{aligned}$$

где $h_0(x, t)$ и $h_1(x, t)$ — гладкие функции, определяемые из соотношений:

$$h(x, t) - \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} t^j Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x) = W_0(x, t); \quad \dot{W}_0(x, t) = t^{-\left\{\frac{m}{n}\right\}} h_1(x, t).$$

Приведена оценка остаточного члена асимптотического ряда.

Пусть решены $(N + 1)$ итерационные задачи. Тогда решение задачи Коши после сужения на регуляризирующие функции может быть записано в виде:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^N u_k \varepsilon^k + \varepsilon^{N+1} R_N(x, t, \varepsilon),$$

где

$$x_k(x, t, \varepsilon) = x_k(x, t) e^{-\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} + \sum_{i=0}^{p-1} Z_k^i(x, t) \sigma_i(t, \varepsilon) + W_k(x, t).$$

Остаточный член R_N удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} L(R) = \varepsilon \dot{R}_N - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial R_N}{\partial x} \right) + t^{m/n} a(t) R_N = H(x, t, \varepsilon), \\ R_N(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (25)$$

где $H(x, t, \varepsilon) = H_1(x, t) + \varepsilon H_2(x, t, \varepsilon)$,

$$H_1(x, t) = -\partial_t W_N + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial W_{N-1}}{\partial x} \right) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_N^i(x, t),$$

$$\begin{aligned} H_2(x, t, \varepsilon) = & -e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial X_n}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial W_n}{\partial x} \right) - \\ & - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial Z_n^i}{\partial x} \right) \sigma_i(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Доказана теорема

Теорема 2.3 (оценка остаточного члена). Пусть выполнены условия:

1) 1)– 5) задачи Коши (15);

2) $\exists M_1 > 0 \quad |H(x, t, \varepsilon)| \leq M_1 \quad \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T] \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$

3) $\exists M > 0 \quad k(x) < M(x^2 + 1), \quad |k'(x)| < M\sqrt{x^2 + 1} \quad \forall x \in R.$

Тогда $\exists C > 0 \quad |R_N(x, t, \varepsilon)| \leq C \quad \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T] \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$

Приведены частные случаи решения задачи. Глава проиллюстрирована примером, допускающим точное решение.

Третья глава посвящена исследованию сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения при наличии «простой» точки поворота с рациональным показателем.

Пусть дана задача

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t)u = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \\ u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (26)$$

и выполнены условия:

- 1) $f(x, t) \in \mathbb{C}^\infty([0, +\infty) \times [0, T])$, $\psi(t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T])$, $\varphi(x) \in \mathbb{C}^\infty[0, +\infty)$;
- 2) $p(x) \in \mathbb{C}^\infty[0, +\infty)$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $\forall x \geq 0$;
- 3) $q(t) = t^{m/n}b(t)$, $b(t) \in \mathbb{C}^\infty[0, T]$, $\operatorname{Re} b(t) > 0$
 $\forall t \in [0, T]$ m/n — несократимая дробь, $n \geq 2$, $m, n \in \mathbb{N}$;
- 4) $\varphi(0) = \psi(0)$,
- 5) $\exists C_1 > 0$, $\exists C_2 > 0$: $|\varphi^{(k)}(x)| < C_1$, $|\psi^{(k)}(x)| < C_2$, $\forall x \geq 0$;
- 6) $\exists M_1 > 0$: $\forall k$ $|f_x^{(k)}(x, t)| < M_1$ $\forall (x, t) \in [0, +\infty) \times [0, T]$;
- 7) $\exists M_2 > 0$: $p(x) < M_2(x^2 + 1)$ $\forall x \geq 0$.

Для регуляризации задачи вводится дополнительная переменная

$$\tau(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}$$

и расширенная функция $\tilde{u}(x, t, \tau)$, которая при сужении на τ

$$\tilde{u}(x, t, \tau) \Big|_{\tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}} \equiv u(x, t)$$

дает точное решение задачи (26).

В дальнейшем $\sim$ будем опускать. Тогда задача (26) принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon(u_t - u_{\tau\tau}) = -q(t)u + \sqrt{\varepsilon}^3 \left(2\sqrt{p(x)}u_{x\tau} - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}u_\tau \right) + \\ \quad + \varepsilon^2 p(x)u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0, \tau) \Big|_{\tau(x)} = \varphi(x), \quad u(0, t, 0) = \psi(t). \end{cases} \quad (27)$$

Символ $()'$ означает дифференцирование по x , символ $(\cdot)$ — дифференцирование по t .

