Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 45–54

В. Н. Орлов, Р. В. Разакова

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрен класс нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью шестой степени. Доказана теорема существования и единственности решения в области аналитичности. Построено аналитическое приближенное решение. Предложен вариант оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных. Проведен численный эксперимент.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, область аналитичности, априорные оценки, аналитическое приближенное решение, подвижная особая точка.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.005

УДК: 517.95:515.172.22

Введение. Отметим некоторые публикации, которые подтверждают наличие прикладного характера нелинейных дифференциальных уравнений в механике вязкой несжимаемой жидкости [1, 2] и описания автомодельного решения уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления (плоскопараллельное течение в слое смешения) [3, 4], в области устойчивости установившегося свободного падения авторотирующего тяжелого тела в сопротивляющейся среде [5]. В работах [6]–[7] даются приложения нелинейных дифференциальных уравнения различных порядков в решении задач физики и строительной механики. В [8]–[9] рассматриваются строительные конструкции консольного типа. В работе [16] рассматривается задача для конструкций из эластичной балки, математическая модель, которая представляется неявным дифференциальным уравнением (1) с краевыми условиями (2):

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \tag{1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u(0) = u'(0) = u'(1) = 0. \tag{2}$$

Орлов Виктор Николаевич
`e-mail:` orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Разакова Рио-Рита Вадимовна
`e-mail:` chernova_riorita@mail.ru, магистр, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.01.2020

В случае, если указанная функция $f(t,u(t))$ уравнения (1) является линейной относительно искомой функции, тогда трудностей в решении не возникает, т.к. имеется возможность использовать классический метод решения поставленной задачи. Если неявная функция оказывается нелинейной относительно искомой функции, тогда для решения указанной задачи в работе [7] применяемый метод верхних и нижних границ не может быть реализован, так как вызывает ряд вопросов: 1) какова связь между методом верхних и нижних границ с подвижными особыми точками? 2) гарантирует ли метод верхних и нижних границ отсутствие подвижных особых точек? 3) предложенный в работе [7] метод дает лишь доказательство факта существования решения задачи (1)–(2) без указания области.

В настоящей работе предлагается другой вариант решения уравнения (1) в области аналитичности, являющийся модификацией классической теоремы Коши. Предлагаемая технология позволяет доказать не только существование и единственность решения, а также получить область, где работает эта теорема, и построить структуру аналитического приближенного решения рассматриваемой задачи. Указанная технология успешно применяется для ряда нелинейных дифференциальных уравнений в работах [10]–[11]. В настоящей работе дано развитие указанного метода для рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения, а также осуществляется построение приближенного решения в области аналитичности, получены априорные оценки погрешности.

Результаты исследования и их обсуждение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(x)y^6 + a_1(x)y^5 + a_2(x)y^4 + a_3(x)y^3 + a_4(x)y^2 + a_5(x)y^1 + a_6(x), \tag{3}$$

которое с помощью замены переменной

$$y = \sqrt[6]{\frac{1}{A}}\, z(x) - \frac{a_1}{6a_0} \tag{4}$$

приводится к нормальной форме

$$z''' = z^6 + r(x), \tag{5}$$

при условиях

$$\begin{cases} A = \text{const} \neq 0, \\ a_2(x) = 0,\ a_3(x) = 0,\ a_4(x) = 0,\ a_5(x) = 0,\ r(x) = -\dfrac{5a_1^6}{6^6 a_0^5} + a_6. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^6 + r(x), \tag{7}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть*

1) $r(x) \in C^\infty$ *в области* $|x - x_0| < \rho_1$, $0 < \rho_1 = \text{const}$*;*

2) $\exists M_n : \dfrac{|r^n(x_0)|}{n!} \leqslant M_n$, $M_n = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. (9)

Тогда существует единственное решение задачи Коши (7)–(8) в виде

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n (x - x_0)^n, \tag{10}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, *где*

