МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

И.А. Шилин

ЛИНЕЙНЫЕ И ПРЕДГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки

Москва
Издательство МЭИ
2018

УДК 512
ББК 22.143
Ш 578

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Подготовлено на кафедре высшей математики

Рецензенты: к. ф.-м.н. Д. А. Шапошникова (кафедра высшей математики НИУ МЭИ);
д. ф.-м. н. А. В. Царев (кафедра алгебры МПГУ).

Шилин, И.А.

Ш 578 Линейные и предгильбертовы пространства, линейные операторы и билинейные формы: учеб. пособие / И.А. Шилин. – М.: Издательство МЭИ, 2018. – 89 с.

ISBN 978-5-7046-2049-5

В учебном пособии рассказывается об основных понятиях и методах линейной алгебры. Рассмотренные многочисленные примеры демонстрируют применение аппарата алгебры в других разделах математики: математическом анализе, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории рядов и т. д. Часть примеров относится к линейным пространствам над конечными полями.

УДК 512
ББК 22.143

ISBN 978-5-7046-2049-5

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие адресовано студентам, изучающим линейную алгебру. Сведения, содержащиеся в этой книге, окажутся полезными при изучении многих других разделов математики. Так, сходящиеся последовательности, ровно как сходящиеся ряды или решения линейных однородных дифференциальных уравнений, образуют линейное пространство, а множество решений неоднородного линейного дифференциального уравнения является линейным многообразием. С точки зрения линейной алгебры, гармонические функции являются векторами, принадлежащими ядру оператора Лапласа, а запись общего решения линейного однородного дифференциального уравнения — представлением ядра дифференциального оператора в виде линейной оболочки его базиса. Кривые и поверхности второго порядка представляют собой квадратичные формы в линейных пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, а разложение функции в ряд Фурье — аналог представления вектора в виде линейной комбинации векторов ортогонального базиса. Линейная алгебра, таким образом, позволит читателю лучше разобраться во многих других разделах, входящих в курс математики, с единой точки зрения посмотреть на понятия и факты, кажущиеся на первый взгляд далекими друг от друга. Польский математик Стефан Банах говорил об этом так: «Чтобы избежать доказательства теоремы в каждой отдельной области, что было бы неоправданной тратой времени, я выбрал путь, который состоит в следующем. В общем виде я рассматриваю множество элементов; для них я постулирую определенные свойства, из которых вывожу теоремы, и потом доказываю, что для каждой отдельной области математики принятые постулаты справедливы».

Книга начинается с определения линейного пространства. Предполагается, что читатель знаком с матрицами, умеет вычислять определитель и ранг матрицы, знает их свойства, а также умеет решать системы линейных алгебраических уравнений. Если это предположение не выполнено, то восполнить недостающие знания можно, например, по книге автора [4]. Для того чтобы ознакомиться с другим изложением курса линейной алгебры, можно воспользоваться книгами [1], [2] и [3].

1. Линейные пространства

Линейные пространства

Пусть на множестве L введена операция сложения так, что:

1) выполняются переместительный и сочетательные законы, т.е.

$$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a},$$
$$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in L \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b});$$

2) в L существует нейтральный относительно сложения элемент, который обозначим $\boldsymbol{o}$, т.е. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$ для $\forall\, \boldsymbol{a} \in L$;

3) для каждого $\boldsymbol{a} \in L$ существует ему противоположный элемент $-\boldsymbol{a} \in L$, то есть такой, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Пусть еще определено умножение элементов множества L на действительные числа, которое удовлетворяет следующим правилам:

4) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

5) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$;

6) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$;

7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$.

Тогда говорят, что L является *линейным пространством* (точнее — *действительным* линейным пространством). Элементы пространства L называют *векторами*, причем $\boldsymbol{o}$ — *нулевым* вектором. Условия, перечисленные выше, называют *аксиомами* линейного пространства.

Пример 1. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^3$, состоящее из «троек» действительных чисел, т.е. $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$. Определим сложение элементов этого множества и их умножение на действительные числа по формулам

$$(a_1, a_2, a_2) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_2).$$

Относительно этих операций $\mathbb{R}^3$ является линейным пространством с нулевым вектором $\boldsymbol{o} = (0, 0, 0)$. Этот пример можно обобщить на случай произвольного натурального числа n — получим линейное пространство $\mathbb{R}^n$, которое принято называть *арифметическим векторным пространством.* Это пространство, как известно читателю, широко используется в геометрии. $\Diamond$

Пример 2. Множество $\mathbb{R}^\infty$ действительных последовательностей является линейным пространством относительно сложения последовательностей и их умножения на действительные числа. Нулевым вектором здесь является нулевая последовательность. $\diamondsuit$

Пример 3. Множество $\mathbb{R}[x]$ многочленов с действительными коэффициентами является линейным пространством относительно сложения многочленов и их умножения на действительные числа. Нулевым вектором является нулевой многочлен $\boldsymbol{o}(x)$. $\diamondsuit$

Пример 4. Множество $F(\mathbb{R})$ функций, которые определены на $\mathbb{R}$, является линейным пространством относительно сложения функций и их умножения на действительные числа. Нулевым вектором в этом пространстве является тождественно равная нулю функция. $\diamondsuit$

Пример 5. Множество $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ матриц размера $n \times \times m$ с действительными матричными элементами является линейным пространством относительно сложения матриц и их умножения на действительные числа. Нулевой вектор — нулевая матрица. В случае $n = m$ будем обозначать это пространство проще: $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Если в определении линейного пространства множество $\mathbb{R}$ заменить множеством $\mathbb{C}$, получим *комплексное* линейное пространство. У множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ много одинаковых свойств, совокупность которых позволяет называть их «полями»: *полем* называют множество Φ, на котором введены две бинарные операции — сложение и умножение, — так, что обе они удовлетворяют переместительному и сочетательному закону, т.е.

$$\forall\, a, b \in \Phi \quad a + b = b + a,\; ab = ba,$$
$$\forall\, a, b, c \in \Phi \quad (a + b) + c = a + (b + c),\; (ab)c = a(bc),$$

умножение удовлетворяет распредельному относительно сложения свойству:

$$\forall\, a, b, c \in \Phi \quad a(b + c) = ab + ac,$$

в Φ относительно обеих операций имеются нейтральные элементы, называемые соответственно нулем и единицей, для каждого элемента в Φ имеется противоположный (тоже принадлежащий множеству Φ), для каждого не равного нулю элемента в Φ имеется обратный ему элемент (тоже принадлежащий множеству Φ).

Заметим, что полями могут быть и конечные множества. Например, если n — простое число, то множество $\mathbb{Z}_n$, состоящее из чисел $0, 1, \ldots, n - 1$, является полем относительно операций сложения и умножения, заданных следующим образом:

$$i \oplus j = \text{остаток числа } i + j \text{ при делении на } n,$$
$$i \odot j = \text{остаток числа } ij \text{ при делении на } n.$$

В частности, в поле $\mathbb{Z}_2$ операции сложения и умножения имеют вид:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Приведем пример линейного пространства *над* конечным полем.

Пример 6. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Так, для множеств $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{1, 5, 10\}$ имеем $A \triangle B = \{3, 10\}$.

Булеаном произвольного множества A называется множество всех подмножества множества A. Оно обозначается так: 2^A. Например, если $S = \{1, 2, 3\}$, то

$$2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, S\}.$$

Нетрудно показать, что если множество A состоит из n элементов, то его 2^A состоит из 2^n элементов (что и объясняет, почему для булеана выбрано такое обозначение). Булеан 2^A является линейным пространством относительно симметрической разности его элементов (подмножеств в A) и их умножения на элементы конечного поля $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, которое определяется следующим правилом:

$$\alpha B = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \alpha = 0, \\ B, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Нулевой вектор в этом пространстве — пустое подмножество в A. $\diamond$

В заключение приведем еще один, «экзотический», пример действительного линейного пространства.

Пример 7. В этом примере назовем «сложением» положительных действительных чисел их умножением, а «умножением» положительного действительного числа a на действительное число α возведение числа a в степень α. Тогда множество $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел можно считать действительным линейным пространством относительно введенных операций, поскольку выполняются все аксиомы линейного пространства:

$$\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a},$$
$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^\alpha = \boldsymbol{a}^\alpha \cdot \boldsymbol{b}^\alpha,$$
$$\boldsymbol{a}^{\alpha+\beta} = \boldsymbol{a}^\alpha \cdot \boldsymbol{a}^\beta,$$
$$\boldsymbol{a}^{\alpha\beta} = \left(\boldsymbol{a}^\beta\right)^\alpha.$$

В этом линейном пространстве, которое будем обозначать $\mathbb{R}_+$, нулевым вектором является число 1. ◇

Докажем первую в этой книге теорему, относящуюся ко всем линейным пространствам.

Теорема 1. $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ *и* $\alpha\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$.

Доказательство. В самом деле, утверждение теоремы следует из равенств

$$0\boldsymbol{a} = (\alpha - \alpha)\boldsymbol{a} \underset{\mathbf{6}}{=} \alpha\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$$

и

$$\alpha\boldsymbol{o} = \alpha(\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})) \underset{\mathbf{5}}{=} \alpha\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}.$$

■

Линейные подпространства

Подмножество V действительного линейного пространства L называют *линейным подпространством*, если

$$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V,$$
$$\forall\, \boldsymbol{a} \in V,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\boldsymbol{a} \in V.$$

Точно так же определяются линейные подпространства комплексных линейных подпространств и пространств над любым другим полем.

Пример 8. $\mathbb{R}[x]$ является линейным подпространством линейного пространства $F(\mathbb{R})$. В свою очередь, подмножество $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ в $\mathbb{R}[x]$, состоящее из многочленов степени не выше чем n, является линейным подпространством в $\mathbb{R}[x]$. ◇

Пример 9. Матрица, не меняющаяся при транспонировании, называется симметрической. Подмножество $SM(n, \mathbb{R})$ симметрических матриц (англ. symmetric matrix) в линейном пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$

является линейным подпространством. $\diamond$

Пример 10. Если $S \subset T$, то 2^S является линейным подпространством линейного пространства 2^T. $\diamond$

Пример 11. В линейном пространстве $\mathbb{R}^\infty$ подмножество $\hat{\mathbb{R}}^\infty$, состоящее из сходящихся последовательностей, является линейным подпространством. $\diamond$

Пример 12. Обозначим V множество решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

с действительными коэффициентами, в которой $m \leqslant n$.

Очевидно, что если $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ и $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in V$, то $(x_1 + \tilde{x}_1, \ldots, x_n + \tilde{x}_n) \in V$ и при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется включение $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in V$. Таким образом, множество V является линейным подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n$. $\diamond$

Линейные комбинации и оболочки

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — векторы линейного пространства L над полем Φ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — элементы поля Φ. Вектор $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n$ назовем *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Будем говорить также, что $\boldsymbol{v}$ *линейно выражается* через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Если при этом $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, то линейную комбинацию будем называть *тривиальной*. Из теоремы 1 следует, что тривиальная комбинация является нулевым вектором. Множество линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ назовем их *линейной оболочкой* и обозначим $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ (англ. span — оболочка).

Теорема 2. $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ *является линейным подпространством в* L.

Доказательство. Утверждение следует из аксиом линейного пространства. $\blacksquare$

Линейно (не)зависимые системы векторов

Рассмотрим произвольную систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейного пространства L над полем Φ. Говоря «система», мы подразумеваем, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ расположены именно в том порядке, в каком мы их перечисляем. Равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o} \tag{1}$$

выполняется, как это следует из теоремы 1, при условии $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Если равенство (1) выполняется **только** в этом случае, то систему $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называют *линейно независимой*. Если же (1) выполняется и в иных случаях, то говорят, что система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *линейно зависима*.

В дальнейшем, говоря «система векторов», мы будем понимать под этим либо записанную в некотором порядке конечную или бесконечную последовательность векторов, либо упорядоченное множество, состоящее из этих векторов. Иначе говоря, систему $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ мы будем в некоторых ситуациях записывать как множество $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Пример 13. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ следующую систему верхних треугольных матриц:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выясним, какая эта система: линейно зависимая или линейно независимая. Для этого исследуем, при каких действительных значениях коэффициентов α, β и γ выполняется равенство

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Задача сводится к поиску решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta + 4\gamma = 0, \\ -\alpha + 6\beta - 7\gamma = 0, \\ -4\alpha + \beta + 2\gamma = 0. \end{cases} \tag{3}$$

«Нулевое» решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$ этой системы очевидно. Так как

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 6 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 63 \neq 0,$$

то система уравнений (3) имеет единственное решение. Следовательно, равенство (2) выполняется только при $\alpha = \beta = \gamma = 0$, т.е. система матриц $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независима. $\diamond$

Пример 14. Выясним, является ли система векторов

$$\boldsymbol{f} = x^2 - 3x, \quad \boldsymbol{g} = 4x + 1, \quad \boldsymbol{h} = 2x^2 + 7x + 4$$

пространства $\mathbb{R}[x]$ линейно зависимой. Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее к нулевому вектору:

$$\alpha \boldsymbol{f}(x) + \beta \boldsymbol{g}(x) + \gamma \boldsymbol{h}(x) = \boldsymbol{o}(x).$$

Получим

$$(\alpha + 2\gamma)x^2 + (-3\alpha + 4\beta + 7\gamma)x + \beta + 4\gamma = 0.$$

Так как справа в этом равенстве стоит нулевой вектор, то все коэффициенты в левой части равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ -3\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0, \\ \quad \beta + 2\gamma = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Так как

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

и система уравнений (4) имеет «нулевое» решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то система (4) имеет бесконечно много решений (α, β, γ), в том числе и такое, в котором хотя бы одно из чисел α, β, γ не равно нулю. Это означает, что система многочленов $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ линейно зависима. $\diamond$

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *система векторов линейно зависима в том и только в том случае, если содержит вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов этой системы*;

б) *система, состоящая из двух векторов, линейно зависима в том и только в том случае, если один из этих векторов линейно выражается через другой;*

в) *система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;*

г) *система, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима;*

д) *система, состоящая из одного вектора, линейно зависима в том и только том случае, когда этот вектор нулевой.*

Доказательство: **а**) пусть система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависима. Тогда существуют не все равные нулю элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля Φ, для которых выполняется равенство $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$. Без потери общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Добавив к обеим частям последнего равенства вектор, противоположный вектору $\sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k \boldsymbol{a}_k$, и умножив затем обе части равенства на α_1^{-1}, получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -(\alpha_2 \alpha_1^{-1}) \boldsymbol{a}_2 - \ldots - (\alpha_n \alpha_1^{-1}) \boldsymbol{a}_n.$$

Обратно. Пусть один из векторов системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно выражается через остальные векторы. Без потери общности можно считать, что $\boldsymbol{a}_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k \boldsymbol{a}_k$. Тогда отсюда получается равенство

$$\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 - \ldots - \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o},$$

в котором коэффициент перед вектром $\boldsymbol{a}_1$ не равен нулю. Это и означает, что система $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ линейно зависима;

б) это утверждение является частным случаем утверждения **а**;

в) без потери общности предположим, что нулевой вектор является в системе последним: например, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{o}\}$. Тогда можно записать

$$0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b} + 1\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o},$$

что и означает линейную зависимость системы $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{o}\}$;

г) пусть система векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ содержит линейно зависимую подсистему, например, $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l\}$, где $l < n$. Тогда существуют такие не все равные нулю элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ поля Φ, что $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{o}$. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{a}_l + 0\boldsymbol{a}_{l+1} + \ldots + 0\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}.$$

Так как в этом равенстве не все коэффициенты равны нулю, то система $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ линейно зависима;

д) система, состоящая только из нулевого вектора, является частным случаем систем, о которых говорится в пункте **в** настоящей теоремы — следовательно, эта система линейно зависима.

Пусть система $\boldsymbol{a}$ линейно зависима. Тогда существует $\alpha \neq 0$, такое, что $\alpha \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Домножив обе части этого равенства на α^{-1}, получим, учитывая теорему 1, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. ■

Базисы

Конечная линейно независима система векторов в линейном пространстве L называется *базисом* этого пространства, если любой вектор $\boldsymbol{v} \in L$ можно линейно выразить через векторы этой системы.

Пример 15. Покажем, что базисом пространства $\mathbb{R}^n$ является система векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

В самом деле, составив формальную линейную комбинацию этих векторов и приравняв ее к нулевому вектору, т.е. записав $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{o}$, получим $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$, откуда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, т.е. система $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независима. Кроме того, очевидно, что любой вектор $\boldsymbol{v} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ можно представить в виде линейной комбинации следующим образом: $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k \boldsymbol{v}_k$.

Рассмотренный в этом примере базис в силу его простоты называют *каноническим.* $\diamond$

Пример 16. Точно так же легко проверить, что базисом линейного пространства $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ является система векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот базис тоже называют каноническим.

Канонический базис пространства $\mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{R})$ состоит из матриц

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что канонический базис пространства $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ состоит из nm матриц. $\diamond$

Пример 17. В линейном пространстве $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ (см. пример 8) простым для запоминания базисом является система многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$ — этот базис также называют каноническим. $\diamond$

Пример 18. Система любых двух ненулевых векторов пространства, описанного в примере 7, линейно зависима: для любых положительных действительных чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, не равных единице, можно записать $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^{\alpha}$, где $\alpha = \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$. Таким образом, базис в этом пространстве — это любая система из одного ненулевого вектора. $\diamond$

Лемма. *Если каждый вектор системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ линейно выражается через векторы системы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$ и $p > q$, то система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ линейно зависима.*

Доказательство. Рассмотрим равенство $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{o}$. В силу условия леммы найдутся такие β_{ij}, $i \in \{1, \ldots, q\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, что

$$a_1 = \sum_{i=1}^{q} \beta_{i1} \boldsymbol{b}_i, \quad \ldots, \quad a_p = \sum_{i=1}^{q} \beta_{ip} \boldsymbol{b}_i.$$

Тогда наше равенство принимает вид

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{q} \beta_{i1} \boldsymbol{b}_i + \ldots + \alpha_p \sum_{i=1}^{q} \beta_{ip} \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{o}$$

и, стало быть, набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ является решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \ldots + \beta_{1p}\alpha_p = 0, \\ \ldots \\ \beta_{q1}\alpha_1 + \beta_{q2}\alpha_2 + \ldots + \beta_{qp}\alpha_p = 0. \end{cases}$$

Так как число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных и система, очевидно, имеет решение $(0, \ldots, 0)$, то она имеет бесконечно много решений, то есть система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ линейно зависима. $\blacksquare$

Отметим, что доказанную только что лемму можно сформулировать следующим образом: *Если каждый вектор линейно независимой системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ линейно выражается через векторы системы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$, то $p \leqslant q$.*

Теорема 4. *Если в линейном пространстве имеется базис, состоящий из n векторов, то всякая линейно независимая система в этом пространстве, тоже состоящая из n векторов, является базисом.*

Доказательство. Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис пространства L над полем Φ, $\tilde{E} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ — линейно независимая система векторов пространства L. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{b} \in L$. В силу последней леммы система $S = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n, \boldsymbol{b}\}$ линейно зависима, т.е. найдутся такие не все равные нулю $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \Phi$, что $\alpha_1 \tilde{\boldsymbol{e}}_1 +$

$\ldots + \alpha_n \tilde{\boldsymbol{e}}_n + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. В этом равенстве $\beta \neq 0$, поскольку противное означало бы, что система $\tilde{E}$ линейно зависима. Отсюда получается, что $\boldsymbol{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов системы $\tilde{E}$:

$$\boldsymbol{b} = -(\alpha_1 \beta^{-1}) \tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \ldots - (\alpha_n \beta^{-1}) \tilde{\boldsymbol{b}}_n,$$

т.е. $\tilde{E}$ является базисом в L. ■

Пример 19. Векторы 1 и $\mathbf{i}$ линейного пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ образуют линейно независимую систему, поскольку «непропорциональны» (см. пункт **д** теоремы 3). Очевидно, что любое комплексное число можно представить в виде линейной комбинации векторов 1 и $\mathbf{i}$ с действительными коэффициентами. Значит, система векторов 1 и $\mathbf{i}$ является базисом.

Возьмем какие-нибудь «непропорциональные» векторы $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}$: например, $\boldsymbol{z} = 3 - 5\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{w} = -1 + \mathbf{i}$. Система $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ линейно независима и, в силу теоремы 4, тоже является базисом действительного пространства $\mathbb{C}$. ◇

Пример 20. Система векторов $E = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ является базисом линейного пространства $2^{\{1,\ldots,n\}}$ над полем $\mathbb{Z}_2$ (см. пример 6). В самом деле, во-первых, равенство

$$\alpha_1\{1\} \triangle \alpha_2\{2\} \triangle \ldots \triangle \alpha_n\{n\} = \emptyset$$

может выполняться только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ и, во-вторых, каждый подмножество S в $\{1, \ldots, n\}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\{1\}, \ldots, \{n\}$:

$$S = \chi(1)\{1\} \triangle \chi(2)\{2\} \triangle \ldots \triangle \chi(n)\{n\},$$

где $\chi(x) = 1$ в случае $x \in S$ и $\chi(x) = 0$ в противном случае.