Для решения задачи (27), согласно методу регуляризации, вводятся регуляризирующие функции

$$\sigma(t, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}Q_0^t}, \quad \sigma_i(t, \varepsilon) = \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}Q_s^t} s^{\frac{i+1}{n}-1} ds, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad p = m + n - 1.$$

$$\text{Здесь } Q_0^t = \int_0^t q(s)ds, \quad Q_s^t = \int_s^t q(s_1)ds_1.$$

$\sigma_i(t, \varepsilon)$ — дополнительные регуляризирующие функции, учитывающие тот факт, что образ оператора $A(t)u(x, t) = q(t)u(x, t)$ есть не все пространство

$\mathbb{C}^\infty[0, \infty)$, а подпространство $\mathbb{C}^\infty(0, \infty) \cap \mathbb{C}[0, T]$ функций, обращающихся в ноль с порядком m/n при $t = 0$.

Кроме того, краевая задача на полуоси для параболического уравнения порождает дополнительный сингулярный по ε регуляризирующий оператор G , действующий по правилу

$$G(a(x, t)) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\tau}{2\sqrt{t}}}^{\infty} a\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi \equiv e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} F(a(x, t)).$$

В методе регуляризации при решении сингулярно возмущенных задач такое явление отмечается впервые. Этот оператор описывает параболический пограничный слой вблизи границы $x = 0$. Следует отметить, что каждая регуляризирующая функция и оператор, призванные описывать нерегулярную зависимость от ε каждую составляющую решения задачи (26), объединены, тем не менее, главной идеей метода регуляризации — это описание этой зависимости через спектр предельного оператора $e^{-\frac{Q_0^t}{\varepsilon}}$.

Свойства оператора $F(a(x, t))$ описаны в приложении. Оператор $F(\cdot)$ переводит любую гладкую функцию $a(x, t)$ в решение задачи

$$\begin{cases} F_t - F_{\tau\tau} = 0, \\ F(a(x, t))|_{t=0} = 0, \quad F(a(x, t))|_{\tau=0} = a(x, t). \end{cases} \quad (28)$$

Вводится пространство E безрезонансных решений. Элементы из E имеют вид

$$u(x, t) = v(x, t)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x, t)\sigma_i + G(a(x, t)) + W(x, t), \quad (29)$$

где $v(x, t), Z^i(x, t), a(x, t), W(x, t) \in \mathbb{C}^\infty([0, +\infty) \times (0, T]) \cap \mathbb{C}([0, +\infty) \times [0, T])$.

Исходя из распределения параметра ε , решение задачи (27) ищется в виде ряда

$$u(x, t, \sigma, \sigma_i, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \left[v_k(x, t)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z_k^i(x, t)\sigma_i + W_k(x, t) \right] + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k-1}{2}} G(a_{\frac{k-1}{2}}(x, t)).$$

Система (27) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_k = p(x)v''_{k-1}, \quad \dot{Z}_k^i = p(x)Z''_{k-1}, \quad i = \overline{0, p-1} \\ q(t)W_k = f(x, t)\delta_k^0 - \dot{W}_{k-1} - \sum_{i=0}^{p-1} Z_{k-1}^i t^{\frac{i+1}{n}-1} + p(x)W''_{k-2}, \\ \dot{F}(a_{\frac{k-1}{2}}(x, t)) - F_{\tau\tau}(a_{\frac{k-1}{2}}(x, t)) = \\ = 2\sqrt{p(x)}F_{\tau}(a'_{\frac{k-2}{2}}(x, t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_{\tau}(a_{\frac{k-2}{2}}(x, t)) + \\ + p(x)F(a''_{\frac{k-3}{2}}(x, t)), \\ u_k(x, 0, \tau)|_{\tau=\tau(x, \varepsilon)} = \varphi(x)\delta_k^0, \quad u_k(0, t, 0) = \psi(t)\delta_k^0, \\ k = -1, 0, 1, \dots \end{array} \right. \quad (30)$$

Если $k-1 < -1$, $\frac{k-i}{2} < -1$, $i = 2, 3$, то член с этим индексом равен нулю.

Поскольку $f(x, t)$ не удовлетворяет теореме о точечной разрешимости уравнения $q(t)W(x, t) = f(x, t)$, то разложение решения начинается с ε^{-1} .

