множителями Лагранжа. Применение стандартных ТКЭ в расчетах с жестким защемлением не позволяет получать удовлетворительный по точности вычислений результат.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02346-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Elsevier, 2005.
2. *Батэ К.-Ю.* Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010.
3. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
4. *Савенкова М.И., Шешенин С.В., Закалюкина И.М.* Сравнение результатов конечно-элементного анализа с результатами асимптотического метода осреднения в задаче упругопластического изгиба // Вестн. МГСУ. 2013. № 8. 42–50.
5. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
6. *Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П.* Особенности формирования матрицы жесткости треугольного конечного элемента размером 54x54 // Изв. вузов. Строительство. 1998. № 2. 32–37.
7. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006.
8. *Киселева Т.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П.* Сравнение скалярной и векторной форм метода конечных элементов на примере эллиптического цилиндра // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. № 3. 418–428.

Поступила в редакцию
29.04.2014

УДК 531.011+517.977+681.518.2

МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ЗАДАЧЕ АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СО СВЯЗЯМИ

Б. И. Адамов[1], **А. И. Кобрин**[2]

Статья посвящена применению методов аналитической механики к задаче адаптивной идентификации. Оцениваемые постоянные параметры удовлетворяют нелинейным уравнениям — параметрическим связям. Предлагаются модификации одного класса алгоритмов идентификации для удовлетворения таким ограничениям.

Ключевые слова: адаптивная идентификация со связями, оценивание параметров со связями, неголономная система, принцип наименьшего принуждения Гаусса.

The paper is devoted to the application of analytical mechanics methods to the problem of adaptive identification. The estimated constant parameters satisfy nonlinear equations — parametric constraints. Some modifications of identification algorithms are proposed to satisfy such constraints.

Key words: constrained adaptive identification, constrained parameter estimation, nonholonomic system, Gauss's principle of least constraint.

Введение. Оперативная идентификация параметров детерминированных систем применяется для построения адаптивных алгоритмов управления и позволяет в режиме реального времени получать оценки параметров в меняющихся условиях функционирования системы. Широко распространены методы идентификации параметров, в которых используется линейная параметрическая (идентификационная) модель исследуемой системы [1–3]. Достоинствами таких алгоритмов являются, в частности, их относительно простая структура и отсутствие дрейфов оценок при наличии

[1] *Адамов Борис Игоревич* — асп. каф. теоретической механики и мехатроники НИУ МЭИ, e-mail: adamoff.b@yandex.ru.

[2] *Кобрин Александр Исаакович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники НИУ МЭИ, e-mail: kobrinai@yandex.ru.

ограниченных по величине погрешностей в измерительной информации. К недостаткам можно отнести иногда возникающую необходимость дополнительного преобразования входных и выходных сигналов для построения параметрической модели.

Предлагаемая статья посвящена решению задачи адаптивной идентификации системы с линейной параметрической моделью при условии, что текущие оценки удовлетворяют ограничениям в виде равенств — параметрическим связям.

Постановка задачи. Пусть линейная параметрическая модель исследуемой динамической системы имеет вид

$$\underset{l\times 1}{y(t)} = N^{\mathrm{T}}(t)\underset{s\times 1}{\vartheta}. \tag{1}$$

Здесь y — l-мерный выходной вектор параметрической модели; N — сигнальная или регрессионная матрица; т — символ транспонирования; ϑ — s-мерный вектор неизвестных постоянных параметров, удовлетворяющих независимым уравнениям связей

$$\underset{r\times 1}{\psi(\vartheta)} = 0, \tag{2}$$

где ψ — r-мерная гладкая функция. Предполагается, что число искомых параметров превосходит и число выходных переменных, и число связей: $s > r$, $s > l$.

Ставится задача синтеза рекуррентного детерминированного алгоритма идентификации параметров модели (1) в непрерывном времени с учетом параметрических связей (2).