Другим базисом пространства $2^{\{1,\ldots,n\}}$ является система

$$\hat{E} = \{\{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n-1\}, S\}.$$

В самом деле, так как число n входит только в последний вектор системы $\hat{E}$, то равенство

$$\alpha_1\{1\} \triangle \alpha_2\{1,2\} \triangle \ldots \triangle \alpha_n\{1,\ldots,n\} = \emptyset \tag{5}$$

возможно только в случае $\alpha_n = 0$. Тогда равенство

$$\alpha_1\{1\} \triangle \alpha_2\{1,2\} \triangle \ldots \triangle \alpha_{n-1}\{1,\ldots,n-1\} = \emptyset$$

возможно только в случае $\alpha_{n-1} = 0$. Рассуждая так и далее, получаем, что все коэффициенты в равенстве (5) равны нулю, то есть система $\hat{E}$ линейно независима. По теореме 4 система $\hat{E}$ является базисом. $\diamond$

Теорема 5. *Два конечных базиса линейного пространства содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство. Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\tilde{E} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_m\}$ — базисы некоторого линейного пространства. Тогда $n \leqslant m$ и $m \leqslant n$ (см. переформулировку леммы на стр. 15), откуда получаем, что $n = m$. $\blacksquare$

Размерность

Натуральное число n назовем *размерностью* линейного пространства L, если в L существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система из $n+1$ векторов линейно зависима. Размерность пространства L будем обозначать $\dim L$ (англ. dimension — размерность).

Теорема 6. *Размерность линейного пространства равна числу векторов в базисе пространства.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что теорема сформулирована корректно, поскольку в силу теоремы 5 все базисы пространства состоят из одного и того же числа векторов. Рассмотрим произвольный базис E в пространстве L, состоящий из n векторов, и произвольную систему A векторов пространства L, в которой $n + 1$ векторов. В силу последней леммы (стр. 15) система A линейно зависима. Таким образом, $\dim L = n$.

Пусть теперь $\dim L = n$. Тогда L содержит линейно независимую систему $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$, а для произвольного вектора $\boldsymbol{b} \in L$ система $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, b\}$ линейно зависима. Отсюда следует, что $\boldsymbol{b}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — это доказывается точно так же, как и в теореме 4. Таким образом, система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ является базисом пространства L. $\blacksquare$

Линейное пространство L, имеющее размерность, называют *конечномерным*. Если $\dim L = n$, то говорят также, что пространство L *n-мерное*. Пространство $\{\boldsymbol{o}\}$ принято называть *нульмерным*. Линейное пространство, не являющееся нульмерным и не имеющее размерности, называют *бесконечномерным*.

Теорема 7. *Пусть V — линейное подпространство конечномерного пространства L. Если $V \neq L$, то* $\dim V < \dim L$.

Доказательство. Докажем утверждение, обратное к противоположному: если $\dim V = \dim L$, то $V = L$. Пусть $n = \dim L = \dim V$. Тогда в L существует базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а в V — базис $\check{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{e}}_n$ (теорема 6). Предположим противное: $V \neq L$. Тогда существует вектор $\boldsymbol{a} \in L \backslash V$. Каждый из векторов $\underbrace{\check{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{e}}_n, \boldsymbol{a}}_{n+1}$ пространства L представим в виде линейной комбинации базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, поэтому (см. последнюю лемму — стр. 15) система $\check{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{e}}_n, \boldsymbol{a}$ линейно зависима. Так как при этом $\check{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{e}}_n$ является линейно независимой системой, то $\boldsymbol{a}$ есть линейная комбинация векторов $\check{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{e}}_n$. Получается, что $L = \mathrm{Span}(\check{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \check{\boldsymbol{e}}_n) = V$. ■

Координаты вектора

Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис линейного пространства L над полем Φ. Тогда в силу определения базиса для произвольного вектора $\boldsymbol{a} \in L$ существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$, что $\boldsymbol{a}$ представим в виде $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$. Говорят, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *координаты* вектора $\boldsymbol{a}$ относительно базиса E.

Теорема 8. *Набор координат вектора относительно всякого базиса единствен.*

Доказательство. Предположим, что вектор $\boldsymbol{a}$ имеет два набора координат относительно произвольного базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Обозначим эти координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$. Таким образом, $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{a} = \hat{\alpha}_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \hat{\alpha}_n \boldsymbol{e}_n$. Вычитая из последнего равенства предпоследнее и учитывая аксиомы линейного пространства, получаем $(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\hat{\alpha}_n - \alpha_n)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{o}$. Так как система E линейно независима, то получившееся равенство выполняется только в случае $\hat{\alpha}_1 - \alpha_1 = \ldots = \hat{\alpha}_n - \alpha_n$, т.е. в случае $\alpha_1 = \hat{\alpha}_1, \ldots, \alpha_n = \hat{\alpha}_n$. ■

Пример 21. Вычислим координаты вектора $\boldsymbol{f} = 8x^2 - 5x - 2$ из линейного пространства $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ относительно базиса $E = \{x + x^2, 2x - x^2, 3x - x^2 - 1\}$. Записывая $\boldsymbol{f}$ формально в виде линейной комбинации

$$8x^2 - 5x - 2 = \alpha(x + x^2) + \beta(2x - x^2) + \gamma(3x - x^2 - 1),$$

имеем

$$8x^2 - 5x - 2 = (\alpha - \beta - \gamma)x^2 + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)x - \gamma,$$

откуда $\gamma = 2$, $\alpha = 3$ и $\beta = -7$ — это и есть координаты вектора $\boldsymbol{f}$ относительно базиса E. ◇

Матрица перехода между базисами

Пусть E и $\hat{E}$ — базисы n-мерного линейного пространства L над полем Φ. Из теорем 5 и 6 следует, что эти базисы состоят из n векторов. Обозначим $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ векторы, составляющие базис E. Векторы базиса $\hat{E}$ обозначим $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n$. Представим векторы базиса $\hat{E}$ в виде линейных комбинаций векторов базиса E:

$$\begin{gathered}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \varepsilon_{11}\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}\boldsymbol{e}_n,\\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \varepsilon_{21}\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \varepsilon_{2n}\boldsymbol{e}_n,\\ \ldots\\ \hat{\boldsymbol{e}}_n = \varepsilon_{n1}\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \varepsilon_{nn}\boldsymbol{e}_n.\end{gathered}$$

Сокращенно это можно выразить формулой

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik}\boldsymbol{e}_k. \tag{6}$$

Матрицу

$$(\varepsilon_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \ldots & \varepsilon_{1n}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \ldots & \varepsilon_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \ldots & \varepsilon_{nn} \end{pmatrix}$$

будем называть *матрицей перехода* от базиса E к базису $\hat{E}$.

Теорема 9. *Матрицы перехода от базиса E к базису $\hat{E}$ и от базиса $\hat{E}$ к базису E взаимно обратны и, стало быть, невырождены.*

Доказательство. Обозначим $\hat{\varepsilon}_{11}, \hat{\varepsilon}_{12}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{nn}$ матричные элементы матрицы перехода от базиса $\hat{E}$ к базису E, т.е. положим, что

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{l=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{jl}\hat{\boldsymbol{e}}_l. \tag{7}$$

Матрица перехода от $\hat{E}$ к E имеет, таким образом, вид $(\hat{\varepsilon}_{ij})$. Подставив (7) в (6), получим

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik} \sum_{l=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{kl}\boldsymbol{e}_l = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik}\hat{\varepsilon}_{kl} \right) \boldsymbol{e}_l,$$

откуда ввиду теоремы 8 находим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik}\hat{\varepsilon}_{kl} = \delta_{il}$. Но это означает, что $(\varepsilon_{ij})(\hat{\varepsilon}_{ij})$ — единичная матрица, что и требовалось доказать. ■

Пример 22. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ базисы $E = \{\boldsymbol{e}_1 = 1, \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{i}\}$ и $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1 = 1 - \mathbf{i}, \hat{\boldsymbol{e}}_2 - 1 + \mathbf{i}\}$. Так как $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = 1\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_2$, то

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\hat{\varepsilon}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что эти матрицы действительно взаимно обратны. ◇

Пример 23. Рассмотрим базисы E и $\hat{E}$ из примера 20. Векторы, входящие в базис $\hat{E}$, линейно выражаются через векторы базиса E следующим образом:

$$\{1, \ldots, k\} = \triangle_{i=1}^{n} \chi_k(i)\{i\},$$

где $\chi_k(i) = 1$, если $i \in \{1, \ldots, k\}$, и $\chi_k(i) = 0$ в ином случае. Поэтому матрица перехода от базиса E к базису $\hat{E}$ имеет вид

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя матрицу обратного перехода, получим

$$(\hat{\varepsilon}_{ij}) = (\varepsilon_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот результат полностью согласуется с равенствами

$$\{k\} = \{1, \ldots, k-1\} \triangle \{1, \ldots, k\},$$

выполняющимися для $k \in \{2, \ldots, n\}$. ◇

Связь между координатами вектора в разных базисах

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ относительно базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ имеет координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а относительно базиса $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ —

координаты $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$. Это означает, что

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k \tag{8}$$

и

$$\boldsymbol{a} = \sum_{l=1}^{n} \hat{\alpha}_l \hat{\boldsymbol{e}}_l. \tag{9}$$

Пусть векторы базиса $\hat{E}$ записываются в виде линейных комбинаций векторов базиса E по формулам

$$\hat{\boldsymbol{e}}_l = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{lk} \boldsymbol{e}_k. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получим

$$\boldsymbol{a} = \sum_{l=1}^{n} \hat{\alpha}_l \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{lk} \boldsymbol{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \hat{\alpha}_l \varepsilon_{lk} \right) \boldsymbol{e}_k. \tag{11}$$

Сравнивая (8) и (11), получаем равенства $\alpha_k = \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_l \epsilon_{lk}$, т.е.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{11} + \hat{\alpha}_2 \varepsilon_{21} + \ldots + \hat{\alpha}_n \varepsilon_{n1}, \\ \alpha_2 = \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{12} + \hat{\alpha}_2 \varepsilon_{22} + \ldots + \hat{\alpha}_n \varepsilon_{n2}, \\ \ldots \\ \alpha_n = \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{1n} + \hat{\alpha}_2 \varepsilon_{2n} + \ldots + \hat{\alpha}_n \varepsilon_{nn}. \end{cases}$$

Перепишем полученный результат в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \ldots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Это равенство выражает связь между координатами вектора $\boldsymbol{a}$ относительно базисов E и $\hat{E}$. Другой вид этого равенства можно получить, транспонируя обе его части:

$$(\alpha_1 \;\ldots\; \alpha_n) = (\hat{\alpha}_1 \;\ldots\; \hat{\alpha}_n)\,(\varepsilon_{ij}). \tag{13}$$

Меняя в наших рассуждениях базисы E и $\hat{E}$ местами и принимая во внимание теорему 9, получаем формулы

$$\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \dots\\ \hat\alpha_n\end{pmatrix} = (\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$(\hat\alpha_1\ \hat{\dots}\ \alpha_n) = (\hat\alpha_1\ \dots\ \hat\alpha_n)\,(\varepsilon_{ij})^{-1}. \qquad (15)$$

Пример 24. Рассмотрим вектор $4-6\mathbf{i}$ в линейном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ и базисы E и $\hat E$ этого пространства, взятые из примера 22. Очевидно, что числа $\alpha_1 = 4$ и $\alpha_2 = -6$ являются координатами вектора $4-6\mathbf{i}$ относительно базиса E. Воспользовавшись найденной в примере 22 матрицей перехода от E к $\hat E$, получим

$$\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \hat\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}4\\ -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\ -6\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}.$$

Числа $\alpha_1 = 5$ и $\alpha_2 = -1$ действительно являются координатами вектора $4-6\mathbf{i}$ относительно базиса $\hat E$, поскольку $4-6\mathbf{i} = 5(1-\mathbf{i})-(1+\mathbf{i})$. $\diamond$

Действия над линейными подпространствами

Теорема 10. *Пересечение линейных подпространств V и $\hat V$ линейного пространства L над полем Φ является подпространством в L.*

Доказательство. Действительно, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V \cap \hat V$ и $\alpha \in \Phi$, то $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\alpha\boldsymbol{a} \in \hat V$. Поэтому $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\alpha\boldsymbol{a} \in V \cap \hat V$. ■

Суммой линейных подпространств V и $\hat V$ линейного пространства L называют подмножество

$$V + \hat V = \{\boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{v}} \mid \boldsymbol{v} \in V,\ \hat{\boldsymbol{v}} \in \hat V\}.$$

Теорема 11. *$V + \hat V$ — линейное подпространство в L.*

Доказательство. Произвольные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ подмножества $V + \hat V$ можно представить в виде $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{v}}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{w} + \hat{\boldsymbol{w}}$, где $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ и $\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}} \in \hat V$. Тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{v}}) + (\boldsymbol{w} + \hat{\boldsymbol{w}}) = (\underbrace{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}}_{\in V}) + (\underbrace{\hat{\boldsymbol{v}} + \hat{\boldsymbol{w}}}_{\in \hat V}) \in V + \hat V,$$

$$\forall\,\alpha \in \Phi \quad \alpha\boldsymbol{a} = \alpha(\boldsymbol{v} \hat{+} \boldsymbol{v}) = \underbrace{\alpha\boldsymbol{v}}_{\in V} + \underbrace{\alpha\hat{\boldsymbol{v}}}_{\in \hat V} \in V + \hat V,$$

что и завершает доказательство. ■

Пример 25. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}_{\leqslant 4}[x]$ подмножества V и $\hat{V}$: пусть первое состоит из многочленов, содержащих переменную x только в четной степени, т.е. $V = \{ax^4 + bx^2 + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, а второе — из многочленов, для которых число 0 является корнем, т.е. $\hat{V} = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Легко убедиться, что V и $\hat{V}$ являются линейными подпространствами. Тогда $V \cap \hat{V} = \{ax^4 + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ и $V + \hat{V} = \mathbb{R}_{\leqslant 4}[x]$. ◇

Сумма $V + \hat{V}$ линейных подпространств называется *прямой* и обозначается $V \oplus \hat{V}$, если $V \cap \hat{V} = \{\boldsymbol{o}\}$.

Пример 26. В арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ выделим подпространства $V = \{(a_1, a_2, 0)\}$ и $\hat{V} = \{(0, 0, a_3)\}$. Очевидно, что $\mathbb{R}^3 = V \oplus \hat{V}$. ◇

Пример 27. Если $A = B \cup C$ и $B \cap C = \emptyset$, то (см. пример 7) $2^A = 2^B \oplus 2^C$. ◇

Теорема 12. *Формулы Грассмана:*

$$\dim V + \hat{V} = \dim V + \dim \hat{V} - \dim V \cap \hat{V},$$
$$\dim V \oplus \hat{V} = \dim V + \dim \hat{V}.$$

Доказательство. Проще всего доказать формулу Грассмана для прямой суммы, т.е. вторую формулу. Если $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p\}$ — базис в V, $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_q\}$ — базис в $\hat{V}$, то согласно определению суммы подпространств всякий вектор из $V + \hat{V}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_q$. Докажем, что эта система линейно независима. В самом деле, случаи

$$\underbrace{\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{e}_p}_{\exists\, \alpha_i \neq 0} + 0\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + 0\hat{\boldsymbol{e}}_q = \boldsymbol{o},$$
$$0\boldsymbol{e}_1 + \ldots + 0\boldsymbol{e}_q + \underbrace{\hat{\alpha}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + \hat{\alpha}_p \hat{\boldsymbol{e}}_p}_{\exists\, \hat{\alpha}_i \neq 0} = \boldsymbol{o}$$

невозможны, ибо тогда системы E и $\hat{E}$ оказались бы линейно зависимыми. Покажем, что невозможен случай, когда ненулевые коэффициенты есть и среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, и среди $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_q$. Без потери общности рассмотрим, например, случай, когда $\alpha_{p-1}, \alpha_p \neq 0$ и $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3 \neq 0$. Тогда $\alpha_{p-1}\boldsymbol{e}_{p-1} + \alpha_p \boldsymbol{e}_p = -(\hat{\alpha}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\alpha}_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + \hat{\alpha}_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3)$. Это означает, что вектор $\alpha_{p-1}\boldsymbol{e}_{p-1}+\alpha_p\boldsymbol{e}_p$, принадлежащий подпространству V, принадлежит и подпространству $\hat{V}$, чего не может быть, так как мы рассматриваем случай $V\cap\hat{V}=\{\boldsymbol{o}\}$.

Докажем теперь первую формулу Грассмана. Пусть $V\cap\hat{V}$ содержит ненулевые векторы и $\dim V\cap\hat{V}=n$. Пусть $E=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ — базис в $V\cap\hat{V}$. Векторы $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ принадлежат и подпространству V, и подпространству $\hat{V}$, но $\dim V$, $\dim\hat{V}\geqslant n$ (см. теорему 7), поэтому дополним E до базиса $E_1=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_p\}$ в V и до базиса $E_2=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_q\}$ в $\hat{V}$. Точно так же, как это было сделано для второй формулы Грассмана, можно показать, что система $E_1\cup E_2$ линейно независима. Очевидно также, что всякий вектор из $V+\hat{V}$ линейно выражается через векторы системы $E_1\cup E_2$. Таким образом, система $E_1\cup E_2$ является базисом в $V+\hat{V}$. Но тогда $\dim V+\hat{V}=$ $=n+p+q=(p+n)+(q+n)-n=\dim V+\dim\hat{V}-\dim V\cap\hat{V}$. ■

Пример 28. В линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ выделены подпространства $V=\operatorname{Span}(\boldsymbol{a}=(1,2,1,1),\ \boldsymbol{b}=(-1,-1,-3,1))$ и $\hat{V}=$ $=\operatorname{Span}(\boldsymbol{c}=(2,5,0,4),\ \boldsymbol{d}=(-1,-1,-1,-1))$. Найдем их пересечение и сумму.

Если $\boldsymbol{v}\in V\cap\hat{V}$, то $\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\gamma\boldsymbol{c}+\delta\boldsymbol{d}$, откуда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases}\alpha-\beta=2\gamma-\delta,\\ 2\alpha-\beta=5\gamma-\delta,\\ \alpha-3\beta=-\delta,\\ \alpha+\beta=4\gamma-\delta.\end{cases}$$

Решив ее методом Гаусса, получаем, что γ может принимать любые значения, $\beta=\gamma$, $\alpha=3\gamma$ и $\delta=0$. Таким образом, $V\cap\hat{V}=\{\gamma(2,5,0,4)\mid\gamma\in\mathbb{R}\}$. Понятно, что $\dim V\cap\hat{V}=1$.

Так как система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ линейно независима, то $\dim V=2$. Точно так же $\dim\hat{V}=2$. Тогда по формуле Грассмана $\dim V+\hat{V}=2=$ $=2-1=3$. Из определения суммы линейных подпространств следует, что $V+\hat{V}=\operatorname{Span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$, однако система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ не является базисом в $V+\hat{V}$, поскольку $\dim V+\hat{V}=3$. Легко проверить, что система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима (а именно, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$), поэтому базисом в $V+\hat{V}$ является система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$. Таким образом, $V+\hat{V}=$ $=\{\mu a+\nu b+\vartheta d\mid\mu,\nu,\vartheta\in\mathbb{R}\}$. ◇

Пример 29. Матрица, «меняющая знак при транспонировании», называется *кососимметрической.* Иными словами, матрица a называется кососимметрической, если $a^{\mathrm{T}} = -a$. Обозначим $SSM(2,\mathbb{R})$ подмножество в $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, состоящее из кососимметрических (англ. skew symmetric) матриц. Очевидно, что SSM (так же, как $SM(2,\mathbb{R})$ — см. пример 9) является линейным подпространством в $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$. Так как

$$SM(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Span}\left(\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

и система матриц $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независима, то $\dim V = 3$. Поскольку $SSM(2,\mathbb{R})$ является линейной оболочкой матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $\dim \hat{V} = 1$. Понятно, что подпространство $V \cap \hat{V}$ состоит только из нулевой матрицы. Значит, по формуле Грассмана $\dim V \oplus \hat{V} = 3 + 1 = 4$. Но тогда $V \oplus \hat{V} = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, то есть каждую матрицу размера 2×2 можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \nu & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma = \dfrac{\mu + \nu}{2}$ и $\delta = \dfrac{\mu - \nu}{2}$. $\diamond$

Рассмотрим в линейном пространстве $2^{\{1,2,3,4\}}$ (см. пример 8) линейные подпространства $V = \mathrm{Span}(\{1\},\{2\},\{3\})$ и $\hat{V} = \mathrm{Span}(\{3\},\{4\})$. Легко видеть, что $V + \hat{V} = 2^{\{1,2,3,4\}}$ и $V \cap \hat{V} = \{\emptyset, \{3\}\}$. Отметим, что в пространстве $2^{\{1,2,3,4\}}$ существуют векторы A, допускающие различные представления в виде $\boldsymbol{a} = B \triangle C$, где $B \in V$ и $C \in \hat{V}$. Например, $\{1,4\} = \{1,3\} \triangle \{3,4\}$ и $\{1,4\} = \{1\} \triangle \{4\}$. Оказывается, если бы сумма $V + \hat{V}$ была прямой, то всякий вектор в $2^{\{1,2,3,4\}}$ имел бы единственное представление в виде суммы двух векторов, один из которых принадлежит подпространству V, а другой — подпространству $\hat{V}$. Например, если

$$V = \mathrm{Span}(\{1\},\{2\}) = \{\emptyset, A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1,2\}\},$$

и

$$\hat{V} = \mathrm{Span}(\{3\},\{4\}) = \{\emptyset, D = \{3\}, E = \{4\}, F = \{3,4\}\},$$

то $2^{\{1,2,3,4\}} = V \oplus \hat{V}$ и каждый вектор из $2^{\{1,2,3,4\}}$ можно единственным образом представить в виде суммы вектора из V и вектора из $\hat{V}$:

$$\begin{gathered}
\emptyset = \emptyset \triangle \emptyset, \\
\{1\} = A \triangle \emptyset, \quad \{2\} = B \triangle \emptyset, \quad \{3\} = D \triangle \emptyset, \quad \{4\} = E \triangle \emptyset, \\
\{1,2\} = C \triangle \emptyset, \quad \{1,3\} = A \triangle D, \quad \{1,4\} = A \triangle E, \\
\{2,3\} = B \triangle D, \quad \{2,4\} = B \triangle E, \quad \{3,4\} = \emptyset \triangle F, \\
\{1,2,3\} = C \triangle D, \quad \{1,2,4\} = C \triangle E, \quad \{1,3,4\} = A \triangle F, \\
\{2,3,4\} = B \triangle F, \quad \{1,2,3,4\} = C \triangle F.
\end{gathered}$$

Докажем соответствующее общее утверждение.