Доказаны теоремы разрешимости и единственности.

Теорема 3.1 (разрешимость). Пусть в пространстве E дана система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t(x, t) = h_1(x, t), \\ Z_t^i = h_2(x, t), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ F_t(a(x, t)) - F_{\tau\tau}(a(x, t)) = F(h_3(x, t)) \\ q(t)W = h_4(x, t) \end{array} \right. \quad (*) \quad (31)$$

и пусть выполнены условия

1) функции $h_1(x, t), h_2^i(x, t), h_3(x, t), \in \mathbb{C}^\infty(R \times (0, T]) \cap \mathbb{C}(R \times [0, T])$,

2) функция $h_4(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R \times [0, T])$

Тогда система (31) разрешима в E тогда и только тогда, когда:

1) $h_3(x, t) \equiv 0$;

2) $\frac{\partial^k h_4(x, 0)}{\partial t^k} = 0, \quad k = \overline{0, [\frac{m}{n}]}$.

Теорема 3.2 (разрешимость). Пусть в пространстве E дана система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t(x, t) = h_1(x, t), \\ Z_t^i = h_2(x, t), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ F_t(a(x, t)) - F_{\tau\tau}(a(x, t)) = F(h_3(x, t)) \\ q(t)W = h_4(x, t) \end{array} \right. \quad (*) \quad (32)$$

и пусть выполнены условия:

1) $h_1(x, t), h_2^i(x, t), h_3(x, t), \in \mathbb{C}^\infty(R \times (0, T]) \cap \mathbb{C}(R \times [0, T])$,

2) $h_4(x, t) = t^{-\frac{s}{n}} f(x, t), f(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(R, [0, T]), \quad 1 \leq s \leq (n-1)$.

Тогда (32) разрешимо в E тогда и только тогда, когда

- a) $h_3(x, t) \equiv 0$,
b) $\frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} = 0, \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right]}$, если $0 \leq \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} \leq 1$,
c) $\frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} = 0, \forall k \in \overline{0, \left[\frac{m}{n}\right] + 1}$, если $\frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} > 1$.

Теорема 3.3 (единственность). Пусть выполнены условия теоремы 3.1.

Тогда задача

$$\begin{cases} X_t(x, t) = 0, \\ Z_t^i(x, t) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ TF(a(x, t)) = F_t(a(x, t)) - F_{\tau\tau}(a(x, t)) = 0, \\ q(t)W(x, t) = 0, \\ u(x, 0, \tau)|_{\tau=\tau(x, \varepsilon)} = 0, \quad u(0, t, 0) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

имеет единственное нулевое решение, если выполнены условия:

- 1) $2\sqrt{p(x)}F_\tau(a_x(x, t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_\tau(a(x, t)) = 0$,
- 2) $Z^i(x, 0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}$.

Получен главный член регуляризованной асимптотики решения краевой задачи на полуоси для параболического уравнения:

$$\begin{aligned} u_{\text{гл}} = & \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \left[\frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j f_{xx}(x, 0)}{\partial t^j} \sigma_{n(j+1)-1}(t, \varepsilon) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} F \left(\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} Q_0^s} s^{n(j+1)-1} ds \right) \frac{\partial^j f_{xx}(0, 0)}{\partial t^j} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} F(a_{-1/2}(x, t)) + e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} \varphi(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \frac{1}{j!} \left(p(x) \frac{\partial^j f_{xx}(x, 0)}{\partial t^j} t \right) \sigma_{n(j+1)-1}(t, \varepsilon) - \\ & - \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\}\right]} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \tilde{f}_0(x, 0)}{\partial t^j} \sigma_{n(j+1)-1-n\left\{\frac{m}{n}\right\}}(t, \varepsilon) + \\ & + e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} F(a_0(x, t)) + t^{1-\left\{\frac{m}{n}\right\}} f_0(x, t), \end{aligned} \quad (34)$$