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\right\}, \quad M = \max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup\frac{r^n(x_0)}{n!}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Доказательство. На основании условий теоремы следует

$$r(x) = \sum_0^\infty B_n(x - x_0)^n. \tag{11}$$

Подставляем (10), (11) в (7) и получаем:

$$\sum_0^\infty C_n n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3} = \sum_0^\infty C_n^{***}(x-x_0)^n + \sum_0^\infty B_n(x-x_0)^n, \tag{12}$$

$$\sum_0^\infty C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}, \quad \sum_0^\infty C_n^{**} = \sum_0^n C_i^* C_{n-i}^*, \quad \sum_0^\infty C_n^{***} = \sum_0^\infty C_i^* \sum_0^\infty C_{n-i}^{**},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Из соотношения (12) следует рекуррентное выражение для однозначного определения коэффициентов C_n:

$$C_n(n(n-1)(n-2)) = C_{n-3}^{***} + B_{n-3}, \tag{13}$$

$$C_3 = \frac{1}{6}(C_0^6 + B_0), \quad C_4 = \frac{1}{24}(C_0^6 + B_0), \quad C_5 = \frac{1}{60}(15C_0^4C_1^2 + 6C_0^5C_2 + B_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{120}(30C_0^4C_1C_2 + 18C_0^3C_1^3 + 6C_0^5C_3 + B_3) \leqslant \frac{1}{2}(M+1)^6, \ \dots,$$

C_0, C_1, C_2 — из начальных условий. Выражения получены с помощью программного комплекса MAPLE. На основе полученных выражений для коэффициентов строим гипотезу оценок этих коэффициентов C_n:

$$|C_{3k}| \leqslant \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, \quad |C_{3k+1}| \leqslant \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)},$$

$$|C_{3k+2}| \leqslant \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Проиллюстрируем доказательство оценок в случае $n = 3k$:

$$|C_{3k+3}| \leqslant \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}. \tag{14}$$

Из (13) следует

$$|C_{n+1}| = \left|\frac{C_{n-2}^{***} + B_{n-2}}{n(n+1)(n-1)}\right| \quad \Rightarrow \quad |C_{3k+3}| = \left|\frac{C_{3k-2}^{***} + B_{3k-2}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\left(\sum_{i=0}^{3k+1} C_{3k+1-i}^{**}C_i^* + B_{3k-2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\left|\sum_{i=0}^{3k+1}\left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} C_{3k+1-i-j}^* C_j^*\right) C_i^* + B_{3k-2}\right| =$$

$$= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} C_l \right) C_j^* \right) C_i^* + B_{3k-2} \right| =$$

$$= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} C_l \left(\sum_{l=1}^{l-j} C_l C_{j-l} \right) \right) \sum_{m=1}^{i} C_m C_{i-m} \right) + B_{3k-2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{(M+1)^{5k+1-i-j-l}}{(3k+1)3k(3k-1)} \frac{(M+1)^l}{l^*(l-1)^*(l-2)^*} \right) \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=0}^{i} C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\frac{(M+1)^{5k+1-i}}{1} \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{1}{(3k+1-i-j-l)^*(3k+1-i-j-l-1)^*(3k+1-i-j-l-2)^* l^*(l-1)^*(l-2)^*} \right) \times$$

$$\left. \left. \times \frac{1}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \sum_{m=0}^{i} C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \frac{(M+1)^{5k+1-i-j}}{1} \frac{3k+1-i-j+1}{(3k+1-i-j)^*(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-2)^* 2} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \sum_{m=0}^{i} C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left((M+1)^{5k+1-i} \sum_{j=0}^{3k+1-i} \frac{1}{(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-1)^* j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{i} C_{i-k} C_k + B_{3k-2} \right| \leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times$$

$$\times \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} (M+1)^{5k+1-i} \frac{3k+1-i+1}{(3k+1-i)(3k+1-i-2)2} \right) \sum_{k=0}^{i} C_{i-k} C_k + B_{3k-2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+1-i}}{3k+1-i} \left(\sum_{k=0}^{i} \frac{(M+1)^k (M+1)^{i-k+1}}{k^*(k-1)^*(k-2)^*(i-k)(i-k-1)(i-k-2)(i-2)} \right) + B_{3k-2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\left|\sum_{i=0}^{3k+1}\frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+1-i-2)^*(i-1)^*(i-2)^*}+B_{3k-2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}+M \leqslant \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)},$$

где

$$i^* = \begin{cases} 1, \ i=0, \\ i, \ i=1,2,3,\dots, \end{cases} \qquad (i-1)^* = \begin{cases} 1, \ i=1, \\ (i-1), \ i=0,2,3,\dots, \end{cases}$$

$$l^* = \begin{cases} 1, \ l=0, \\ l, \ l=1,2,3,\dots, \end{cases} \qquad (l-1)^* = \begin{cases} 1, \ l=1, \\ (l-1), \ l=0,2,3,\dots, \end{cases}$$

$$k^* = \begin{cases} 1, \ k=0, \\ k, \ k=1,2,3,\dots, \end{cases} \qquad (k-1)^* = \begin{cases} 1, \ k=1, \\ (k-1), \ k=0,2,3,\dots, \end{cases}$$