Теорема 13. *Для всякого вектора $\boldsymbol{a} \in V \oplus \hat{V}$ представление в виде $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{b} \in V$ и $\boldsymbol{c} \in \hat{V}$, единственно. Напротив: если каждый вектор $\boldsymbol{a} \in V + \hat{V}$ представляется в виде суммы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{b} \in V$ и $\boldsymbol{c} \in \hat{V}$, единственным образом, то сумма $V + \hat{V}$ прямая.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Пусть $\boldsymbol{a} \in V \oplus \hat{V}$ и векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in V$ и $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \in \hat{V}$ такие, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{c}_2$. Вычитая из первого равенства второе, имеем $\boldsymbol{o} = (\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2)$, откуда $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1$. Так как $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \in V$ и $\boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1 \in \hat{V}$, то $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{o}$, поэтому $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2$ и $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2$.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть всякий вектор линейного подпространства $V + \hat{V}$ представляется в виде суммы вектора из V и вектора из $\hat{V}$ только одним способом. Предположим, что при этом линейное подпространство $V \cap \hat{V}$ содержит ненулевой вектор $\boldsymbol{d}$. Тогда $\boldsymbol{d} \in V$, $\boldsymbol{d} \in \hat{V}$ и, кроме того, $-\boldsymbol{d} \in \hat{V}$. Но тогда вектор $\boldsymbol{o} \in V + \hat{V}$ можно представить двумя различными способами: $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{d} + (-\boldsymbol{d})$. Получили противоречие. ■

Дополнительное линейное подпространство

Пусть V — линейное подпространство пространства L. Линейное подпространство $\hat{V}$ в L называют *дополнительным* к подпространству V, если $V \oplus \hat{V} = L$. Дополнительное к V подпространство будем обозначать $\operatorname{Suppl} V$ (англ. supplementary — дополнительный).

Теорема 14. *Ко всякому линейному подпространству конечномерного линейного пространства существует дополнительное подпространство.*

Доказательство. Пусть V — линейное подпространство n-мерного линейного пространства L. Для «крайних» случаев теорема, очевидно, выполняется: $\operatorname{Suppl}\{\boldsymbol{o}\} = L$ и, стало быть, $\operatorname{Suppl} L = \{\boldsymbol{o}\}$.

Рассмотрим, теперь случай, когда $V \neq \{\boldsymbol{o}\}$ и $V \neq L$. Тогда $0 < \dim V < n$ (см. теорему 7). Пусть $k = \dim V$. Тогда в V существует базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$. Дополним его векторами $\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n$ до базиса в L. Каждый вектор $\boldsymbol{a} \in L$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = \underbrace{\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{e}_k}_{\in V} + \underbrace{\alpha_{k+1} \breve{\boldsymbol{e}}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \breve{\boldsymbol{e}}_n}_{\in \operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)},$$

поэтому $\boldsymbol{a} \in V + \operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$. Таким образом, L является суммой линейных подпространств V и $\operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$.

Пусть $\boldsymbol{b} \in V \cap \operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$. Тогда, с одной стороны, $\boldsymbol{b} \in V$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{b}$ можно представить в виде $\boldsymbol{b} = \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i \boldsymbol{e}_i$, а с другой стороны, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$ и поэтому $\boldsymbol{b}$ можно представить следующим образом: $\boldsymbol{b} = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \gamma_i \breve{\boldsymbol{e}}_i$. Вычитая из первого представления второе, получаем

$$\boldsymbol{o} = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{e}_k - \gamma_{k+1} \breve{\boldsymbol{e}}_{k+1} - \ldots - \gamma_n \breve{\boldsymbol{e}}_n.$$

Так как последнее равенство является представлением нулевого вектора в виде линейной комбинации базисных векторов пространства L, то это равенство выполняется только при условии

$$\beta_1 = \ldots = \beta_k = \gamma_{k+1} = \ldots = \gamma_n = 0.$$

Но тогда $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. Поэтому пересечение подпространств V и $\operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$ состоит только из нулевого вектора.

Таким образом, $L = V \oplus \operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$, то есть $\operatorname{Suppl} V = \operatorname{Span}(\breve{\boldsymbol{e}}_{k+1}, \ldots, \breve{\boldsymbol{e}}_n)$. ■

Линейные многообразия

Пусть V — линейное подпространство пространства L над полем Φ, $\boldsymbol{a} \in L$. Подмножество

$$\boldsymbol{a} + V = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\}$$

называют *линейным многообразием* с *порождающим вектором* $\boldsymbol{a}$ и *направляющим подпространством* V. Порождающий вектор $\boldsymbol{a}$ называют также *вектором сдвига* подпространства V. Отметим, что если $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{a} + V$, то найдется такой $\hat{\boldsymbol{v}} \in V$, что $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{v}}$, поэтому

$$\boldsymbol{b} + V = \boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{v}} + V = \boldsymbol{a} + V,$$

т.е. линейное многообразие *порождается любым своим вектором.*

Пример 30. Обозначим $\hat{\mathbb{R}}^\infty_\alpha$ подмножество линейного пространства $\hat{\mathbb{R}}^\infty$, состоящее из последовательностей, сходящихся к числу α. Легко проверить, что $\hat{\mathbb{R}}^\infty_0$ является линейным подпространством (входящие в него векторы называют бесконечно малыми последовательностями), а в случае $\alpha \neq 0$ подмножество $\hat{\mathbb{R}}^\infty_\alpha$ не является линейным подпространством и является линейным многообразием, которое порождается любой последовательностью, сходящейся к α, и направляющим подпространством которого является $\hat{\mathbb{R}}^\infty_0$. $\diamond$

Пример 31. Системе линейных уравнений с действительными коэффициентами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{16}$$

в которой $m \leqslant n$, поставим в соответствие систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{17}$$

Обозначим V подмножество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из решений системы (17). В примере 12 отмечалось, что V является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$. Пусть M — множество решений системы (16). Нетрудно проверить, что, во-первых, если $\boldsymbol{a} \in M$, $\boldsymbol{v} \in V$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \in M$ и, во-вторых, всякое решение системы (16) можно представить в виде $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{a} \in M$, $\boldsymbol{v} \in V$. Это означает, что $M = \boldsymbol{a} + V$, то есть M есть линейное многообразие, направляющим подпространством которого является V, а вектором сдвига служит любое частное решение системы (16). $\diamond$

2. Предгильбертовы пространства

Предгильбертовы пространства

Пусть L — действительное линейное пространство, любым двум векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in L$ поставлено в соответствие действительное число $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ и при этом выполнены условия

1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$;

2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$;

3) $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$;

4) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqslant 0$;

5) если $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Тогда говорят, что в L задано *скалярное произведение*.

Для комплексного линейного пространства определение скалярного произведения отличается лишь измененным первым условием:

1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$

(т.е. обобщением), а условия **2** – **5** остаются такими же. Черта над скалярным произведением обозначает здесь переход к комплексно сопряженному числу.

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называют *предгильбертовым* пространством. Конечномерное предгильбертово пространство называют *евклидовым*.

Теорема 15. *Скалярное произведение удовлетворяет следующим свойствам:*

а) $\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a} = 0$;

б) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{o} = 0$;

в) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$;

г) $\boldsymbol{a} \cdot (\beta \boldsymbol{b}) = \beta\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ *в действительном предгильбертовом пространстве и* $\boldsymbol{a} \cdot (\beta \boldsymbol{b}) = \overline{\beta}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ *в комплексном предгильбертовом пространстве*;

д) $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|^2 \leqslant (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})$ (*неравенство Коши – Буняковского*).

Доказательство:

а) в самом деле, для любого вектора $\boldsymbol{b}$, используя условие **2** скалярного произведения, имеем $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{o}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a}$, откуда и получается доказываемое равенство;

б) в силу условия **1** скалярного произведения и уже доказанного свойства **а** из текущей теоремы имеем в действительном предгильбертовом пространстве $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a} = 0$, а в комплексном предгильбертовом пространстве $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{o} = \overline{\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a}} = \overline{0} = 0$;

в) используя условия **1** и **2** из определения скалярного произведения, получаем в действительном пространстве

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \underset{\mathbf{1}}{=} (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} \underset{\mathbf{2}}{=} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} \underset{\mathbf{1}}{=} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$$

в комплексном

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \underset{\mathbf{1}}{=} \overline{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}} \underset{\mathbf{2}}{=} \overline{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}} = \\ = \overline{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

(здесь использовано свойство комплексного сопряжения);

г) доказать этот пункт оставляем читателю;

д) покажем сначала, что неравенство Коши – Буняковского выполняется в действительном предгильбертовом пространстве. В силу условия **4** для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $(\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \geqslant 0$. Условия **1** и **2** из определения скалярного произведения и пункты **в** и **г** текущей теоремы позволяют переписать это неравенство в виде

$$\alpha^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\alpha(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \geqslant 0.$$

С учетом условия **1** имеем

$$\alpha^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+2\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \geqslant 0.$$

Понятно, что дискриминант квадратного многочлена (относительно α), находящегося в левой части последнего неравенства, не может быть положительным числом, т.е. $4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \leqslant 0$, откуда $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \leqslant (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$ и далее получается доказываемое неравенство.

Рассматривая ситуацию в комплексном предгильбертовом пространстве, заметим сначала, что в случае, когда $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$, неравенство Коши – Буняковского, как легко видеть, выполняется. Положим, $\boldsymbol{a} \neq$ $\neq \boldsymbol{o}$. Тогда $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \neq 0$ (иначе получалось бы противоречие с условием **5** из определения скалярного произведения). В силу условия **4** для всякого $\alpha \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $(\alpha\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\alpha\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \geqslant 0$, которое с учетом условий **1** и **2** и пунктов **в** и **г** текущей теоремы может быть переписано в виде

$$\alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\overline{\alpha}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \geqslant 0.$$

Возьмем в качестве α комплексное число $\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \geqslant 0.$$

Умножив обе части на $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ и учитывая, что (в силу условия **4** из определения скалярного произведения) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geqslant 0$, получим

$$-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \geqslant 0,$$
$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} \leqslant (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}),$$

откуда и следует неравенство Коши – Буняковского. ■

Условия **2** и **3** из определения скалярного произведения называют *условиями линейности* по первому аргументу. Пункты **в** и **г** доказанной теоремы означают, что скалярное произведение в действительном линейном пространстве линейно и по второму аргументу, а в комплексном — линейно по второму аргументу «наполовину». В силу этого говорят, что скалярное произведение в действительном предгильбертовом пространстве *билинейно*, а в комплексном — *полуторалинейно*.

Пример 32. Читатель без труда проверит, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ можно задать формулой $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + \ldots a_n b_n$. Аналогичная формула для пространства $\mathbb{C}^n$ имеет вид $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1\overline{b_1} + \ldots a_n\overline{b_n}$. ◇

Пример 33. Следом матрицы a размера $n\times n$ назовем сумму ее матричных элементов, находящихся на главной диагонали. Обозначим след так: $\operatorname{tr} a$ (англ. trace — след). Иными словами, $\operatorname{tr} a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Заметим, что при транспонировании матрицы a ее матричные элементы главной диагонали остаются на своих местах, поэтому $\operatorname{tr} a^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr} a$.

Покажем, что в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ скалярное произведение можно определить по формуле $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})$.

В самом деле, во-первых, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})$, т.е. условие **1** из определения скалярного произведения выполняется. Так как для умножения матриц выполняется распределительный (относительно сложения) закон, то выполняются также условия **2** и **3**. Далее, введем обозначения $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$. Тогда $c_{ij} = a_{ji}$ и $d_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2$, поэтому $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr} d = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0$, т.е. условие **4** тоже выполняется. Наконец, если $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) = 0$, т.е.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$, то $a_{ik} = 0$ при любых i и k, то есть $\boldsymbol{a}$ — нулевая матрица. Таким образом, выполняется и условие **5**.

Точно так же можно показать, что в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ скалярное произведение можно задать формулой $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}})$. $\diamond$

Пример 34. Пусть $C[a;b]$ — множество функций, которые определены и непрерывны на отрезке $[a;b]$. Очевидно, что $C[a;b]$ является линейным пространством относительно сложения функций и умножения их на действительные числа. Так как для любых $f, g \in \in C[a;b]$ функция $f(x)g(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует число $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Скалярное произведение в пространстве $C[a;b]$ можно ввести формулой $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. В самом деле, выполнимость условия **1** очевидна. Условия **2** и **3** тоже выполняются — об этом знаем из курса математического анализа. Так как значение интеграла $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ численно равно площади фигуры, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху графиком функции $f^2(x)$, слева прямой $x = a$ и справа прямой $x = b$, то $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f} \geqslant 0$. Наконец, равенство $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f} = 0$ возможно только в том случае, когда $f(x)$ — тождественно равная нулю функция. $\diamond$

Пример 35. В линейном пространстве $\mathbb{R}_+$ (см. пример 7) скалярное произведение можно задать формулой $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \ln a \ln b$. В самом деле, очевидно, что выполняются свойства **1** и **4** из определения скалярного произведения и, кроме того,

$$\ln(a\hat{a}) \ln b = (\ln a + \ln \hat{a}) \ln b = \ln a \ln b + \ln \hat{a} \ln b,$$
$$\ln(a^{\alpha}) \ln b = \alpha(\ln a \ln b),$$
$$\ln^2 a = 0 \implies \ln a = 0 \implies \boldsymbol{a} = 1,$$

то есть выполняются и свойства **2**, **3** и **5**. $\diamond$

Пример 36. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}^{\infty}$ подмножество $\mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$, состоящее из последовательностей $f = \{f_1, f_2, \ldots\}$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^2$. Покажем сначала, что $\mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$ является линейным подпространством.

Для этого сначала докажем неравенство

$$(f_i + g_i)^2 \leqslant 2f_i^2 + 2g_i^2. \tag{18}$$

В самом деле, предположив противное, то есть $(f_i + g_i)^2 > 2f_i^2 + 2g_i^2$, получим $f_i^2 + 2f_ig_i + g_i^2 > 2f_i^2 + 2g_i^2$, то есть $(f_i - g_i)^2 < 0$.

Пусть $f, g \in \mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$, т.е. сходятся ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^2$ и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i^2$. Тогда сходятся и ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2f_i^2$ и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2g_i^2$. В силу неравенства (18) по признаку сравнения, применяющемуся к рядам с неотрицательными членами, ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i)^2 \tag{19}$$

тоже сходится, поэтому $f + g \in \mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$. Так как для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha f_i^2$ сходится (этот факт при $\alpha = 2$ уже был отмечен выше), то $\alpha f \in \mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$. Таким образом, $\mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$ является подпространством в $\mathbb{R}^{\infty}$.

Заметим, что из неравенства $(f_i \pm g_i)^2 \geqslant 0$ следуют неравенства $\pm f_ig_i \leqslant f_i^2 + g_i^2$, т.е. выполняется неравенство

$$|f_ig_i| \leqslant f_i^2 + g_i^2. \tag{20}$$

Так как ряд (19) сходится, то в силу (20) по признаку сравнения для рядов с неотрицательными членами сходится и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |f_ig_i|$, т.е. абсолютно, а тогда и просто сходится ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_ig_i$.

Покажем, что $\mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$ становится предгильбертовым пространством, если скалярное произведение задать формулой

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \text{ сумма ряда } \sum_{i=0}^{\infty} f_ig_i. \tag{21}$$

Действительно, выполнимость условий **1** – **3** из определения скалярного произведения очевидна. Так как члены ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^2$ неотрицательны, то его частичные суммы тоже неотрицательны, поэтому предел частичных сумм, т.е. сумма ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^2$, тоже неотрицательна. Это означает, что $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f} \geqslant 0$. Так как последовательность f^2 возрастает, то ее предел является точной верхней гранью множества $\{f_i^2 \mid i \in \mathbb{N}\}$, т.е.

$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f} = \sup\{f_i^2 \mid i \in \mathbb{N}\}$. Если $\sup\{f_i^2 \mid i \in \mathbb{N}\} = 0$, то для любого i выполняется равенство $f_i = 0$, то есть из условия $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f} = 0$ следует $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$. $\diamond$

Матрица Грама

Поставим системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ действительного или комплексного евклидова пространства в соответствие матрицу

$$\mathrm{Gram}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix},$$

которую назовем *матрицей Грама* системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Понятно, что в действительном пространстве матрица Грама симметрична, а в комплексном эрмитова (матрица a с комплексными матричными элементами называется *эрмитовой*, если ее матричные элементы удовлетворяют равенству $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, где черта обозначает комплексное сопряжение).

Теорема 16. *Конечная система векторов предгильбертова пространства линейно зависима в том и только том случае, когда ее матрица Грама вырожденная.*

Доказательство. Составим из произвольной системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ произвольную линейную комбинацию и приравняем ее к нулевому вектору: $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$. Умножив обе части этого равенства справа скалярно на $\boldsymbol{a}_i$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, и учтя условия **2** и **3** из определения скалярного произведения и пункт **а** теоремы 15, получим равенство $\alpha_1(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_i) + \alpha_2(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_i) + \ldots + \alpha_n(\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_i) = 0$. Сложив все эти равенства, получим

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно независима в том и только том случае, когда линейно независима система векторов-столбцов, принадлежащих линейному подпространству $\mathbb{R}^n$ и составляющих столбцы матрицы $[\mathrm{Gram}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)]^{\mathrm{T}}$. Но система этих векторов-столбцов линейно независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы $[\mathrm{Gram}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)]^{\mathrm{T}}$, а значит, и $\mathrm{Gram}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, равен n, а это равнозначно тому, что $\det \mathrm{Gram}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$. ■

Длина вектора

Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор предгильбертова пространства. Его *длиной* назовем число $\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$. Это определение корректно в силу условия **4** из определения скалярного произведения. Длину вектора $\boldsymbol{a}$ будем обозначать $\boldsymbol{a}$. Из условия **3** в определении скалярного произведения и пунктов **а** и **г** теоремы 15 получается, что $|\boldsymbol{o}| = 0$ и $|-\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|$.

Пример 37. Найдем длину вектора $\boldsymbol{f} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ предгильбертова пространства, построенного в примере 36. Так как

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f} = \text{ сумма ряда } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(ряд составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $1/4$), то $|\boldsymbol{f}| = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. ◇

Вектор единичной длины будем называть *нормированным.*

Угол между ненулевыми векторами

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые векторы предгильбертова пространства. Это означает, в частности, что длины этих векторов отличны от нуля. Число

$$\mathrm{ang}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

называют *углом* между этими векторами (англ. angle — угол).

Теорема 17. *Определение угла между ненулевыми векторами корректно, поскольку* $-1 \leqslant \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|} \leqslant 1$.

Доказательство. Предположим противное: $\left|\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}\right| > 1$. Тогда $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$, что противоречит неравенству Коши – Буняковского. ■

Пример 38. Найдем угол между векторами

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

евклидова пространства $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ (см. пример 33). Так как

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{3},$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$|\boldsymbol{b}|^2 = \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

то $\operatorname{ang}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \arccos \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} \right) = \pi - \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$. $\diamond$

Ортогональные системы векторов

Вектор $\boldsymbol{a}$ предгильбертова пространства называют *ортогональным* вектору $\boldsymbol{b}$ того же пространства, если $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называют *ортогональной*, если ее векторы попарно ортогональны. Ортогональная система нормированных векторов называется *ортонормированной*. Условие ортонормированности системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ обычно записывают в виде $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — так называемый *символ Кронекера*, который определяется формулой

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Пример 39. Покажем, что система векторов

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots \tag{22}$$

предгильбертова пространства $C[-\pi; \pi]$ со скалярным произведением $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$ (см. пример 34) ортогональна. Для этого вычислим сначала скалярные произведения вида $1 \cdot \cos sx$ и $1 \cdot \sin sx$:

$$1 \cdot \cos sx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos sx\, \mathrm{d}x = \frac{\sin sx}{s} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$1 \cdot \sin sx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin sx \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos sx}{s}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Теперь вычислим $\cos sx \cdot \cos tx$ и $\sin sx \cdot \sin tx$ при условии $s \neq t$:

$$\cos sx \cdot \cos tx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos sx \cos tx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s-t)x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(s-t)x}{2(s-t)} + \frac{\sin(s+t)x}{2(s+t)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\sin sx \cdot \sin tx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin sx \sin tx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s-t)x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(s-t)x}{2(s-t)} - \frac{\sin(s+t)x}{2(s+t)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Для любых s и t

$$\cos sx \cdot \sin tx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos sx \sin tx \,\mathrm{d}x = 0,$$

поскольку подынтегральная функция $\cos sx \sin tx$ нечетна, а интегрирование проводится по симметричному относительно начала координат отрезку. Отметим, что система (22) не является нормированной, поскольку, например, $|1| = 2\pi$. $\diamond$

Заметим, что если система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ортогональна, то система $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1, \ldots, \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}_n|}\boldsymbol{a}_n$ ортонормирована.