где $a_{-1/2}(x, t) = \sqrt{t} \sqrt[4]{p(x)} \int_0^x \sqrt[4]{p(s_1)}^3 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \int_0^\xi a_{-1}'' \left(s_1, t - \frac{s^2}{4\xi^2} \right) ds d\xi ds_1$;

$$\begin{aligned} a_0(x, t) = & \sqrt{t} \sqrt[4]{p(x)} \int_0^x \sqrt[4]{p(s_1)} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \int_0^\xi a_{-1/2}'' \left(s_1, t - \frac{s^2}{4\xi^2} \right) ds d\xi ds_1 + \\ & + \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}} a_0(0, t); \end{aligned}$$

$$a_0(0, t) = e^{\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} \left(\psi(t) - t^{1-\{\frac{m}{n}\}} f_0(0, t) \right) - \varphi(0) - \sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(0, t) \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} Q_0^s} s^{\frac{i+1}{n}-1} ds;$$

$$Z_{-1}^i(0) = -\frac{1}{j} \frac{\partial^j \tilde{f}(0, 0)}{\partial t^j}, \text{ если } i = n(j+1) - 1, \quad j = 0, \left[\frac{m}{n} \right];$$

$$Z_{-1}^i(0) = 0, \text{ если } i \neq n(j+1) - 1, \quad i = 0, \overline{(p-1)},$$

где $f_0(x, t)$ и $\tilde{f}_0(x, t)$ — гладкие функции, определяемые из соотношений

$$t^{1-\{\frac{m}{n}\}} f_0(x, t) = \frac{f(x, t) - \sum_{j=0}^{\{\frac{m}{n}\}} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f(x, 0)}{\partial t^j} t^j}{q(t)}; \quad \frac{\partial}{\partial t} (t^{1-\{\frac{m}{n}\}} f_0(x, t)) = t^{-\{\frac{m}{n}\}} \tilde{f}_0(x, t).$$

Приведена оценка остаточного члена асимптотического ряда.

Пусть решены $(n+1)$ итерационные задачи. Тогда решение задачи Коши после сужения на регуляризующие функции может быть записано в виде:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^n u_k \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R_n(x, t, \varepsilon).$$

Остаточный член асимптотического ряда $R_n(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{R}_n - \varepsilon^2 p(x) R_n'' + q(t) R_n = H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad R_n(0, t, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Здесь $H(x, t, \varepsilon) = -H_2(x, t) + \varepsilon H_1(x, t, \varepsilon)$, где

$$H_1(x, t, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} p(x) v_n'' + p(x) \sum_{i=0}^{p-1} Z_n^{i''} \sigma_i(t, \varepsilon) + p(x) W_n'' + p(x) G(a_n''),$$

$$H_2(x, t) = \dot{W}_n - p(x) W_{n-1}'' + \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{i+1}{n}-1} Z_n^i.$$

Доказана теорема об оценке остатка асимптотического ряда.

Теорема 3.4. Пусть дана задача (35) и выполнены условия:

- 1) $R_n(x, 0, \varepsilon) = 0$;
- 2) $\exists M_1 > 0 \quad |H| < M_1$;
- 3) условия 1)–6) задачи (26);
- 4) $\exists M_2 > 0 \quad p(x) < M_2(x^2 + 1) \quad \forall x \geq 0$.

Тогда $\exists M > 0 \quad |R_n| \leq M$.

В приложении доказаны свойства регуляризующего оператора, приведена оценка сингулярностей и доказаны леммы, используемые при построении регуляризованной асимптотики решения смешанной параболической задачи на полуоси.

Глава проиллюстрирована примером, допускающим точное решение.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту А.Г.Елисееву за постановку задачи, постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения и ценные замечания.

Диссертация выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

1. Елисеев А.Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота у предельного оператора // Электрон. журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». – 2019, № 3. – С. 63–73.

2. Елисеев А.Г., Ратникова Т.А. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXX» (3–9.05.2019). – Издательский дом ВГУ.

3. Елисеев А.Г., Ратникова Т.А. О регуляризованной асимптотике решения задачи Коши при наличии простой рациональной точки поворота у предельного оператора // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXI» (3–9.05.2020). – Издательский дом ВГУ.

4. Ratnikova T. Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point // Axioms. – 2020, 9(4), 138. – doi:10.3390/axioms9040138.

5. Eyliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D. Regularized Asymptotics of the Solution of the Singularly Perturbed First Boundary Value Problem on the Semiaxis for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point // Mathematics. – 2021, 9(4), 405. – doi:10.3390/math9040405.

6. Елисеев А.Г., Ратникова Т.А. О регуляризованной асимптотике решения краевой задачи для параболического уравнения при наличии простой рациональной точки поворота у предельного оператора // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (28 января – 2 февраля 2021 г.). – Издательский дом ВГУ.