Параметрические связи. Потребуем, чтобы вектор оценок параметров $\hat{\vartheta}$ удовлетворял соотношению $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$. В этом случае функция связи $\psi = \psi(\hat{\vartheta})$ является решением уравнения

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi\big(\hat{\vartheta}(0)\big) = 0,$$

задающего условие связи в дифференциальной форме:

$$D(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\vartheta}} = 0, \quad \psi\big(\hat{\vartheta}(0)\big) = 0. \tag{3}$$

Здесь $D = (d_{ij})$ — матрица Якоби функции связи:

$$d_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \hat{\vartheta}_j}.$$

Вектор производных от оценок параметров по времени, удовлетворяющий связи (3), имеет вид

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}}, \tag{4}$$

где $\dot{\hat{\pi}}$ — вспомогательный $(s-r)$-мерный вектор с независимыми элементами, а матрица C удовлетворяет условию $DC = 0$. Вектор $\dot{\hat{\pi}}$ будем называть вектором псевдоскоростей, как это принято в неголономной механике [4].

Таким образом, вычислив определенным образом вектор псевдоскоростей $\dot{\hat{\pi}}$ и проинтегрировав уравнение (4), можно найти и оценки параметров модели (1).

Принцип наименьшего принуждения в задачах идентификации параметров со связями. Для решения задачи идентификации со связями применим принцип наименьшего принуждения Гаусса [4].

Достаточно часто для адаптивной идентификации параметров модели (1) без учета параметрических связей применяются алгоритмы вида [1–3]:

$$M\dot{\hat{\vartheta}} = f\big(\hat{\vartheta}, y\big), \quad M = M^{\mathrm{T}} > 0. \tag{5}$$

Изменив уравнения (5), можно “принудить” вектор оценок $\hat{\vartheta}$ удовлетворять параметрическим связям. В качестве количественной величины такого “принуждения” будем использовать значения следующей функции:

$$Z[M,f] = \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\vartheta}} - M^{-1}f(\hat{\vartheta},y)\right)^{\mathrm{T}} M \left(\dot{\hat{\vartheta}} - M^{-1}f(\hat{\vartheta},y)\right),$$

которую будем называть мерой принуждения.

Уравнения идентификатора параметров с учетом связей (3) получим из условия минимума принуждения по независимым компонентам вектора $\dot{\hat{\vartheta}}$:

$$Z\bigl[M, f\bigr] \to \min_{\dot{\hat{\pi}}}, \tag{6}$$

т.е. из условий

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{\hat{\pi}}_i} = 0, \qquad i = \overline{1, (s-r)}.$$

Так как вектор производных от оценок параметров, удовлетворяющий связи (3), выражается как $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$, то условие минимума принуждения (6) принимает вид

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M\left(C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} - M^{-1}f\bigl(\hat{\vartheta}, y\bigr)\right) = 0,$$

откуда получаем алгоритм идентификации в псевдоскоростях:

$$\dot{\hat{\pi}} = \Bigl[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\Bigr]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot f\bigl(\hat{\vartheta}, y\bigr). \tag{7}$$

Подставив соотношение (7) в формулу (4), приходим к уравнению идентификатора в исходных переменных:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\Bigl[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\Bigr]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot f\bigl(\hat{\vartheta}, y\bigr). \tag{8}$$

Используя соотношение (8), можно сконструировать идентификатор параметров модели (1) со связями (3), взяв за основу уравнения (5). В соответствии с принятой в работах [2, 3] терминологией назовем (8) алгоритмом идентификации (5) с проекцией.

Метод наименьших квадратов с проекцией. Применим принцип наименьшего принуждения для получения одного алгоритма идентификации параметров модели (1) с параметрическими связями (3).

Пусть оценка параметров без учета связей производится из условия минимизации функционала

$$J\bigl[\hat{\vartheta}(t)\bigr] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Bigl\|y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t)\Bigr\|_2^2\, d\tau + \frac{1}{2}\bigl(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\bigr)^{\mathrm{T}} M_0 \bigl(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\bigr),$$

где $M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица, ϑ_0 — постоянный вектор.