Пример 40. Пусть $c_1, c_2, \ldots$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения $\operatorname{ctg} x = x$. Понятно, что все они не равны нулю. Пусть i и j — различные натуральные числа. Поделив почленно равенство $\operatorname{ctg} c_i = c_i$ на равенство $\operatorname{ctg} c_j = c_j$, получаем, что

$c_i \operatorname{ctg} c_j = c_j \operatorname{ctg} c_i$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \cos(c_i x)\,\cos(c_j x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(c_i - c_j)}{c_i - c_j} + \frac{\sin(c_i + c_j)}{c_i + c_j}\right) =$$

$$= \frac{c_i \operatorname{ctg} c_j - c_j \operatorname{ctg} c_i}{(c_i^2 - c_j^2)\,\sin c_i\,\sin c_j} = 0.$$

Это означает, что в предгильбертовом пространстве $C[0;1]$ со скалярным произведением $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ (см. пример 34) в случае $i \neq j$ выполняются равенства $\cos c_i x \cdot \cos c_j x = 0$, т.е. система векторов $\cos c_1 x, \cos c_2 x, \ldots$ ортогональна. Нетрудно проверить, что система $\mu_1 \cos c_1 x, \mu_2 \cos c_2 x, \ldots$, где $\mu_i = 2\sqrt{\dfrac{c_i}{\sin 2c_i + 2c_i}}$, является ортонормированной. $\diamond$

Теорема 18. *Конечная ортогональная система, не содержащая нулевого вектора, линейно независима.*

Доказательство. Пусть система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ортогональна и не содержит нулевого вектора. Тогда в ее матрице Грама на главной диагонали стоят числа $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_n$, а на остальных местах нули. Определитель этой матрицы равен произведению матричных элементов, находящихся на главной диагонали, и, как следует из условия **5** определения скалярного произведения, не равен нулю. Так как матрица Грама невырожденная, то система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно независима (теорема 16). ■

Отметим, что из доказанной теоремы следует утверждение: *В n-мерном евклидовом пространстве ортогональная система ненулевых векторов не может состоять из более чем n векторов.* Чтобы доказать это утверждение, достаточно применить переформулировку леммы со стр. 15.

Процесс ортогонализации

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — линейно независимая система векторов в предгильбертовом пространстве. Сконструируем из ее векторов ортогональную линейно независимую систему $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, в которой $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Вектор $\boldsymbol{b}_2$ будем искать в виде $\boldsymbol{b}_2 = \gamma_{21}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2$, где число

γ_{21} определяется условием ортогональности $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$. Имеем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (\gamma_{21}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{b}_1,\\ 0 = \gamma_{21}(\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1) + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1,\end{gathered}$$

откуда $\gamma_{21} = -\dfrac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$. Заметим, что получившаяся формула корректна, поскольку из равенства $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ следовало бы $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{o}$, т.е. $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{o}$, и, значит, система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ вопреки условию не была бы линейно независимой (см. пункт **в** теоремы 3).

Вектор $\boldsymbol{b}_3$ будем искать в виде $\boldsymbol{b}_3 = \gamma_{31}\boldsymbol{b}_1 + \gamma_{32}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_3$, а коэффициенты γ_{31} и γ_{32} определим из условий ортогональности $\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ и $\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0$ соответственно. Первое из этих условий дает

$$\begin{gathered}\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (\gamma_{31}\boldsymbol{b}_1 + \gamma_{32}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_3) \cdot \boldsymbol{b}_1,\\ 0 = \gamma_{31}(\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1) + \gamma_{32}(\underbrace{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}_{=0}) + \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1,\end{gathered}$$

откуда $\gamma_{31} = -\dfrac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$. Точно так же получается формула $\gamma_{32} = -\dfrac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2}$. Эта формула тоже корректна, поскольку в случае $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0$ мы имели бы $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{o}$, и тогда из равенства $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ следовало бы, что система $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ линейно зависима, откуда и вся система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ была бы (см. пункт **г** теоремы 3) линейно зависимой вопреки условию.

Рассуждая так же и далее, получаем общую формулу для векторов $\boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$:

$$\boldsymbol{b}_i = \gamma_{i1}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \gamma_{i,i-1}\boldsymbol{b}_{i-1} + \boldsymbol{a}_i, \quad \gamma_{ij} = -\frac{\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j}{\boldsymbol{b}_j \cdot \boldsymbol{b}_j}.$$

Процесс построения системы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ называют *ортогонализацией* системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Пример 41. Ортогонализируем линейно независимую систему векторов $\boldsymbol{f}_1 = 1$, $\boldsymbol{f}_2 = x$, $\boldsymbol{f}_3 = x^2$ линейного пространства $C[-1;1]$ со скалярным произведением $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ (см. пример 34). Векторы будущей системы обозначим $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$. Тогда

$$\boldsymbol{g}_1 = 1,\ \boldsymbol{g}_2 = \gamma_{21}\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{g}_3 = \gamma_{31}\boldsymbol{g}_1 + \gamma_{32}\boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{f}_3,$$

$$\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2, \quad \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \int\limits_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0,$$

откуда $\gamma_{21} = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 = x$. Далее,

$$\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2 = \int\limits_{-1}^{1} x^3 = 0,$$

$$\gamma_{31} = -\frac{1}{3}, \quad \gamma_{32} = 0,$$

следовательно, $\boldsymbol{g}_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}$.

Ортогонализируя вместо $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ ее обобщение $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, где $\boldsymbol{f}_i = x^{i-1}$, получим многочлены $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ — их называют *многочленами Лежандра.* Можно показать, что существуют действительные числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, такие, что $\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\zeta_i}{2^i\, i!} \dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(x^2-1)^i$ (формула Родрига). $\diamond$

Пример 42. Обозначим V подмножество линейного пространства $C[0;+\infty)$, состоящее из функций f, для которых сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} [f(x)]^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Покажем, что $V \neq C[0;+\infty)$. В самом деле, $\mathrm{e}^{x^2/2} \in C[0;+\infty)$, но так как несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ расходится и на луче $(1;+\infty)$ выполняется неравенство $x(x-1) > x$, то в силу признака сравнения для несобственных интегралов первого рода получаем, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ тоже расходится.

Из включения $f, g \in V$ следует сходимость интеграла $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ([f(x)]^2 + [g(x)]^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Далее,

$$(f(x) \pm g(x))^2 \geqslant 0,$$
$$[f(x)]^2 \pm 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 \geqslant 0,$$
$$\pm f(x)g(x) \leqslant \frac{[f(x)]^2 + [g(x)]^2}{2},$$
$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{[f(x)]^2 + [g(x)]^2}{2}. \tag{23}$$

Вследствие неравенства (23) интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)g(x)|\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ тоже сходится. Но, как известно, из абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ следует его сходимость.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ можно представить в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} [f(x)]^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \\ + 2\int\limits_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{+\infty} [g(x)]^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

откуда следует, что $\int\limits_0^{+\infty} (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ тоже сходится. Таким образом, из $f, g \in V$ следует $f+g \in V$. Кроме того, очевидно, что из $f \in V$ следует $\alpha f \in V$. Это означает, что V — линейное подпространство пространства $C[0;+\infty)$.

Оставляем читателю проверить, что скалярное произведение в V можно определить формулой $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} = \int\limits_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (мы уже доказали, что этот интеграл сходится).

1, x, $x^2 \in V$, поскольку $\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 1$,

$$\int\limits_0^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} + 2\int\limits_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \\ -2x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} + 2\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} - 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} = 2,$$

$\int\limits_0^{+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 24$. Оставляем читателю проверить, что ортогонализация линейно независимой системы векторов 1, x, x^2 пространства V приводит к ортогональной линейно независимой системе векторов 1, $x-1$, x^2-4x-2. Эти многочлены называются *многочленами Чебышева – Лаггера.* Так же, как в примере 41, можно получить систему, состоящую из n многочленов Чебышева – Лаггера, где каждый i-ый многочлен отличается числовым множителем от многочлена, вычисленного по формуле Родрига $\dfrac{\mathrm{e}^x}{i!}\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(\mathrm{e}^{-x}x^i)$. $\diamond$

Из теоремы 4 следует, что *система векторов в евклидовом пространстве L, полученная ортогонализацией базиса, тоже является базисом*. Таким образом, *во всяком евклидовом пространстве существует ортогональный базис*. Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — один из таких базисов и $\boldsymbol{a} \in L$. Выразим $\boldsymbol{a}$ линейно через векторы базиса E: $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i$. Умножив обе части этого равенства справа скалярно на $\boldsymbol{e}_j$ и учтя условие **3** из определения скалярного произведения, получим $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j = \alpha_j(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_j)$, откуда выводится формула для координат $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вектора $\boldsymbol{a}$ относительно ортогонального базиса E:

$$\alpha_j = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j}{\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_j}. \tag{24}$$

Вычисляя скалярное произведение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ и учитывая при этом условие **2** из определения скалярного произведения и свойство **в** из теоремы 15, получаем *равенство Парсеваля*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i). \tag{25}$$

В примере 39 было показано, что система функций 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\ldots$ ортогональна в линейном пространстве $C[-\pi; \pi]$. Пусть $f \in C[-\pi; \pi]$. *Рядом Фурье* функции f называют ряд $\alpha \cdot 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\beta_n \cos nx + \gamma_n \sin nx)$, коэффициенты α, β_n, γ_n которого вычисляются по формуле (24), а именно

$$\alpha = \frac{f \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\beta_n = \frac{f \cdot \cos nx}{\cos nx \cdot \cos nx} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

$$\gamma_n = \frac{f \cdot \sin nx}{\sin nx \cdot \sin nx} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

В курсе математического анализа доказывается, что этот ряд сходится к f в каждой точке интервала $(0; 2\pi)$.

Как известно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$. Его сумму обозначают $\zeta(s)$ и называют дзета-функцией Римана. Таким образом, при $s > \frac{1}{2}$ последовательность $\left\{1, \frac{1}{2^s}, \frac{1}{3^s}, \frac{1}{4^s}, \ldots\right\}$ принадлежит линейному пространству $\mathbb{R}^{\infty}_{\blacklozenge}$ и ее длина равна $\sqrt{\zeta(2s)}$. Вычислим, например, длину последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Для этого представим вектор $y = x$, принадлежащий линейному пространству $C[-\pi; \pi]$, в виде ряда Фурье. Поскольку функция $y = x$ нечетная, то коэффициенты α и β_n $(n \in \mathbb{N})$ этого ряда равны нулю. Так как $\gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n}$, получаем $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 \sin nx}{n}$. Тогда согласно равенству Парсеваля (25)

$$x \cdot x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin nx \cdot \sin nx)}{n^2},$$

$$\frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n^2},$$

откуда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ и, следовательно, длина последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ равна $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Возьмем произвольное натуральное число. Пусть событие A_n означает, что это число делится на простое число n. Тогда вероятность этого события равна $\mathbf{P}(\mathsf{A}_n) = \frac{1}{n}$. Пусть событие B_n означает, что другое число делится на n. Тогда событие $\mathsf{A}_n\mathsf{B}_n$ означает, что оба эти числа делятся на n, при этом $\mathbf{P}(\mathsf{A}_n\mathsf{B}_n) = \frac{1}{n^2}$. Событие $\overline{\mathsf{A}_n\mathsf{B}_n}$ заключается в том, что хотя бы одно из этих чисел на n не делится. Ясно, что $\mathbf{P}(\overline{\mathsf{A}_n\mathsf{B}_n}) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Тогда вероятность того, что два рассматриваемых числа взаимно просты, равна произведению $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Так как

$$\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots \in \mathbb{N}} 2^{2s_1} 3^{2s_2} 5^{2s_3} 7^{2s_4} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2),$$

то вероятность того, что два натуральных числа взаимно просты, равна $\frac{6}{\pi^2}$.

В заключение вернемся к матрицам Грама.

Теорема 19. *Ортогонализация не меняет определитель матрицы Грама.*

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая двух векторов в действительном предгильбертовом пространстве — в общем случае доказательство проводится аналогично.

Пусть в результате ортогонализации независимой системы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ построена ортогональная линейно независимая система $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Тогда

$$\det \operatorname{Gram}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ (\alpha_{21}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_1 & (\alpha_{21}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_{21} \underbrace{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Здесь $A = 0$, а

$$B = \alpha_{21} \underbrace{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix}}_{C} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}}_{D}.$$

В последнем равенстве $C = 0$ и $D = \det \operatorname{Gram}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$. ■

Так как после ортогонализации матрица Грама является диагональной, то ее определитель равен произведению матричных элементов, стоящих на главной диагонали. Таким образом, *определитель матрицы Грама линейно независимой системы, состоящей из n векторов, равен $\prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i$ и*, стало быть, *является положительным числом*. Для случая $n = 2$ из этого утверждения моментально выводится следствие $|\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2|^2 < (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2)$, т.е. частный (для линейно независимой системы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$) случай неравенства Коши – Буняковского.

Ортогональное дополнение подпространства

Пусть V — линейное подпространство предгильбертова пространства L. Подмножество

$$V^{\perp} = \{\boldsymbol{a} \mid \forall\, \boldsymbol{b} \in V \;\; \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0\}$$

в L называют *ортогональным дополнением* подпространства V.

Теорема 20. *$V^\perp$ является линейным подпространством.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V^\perp$ и $c \in V$. Используя условие **2** из определения скалярного произведения, имеем $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0-0 = 0$, поэтому $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V^\perp$. Из условия **3** скалярного произведения выводим, что $(\alpha\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = \alpha 0 = 0$, т.е. $\alpha\boldsymbol{a} \in V^\perp$. ■

Теорема 21. *В евклидовом пространстве линейное подпространство $V^\perp$ дополнительно линейному подпространству V, т.е. $V^\perp = \operatorname{Suppl} V$.*

Доказательство. Обозначим евклидово пространство, в котором находятся V и $V^\perp$, буквой L. Так как пространство L конечномерно, то таким же является и подпространство V. Как мы уже знаем, во всяком евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — ортонормированный базис в V. Поставим произвольному вектору $\boldsymbol{a} \in L$ в соответствие вектор $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \boldsymbol{e}_i$, принадлежащий подпространству V, координаты $\gamma_i, \dots, \gamma_n$ которого относительно базиса E определяются формулой $\gamma_i = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i$. Пусть $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}$. Так как для любого j

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_j - \gamma_j = 0,$$

то вектор $\boldsymbol{u}$ ортогонален каждому из векторов базиса E, значит, он ортогонален их линейной оболочке, но $\operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = V$. Поэтому $\boldsymbol{u} \in V^\perp$. Таким образом, для произвольного $\boldsymbol{a} \in L$ существуют такие $\boldsymbol{v} \in V$ и $\boldsymbol{u} \in V^\perp$, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$. Это означает, что $L = V + V^\perp$.

Пусть $\boldsymbol{b} \in V \cap V^\perp$. Тогда $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 0$, откуда $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. Таким образом, $V \cap V^\perp = \{\boldsymbol{o}\}$ и, следовательно, $L = V \oplus V^\perp$. ■

Пример 43. Выделим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ векторы $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 4, 1, -1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1, 8)$ и найдем ортогональное дополнение линейного подпространства $V = \operatorname{Span}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Нетрудно проверить (оставляем это сделать читателю), что система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима, но так как ее векторы попарно «непропорциональны», то каждое из множеств $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ является базисом в V, т.е. $\dim V = 2$. Из формулы Грассмана и теоремы 21 сразу можно сделать вывод, что $\dim V^\perp = 2$.

Пусть $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Включение $\boldsymbol{v} \in V^\perp$ равносильно тому, что

$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Из последних двух равенств получаем систему

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \delta = 0, \\ -2\alpha + 4\beta + \gamma - \delta = 0. \end{cases}$$

Множество ее решений имеет вид $\left(\dfrac{\delta - \gamma}{2}, -\dfrac{\delta + \gamma}{2}, \gamma, \delta\right)$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Это означает, что подпространство $V^{\perp}$ состоит из векторов вида $\gamma\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1, 0\right) + \delta\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$, т.е. является линейной оболочкой векторов $(-1, -1, 2, 0)$ и $(1, 1, 0, 2)$. $\diamond$

Пример 44. В евклидовом пространстве $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ найдем ортогональное дополнение линейного подпространства $SM(2, \mathbb{R})$, состоящего (см. пример 9) из симметрических матриц, и линейного подпространства V, состоящего из верхнетреугольных матриц (т.е. матриц, у которых $a_{21} = 0$).

Пусть $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in [SM(2, \mathbb{R})]^{\perp}$. Так как для всякой матрицы $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \in SM(2, \mathbb{R})$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\right] = 0,$$

то

$$\alpha x + \gamma y + \gamma z + \beta w = 0. \tag{26}$$

Но

$$SM(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Span}\left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

поэтому, подставляя в равенство (26) вместо α, β, γ матричные элементы матриц $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, получим, что $x = w = 0$ и $y = -z$. Таким образом,

$$[SM(2, \mathbb{R})]^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \mid \epsilon \in \mathbb{R}\right\}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что $\hat{V}^{\perp}$ является линейной оболочкой матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\diamond$

3. Линейные операторы

Линейные операторы

Пусть каждому вектору $\boldsymbol{a}$ линейного пространства L поставлен в соответствие вектор $\varphi(\boldsymbol{a})$ этого же пространства, причем выполнены условия $\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\varphi(\boldsymbol{a})+\varphi(\boldsymbol{b})$ и $\varphi(\alpha\boldsymbol{a})=\alpha\,\varphi(\boldsymbol{a})$. Тогда говорят, что в L задан *линейный оператор*. Подмножества $\operatorname{Im}\varphi=\{\varphi(\boldsymbol{a})\mid\boldsymbol{a}\in L\}$ и $\operatorname{Ker}\varphi=\{\boldsymbol{a}\mid\varphi(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}\}$ в L называют соответственно *образом* (англ. image — образ) и *ядром* (англ. kernel — ядро) оператора φ.

Теорема 22. *$\operatorname{Im}\varphi$ является линейным подпространством в L.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\boldsymbol{a}},\ \tilde{\boldsymbol{b}}\in\operatorname{Im}\varphi$. Тогда найдутся такие $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in L$, что $\varphi(\boldsymbol{a})=\tilde{\boldsymbol{a}}$ и $\varphi(\boldsymbol{b})=\tilde{\boldsymbol{b}}$, поэтому $\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{b}}=\varphi(\boldsymbol{a})+\varphi(\boldsymbol{b})=$ $=\varphi(\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}_{\in L})\in\operatorname{Im}\varphi$ и $\alpha\tilde{\boldsymbol{a}}=\alpha\,\varphi(\boldsymbol{a})=\varphi(\underbrace{\alpha\boldsymbol{a}}_{\in L})\in\operatorname{Im}\varphi$. ■

Теорема 23. *$\operatorname{Ker}\varphi$ является линейным подпространством в L.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\operatorname{Ker}\varphi$, то есть $\varphi(\boldsymbol{a})=\varphi(\boldsymbol{b})=$ $=\boldsymbol{o}$. Тогда $\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\varphi(\boldsymbol{a})+\varphi(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$ и $\varphi(\alpha\boldsymbol{a})=\alpha\,\varphi(\boldsymbol{a})=$ $=\alpha\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$, откуда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\alpha\boldsymbol{a}\in\operatorname{Ker}\varphi$. ■

Пример 45. Формула $\varphi(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ задает линейный оператор в линейном пространстве $\operatorname{Mat}(n,\Phi)$. Образ оператора равен всему пространству $\operatorname{Mat}(n,\Phi)$, а ядро состоит только из нулевой матрицы. ◇

Пример 46. Как известно, при дифференцировании многочленов выполняются равенства $(f+g)'=f'+g'$ и $(\alpha f)'=$ $=\alpha f'$, поэтому дифференцирование является линейным оператором в линейном пространстве $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$. $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}_{\leqslant n-1}[x]$ и $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{R}_{\leqslant 0}[x]$. ◇

Пример 47. Формула $\varphi(A)=A\setminus\{n\}$ определяет линейный оператор линейного пространства $2^{\{1,\ldots,n\}}$. При этом $\operatorname{Im}\varphi=2^{\{1,\ldots,n-1\}}$ и $\operatorname{Ker}\varphi=\{\varnothing,\ \{n\}\}$. ◇

Пример 48. Напомним, что в аналитической геометрии *векторное произведение* векторов $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ определяется формулой

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right).$$

Зафиксируем вектор $\boldsymbol{b}$. Тогда формула $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ определяет линейный оператор в $\mathbb{R}^3$. Так как

$$\boldsymbol{b}\cdot\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}) = b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\operatorname{Im}\varphi_{\boldsymbol{b}} = \{\beta\boldsymbol{b} \mid \beta\in\mathbb{R}\}^{\perp}$ ($\dim\operatorname{Im}\varphi_{\boldsymbol{b}} = 2$). Нетрудно показать, что $\operatorname{Ker}\varphi_{\boldsymbol{b}} = \{\beta\boldsymbol{b} \mid \beta\in\mathbb{R}\}$. $\diamond$

Матричное представление линейного оператора

Пусть φ — линейный оператор пространства L над полем Φ и $E = \{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ — базис в L. Представим векторы $\varphi(\boldsymbol{e}_1),\ldots,\varphi(\boldsymbol{e}_n)$ в виде линейной комбинации векторов базиса E:

$$\begin{gathered}
\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \varphi_{11}\boldsymbol{e}_1 + \varphi_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \varphi_{n1}\boldsymbol{e}_n,\\
\varphi(\boldsymbol{e}_2) = \varphi_{12}\boldsymbol{e}_1 + \varphi_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \varphi_{n2}\boldsymbol{e}_n,\\
\ldots\\
\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \varphi_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \varphi_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \varphi_{nn}\boldsymbol{e}_n.
\end{gathered}$$

Сокращенно это выглядит так: $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_{ji}\boldsymbol{e}_j$. Матрицу

$$(\varphi_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей линейного оператора* φ относительно базиса E.

Пример 49. Вычислим матрицу оператора транспонирования пространства $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ (см. пример 45) относительно канонического базиса, рассмотренного в примере 16. Так как

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_1 = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4,\\
\varphi(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_3 = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4,\\
\varphi(\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_2 = 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4,\\
\varphi(\boldsymbol{e}_4) &= \boldsymbol{e}_4 = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 + 1\boldsymbol{e}_4,
\end{aligned}$$

то матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

Пример 50. Найдем матрицу оператора дифференцирования пространства $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ относительно канонического базиса $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ (см. пример 17). Поскольку

$$\begin{gathered}
\varphi(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\
\varphi(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\
\varphi(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3, \\
\varphi(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0x + 3x^2 + 0x^3,
\end{gathered}$$

искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Пример 51. Найдем матрицы линейного оператора φ из примера 47 относительно базисов E и $\hat{E}$, рассмотренных в примере 20. Пусть $\mathcal{E}_n$ — единичная матрица размера $n \times n$.Так как для $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется равенство $\varphi(\{s\}) = \{s\}$ и $\varphi(\{n\}) = \emptyset$, то относительно E матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку

$$\varphi(\{1, \ldots, s\}) = \begin{cases} \{1, \ldots, s\}, & \text{если } s \leqslant n-2, \\ \{1, \ldots, n-1\}, & \text{если } s \geqslant n-1, \end{cases}$$

то относительно $\hat{E}$ матрица оператора φ выглядит как

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Пример 52. Вычислим матрицу линейного оператора $\varphi_{\boldsymbol{b}}$ из примера 48 относительно канонического базиса (см. пример 15) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Вектор $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ будем считать произвольным. Так как $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{e}_1) = (0, -b_3, b_2)$, $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{e}_2) = (b_3, 0, -b_1)$, $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{e}_3) = (-b_2, b_1, 0)$, то искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Связь между координатами вектора и его образа при линейном операторе

Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор линейного пространства L над полем Φ, $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в L. Пусть $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через базисные векторы следующим образом: $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i$. Положим, что в L задан линейный оператор φ, причем

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{e}_j. \tag{27}$$

Поскольку

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\boldsymbol{e}_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ji} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_{ji}\right) \boldsymbol{e}_j,$$

то, сравнивая этот результат с формулой (27), получаем $\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_{ji}$, то есть

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \varphi_{11}\alpha_1 + \varphi_{12}\alpha_2 + \ldots + \varphi_{1n}\alpha_n, \\ &\beta_2 = \varphi_{21}\alpha_1 + \varphi_{22}\alpha_2 + \ldots + \varphi_{2n}\alpha_n, \\ &\ldots \\ &\beta_n = \varphi_{n1}\alpha_1 + \varphi_{n2}\alpha_2 + \ldots + \varphi_{nn}\alpha_n. \end{aligned}$$

Перепишем получившееся в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\varphi_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Транспонируя обе части получившегося равенства, получим

$$(\beta_1 \ \ldots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n)(\varphi_{ij})^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Формулы (28) и (29) выражают связь между координатами вектора a, координатами его образа $\varphi(a)$ и матрицей линейного оператора φ относительно базиса E.

Пример 53. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ вектор $\boldsymbol{f} = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 2$. Очевидно, его координатами относительно канонического базиса $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ являются числа $2, 3, -5, 4$. Найдем координаты образа вектора $\boldsymbol{f}$, получающегося в результате дифференцирования (см. примеры 17 и 50). Так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то $\varphi(\boldsymbol{f}) = 12x^2 - 10x + 3$. Легко проверить, что многочлен $12x^2 - 10x + 3$ в самом деле является производной многочлена f. $\diamond$

Выше мы показали, что, зафиксировав в конечномерном линейном пространстве базис, можно сопоставить линейному оператору, заданному в этом пространстве, матрицу — а именно, матрицу этого оператора. Формула (28) показывает, что верно и обратное утверждение: *всякая матрица размера $n \times n$ над полем Φ является матрицей некоторого линейного оператора в n-мерном линейном пространстве над полем Φ.*

Связь между матрицами линейного оператора

Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ — базисы линейного пространства L над полем Φ, φ — линейный оператор в L, $\boldsymbol{a} \in L$,

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \hat{\alpha}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + \hat{\alpha}_n \hat{\boldsymbol{e}}_n,$$
$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{e}_n = \hat{\beta}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + \hat{\beta}_n \hat{\boldsymbol{e}}_n.$$

Пусть (φ_{ij}) и $(\hat{\varphi}_{ij})$ — матрицы оператора φ относительно базисов E и $\hat{E}$, а (ε_{ij}) — матрица перехода от E к $\hat{E}$. Тогда по формуле (28)

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\varphi_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{30}$$

По формуле (12)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \ldots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \ldots \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Подставив (31) в (28), получим

$$(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \ldots \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix} = (\phi_{ij})(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \ldots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Домножим обе части формулы (32) слева на матрицу $(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \dots \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}(\varphi_{ij})(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \dots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Из сравнения формул (30) и (33) заключаем, что

$$(\hat{\varphi}_{ij}) = (\epsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}(\varphi_{ij})(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}, \tag{34}$$

откуда

$$(\varphi_{ij}) = (\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}(\hat{\varphi}_{ij})(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}. \tag{35}$$

Пример 54. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ два базиса: канонический базис $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ и базис $\hat{E} = \{x+1, x-1, x^2-1, x^3+1\}$. Понятно, что матрица перехода от E к $\hat{E}$ имеет вид

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора дифференцирования относительно базиса E подсчитана в примере 50. Так как

$$\begin{gathered}
\varphi(x+1) = 1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) + 0(x^2-1) + 0(x^3+1), \\
\varphi(x-1) = 1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) + 0(x^2-1) + 0(x^3+1), \\
\varphi(x^2-1) = 2x = 1(x+1) + 1(x-1) + 0(x^2-1) + 0(x^3+1), \\
\varphi(x^3+1) = 3x^2 = \frac{3}{2}(x+1) - \frac{3}{2}(x-1) + 3(x^2-1) + 0(x^3+1),
\end{gathered}$$

то относительно базиса $\hat{E}$ матрица оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 & 1.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу оператора φ другим способом: используя формулу (34). Так как

$$(\varepsilon_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$(\hat{\varphi}_{ij}) = (\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}(\varphi_{ij})(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 & 1.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

След, определитель, ранг и дефект линейного оператора

Назовем *следом*, *определителем* и *рангом* линейного оператора φ соответственно след, определитель и ранг его матрицы. Будем использовать привычные обозначения $\operatorname{tr}\varphi$, $\det\varphi$ и $\operatorname{rk}\varphi$.

Лемма. *Пусть a и b — матрицы размера $n \times n$. $\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba)$.*

Доказательство. Введем обозначения: $c = ab$ и $d = ba$. Тогда

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \quad d_{ij} = \sum_{s=1}^{n} b_{is}a_{sj},$$

$$\operatorname{tr} c = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{si}, \ \operatorname{tr} d = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} b_{is}a_{si}.$$

Заметим, что индексы i и s в последнем равенстве независимы друг от друга и пробегают множество $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому их можно переименовать: i будет обозначать s, а s будет обозначать i. Теперь последнее равенство имеет вид $\operatorname{tr} d = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n} b_{si}a_{is}$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 24. *Определения следа, определителя и ранга линейного оператора корректны: они не зависят от базиса, относительно которого записана матрица оператора. Кроме того, для всякого линейного оператора φ выполняется равенство $\operatorname{rk}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi$.*

Доказательство. Пусть (φ_{ij}) и $(\hat{\varphi}_{ij})$ — матрицы оператора φ линейного пространства L над полем Φ относительно базисов $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ соответственно, (ε_{ij}) — матрица перехода от базиса E к базису $\hat{E}$.

С учетом формулы (35) и леммы, доказанной перед этой теоремой,

$$\operatorname{tr}(\varphi_{ij}) = \operatorname{tr}\left[(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}(\hat{\varphi}_{ij})(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}\right] = \operatorname{tr}\left[(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}(\hat{\varphi}_{ij})\right] = \operatorname{tr}(\hat{\varphi}_{ij}).$$

Точно так же

$$\det(\varphi_{ij}) = \det\left[(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}(\hat{\varphi}_{ij})(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}\right] = \\ = \det(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \cdot \det(\hat{\varphi}_{ij}) \cdot \det \varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}} = \det(\hat{\varphi}_{ij}).$$

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{a} \in L$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ суть его координаты относительно базиса E. Тогда $\varphi(\boldsymbol{a}) = \alpha_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)$, то есть $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Span}(\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n))$. Очевидно, размерность линейного подпространства $\operatorname{Span}(\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n))$ в L равна максимальному числу линейно независимых векторов системы $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Но векторы $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ можно рассматривать как векторы

$$\begin{pmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\\ \ldots\\ \varphi_{n1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\\ \ldots\\ \varphi_{n2}\end{pmatrix}, , \ldots, \begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\\ \ldots\\ \varphi_{nn}\end{pmatrix} \tag{36}$$

в линейном пространстве Φ^n, т.е. как столбцы матрицы (φ_{ij}). Максимальное количество линейно независимых векторов системы (36) равно рангу матрицы (φ_{ij}). Таким образом,

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \operatorname{Span}(\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)) = \operatorname{rk}(\varphi_{ij}).$$

Так как $\operatorname{rk}(\varphi_{ij}) = \dim \operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{rk}(\hat{\varphi}_{ij}) = \dim \operatorname{Im}\varphi$, то $\operatorname{rk}(\varphi_{ij}) = \operatorname{rk}(\hat{\varphi}_{ij})$. ■

Мы уже знаем, что ядро линейного оператора φ линейного пространства L является линейным подпространством в L (см. теорему 23). Размерность ядра называют *дефектом* оператора φ и обозначают $\operatorname{def}\varphi$ (англ. defect — дефект). Линейный оператор называют *вырожденным*, если его дефект не равен нулю. Для n-мерного линейного пространства это определение, очевидно, можно сформулировать по-другому, линейный оператор φ называется вырожденным, если $\operatorname{rk}\varphi < n$.

Пример 55. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = 0$$

(функции $p = p(x)$ и $q = q(x)$ постоянны). Положим, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных действительных корня r_1 и r_2. Введя обозначение $\varphi = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + q$, перепишем уравнение в виде $\varphi(y(x)) = o(x)$, где φ — линейный оператор пространства $C^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к вычислению ядра оператора φ.

Покажем, что для $i \in \{1, 2\}$ выполняется включение $\mathrm{e}^{r_i x} \in \operatorname{Ker} \varphi$. В самом деле,

$$\varphi\left(\mathrm{e}^{r_i x}\right) = \left(\mathrm{e}^{r_i x}\right)'' + p\left(\mathrm{e}^{r_i x}\right)' + q\mathrm{e}^{r_i x} =$$
$$= r_i^2\,\mathrm{e}^{r_i x} + pr_i\,\mathrm{e}^{r_i x} + q\mathrm{e}^{r_i x} = \left(r_i^2 + pr_i + q\right)\mathrm{e}^{r_i x} = 0$$

(так как число r_i является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$).

Пусть $y \in \operatorname{Ker} \varphi$. Чтобы выделить функцию y из всех функций, принадлежащих ядру $\operatorname{Ker} \varphi$, наложим на нее так называемые начальные условия: $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'(x_0)$. Покажем, что при этом $y \in \operatorname{Span}(\mathrm{e}^{r_1 x}, \mathrm{e}^{r_2 x})$. Попробуем для этого представить функцию y в виде линейной комбинации $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \beta\,\mathrm{e}^{r_2 x}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) = \alpha\,\mathrm{e}^{r_1 x_0} + \beta\,\mathrm{e}^{r_2 x_0}, \\ y_0' = y'(x_0) = \alpha r_1\,\mathrm{e}^{r_1 x_0} + \beta r_2\,\mathrm{e}^{r_2 x_0}. \end{cases} \tag{37}$$

Мы получили систему линейных уравнений с неизвестными α и β. Обозначим δ определитель матрицы коэффициентов этой системы. Так как $\delta = \mathrm{e}^{(r_1 + r_2)x_0}(r_2 - r_1) \neq 0$ (поскольку $r_1 \neq r_2$), то система (37) имеет единственное решение, значит, каждую функцию $y \in \operatorname{Ker} \varphi$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации функций $\mathrm{e}^{r_1 x}$ и $\mathrm{e}^{r_2 x}$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Span}(\mathrm{e}^{r_1 x}, \mathrm{e}^{r_2 x})$. Так как функции $\mathrm{e}^{r_1 x}$ и $\mathrm{e}^{r_2 x}$ «непропорциональны», то система векторов $\mathrm{e}^{r_1 x}$, $\mathrm{e}^{r_2 x}$ линейно независима (см. пункт **б** теоремы 3) и, следовательно, является базисом линейного подпространства $\operatorname{Ker} \varphi$ в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Поэтому $\operatorname{def} \varphi = 2$. $\diamond$

Теорема 25. *Если φ — линейный оператор конечномерного линейного пространства L, то* $\operatorname{rk} \varphi + \operatorname{def} \varphi = \dim L$.

Доказательство. Рассмотрим сужение κ линейного оператора φ на линейное подпространство $\operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$. Другими словами, κ — это отображение, которое произвольному вектору $\boldsymbol{a}$ линейного подпространства $\operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$ ставит в соответствие вектор $\varphi(\boldsymbol{a})$ линейного подпространства $\operatorname{Im} \varphi$. Покажем, что отображение κ сюръективно. Пусть $\hat{\boldsymbol{a}} \in \operatorname{Im} \varphi$. Тогда существует $\boldsymbol{a} \in L$, такой, что

$\varphi(\boldsymbol{a}) = \hat{\boldsymbol{a}}$. Если $\hat{\boldsymbol{a}} \neq \boldsymbol{o}$, то $\boldsymbol{a} \notin \operatorname{Ker} \varphi$, поэтому $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$. Если $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{o}$, то в качестве $\boldsymbol{a}$ можно указать вектор $\boldsymbol{o} \in \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$. Покажем теперь, что отображение κ инъективно. Предположим, что $\varphi(\boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{c})$. Тогда $\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{o}$ и, следовательно, $\varphi(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{o}$. Это означает, что $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Но так как $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$, то, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$. Таким образом, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in \operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$, откуда следует, что $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$, то есть $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Все это означает, что κ является взаимно однозначным отображением. Но в силу этого $\dim \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Так как $L = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi$, то, учитывая формулу Грассмана для прямой суммы и следствие из теоремы 24, получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{def} \varphi = \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim L - \dim \operatorname{Suppl} \operatorname{Ker} \varphi = \\ = \dim L - \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim L - \operatorname{rk} \varphi, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 56. В примере 46 отмечено, что для оператора дифференцирования линейного пространства $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ образом является линейное подпространство $\mathbb{R}_{\leqslant n-1}[x]$, а ядром — линейное подпространство $\mathbb{R}_{\leqslant 0}[x]$. Так как $\operatorname{Im} \varphi$ является линейной оболочкой линейно независимой системы векторов $1, x, \ldots, x^{n-1}$, то $\operatorname{rk} \varphi = n$. Так как $\operatorname{Ker} \varphi$ есть линейная оболочка любого постоянного не равного нулю многочлена, то $\operatorname{def} \varphi = 1$. ◇

Пример 57. Для линейного оператора φ, рассмотренного в примере 47, $\operatorname{rk} \varphi = n - 1$ и $\operatorname{def} \varphi = 1$. ◇

Пример 58. У линейного оператора $\varphi_{\boldsymbol{b}}$, введенного в примере 48, $\operatorname{def} \varphi_{\boldsymbol{b}} = 1$ и $\operatorname{rk} \varphi_{\boldsymbol{b}} = 2$. ◇

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть φ — линейный оператор линейного пространства L над полем Φ. Элемент λ поля Φ называют *собственным значением* оператора φ, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{a} \in L$, удовлетворяющий условию $\varphi(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$. При этом $\boldsymbol{a}$ называют *собственным вектором* оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Обозначим V_λ подмножество в L, состоящее из собственных векторов векторов оператора φ, отвечающих собственному значению λ, и нулевого вектора.

Теорема 26. *V_λ является линейным подпространством в L.*

Доказательство. В самом деле, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V_\lambda$, то $\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a})+\varphi(\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, т.е. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V_\lambda$. Далее, для всякого $\alpha \in \Phi$ $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(\boldsymbol{a}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{a})$, что означает $\alpha\boldsymbol{a} \in V_\lambda$. ■

Очевидно, что если 0 является собственным значением оператора φ, то линейное подпространство V_0 есть ядро этого оператора, причем $\operatorname{Ker}\varphi \equiv V_0 \neq \{\boldsymbol{o}\}$. Это, в свою очередь, означает, что φ является вырожденным оператором. Верно и обратное: если линейный оператор вырожден, то его ядро содержит вектор, отличный от нулевого, который, стало быть, является собственным вектором, отвечающим собственному значению 0, т.е. 0 является собственным значением оператора. Таким образом, необходимое и достаточное условие вырожденности можно сформулировать следующим образом: линейный оператор вырожден в том и только том случае, если 0 является его собственным значением.

Теорема 27. *Если $\lambda \neq \hat{\lambda}$, то $V_\lambda \cap V_{\hat{\lambda}} = \{\boldsymbol{o}\}$.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{a}$, общий для подпространств V_λ и $V_{\hat{\lambda}}$. Тогда $\varphi(\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{a}$ и $\varphi(\boldsymbol{a}) = \hat{\lambda}\boldsymbol{a}$. Вычитая из предпоследнего равенства последнее, получаем, что $\boldsymbol{o} = (\lambda - \hat{\lambda})\boldsymbol{a}$. Так как по условию $\lambda-\hat{\lambda} \neq 0$, то, домножая обе части последнего равенства на $(\lambda-\hat{\lambda})^{-1}$ и учитывая теорему 1, получим $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, чего не может быть, так как $\boldsymbol{a}$ является собственным вектором линейного оператора. ■

Пример 59. В произвольном линейном пространстве L над полем Φ операцию умножения векторов на элемент $\alpha \in \Phi$ можно рассматривать как линейный оператор. При этом всякий ненулевой вектор является собственным вектором этого оператора, отвечающим собственному значению α. Для этого оператора имеем $V_\alpha = L$. ◇

Пример 60. Найдем собственные векторы оператора дифференцирования в линейном пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций, отвечающие собственному значению λ. Равенство $\varphi(\boldsymbol{f}) = \lambda\boldsymbol{f}$ означает дифференциальное уравнение $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lambda f$. Разделяя в нем переменные x и f, получаем $\dfrac{\mathrm{d}f}{f} = \lambda x$. После интегрирования обеих частей имеем $\ln|f| = \lambda x + C$, где C — произвольное действительное число. Отсюда

$$|f| = \mathrm{e}^{\lambda x+C},$$

$$|f| = \mathrm{e}^{\lambda x}\cdot\mathrm{e}^{C},$$

$$|f| = C\,\mathrm{e}^{\lambda x},\;\; C > 0,$$
$$f = C\,\mathrm{e}^{\lambda x},\;\; C \neq 0.$$

Таким образом, $V_\lambda = \left\{C\,\mathrm{e}^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\right\}$. $\diamond$

Теорема 28. *Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — собственные векторы линейного оператора, отвечающие соответственно попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно независима.*

Доказательство. Обозначим линейный оператор, о котором говорится в теореме, как обычно, символом φ и докажем методом математической индукции.

1 (база индукции). Если $n = 1$, то система состоит из одного вектора $\boldsymbol{a}_1$, который по определению не является нулевым вектором. Значит (см. пункт **д** теоремы 3), система линейно независима.

2 (шаг индукции). Предположим, что теорема верна для любого $n \in \{1, \ldots, s\}$. Покажем, что она остается верной и в случае $n = s + 1$.