В рассматриваемом случае оптимальная оценка удовлетворяет уравнениям [2]:

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{\vartheta}} = M^{-1}Ne, \qquad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0,\\ &\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \qquad M(0) = M_0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}$ — вектор ошибок прогноза. Оптимальный алгоритм (9) является частным случаем соотношений (5).

Применив принцип наименьшего принуждения (6) для уравнений (9), получаем алгоритмы идентификации в псевдоскоростях

$$\dot{\hat{\pi}} = \Bigl[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\Bigr]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne, \qquad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

а также в исходных переменных:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\Bigl[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\Bigr]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne, \qquad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Уравнение (11) описывает алгоритм идентификации параметров по методу наименьших квадратов с проекцией. Отметим, что оптимальность оценки, определяемой (11), с точки зрения величины функционала $J\bigl[\hat{\vartheta}(t)\bigr]$ требует обоснования.

Утверждение. *Для параметрической сходимости алгоритма* (11) *по первому приближению достаточно, чтобы все собственные значения матрицы* $C^T(\vartheta)M(t)C(\vartheta)$ *стремились к бесконечности при* $t \to \infty$.

Доказательство. Введем вектор ошибок оценок параметров: $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$. В малой окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$ соотношения (3) интегрируемы, что позволяет выполнить следующую замену переменных:

$$\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}, \quad \dot{\tilde{\vartheta}} = -\dot{\hat{\vartheta}} = -C_* \dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\tilde{\pi}} = -\dot{\hat{\pi}},$$

где $C_* = C(\vartheta)$. С учетом введенных обозначений линеаризованные в окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$ уравнения ошибки для алгоритма наименьших квадратов с проекцией в псевдоскоростях (10) приобретают следующий вид:

$$\dot{\tilde{\pi}} = -\left[C_*^{\mathrm{T}} M C_*\right]^{-1} C_*^{\mathrm{T}} N N^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}, \quad \dot{M} = N N^{\mathrm{T}}.$$

Эти два уравнения эквивалентны одному:

$$\frac{d}{dt}\left(C_*^{\mathrm{T}} M C_* \tilde{\pi}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\pi}(t) = \left[C_*^{\mathrm{T}} M(t) C_*\right]^{-1} C_*^{\mathrm{T}} M(0) C_* \tilde{\pi}(0).$$

Для того чтобы компоненты вектора $\tilde{\pi}(t)$ стремились к нулю, достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $C_*^{\mathrm{T}} M(t) C_*$ стремились к бесконечности при $t \to \infty$. Так как $\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}$, то приведенное условие является достаточным и для затухания малой ошибки оценки параметров $\tilde{\vartheta}$, полученной оптимальным идентификатором с проекцией (11), что и требовалось доказать.

Идентификация со стабилизированным условием связи. Если начальные оценки параметров модели (1) не удовлетворяют уравнению $\psi(\hat{\vartheta}(0)) = 0$, то учет параметрических связей в дифференциальной форме (3) в алгоритме идентификации повлечет невозможность получения точных оценок. В рассматриваемом случае необходима стабилизация условия связи, возмущенного в начальный момент времени.

Потребуем, чтобы функция связи $\psi = \psi(\hat{\vartheta})$ удовлетворяла дифференциальному уравнению $\dot{\psi} = F(\psi)$, имеющему тривиальное решение, асимптотически устойчивое по Ляпунову. Используя указанное уравнение, зададим неголономную параметрическую связь

$$D(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\vartheta}} = F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big). \tag{12}$$

Вектор производных по времени от оценок параметров, удовлетворяющий связи (12), выражается через независимые псевдоскорости следующим образом:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} + B(\hat{\vartheta})F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big), \tag{13}$$

где матрицы C и B выбираются из условий $DC = 0$, $DB = E$ (E — единичная матрица).