Предположим противное: система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{s+1}$, удовлетворяющих условию теоремы, линейно зависима. Поскольку по предположению индукции система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ линейно независима, то вектор $\boldsymbol{a}_{s+1}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$:

$$\boldsymbol{a}_{s+1} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \boldsymbol{a}_s. \tag{38}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \varphi(\boldsymbol{a}_{s+1}) = \alpha_1 \varphi(\boldsymbol{a}_1) + \ldots + \alpha_s \varphi(\boldsymbol{a}_s), \\ \lambda_{s+1} \boldsymbol{a}_{s+1} = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \lambda_s \boldsymbol{a}_s. \end{gathered} \tag{39}$$

Домножим теперь обе части равенства (38) на λ_{s+1}:

$$\lambda_{s+1} \boldsymbol{a}_{s+1} = \alpha_1 \lambda_{s+1} \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \lambda_{s+1} \boldsymbol{a}_s. \tag{40}$$

Вычитая из равенства (39) равенство (40), получаем

$$\boldsymbol{o} = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{s+1}) \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s(\lambda_s - \lambda_{s+1}) \boldsymbol{a}_s.$$

Так как система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ линейно независима, то все коэффициенты в правой части последнего равенства равны нулю. Но это может быть только при условии $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$. Учитывая равенство (38), приходим тогда к тому, что $\boldsymbol{a}_{s+1} = \boldsymbol{o}$, чего не может быть по определению собственного вектора. $\blacksquare$

Вычисление собственных значений и векторов

Пусть (φ_{ij}) — матрица линейного оператора φ, заданного в n-мерном линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$. Обозначим $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ единичную матрицу (размера $n \times n$). Многочлен

$$\mu(x) = \det\left[(\varphi_{ij}) - x \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)\right]$$

называют *характеристическим многочленом* оператора φ. Очевидно, что степень многочлена μ равна n, причем его старший коэффициент равен $(-1)^n$. Докажем теорему о некоторых других коэффициентах характеристического многочлена μ.

Теорема 29. *Коэффициенты a_{n-1} и a_0 характеристического многочлена*

$$\mu(x) = (-1)^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

имеют вид

$$a_{n-1} = (-1)^{n+1}\operatorname{tr}(\varphi_{ij}), \qquad a_0 = \det(\varphi_{ij}).$$

Доказательство. Для всякой матрицы a размера $n \times n$, согласно определению,

$$\det a = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} + \underbrace{\sum_{\text{если } p \neq q, \text{ то } k_p \neq k_q} \sigma_{k_1,\ldots,k_n}\, a_{1k_1} \ldots a_{nk_n}}_{S},$$

где $\sigma_{k_1,\ldots,k_n}$ — знак $+$ или $-$ в зависимости от комбинации индексов $k_1, \ldots, k_n$. Каждое слагаемое в сумме S содержит хотя бы один множитель, являющийся матричным элементом a_{ij} матрицы a с разными индексами i и j, и, именно поэтому, не содержит вместе с тем множителей a_{ii} и a_{jj}. Если в качестве a взять матрицу $(\varphi_{ij}) - x \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$, то получается, что каждое слагаемое, входящее в S, содержит хотя бы один множитель φ_{ij} с разными i и j и не содержит множителей $(\varphi_{ii} - x)$ и $(\varphi_{jj} - x)$. В силу этого каждое такое слагаемое является многочленом степени не выше $n-2$, а поэтому то же самое можно сказать и о всей сумме S: $S \in \mathbb{R}_{\leqslant n-2}[x]$. Поэтому коэффициент a_{n-1} характеристического многочлена $\mu(x)$ совпадает с коэффициентом при x^{n-1} многочлена $\prod_{i=1}^{n}(\varphi_{ii} - x)$. Но по теореме Виета коэффициент при x^{n-1} унитарного многочлена $(-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\varphi_{ii} - x)$ равен сумме всех его комплексных корней с противоположным знаком, то есть равен $\left[-\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}\right]$. Значит, коэффициент a_{n-1} многочлена μ вычисляется по формуле

$$a_{n-1} = \frac{\left[-\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}\right]}{(-1)^n} = (-1)^{n+1} \mathrm{tr}\,(\varphi_{ij}).$$

Кроме того,

$$a_0 = \mu(0) = \det\left[(\varphi_{ij}) - 0\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)\right] = \det(\varphi_{ij}),$$

что и завершает доказательство. ■

Теорема 30. *Определение характеристического многочлена линейного оператора корректно: оно не зависит от выбора базиса, относительно которого записана матрица оператора.*

Доказательство. Обозначим (φ_{ij}) и $(\hat{\varphi}_{ij})$ матрицы оператора φ относительно базисов E и $\hat{E}$ соответственно. Пусть (ε_{ij}) — матрица перехода от E к $\hat{E}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\det\left[(\varphi_{ij}) - x\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)\right] = \\
&\quad = \det\left[(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}(\hat{\varphi}_{ij})(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}} - x(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}\right] = \\
&\quad = \det(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \det\left[(\hat{\varphi}_{ij}) - x\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)\right] \det(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}} = \\
&\quad = \det\left[(\hat{\varphi}_{ij}) - x\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)\right],
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Пусть, например, характеристический многочлен линейного оператора в действительном линейном пространстве имеет вид $\mu(x) = (x-2)^3(x+4)^2(x-1)(x^2+9)$. Очевидно, его корнями являются комплексные числа 1, 2, -4, $3\mathbf{i}$, $-3\mathbf{i}$. Перечислим только действительные корни с учетом их кратности:

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ -4,\ -4.$$

Эту запись принято называть *спектром* линейного оператора. Спектр называют *простым*, если все корни характеристического многочлена являются действительными корнями кратности один.

Теорема 31. *Пусть φ — линейный оператор в конечномерном действительном линейном пространстве и μ — его характеристический* *многочлен. Каждый действительный корень многочлена μ является собственным значением оператора φ. Напротив: всякое собственное значение оператора φ является корнем характеристического многочлена μ.*

Доказательство. Обозначим (φ_{ij}) матрицу линейного оператора относительно некоторого базиса E. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (\varphi_{11}-\lambda)z_1+\varphi_{12}z_2+\ldots+\varphi_{1n}z_n=0, \\ (\varphi_{21}z_1+(\varphi_{22}-\lambda)z_2+\ldots+\varphi_{2n}z_n=0, \\ \ldots \\ \varphi_{n1}z_1+\varphi_{n2}z_2+\ldots+(\varphi_{nn}-\lambda)z_n=0. \end{cases} \tag{41}$$

Очевидно, что она имеет «нулевое» решение $z_1=\ldots=z_n=0$.

Пусть λ — корень многочлена μ, т.е. $\det\left[(\varphi_{ij})-\lambda\,\mathrm{diag}(1,\ldots,1)\right] = 0$. По-другому это можно записать так:

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_{11}-\lambda & \varphi_{11} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}-\lambda & \ldots\varphi_{2n} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn}-\lambda \end{pmatrix}=0.$$

Последняя запись означает, что система (41) имеет бесконечно много решений, в том числе и решение $z_1=\gamma_1,\ldots,z_n=\gamma_n$, в котором хотя бы одно число из $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ отлично от нуля. Так как систему (41) можно переписать в виде матричного равенства

$$(\varphi_{ij})\begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix},$$

то равенство

$$(\varphi_{ij})\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \tag{42}$$

означает, что вектор с координатами $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ относительно базиса E является собственным вектором, а λ — собственным значением, которому этот вектор отвечает. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь известно, что λ является собственным значением оператора φ. Это означает, что существует ненулевой вектор, отвечающий этому значению. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ суть координаты этого вектора относительно базиса E. Тогда среди элементов $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ поля имеются не равные нулю и выполняется равенство (42). Но это означает, что система (41) имеет «ненулевое» решение. Тогда ее определитель отличен от нуля: $\det[(\varphi_{ij}) - \lambda\,\mathrm{diag}(1,\ldots,1)] = 0$. Это и означает, что λ является корнем многочлена μ. ■

Пример 61. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ оператор транспонирования. Используя матрицу этого оператора относительно канонического базиса (см. примеры 16 и 49), получаем:

$$\mu(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}.$$

После вычисления определителя имеем $\mu(x) = (x-1)^3(x+1)$. Значит, корнями характеристического многочлена μ являются числа 1 и -1. Они определяют линейные подпространства V_1 и V_{-1}.

Найдем ненулевые векторы, принадлежащие линейному подпространству V_1. Пусть вектор $\boldsymbol{a} \in V_1 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ имеет относительно канонического базиса координаты α, β, γ и δ. Равенство $\varphi(\boldsymbol{a}) = 1\boldsymbol{a}$ можно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R} \right\} = SM(2,\mathbb{R}).$$

Аналогично можно установить, что

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} = SSM(2,\mathbb{R}).$$

◇

Пример 62. Найдем собственные значения оператора φ, рассмотренного в примере 47. Используя, например, матрицу этого оператора относительно базиса $\{1\}, \ldots, \{n\}$, получаем, что $\mu(x) = -x(1-x)^{n-1}$. Корнями являются числа 0 и 1. $V_0 = \mathrm{Ker}\ \varphi = \{\emptyset, \{n\}\}$ и $V_1 = \mathrm{Im}\ \varphi = 2^{\{1,\ldots,n-1\}}$. ◇

Пример 63. Для оператора дифференцирования пространства $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ (пример 50) $\mu(x) = (-x)^{n+1}$, поэтому единственным собственным значением является число 0. $V_0 = \mathbb{R}_{\leqslant 0}[x]$ — ядро этого оператора. $\diamond$

Поставим каждому собственному значению λ линейного оператора в соответствие число $\operatorname{mult}\lambda$ — кратность корня λ характеристического многочлена этого оператора (англ. multiplicity — кратность).

Теорема 32. $\dim V_\lambda \leqslant \operatorname{mult}\lambda$.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора φ, который определен на n-мерном линейном пространстве L, и $\dim V_\lambda = k$. Тогда произвольный базис подпространства V_λ состоит из k векторов. Дополним такой базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ до базиса в L векторами $\breve{e}_{k+1}, \ldots, \breve{e}_n$. Так как первые k векторов получившегося базиса E являются собственными векторами оператора φ, отвечающими собственному значению λ, то матрица оператора φ относительно базиса E имеет вид

$$(\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda, \ldots, \lambda}_{k}) & S \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

где S — матрица размера $k \times (n-k)$, T — матрица размера $(n-k) \times \times (n-k)$ и ноль обозначает нулевую матрицу размера $(n-k)\times k$. Тогда характеристический многочлен оператора φ имеет вид

$$\mu(x) = \det \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda - x, \ldots, \lambda - x) & S \\ 0 & T - x\operatorname{diag}(1, \ldots, 1) \end{pmatrix}.$$

Применяя теорему Лапласа о вычислении определителя клеточно-диагональной матрицы, имеем

$$\mu(x) = \det\operatorname{diag}(\lambda - x, \ldots, \lambda - x) \cdot \det\left[T - x\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)\right].$$

Так как определитель диагональной матрицы равен произведению матричных элементов, расположенных на главной диагонали, $\mu(x) = = (\lambda - x)^k \cdot \det\left[T - x\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)\right]$. Поскольку λ может быть корнем многочлена $\det\left[T - x\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)\right]$, то $\operatorname{mult}\lambda \geqslant k$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Диагонализация матрицы линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор φ в n-мерном действительном линейном пространстве L. Если в L имеется базис $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора φ, таких, что $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$, то, очевидно, матрица оператора φ в базисе E является диагональной и имеет вид $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Очевидно и обратное: матрица оператора φ может получиться диагональной только в том случае, когда базис, относительно которого она записана, состоит из собственных векторов этого оператора.

Вычислив собственные значения оператора φ, мы оказываемся в одном из трех случаев, разобранных ниже.

Первый случай

Пусть оператор φ n-мерного действительного линейного пространства L имеет простой спектр, т.е. его характеристический многочлен имеет n различных действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Каждому собственному значению λ_i поставим в соответствие собственный вектор $\boldsymbol{e}_i$ оператора φ, отвечающий значению λ_i. В силу теоремы 28 система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима, а в силу теоремы 4 она является базисом в L. Относительно базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ матрица оператора φ имеет вид $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Отметим еще, что из теоремы 27 и формулы Грассмана следует, что $L = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}$.

Пример 64. Пусть относительно некоторого базиса матрица линейного оператора φ в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$, то собсвенными значениями оператора φ являются три действительных числа: 2, 1 и -2. Это означает, что существует базис, в котором матрица оператора φ имеет вид $\operatorname{diag}(2, 1, -1)$. Найдем этот базис.

Пусть $\boldsymbol{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ принадлежит линейному подпространству V_2. Тогда $\varphi(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

что равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} -\alpha \qquad\quad +2\gamma = 2\alpha, \\ \alpha + \beta \quad -\gamma = 2\beta, \\ \qquad\qquad\quad 2\gamma = 2\gamma, \end{cases}$$

то есть системе
$$\begin{cases} -3\alpha \qquad +2\gamma = 0, \\ \quad \alpha - \beta \quad -\gamma = 0. \end{cases}$$
Решая эту систему, получаем, что $V_2 = \left\{\alpha\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Таким образом, в качестве первого базисного вектора e_1 можно взять любой ненулевой вектор, пропорциональный вектору $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Пусть $\boldsymbol{e}_1 = (2, -1, 3)$.

Предоставляем читателю проверить, что $V_1 = \{\beta(0, 1, 0) \mid \beta \in \in \mathbb{R}\}$ и $V_{-1} = \{\beta(-2, 1, 0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Тогда можно сделать такой выбор $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ и $\boldsymbol{e}_3 = (-2, 1, 0)$. $\diamond$

Второй случай

Пусть характеристический многочлен оператора φ, как и в первой ситуации, не имеет комплексных корней, а среди его действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ имеются кратные корни. Тогда $k < n$ и
$$\operatorname{mult}\lambda_1 + \ldots + \operatorname{mult}\lambda_k = n$$
и
$$\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_k} = n.$$
В силу теоремы 32 выполняются неравенства $\dim V_{\lambda_i} \leqslant \operatorname{mult} V_{\lambda_i}$ для всех i.

Рассмотрим случай $\dim V_{\lambda_i} = \operatorname{mult} V_{\lambda_i}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Пусть $E_i = \{\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i,\mathrm{mult}\ \lambda_i}\}$ — базис линейного подпространства V_{λ_i}. Рассмотрим систему векторов
$$\begin{aligned} E^* =& \bigcup_{i=1}^{k} E_k \\ =& \{\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1,\mathrm{mult}\ \lambda_1}, \boldsymbol{e}_{21}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2,\mathrm{mult}\ \lambda_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k,\mathrm{mult}\ \lambda_k}\} \end{aligned}$$
в пространстве L.

Теорема 33. *Система E^* является базисом пространства L.*

Доказательство. Так как E^* содержит n векторов, то остается показать, что система E^* линейно независимая.

Так как E_1 является базисом в V_{λ_1}, то система E_1 линейно независима в L. Предположим, что система $\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1,\mathrm{mult}\ \lambda_1}, \boldsymbol{e}_{21}$ линейно зависима. Тогда в силу пункта **a** теоремы 3 вектор $\boldsymbol{e}_{21}$ является линейной комбинацией векторов системы E_1, то есть $\boldsymbol{e}_{21} \in V_{\lambda_1}$. Но тогда в силу теоремы 27 $\boldsymbol{e}_{21} = \boldsymbol{o}$, чего не может быть. Значит, система $\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1,\text{mult }\lambda_1}, \boldsymbol{e}_{21}$ линейно независимая.

Предположим, система $\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1,\text{mult }\lambda_1}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22}$ линейно зависима. Тогда в силу пункта **a** теоремы 3 вектор e_{22} является линейной комбинацией векторов системы $\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1,\text{mult }\lambda_1}, \boldsymbol{e}_{21}$, то есть

$$\boldsymbol{e}_{22} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_{11} + \ldots + \alpha_{1,\text{mult }\lambda_1} \boldsymbol{e}_{1,\text{mult }\lambda_1} + \beta \boldsymbol{e}_{21}. \tag{43}$$

Поступим так же, как в ходе доказательства теоремы 28: умножим обе равенства (33) части на λ_2:

$$\lambda_2 \boldsymbol{e}_{22} = \alpha_1 \lambda_2 \boldsymbol{e}_{11} + \ldots + \alpha_{1,\text{mult }\lambda_1} \lambda_2 \boldsymbol{e}_{1,\text{mult }\lambda_1} + \beta \lambda_2 \boldsymbol{e}_{21}$$

и вычислим $\varphi(\boldsymbol{e}_{21})$:

$$\lambda_2 \boldsymbol{e}_{22} = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{e}_{11} + \ldots + \alpha_{1,\text{mult }\lambda_1} \lambda_1 \boldsymbol{e}_{1,\text{mult }\lambda_1} + \beta \lambda_2 \boldsymbol{e}_{21}.$$

Вычитая из одного другое, получим $\boldsymbol{o} = \sum\limits_{i=1}^{\text{mult }\lambda_1} \alpha_i (\lambda_2 - \lambda_1) \boldsymbol{e}_{1i}$. Это равенство может выполняться только при условии $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{\text{mult }\lambda_i}$, но тогда из (33) следует, что векторы $\boldsymbol{e}_{22}$ и $\boldsymbol{e}_{21}$ «пропорциональны», чего не может быть в силу пункта **a** теоремы 3.

Продолжая рассуждать аналогично, получим, что система E линейно независима. ■

Относительно базиса E матрица оператора φ имеет вид

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\text{mult }\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\text{mult }\lambda_2}, \ldots \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{\text{mult }\lambda_k}).$$

Из формулы Грассмана и теоремы 27 получаем $L = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$.

Пример 65. Пусть относительно некоторого базиса матрица линейного оператора φ в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu(x) = -(x+1)(x-1)^2$, то собсвенными значениями оператора φ являются два действительных числа: -1 и 1, причем $\operatorname{mult}(-1) = 1$ и $\operatorname{mult} 1 = 2$. Точно так же, как это было сделано в примере 64, найдем, что

$$V_{-1} = \operatorname{Span}\left((0,1,-1)\right), \quad V_1 = \operatorname{Span}\left((1,0,0),\ (0,1,1)\right).$$

Так как система $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ линейно независима, она является базисом линейного подпространства V_1, поэтому базисом в $\mathbb{R}^3$ является система $E = \{(0,1,-1),\ (1,0,0),\ (0,1,1)\}$. Матрица оператора φ относительно E имеет вид $\operatorname{diag}(-1,1,1)$. $\diamond$

Рассмотрим теперь случай, когда существует такое $i \in \{1,\dots,l\}$, что $\dim V_{\lambda_i} \leqslant \operatorname{mult} V_{\lambda_i}$. В этом случае базис в L, состоящий из собственных векторов оператора φ, построить нельзя, поэтому получить диагональную матрицу оператора φ невозможно.

Пример 66. Пусть относительно некоторого базиса матрица линейного оператора φ в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu(x) = -x(x+1)^2$, то собсвенными значениями оператора φ являются два действительных числа: 0 и -1, причем $\operatorname{mult} 0 = 1$ и $\operatorname{mult}(-1) = 2$. После несложных вычислений нахлжим, что

$$V_0 = \operatorname{Span}\left((1,0,0)\right), \quad V_{-1} = \operatorname{Span}\left((0,1,0)\right).$$

Очевидно, что базиса в $\mathbb{R}^3$, относительно которого матрица оператора φ оказалось бы диагональной, не существует. $\diamond$

Третий случай

Пусть характеристический многочлен линейного оператора φ в n-мерном действительном линейном пространстве имеет действительные корни $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ и имеет комплексные корни. Тогда $\operatorname{mult}\ \lambda_1 + \ldots + \operatorname{mult}\ \lambda_k < n$ и в силу теоремы 32 $\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_k} < n$. В этом случае пространство L не имеет базиса, в котором матрица оператора φ оказалась бы диагональной.

Пример 67. Пусть матрица линейного оператора φ в $\mathbb{R}^3$ относительно некоторого базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu(x) = -x(x^2+9)$, то собсвенным значением оператора φ является только действительное число 0. Легко найти, что $V_0 \equiv \operatorname{Ker}\varphi$ является линейной оболочкой вектора $(2,2,-1)$. Базисный вектор $(2, 2, -1)$ в V_0 не удается дополнить еще двумя собственными векторами оператора φ до базиса в $\mathbb{R}^3$, поэтому матрица оператора φ не может оказаться диагональной. $\diamond$

Пример 68. Как известно из аналитической геометрии, поворот плоскости на угол θ является линейным оператором (в $\mathbb{R}^2$) его матрица относительно канонического базиса $(1, 0)$, $(0, 1)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Пусть $\theta \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Характеристический многочлен этого оператора имеет вид $\mu(x) = (\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta$, и его корнями являются комплексные корни $x_1 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ и $x_2 = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$. Так как оператор не имеет собственных значений, то не существует базис, в котором матрица оператора была бы диагональной. $\diamond$

Инвариантные линейные подпространства

Пусть φ — линейный оператор линейного пространства L. Линейное подпространство V в L называют *инвариантным* относительно оператора φ, если для всех векторов $\boldsymbol{a} \in V$ выполняется включение $\varphi(\boldsymbol{a}) \in V$. Очевидно, что подпространство $\{\boldsymbol{o}\}$ инвариантно относительно любого оператора φ, поскольку $\varphi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$. Другим примером служит ядро линейного оператора, поскольку из $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ следует $\varphi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Если λ — собственное значение оператора φ, то подпространство V_λ инвариантно относительно φ, так как из включения $\boldsymbol{a} \in V_\lambda$ следует включение $\varphi(\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{a} \in V_\lambda$. Наконец, еще одним примером инвариантного подпространства является всякое подпространство V, удовлетворяющее условию $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq V$, поскольку если $\boldsymbol{a} \in V$, то $\varphi(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{Im}\,\varphi \subset V$.

Пример 69. Линейные подпространства $V_1 = \mathbb{R}[x]$ и $V_2 = C^\infty(\mathbb{R})$ инвариантны относительно оператора дифференцирования в линейном пространстве $C(\mathbb{R})$. Кроме того, V_1 инвариантно относительно того же линейного оператора в линейном пространстве V_2. $\diamond$

Пример 70. Линейная оболочка $\mathrm{Span}(\cos x, \sin x)$ является инвариантным относительно дифференцирования линейным подпространством в $C[0; 2\pi]$. $\diamond$

Пример 71. Пусть система векторов $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ и вектор $\boldsymbol{a}$ ему ортогонален. Тогда линейное подпространство $\mathrm{Span}\,(\boldsymbol{a}, \varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}))$

инвариантно относительно линейного оператора $\varphi_{\boldsymbol{b}}$ (см. примеры 48 и 52). «Докажем» это, опираясь на знания из аналитической геометрии. Вектор $\boldsymbol{a}$ оператором $\varphi_{\boldsymbol{b}}$ переводится в вектор $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})$, а вектор $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})$ — в вектор $\boldsymbol{a}$. Значит, всякая линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$ и $\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})$ переводится в такую же линейную комбинацию. $\diamond$

Теорема 34. *Всякий линейный оператор действительного конечномерного линейного пространства имеет инвариантное подпространство, отличное от $\{\boldsymbol{o}\}$: если не одномерное, то двумерное.*

Доказательство. Обозначим оператор, о котором говорится в теореме, символом φ. Размерность линейного пространства, на котором определен оператор φ, обозначим n. Само пространство обозначим L. Условимся еще, что (φ_{ij}) — матрица оператора φ относительно некоторого базиса E.

Если λ — действительный корень характеристического многочлена μ оператора φ, то, как следует из теоремы 31, существует собственный вектор $\boldsymbol{a}$ оператора φ, отвечающий собственному значению λ. Так как $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, то линейное подпространство $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a})$ инвариантно относительно φ и $\dim \mathrm{Span}(a) = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда многочлен μ не имеет действительных корней. Пусть λ — его комплексный корень. Тогда, во первых,

$$\mu(\lambda) = \det\left[(\varphi_{ij}) - \lambda \,\mathrm{diag}(1, \dots, 1)\right] = 0, \tag{44}$$

а во-вторых, число $\overline{\lambda}$, сопряженное числу λ, тоже является корнем многочлена μ. Рассмотрим вспомогательный линейный оператор

$$\psi = \varphi^2 - 2\,\mathrm{re}\;\lambda\varphi + |\lambda|^2\mathrm{id},$$

где id обозначает тождественный линейный оператор (отображающий каждый вектор в себя). Его матрица относительно базиса E имеет вид

$$(\psi_{ij}) = (\varphi_{ij})^2 - 2\,\mathrm{re}\;\lambda(\varphi_{ij}) + |\lambda|^2\,\mathrm{diag}(1, \dots, 1).$$

Так как

$$(\psi_{ij}) = \left[(\varphi_{ij}) - \lambda\,\mathrm{diag}(1, \dots, 1)\right] \cdot \left[(\varphi_{ij}) - \overline{\lambda}\,\mathrm{diag}(1, \dots, 1)\right]$$

и $\mu(\lambda) = \mu(\overline{\lambda}) = 0$, то $\det(\psi_{ij}) = 0$. Но тогда $\mathrm{rk}\,(\psi_{ij}) < n$ и, следовательно, $\mathrm{def}\,\psi > 0$ (см. теорему 25), т.е. ядро $\mathrm{Ker}\;\psi$ содержит ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$. Тогда существуют такие действительные числа α и β, что $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\varphi(\boldsymbol{a})$. Так как $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\;\psi$, то $\psi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, т.е. $\varphi^2(\boldsymbol{a}) - 2\,\mathrm{re}\,\lambda\varphi(\boldsymbol{a}) + |\lambda|^2\,\mathrm{id}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, откуда $\varphi^2(\boldsymbol{a}) = 2\,\mathrm{re}\,\lambda\varphi(\boldsymbol{a}) - |\lambda|^2 a$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{b}) = \varphi\left(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\varphi(\boldsymbol{a})\right) = \alpha\varphi(\boldsymbol{a}) + \beta\varphi^2(\boldsymbol{a}) = \\ = \left[\alpha + 2\beta\,\mathrm{re}\,\lambda\right]\varphi(\boldsymbol{a}) - |\lambda|^2\beta\boldsymbol{a} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a})).\end{aligned}$$

Это означает, что линейное подпространство $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$ в L инвариантно относительно оператора φ. Предположим, что $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a})) = 1$. Тогда система векторов $\boldsymbol{a}$, $\varphi(\boldsymbol{a})$ линейно зависима, т.е. (см. пункт **1** теоремы 3) найдется такое число $\gamma \in \mathbb{R}$, что $\varphi(\boldsymbol{a}) = \gamma\boldsymbol{a}$. Но это означает, что действительное число γ является собственным значением оператора φ, чего не может быть, так как характеристический многочлен μ не имеет действительных корней. Значит, $\dim \mathrm{Span}(a, \varphi(a)) = 2$. ■

Ортогональные матрицы

Матрица a размера $n \times n$ с действительными матричными элементами называется *ортогональной*, если $a^{-1} = a^{\mathrm{T}}$. Например, диагональная матрица, у которой матричные элементы, расположенные на главной диагонали, равны 1 или -1, является ортогональной.

Теорема 35. *Определитель ортогональной матрицы равен* 1 *или* -1.

Доказательство. Если a — ортогональная матрица, то из равенства $aa^{-1} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ получаем

$$\begin{gathered}\det(aa^{-1}) = \det\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1), \\ \det a \cdot \det a^{-1} = 1, \\ \det a \cdot \det a^{\mathrm{T}} = 1, \\ \det a \cdot \det a = 1, \\ (\det a)^2 = 1\end{gathered} \tag{45}$$

и, стало быть, $\det a = \pm 1$. ■

Из равенства (45) для элементов ортогональной матрицы a размера $n \times n$ получаются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если}\, i \neq j, \\ 1, & \text{если}\, i = j. \end{cases} \tag{46}$$

Так как $(a^{\mathrm{T}})^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a$ и $(a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = a$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если}\, i \neq j, \\ 1, & \text{если}\, i = j. \end{cases} \tag{47}$$

С другой стороны, из (46) и (47) сразу следует, что матрица a ортогональна. Таким образом, эти две формулы можно принять за определение ортогональной матрицы. Из соотношений (46) и (47) получается еще, что для всякой ортогональной матрицы a размера 2×2 найдется такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что матрицу a можно представить в виде

$$a = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ортогональные операторы

Линейный оператор φ в действительном предгильбертовом пространстве L называют *ортогональным*, если $\varphi(\boldsymbol{a}) \cdot \varphi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Пример 72. Транспонирование является ортогональным оператором в линейном пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, поскольку (см. пример 33 и лемму на стр. 53)

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

$\diamond$

Теорема 36. *Матрица ортогонального оператора относительно ортонормированного базиса ортогональна.*

Доказательство. Пусть φ — ортогональный линейный оператор в n-мерном евклидовом пространстве, $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — ортонормированный базис этого пространства и $\varphi(\boldsymbol{e}_p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{ip}\boldsymbol{e}_i$, $\varphi(\boldsymbol{e}_q) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_{jq}\boldsymbol{e}_j$. Тогда

$$1 = \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_p = \varphi(\boldsymbol{e}_p) \cdot \varphi(\boldsymbol{e}_p) = \sum_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \varphi_{pi}\varphi_{pj}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{pi}^2$$

и при $p \neq q$

$$0 = \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_q = \varphi(\boldsymbol{e}_p) \cdot \varphi(\boldsymbol{e}_q) = \sum_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \varphi_{pi}\varphi_{qj}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{pi}\varphi_{qi}.$$

В силу формулы (46) последние два равенства означают, что теорема доказана. ■

Симметрические операторы

Пусть φ и ψ — линейные операторы в действительном предгильбертовом линейном пространстве L. Оператор ψ называют *сопряженным* оператору φ, если $\varphi(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \psi(\boldsymbol{b})$. Пусть (φ_{ij}) и (ψ_{ij}) — матрицы операторов φ и ψ относительно ортонормированного базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в L.

Теорема 37. $(\psi_{ij}) = (\varphi_{ij})^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. В самом деле, пусть

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_j = \left(\sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}\boldsymbol{e}_s\right) \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}(\boldsymbol{e}_s \cdot \boldsymbol{e}_j) = \varphi_{ji},$$
$$\boldsymbol{e}_i \cdot \psi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}\boldsymbol{e}_s\right) = \sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_s) = \psi_{ij},$$

откуда $\varphi_{ji} = \psi_{ij}$. ■

Линейный оператор называют *симметрическим*, если он равен сопряженному ему линейному оператору. Из теоремы 37 следует, что матрица симметрического оператора относительно ортонормированного базиса симметрична.

Пример 73. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Линейный оператор $\varphi(\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a}$, рассмотренный в примере 59, является симметрическим оператором в действительном предгильберотовом пространстве, поскольку

$$\varphi(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \varphi(\boldsymbol{b}).$$

◇

Теорема 38. *Для симметрического оператора φ существует ортогональный базис в L, относительно которого матрица оператора φ диагональна.*

Доказательство. Пусть относительно некоторого базиса в L матрица оператора φ имеет вид (φ_{ij}). Будем считать вектор $\boldsymbol{a} \in$ $\in L$ длины 1 *переменным* вектором и, следовательно, его координаты $x_1, \ldots, x_n$ относительно ортонормированного базиса E тоже будут переменными. Функция $g(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a}$ определена на «сфере» $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ (так как длина вектора $\boldsymbol{a}$ равна единице). Но «сфера» является замкнутым ограниченным подмножеством в $\mathbb{R}^n$, следовательно, функция g достигает в некоторой «точке» этой «сферы», т.е. на некотором векторе $\boldsymbol{a}$ единичной длины в L, своего наибольшего значения (см. теорему Вейерштрасса из курса функций многих переменных). Найти эту «точку» можно, используя функцию Лагранжа

$$l(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = g(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(x_1^2 + \ldots, x_n^2 - 1),$$

а именно, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Так как

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} \varphi_{is} x_s \right) \boldsymbol{e}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \varphi_{is} x_s x_i,$$

то система (48) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}, \\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \end{cases}$$

а ее решение — искомый вектор $\boldsymbol{a}$ — является собственным вектором оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Пусть $V = \operatorname{Span}(\boldsymbol{a})$. Линейное подпространство $\operatorname{Suppl} V$ инвариантно относительно φ: в самом деле, если $\boldsymbol{c} \in \operatorname{Suppl} V$ и $\boldsymbol{d} \in V$, то

$$\varphi(\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} \cdot \varphi(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c} \cdot \lambda \boldsymbol{d} = \lambda(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}) = \lambda 0 = 0.$$

Сужение оператора φ на линейное подпространство $\operatorname{Suppl} V$ является симметрическим линейным оператором в линейном пространстве $\operatorname{Suppl} V$ и, как следует из уже доказанного, имеет собственный вектор $\boldsymbol{b}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{a}$. Продолжая так и далее, получим, что оператор φ имеет n попарно ортогональных собственных векторов. Они (см. теоремы 4 и 18) образуют базис в L, причем матрица оператора φ относительно этого базиса диагональна и матричными элементами главной диагонали являются собственные значения оператора φ. ■

4. Билинейные формы

Билинейные формы

Пусть L — линейное пространство над полем Φ и каждому набору векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ пространства L поставлено в соответствие число $\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$. Это число называют *полилинейной формой*, если указанное соответствие линейно по каждому аргументу, т.е. для любого $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}\left(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \alpha_i \boldsymbol{a}_i + \hat{\alpha}_i \hat{\boldsymbol{a}}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_k\right) = \\ = \alpha_i \mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) + \hat{\alpha}_i \mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{a}}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_k).$$

Из определения следует, что значение формы $\mathcal{F}$ на любом наборе векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ можно выразить через координаты этих векторов относительно базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ и значения формы $\mathcal{F}$ на всевозможных наборах векторов, принадлежащих базису E, а именно, если $\boldsymbol{a}_1 = \sum\limits_{j_1=1}^{n} \alpha_{1j_1} \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_k = \sum\limits_{j_k=1}^{n} \alpha_{kj_k} \boldsymbol{e}_{j_k}$, то

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \mathcal{F}\left(\sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{1j_1} \boldsymbol{e}_{j_k}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} \alpha_{kj_k} \boldsymbol{e}_{j_k}\right) = \\ = \sum_{j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, k\}} \alpha_{1,j_1} \ldots \alpha_{k,j_k} \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_k}). \tag{49}$$

Мы сосредоточимся на рассмотрении полилинейных форм при $n = 2$ — такие формы называют *билинейными*. Если в линейном пространстве L размерности n векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно выражаются через векторы базиса E по формулам $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{e}_j$, то формула (49) приобретает вид

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i,j \in \{1, \ldots, n\}} \alpha_i \beta_j \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j). \tag{50}$$

Пусть $f_{ij} = \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. Матрицу (f_{ij}) называют *матрицей билинейной формы* $\mathcal{F}$ относительно базиса E. С помощью этой матрицы равенство (50) можно переписать в виде

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)(f_{ij}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Пусть относительно другого базиса $\hat{E}$ форма φ имеет матрицу $(\hat{f}_{ij})$, а (ε_{ij}) есть матрица перехода от E к $\hat{E}$. Учитывая формулы (13) и (14), получаем из последнего равенства

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\hat{\alpha}_1\ \dots\ \hat{\alpha}_n)\,(\varepsilon_{ij})(f_{ij})(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \dots \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$(\hat{f}_{ij}) = (\varepsilon_{ij})(f_{ij})(\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}. \tag{52}$$

Последняя формула выражает связь между матрицами билинейной формы, записанными в разных базисах.

Билинейную форму $\mathcal{F}$ называют *симметрической*, если $\mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$, и *кососимметрической*, если $\mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -\mathcal{F}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$. Очевидно, что *матрица* (*косо*)*симметрической билинейной формы* (*косо*)*симметрична* (относительно любого базиса). Легко доказать и обратное утверждение.

Пример 74. Скалярное произведение в действительном линейном пространстве является примером симметрической билинейной формы. Ее матрицей относительно произвольного базиса E служит матрица Грама системы E. Относительно ортогонального базиса матрица диагональна, а в случае, если базис еще и нормирован, получается единичная матрица. $\diamond$

Пример 75. В линейном пространстве $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ формула $\mathcal{F}_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$ определяет билинейную форму. Из леммы на стр. 53 следует, что эта форма симметрична. Ее матрица относительно канонического базиса является единичной матрицей. Формула $\mathcal{F}_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a})$ задает в том же линейном пространстве тождественно равную нулю билинейную форму. $\diamond$

Пример 76. Обозначим $\mathrm{im}\,z$ мнимую часть комплексного числа z. Формула $\mathcal{F}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = \mathrm{im}(z\overline{w})$ (где черта обозначает комплексное сопряжение) определяет кососимметрическую билинейную форму в линейном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$. Матрица этой формы относительно базиса $E = \{1,\,\mathbf{i}\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\diamond$

Пример 77. Пусть V — подмножество в линейном пространстве $C^\infty[a,b]$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a;b]$. Легко проверить, что V является линейным подпространством в $C^\infty[a,b]$. Формула $\mathcal{F}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ определяет билинейную форму. Эта форма кососимметрична, поскольку, интегрируя по частям, имеем

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{F}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}).$$

◇

Квадратичные формы

Билинейную форму $\mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ будем называть *квадратичной формой* и обозначать $\mathcal{K}(\boldsymbol{a})$. Имея квадратичную форму $\mathcal{K}$, можно легко восстановить индуцирующую ее симметрическую билинейную форму $\mathcal{F}$. В самом деле, поскольку

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2\mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}),$$

то

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - \mathcal{K}(\boldsymbol{a}) - \mathcal{K}(\boldsymbol{b})\right).$$

Билинейную форму $\mathcal{F}$ называют *полярной* для квадратичной формы $\mathcal{K}$.

Матрицей квадратичной формы называется матрица полярной для нее билинейной формы. Из определения получается, что матрица квадратичной формы симметрична. *Рангом* квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Теорема 39. *Определение ранга квадратичной формы корректно: оно не зависит от базиса, в котором записана матрица формы.*

Доказательство. Как известно, для произвольной матрицы a размера $n\times m$ и произвольной матрицы b размера $m\times l$ выполняется неравенство $\operatorname{rk}(ab) \leqslant \min\{\operatorname{rk} a, \operatorname{rk} b\}$. Пусть (f_{ij}) и $(\hat{f}_{ij})$ — матрицы одной и той же квадратичной формы относительно базисов E и $\hat{E}$ соответственно, а (ε_{ij}) — матрица перехода от E к $\hat{E}$. Так как (ε_{ij}) — невырожденная матрица (см. теорему 9), то из формулы (52) следует, что $\operatorname{rk}(\hat{f}_{ij}) \leqslant \operatorname{rk}(f_{ij})$. Переписав (52) в виде $(f_{ij}) = (\varepsilon_{ij})^{-1}(\hat{f}_{ij})(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}}$ и проведя аналогичные рассуждения, получаем $\operatorname{rk}(f_{ij}) \leqslant \operatorname{rk}(\hat{f}_{ij})$. Значит, ранги матриц (f_{ij}) и $(\hat{f}_{ij})$ равны. ■

Диагонализация матрицы квадратичной формы в евклидовом пространстве

Зафиксируем в действительном евклидовом пространстве L ортонормированный базис E. Пусть в L определена квадратичная форма $\mathcal{K}$ и (f_{ij}) — ее матрица относительно базиса E. Понятно, что (f_{ij}) является еще и матрицей симметрического оператора в L, который обозначим φ. При переходе к другому базису $\hat{E}$ эта «связка» «квадратичная форма — линейный оператор» может нарушиться, поскольку матрица формы $\mathcal{K}$ и матрица оператора φ относительно $\hat{E}$ связаны с (f_{ij}), вообще говоря, разными формулами (34) и (52). Предположим, что «связка» не нарушается, тогда, сравнивая (34) и (52), замечаем, что для матрицы перехода от E к $\hat{E}$ выполняется равенство $(\varepsilon_{ij})^{-\mathrm{T}} = (\varepsilon_{ij})$, откуда $(\varepsilon_{ij})^{-1} = (\varepsilon_{ij})^{\mathrm{T}}$. Это означает, что (ε_{ij}) является ортогональной матрицей (см. замечание на стр. 53) и, следовательно, матрицей какого-нибудь ортогонального оператора ψ. Однако мы знаем, что базис $\hat{E}$ можно подобрать так, чтобы матрица симметрического оператора φ относительно $\hat{E}$ была диагональной. Значит, переход от базиса E к базису $\hat{E}$, относительно которого матрица формы $\mathcal{K}$ будет диагональной, осуществляется с помощью ортогонального оператора.

Пример 78. Пусть матрица квадратичной формы $\mathcal{K}$ относительно канонического базиса E имеет вид

$$(f_{ij}) = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Одновременно с этим (f_{ij}) является матрицей симметрического оператора φ относительно E, характеристический многочлен которого, как нетрудно найти, имеет вид $\mu(x) = -x^3 + 45x^2 - 648x + 2916$. Его корнями являются числа $x_1 = 9$ и $x_2 = 18$ — они являются собственными значениями оператора φ, причем $\operatorname{mult} 9 = 1$ и $\operatorname{mult} 18 = 2$. Найдем один и тот же диагональный вид, который примут матрица формы $\mathcal{K}$ и матрица оператора φ относительно нового ортонормированного базиса $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, и укажем этот базис.

Пусть $\boldsymbol{a} \in V_9$ и $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3\boldsymbol{e}_3$. Решая систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

находим, что $V_9 = \{(\gamma, 2\gamma, 2\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. Из условия $|\boldsymbol{a}| = 1$ получаем, что $\boldsymbol{a} = \pm\frac{1}{3}(1,2,2)$. Выбрав знак «+», положим $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Точно так же находим, что $V_{18} = \operatorname{Span}((-2,1,0),(-2,0,1))$. Векторы $\boldsymbol{b} = (-2,1,0)$ и $\boldsymbol{c} = (-2,0,1)$ «непропорциональны», поэтому образуют базис в V_{18}. Применяя процесс ортогонализации, находим ортонормированный базис в V_{18}, состоящий из векторов $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$ и $\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,-4,5)$. Матрица формы $\mathcal{K}$ и оператора φ относительно $\hat{E}$ имеет вид $\operatorname{diag}(9,18,18)$, а матрица

$$(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{1\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

как можно убедиться, ортогональна. $\diamond$

Будем говорить, что матрица квадратичной формы имеет *нормальный* вид, если она диагональная и среди ее матричных элементов главной диагонали нет чисел, отличных от 1, -1 и 0.

Пример 79. Вернемся к примеру 78. Относительно базиса

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_1, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

матрица квадратичной формы $\mathcal{K}$ имеет нормальный вид $\operatorname{diag}(1,1,1)$. $\diamond$

Приведение матрицы квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа

Рассмотрим алгоритм приведения матрицы квадратичной формы к нормальному виду без использования скалярного произведения.