Построим алгоритм идентификации параметров модели (1) со стабилизированной связью (12) на основе уравнений (5). Применив метод наименьшего принуждения (6), получаем следующее соотношение для псевдоскоростей:

$$\dot{\hat{\pi}} = \Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) M C(\hat{\vartheta})\Big]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot \Big[f\big(\hat{\vartheta}, y\big) - M B(\hat{\vartheta}) F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big)\Big]. \tag{14}$$

С помощью уравнений (13) и (14) задается алгоритм адаптивной идентификации (5) с проекцией и стабилизированным условием связи (12).

Заключение. В работе приведена методика построения алгоритмов адаптивной идентификации с параметрическими связями на основе приемов аналитической механики — метода псевдоскоростей и принципа наименьшего принуждения. Указанная механическая аналогия привлечена для получения оценок параметров по методу наименьших квадратов с проекцией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16–01–00429.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Slotine J.J.E., Li W.* Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.
2. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust Adaptive Control. Mineola: Dover Publications, 2012.

3. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.

4. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

Поступила в редакцию 11.11.2015

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С УПРУГОЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

С. В. Залётов[1], **Н. С. Хапилова**[2]

Получено аналитическое решение осесимметричной задачи о действии на изотропное полупространство распределенной нагрузки, заданной функцией, зависящей от радиальной координаты. Исследован случай, когда поверхность полупространства упруго закреплена вне круговой области приложения нагрузки, касательные напряжения на всей границе отсутствуют, напряжения на бесконечности обращаются в нуль. Решения на границе и внутри упругого полупространства представлены формулами для всех компонент тензора напряжений и вектора перемещений.

Ключевые слова: упругое полупространство, осесимметричная смешанная задача, аналитическое решение, распределение напряжений и перемещений.

An analytical solution to the axisymmetric problem on the action of a distributed load on an isotropic half-space when the load is given by a function dependent on the radial coordinate is obtained. The surface of the half-space is elastically fixed outside the circular domain of load application, the shear stresses are absent along the entire boundary, and the stresses vanish at infinity. At the boundary and inside the elastic half-space, the solutions are represented by the formulas for all the components of the stress tensor and displacement vector.

Key words: elastic half-space, axisymmetric mixed problem, analytical solution, distribution of stresses and displacements.

Введение. При исследовании деформации полубесконечных тел под действием распределенной нагрузки, как правило, используется метод суперпозиции решений задачи Буссинеска о сосредоточенной силе, приложенной к упругому полупространству [1]. В качестве примера применения метода суперпозиции можно отметить классические формулы С.П. Тимошенко, Дж. Гудьера для напряжений и перемещений на границе упругого полупространства, деформируемого нагрузкой, равномерно распределенной по круговой области [2].

Изучение ряда научно-технических проблем горной и строительной механики, а также машиностроения приводит к постановке смешанной задачи для полупространства, в точках поверхности которого, вне области приложения распределенной нагрузки, выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений (условие упругого закрепления границы). В работах [3, 4] методом интегрального преобразования Ханкеля получено аналитическое решение осесимметричной задачи в случае, когда поверхность изотропного полупространства упруго закреплена вне круговой области приложения распределенной нагрузки, касательные напряжения на всей границе отсутствуют, напряжения на бесконечности обращаются в нуль. В настоящей работе предложена новая форма аналитического решения исследуемой осесимметричной задачи, построенная путем перехода к оригиналу от трансформанты функции, характеризующей приложенную нагрузку и упругое закрепление границы. Отмечено, что известные решения Тередзавы, Буссинеска и

[1] *Залётов Сергей Владиславович* — асп. каф. математики Таганрог. ин-та им. А.П. Чехова (филиал) Ростов. гос. эконом. ун-та (РИНХ), e-mail: sesezalzal@gmail.com.

[2] *Хапилова Неля Сергеевна* — доктор техн. наук, ст. науч. сотр., и.о. зав. отделом аналитических методов механики горных пород Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины, e-mail: hapines.nelly@gmail.com.