Теорема 40. *Пусть $\mathcal{K}$ — квадратичная форма в действительном n-мерном линейном пространстве L. Тогда в L существует базис, относительно которого матрица формы $\mathcal{K}$ имеет нормальный вид.*

Доказательство. Для тождественно равной нулю формы утверждение теоремы очевидно, поскольку относительно любого базиса матрица такой формы является нулевой матрицей, т.е. матрицей $\operatorname{diag}(0,\ldots,0)$. Будем считать далее, что хотя бы для одного вектора $\boldsymbol{a} \in L$ выполняется равенство $\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

Выберем в L произвольный базис $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Пусть (f_{ij})

— матрица формы $\mathcal{K}$ относительно базиса E. Понятно, что $(f_{ij}) \in$ $\in SM(n,\mathbb{R})$ и не все элементы матрицы (f_{ij}) равны нулю. Если все матричные элементы главной диагонали равны нулю, то существует отличный от нуля элемент f_{pq}, где $p < q$. Тогда получаем матрицу $c(f_{ij})c^{\mathrm{T}}$ формы $\mathcal{K}$ относительно некоторого нового базиса, где

$$c = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{p-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_{q-p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_{n-q} \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали этой матрицы имеются по меньшей мере два элемента, отличные от нуля — они находятся в строках с номерами p и q. Таким образом, всегда можно считать, что в матрице (f_{ij}) не все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны нулю.

Если в матрице (f_{ij}) элемент f_{11} равен нулю, то существует $f_{ss} \neq 0$. Тогда получаем матрицу $c(f_{ij})c^{\mathrm{T}}$ формы $\mathcal{K}$ относительно некоторого нового базиса, где

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_{s-2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_{n-s} \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элемент, расположенный в первой строке и первом столбце, отличен от нуля. Таким образом, всегда можно считать, что в матрице (f_{ij}) выполняется равенство $f_{11} \neq 0$.

При этом условии получим теперь матрицу $c(f_{ij})c^{\mathrm{T}}$ формы $\mathcal{K}$ относительно некоторого нового базиса, где

$$c = \begin{pmatrix} |f_{11}|^{-1/2} & 0 \\ l & \mathcal{E}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad l = \begin{pmatrix} -f_{12}/f_{11} \\ -f_{13}/f_{11} \\ \dots \\ -f_{1n}/f_{11} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет вид
$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign} f_{11} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где b — симметрическая матрица размера $(n-1) \times (n-1)$. Если b является нулевой матрицей, то доказательство теоремы завершено. В противном случае повторяем те же действия, которые описаны выше, но к матрице b и т. д.

В итоге мы получим матрицу

$$\begin{gathered}\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0) = c_m c_{m-1} \ldots c_1 \, (f_{ij}) c_1^{\mathrm{T}} \ldots c_m^{\mathrm{T}}, \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{1, -1\},\end{gathered} \tag{53}$$

формы $\mathcal{K}$ относительно нового базиса $\hat{E}$, матрица перехода к которому от базиса E имеет вид $c_1 \ldots c_m$ — это можно увидеть, переписав (53) в виде

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0) = c_m c_{m-1} \ldots c_1 \, (f_{ij}) [c_m c_{m-1} \ldots c_1]^{\mathrm{T}}$$

и сравнив получившееся с формулой (52) (здесь $c_1, \ldots, c_m$ — матрицы, описанные в ходе доказательства). ■

Пример 80. Пусть относительно некоторого базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ матрица квадратичной формы $\mathcal{K}$ имеет вид

$$(f_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все матричные элементы главной диагонали равны нулю и $f_{12} \neq 0$, то с помощью матрицы перехода

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем матрицу

$$(f_{ij}^{(1)}) = c_1 (f_{ij}) c_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2.5 & 4 \\ 0 & 1 & 5.5 & 2 \\ 2.5 & 5.5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

формы $\mathcal{K}$ относительно нового базиса $E^{(1)}$. С помощью матрицы перехода

$$c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем матрицу

$$(f_{ij}^{(2)}) = c_2(f_{ij}^{(1)})c_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5.5 & 2 \\ 0 & 5.5 & 6.25 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

формы $\mathcal{K}$ относительно нового базиса $E^{(2)}$. Полагая

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем матрицу

$$(f_{ij}^{(3)}) = c_3(f_{ij}^{(2)})c_3^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26.25 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

формы $\mathcal{K}$ относительно нового базиса $E^{(3)}$. С помощью матрицы перехода

$$c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{105}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{\sqrt{105}} & 1 \end{pmatrix}$$

получаем

$$(f_{ij}^{(4)}) = c_4(f_{ij}^{(3)})c_4^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1324}{105} \end{pmatrix}.$$

Наконец, полагая $c_5 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_3 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{105}{1324}} \end{pmatrix}$, получаем матрицу $(f_{ij}^{(5)}) =$ $= \mathrm{diag}(-1, 1, -1, 1)$ формы $\mathcal{K}$ относительно базиса $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3, \hat{\boldsymbol{e}}_4\}$, который получается из E с помощью матрицы перехода

$$c_5c_4c_3c_2c_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{105}} & -\frac{8}{\sqrt{105}} & \frac{2}{\sqrt{105}} & 0 \\ \frac{129}{\sqrt{139020}} & \frac{251}{\sqrt{139020}} & -\frac{16}{\sqrt{139020}} & \sqrt{\frac{105}{1324}} \end{pmatrix}.$$

Иными словами,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2,$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 = -\frac{3}{\sqrt{105}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{8}{\sqrt{105}}\boldsymbol{e}_2 - \frac{2}{\sqrt{105}}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_4 = \frac{129}{\sqrt{139020}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{251}{\sqrt{139020}}\boldsymbol{e}_2 - \frac{16}{\sqrt{139020}}\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{\frac{105}{1324}}\boldsymbol{e}_4.$$

$\diamond$

Приведение матрицы квадратичной формы к нормальному виду методом Якоби

Пусть (f_{ij}) — матрица квадратичной формы $\mathcal{K}$, определенной в линейном пространстве L, относительно базиса $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, причем для любого $s \in \{1, \ldots, \}$ выполняются неравенства

$$\Delta_s \equiv \det \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{s1} & \ldots & f_{ss} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{54}$$

Определители $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ и $\Delta_n = \det(f_{ij})$ называют *главными минорами*. Для удобства положим $\Delta_0 = 1$. Обозначим $\mathcal{F}$ билинейную форму, полярную для формы $\mathcal{K}$.

Рассмотрим в L другой базис $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$, векторы которого линейно выражаются через векторы базиса E по формулам $\hat{\boldsymbol{e}}_j = \varepsilon_{j1}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \varepsilon_{jj}\boldsymbol{e}_j$, т.е. матрица перехода от E к $\hat{E}$ имеет нижний треугольный вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0\ldots & 0 & \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \varepsilon_{n3} & \ldots & \varepsilon_{nn} \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Пусть также для всякого $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняются условия

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_j) = \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_j) = \ldots = \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_{j-1}, \hat{\boldsymbol{e}}_j) = 0, \tag{56}$$
$$\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_j, \hat{\boldsymbol{e}}_j) = 1. \tag{57}$$

Если $j = 1$, из (57) получаем

$$1 = \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_1) = \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \varepsilon_{11}\boldsymbol{e}_1) = \varepsilon_{11}\mathcal{K}(\boldsymbol{e}_1),$$

откуда $\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{\mathcal{K}(\boldsymbol{e}_1)} = \dfrac{1}{\Delta_1} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Если $j = 2$, из (56) и (57) получаем

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_2) = \varepsilon_{21}\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1) + \varepsilon_{22}\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 1, \\ 1, & \text{если } i = 2. \end{cases}$$

Это равенство можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_{21}\mathcal{K}(\boldsymbol{e}_1) + \varepsilon_{22}\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0, \\ \varepsilon_{21}\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + \varepsilon_{22}\mathcal{K}(\boldsymbol{e}_2) = 1. \end{cases}$$

Так как в силу (54) определитель Δ_2 этой системы не равен нулю, то она имеет единственное решение, найти которое можно по формулам Крамера:

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}{\Delta_2}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Продолжая так и далее, мы найдем все матричные элементы нижней треугольной матрицы перехода (55), находящиеся не выше главной диагонали. При этом для всех $s \in \{1, \ldots, n\}$ получим $\varepsilon_{ss} = \dfrac{\Delta_{s-1}}{\Delta_s}$.

Обозначим $(\hat{f}_{ij})$ матрицу формы $\mathcal{K}$ относительно нового базиса $\hat{E}$.

Теорема 41. $(\hat{f}_{ij}) = \operatorname{diag}\left(\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}, \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}, \ldots, \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)$.

Доказательство. В самом деле, при $i < j$ в силу (56)

$$\hat{f}_{ij} = \mathcal{F}(\hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_j) = \sum_{s=1}^{i} \varepsilon_{is} \underbrace{\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_j)}_{=0} = 0,$$

т.е. матричные элементы в $(\hat f_{ij})$, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Так как $(\hat f_{ij})$ — симметрическая матрица, то равны нулю также все матричные элементы выше главной диагонали. Кроме того, в силу (56) и (57)

$$\hat f_{jj} = \mathcal{K}(\hat{\boldsymbol e}_j) = \mathcal{F}\left(\sum_{s=1}^{j} \varepsilon_{js}\boldsymbol e_s, \hat{\boldsymbol e}_j\right) =$$
$$= \sum_{s=1}^{j-1} \varepsilon_{js} \underbrace{\mathcal{F}(\boldsymbol e_s, \hat{\boldsymbol e}_j)}_{=0} + \varepsilon_{jj} \underbrace{\mathcal{F}(\boldsymbol e_j, \hat{\boldsymbol e}_j)}_{=1} = \varepsilon_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}.$$

■

Перейдем теперь от базиса $\hat E$ к базису $\tilde E = \{\tilde{\boldsymbol e}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol e}_n\}$ по формулам $\tilde{\boldsymbol e}_i = \breve\varepsilon_{ii}\boldsymbol e_i$, где

$$\breve\varepsilon_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat f_{ii} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|\hat f_{ii}|}}, & \text{если } \hat f_{ii} \neq 0, \end{cases}$$

получим наконец базис, относительно которого матрица $(\tilde f_{ij})$ квадратичной формы $\mathcal{K}$ имеет нормальный вид

$$(\tilde f_{ij}) = \operatorname{diag}\left(\operatorname{sign}\frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \operatorname{sign}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \dots, \operatorname{sign}\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right). \tag{58}$$

В отличие от метода Лагранжа, который можно использовать для любой матрицы квадратичной формы, метод Якоби можно использовать только при выполнении условий (54). Так, для квадратичной формы из примера 80 метод Якоби неприменим, поскольку ее главный минор Δ_1 равен нулю.

Пример 81. Пусть квадратичная форма $\mathcal{K}$ задана в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ и ее матрица относительно канонического базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все ее главные миноры не равны нулю: $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -13$, $\Delta_3 = -10$ и $\Delta_4 = 883$. Согласно теореме 41, относительно некоторого базиса $\hat E = \{\hat{\boldsymbol e}_1, \hat{\boldsymbol e}_2, \hat{\boldsymbol e}_3, \hat{\boldsymbol e}_4\}$ в $\mathbb{R}^4$ матрица формы $\mathcal{K}$ имеет вид

$\operatorname{diag}\left(1, -\dfrac{1}{13}, \dfrac{13}{10}, -\dfrac{10}{883}\right)$. Методом Якоби найдем базис $\hat{E}$, а потом и базис $\tilde{E} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3, \tilde{\boldsymbol{e}}_4\}$, относительно которого матрица формы $\mathcal{K}$ имеет нормальный вид $\operatorname{diag}(1, -1, 1, -1)$.

Пусть, как обычно, (ε_{ij}) — матрица перехода от E к $\hat{E}$. Тогда ее матричные элементы главной диагонали, если спускаться сверху вниз, равны $1, -\dfrac{1}{13}, \dfrac{13}{10}, -\dfrac{10}{883}$ (см. доказательство теоремы 41). Из формул (56) и (57) получается, что

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}{\Delta_2} = \frac{3}{13},$$
$$\varepsilon_{31} = \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) - \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)\mathcal{K}(\boldsymbol{e}_2)}{\Delta_3} = \frac{3 \cdot 0 - (-2) \cdot 1}{-10} = -\frac{1}{5},$$
$$\varepsilon_{32} = \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) - \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\mathcal{K}(\boldsymbol{e}_1)}{\Delta_3} = \frac{3 \cdot (-2) - 0 \cdot 1}{-10} = -\frac{3}{5}$$

Здесь значения билинейной формы $\mathcal{F}$, полярной для $\mathcal{K}$, можно вычислить, в частности, по формуле (51): например,

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (1\,0\,0\,0) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Далее,

$$\varepsilon_{41} = -\frac{\det \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4) \\ \mathcal{K}(\boldsymbol{e}_2) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) & \mathcal{K}(\boldsymbol{e}_3) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \end{pmatrix}}{\Delta_4} = \frac{78}{883},$$
$$\varepsilon_{42} = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathcal{K}(\boldsymbol{e}_1) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4) \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) & \mathcal{K}(\boldsymbol{e}_3) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \end{pmatrix}}{\Delta_4} = \frac{56}{883},$$
$$\varepsilon_{43} = -\frac{\det \begin{pmatrix} \mathcal{K}(\boldsymbol{e}_1) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4) \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & \mathcal{K}(\boldsymbol{e}_2) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \end{pmatrix}}{\Delta_4} = \frac{103}{883}.$$

Векторы базиса $\hat{E}$ имеют вид:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = 1\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0),$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{3}{13}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{13}\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{3}{13}, -\frac{1}{13}, 0, 0\right),$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 = (-0.2, 0.6, 1.3, 0), \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_4 = \frac{1}{883}(78, 56, 103, -10).$$

Тогда базис $\tilde{E}$ состоит из векторов

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = (1, 0, 0, 0), \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, -1, 0, 0),$$
$$\tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{130}}(-2, 6, 13, 0), \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_4 = \frac{1}{\sqrt{8830}}(78, 56, 103, -10).$$

$\diamond$

Закон инерции квадратичных форм

Пусть матрица квадратичной формы имеет нормальный вид. Число ее матричных элементов, равных единице, назовем *положительным индексом инерции* этой формы. Число матричных элементов, равных минус единице, назовем *отрицательным индексом инерции.* Понятно, что сумма этих индексов равна рангу квадратичной формы. Упорядоченную пару, состоящую из положительного и отрицательного индекса, назовем *сигнатурой* квадратичной формы. Так, для квадратичной формы, нормальный вид которой найден в примере 80, положительный индекс равен отрицательному и пара $(2, 2)$ является сигнатурой.

Теорема 42. *Определения положительного и отрицательного индексов инерции, а значит, и сигнатуры квадратичной формы корректны: они не зависят от базиса, относительно которого матрица формы имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0)$ и $\operatorname{diag}(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_l, 0, \ldots, 0)$ — матрицы квадратичной формы $\mathcal{K}$, определенной в линейном пространстве L, относительно базисов $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ соответственно. Так как ранги этих матриц равны соответственно k и l, то $k = l$ (см. теорему 39). Не теряя общности, будем считать, что в обоих матрицах на главной диагонали сверху вниз сначала расположены положительные числа (если они есть), затем отрицательные (если они есть), а в конце нули (если они есть).

Обозначим k_1 число единиц на главной диагонали первой из этих матриц, а k_2 число единиц на главной диагонали второй матрицы. Предположим, что $k_1 \neq k_2$. Без потери общности можно считать, что $k_1 > k2$. Пусть $V_1 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_1})$ и $V_2 = \mathrm{Span}(\hat{\boldsymbol{e}}_{k_2+1}, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n)$.

Предположим, что сумма $V_1 + V_2$ прямая. Тогда по формуле Грассмана $\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 = k_1 + (n - k_2) > n$, чего не может быть в силу теоремы 7. Значит, $V_1 \cap V_2 \neq \{\boldsymbol{o}\}$ и существует вектор $\boldsymbol{a}$ принадлежащий каждому из линейных подпространств V_1 и V_2 и отличный от нулевого вектора. Обозначим $\mu_1, \ldots, \mu_{k_1}, 0, \ldots, 0$ и $0, \ldots, 0, \nu_{k_2+1}, \ldots, \nu_n$ его координаты относительно базисов E и $\hat{E}$ соответственно. Тогда

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) = \underbrace{\mu_1^2 + \ldots + \mu_{k_1}^2}_{\text{используем базис } E} = \underbrace{-\nu_{k_2+1}^2 - \ldots - \nu_n^2}_{\text{используем базис } \hat{E}},$$

откуда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ — получили противоречие. Таким образом, $k_1 = k_2$. ■

Знакоопределенные квадратичные формы

Квадратичную форму $\mathcal{K}$ называют *положительно определенной*, если для всякого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется неравенство $\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) > 0$, и *отрицательно определенной*, если форма $-\mathcal{K}$ положительно определена.

Пусть $\mathcal{K}$ — квадратичная форма в n-мерном линейном пространстве L, (f_{ij}) — матрица этой формы $\mathcal{K}$ относительно некоторого базиса и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — главные миноры указанной матрицы.

Теорема 43. *Форма $\mathcal{K}$ положительно определена в том и только том случае, если $\Delta_1, \ldots, \Delta_n > 0$.*

Доказательство. Если $\Delta_1, \ldots, \Delta_n > 0$, то по теореме 41 в L существует базис $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$, относительно которого матрица формы $\mathcal{K}$ имеет вид $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$. Пусть $\boldsymbol{a} \in L$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{a} = \gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{e}_n$. Тогда в силу (50) $\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) = \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_n^2 > 0$.

Обратно, пусть $\mathcal{K}$ — положительно определенная квадратичная форма. Тогда существует базис $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$, относительно которого матрица формы принимает вид (58). Для произвольного вектора $\boldsymbol{a} \in L$, координатами которого относительно базиса $\hat{E}$ являются числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, в силу (50) имеет место равенство

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\gamma_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\gamma_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\gamma_n^2.$$

Тогда для вектора $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = 1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + 0\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + 0\hat{\boldsymbol{e}}_n$ находим $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_1) = \dfrac{1}{\Delta_1}$, откуда $\Delta_1 > 0$. Поскольку $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_2) = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ и $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_2) > 0$, то $\Delta_2 > 0$ и т. д. ■

Теорема 44. *Форма $\mathcal{K}$ отрицательно определена в том и только том случае, если для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется равенство* $\operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$.

Доказательство. Если $\operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$, то по теореме 41 в L существует базис $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$, относительно которого матрица формы $\mathcal{K}$ имеет вид $\operatorname{diag}(-1, \ldots, -1)$. Пусть $\boldsymbol{a} \in L$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{a} = \gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{e}_n$. Тогда в силу (50) $\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) = -(\gamma_1^2 + \ldots + \gamma_n^2) < 0$.

Обратно, пусть $\mathcal{K}$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Тогда существует базис $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$, относительно которого матрица формы принимает вид (58). Если $\boldsymbol{a} \in L$ и координатами вектора $\boldsymbol{a}$ относительно базиса $\hat{E}$ являются числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, то в силу (50) имеем

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{a}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\gamma_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\gamma_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\gamma_n^2.$$

Так как $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_1) = \dfrac{1}{\Delta_1}$ и $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_1) < 0$, то $\Delta_1 < 0$. Поскольку $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_2) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$ и $\mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{e}}_2) < 0$, то $\Delta_2 > 0$ и т. д. ■

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2006.

[2] *Гельфанд, И. М.* Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд. — М.: Факториал, 1998.

[3] *Головина, Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л.И. Головина. — М.: Наука, 1979.

[4] *Шилин, И. А.* Введение в алгебру. Группы / И.А. Шилин. — СПб.: Лань, 2012.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Приведите пример бесконечномерного линейного пространства; конечного линейного пространства; бесконечного линейного пространства размерности 7; конечного линейного пространства размерности 11.

2. Чему равен определитель матрицы Грама ортогональной системы векторов? ортонормированной системы?

3. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{f} = 6 - 4x - 3x^2$ в линейном пространстве многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами, заданных на отрезке $[-1; 1]$, относительно базиса, состоящего из первыхтрех многочленов Лежандра.

4. Пусть линейное пространство и его базис заданы так же, как в вопросе 3. Найдите матрицу, ядро и образ линейного оператора, который отображает произвольный многочлен $\boldsymbol{h}$ в многочлен $2\boldsymbol{h}' - 3\boldsymbol{h}$ (штрих обозначает производную).

5. В некотором базисе $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ матрица квадратичной формы $\mathcal{K}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$. Методом Якоби найдите ее канонический вид и укажите базис, в котором форма принимает этот вид.

6. В некотором базисе линейный оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите собственные значения этого оператора и для каждого собственного значения λ укажите линейное подпространство V_λ. Существует ли базис, в котором матрица этого линейного оператора диагональна? Если да, укажите эту матрицу и базис.

7. Дана ортогональная матрица $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Найдите x, y и z.

8. В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два линейных подпространства $V = \operatorname{Span}((1, -1, 1), (1, 0, 1))$ и $\hat{V} = \operatorname{Span}((2, 1, 3), (-1, 1, -1), (3, 3, 5))$. Найдите $V + \hat{V}$, $V \cap \hat{V}$, $\dim V$, $\dim \hat{V}$, $\dim V + \hat{V}$ и $\dim V \cap \hat{V}$.

9. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (со скалярным произведением $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$) дано линейное подпространство $V = \operatorname{Span}((1, 2, 1), (-1, -1, 0))$. Найдите его ортогональное дополнение.

Учебное издание

Шилин Илья Анатольевич

ЛИНЕЙНЫЕ И ПРЕДГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Учебное пособие

Редактор издательства *Т. А. Феоктистова*
Компьютерная верстка *М. К. Петушкеева*