$$j^* = \begin{cases} 1, \ j=0, \\ j, \ j=1,2,3,\dots, \end{cases} \qquad (j-1)^* = \begin{cases} 1, \ j=1, \\ (j-1), \ j=0,2,3,\dots, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-j-l)^* = \begin{cases} 1, \ l=3k+1-i-j, \\ 3k+1-i-j-l, \ l\neq 3k+1-i-j, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-2)^* = \begin{cases} 1, \ i=3k+1, \\ 3k+1-i-2, \ i\neq 3k+1, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-l-1)^* = \begin{cases} 1, \ l=3k-i-j, \\ 3k+1-i-j-l-1, \ l\neq 3k-i-j, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-l-2)^* = \begin{cases} 1, \ l=3k+1-i-j, \\ 3k+1-i-j-l-2, \ l\neq 3k+1-i-j, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-j)^* = \begin{cases} 1, \ j=3k+1-i, \\ 3k+1-i-j, \ j\neq 3k+1-i, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-j-1)^* = \begin{cases} 1, \ j=3k-i, \\ 3k+1-i-j-1, \ j\neq 3k-i, \end{cases}$$

$$(3k+1-i-j-2)^* = \begin{cases} 1, \ j=3k+1-i, \\ 3k+1-i-j-2, \ j\neq 3k+1-i. \end{cases}$$

Аналогично доказываем оценки для вариантов $n=3k+1$, $n=3k+2$.

Рассмотрим мажорирующий ряд для ряда (13):

$$\sum_0^\infty V_n(x-x_0)^n = \sum_{k=1}^\infty V_{3k}(x-x_0)^{3k}+\sum_{k=1}^\infty V_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1}+\sum_{k=1}^\infty V_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2}. \quad (15)$$

Для каждого ряда правой части соотношения (15) получаем область сходимости и выражение $|x-x_0| \leqslant 1/\sqrt[3]{(M+1)^5}$. Окончательно для ряда (10) получаем область сходимости, где $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1/\sqrt[3]{(M+1)^5}\}$. □

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x-x_0)^n. \quad (16)$$

Теорема 2. *Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для аналитического приближенного решения (16) задачи (7)–(8) в области* $|x-x_0| < \rho_2$ *справедлива оценка погрешности*

$$\Delta y_N(x) \leqslant \frac{M(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)}+\frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)$$

в случае $N+1=3k$,

$$\Delta y_N(x) \leqslant \frac{M(M+1)^{\frac{5N}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)}+\frac{|x-x_0|}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|x-x_0|^2}{N(N+1)(N+2)}\right)$$

в случае $N+1=3k+1$, *а для варианта* $N+1=3k+2$ *оценка имеет вид*

$$\Delta y_N(x) \leqslant \frac{M(M+1)^{\frac{5(N-1)}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{(N-1)(N-2)(N-3)}+\frac{|x-x_0|}{N(N-1)(N-2)}+\frac{|x-x_0|^2}{N(N-1)(N+1)}\right),$$

где

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\right\}, \quad 0<\rho_2=\mathrm{const},$$
$$M=\max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup\frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}, \quad n=0,1,2,\dots .$$

Доказательство. Докажем теорему для случая $N+1=3k$. Применяя классический подход, с учетом оценок для C_n имеем:

$$\Delta y_N(x)=|y(x)-y_N(x)|=\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_n(x-x_0)^n\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_{3k}(x-x_0)^{3k}\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1}\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{N+1}^{\infty}\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)}|x-x_0|^{3k}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)}|x-x_0|^{3k+1}+$$
$$+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)}|x-x_0|^{3k+2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)}|x-x_0|^{3k}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{5k}|x-x_0|^{3k})+$$
$$+\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)}|x-x_0|^{3k+1}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{5k}|x-x_0|^{3k})+$$

$$+\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)}|x-x_0|^{3k+2}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{5k}|x-x_0|^{3k})=$$

$$=\frac{(M+1)^{5k}}{1-M(M+1)|x-x_0|^{3k}}|x-x_0|^{3k}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)}+\frac{|x-x_0|}{3k(3k-1)(3k+1)}+\frac{|x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)}\right)=$$

$$=\frac{(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)}+\frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)$$

при $N=3$. Аналогичным образом получаем структуры оценок для вариантов $N+1=$ $=3k+1$, $N+1=3k+2$ в области $|x-x_0|<\rho_2$, где

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\right\},\quad M=\max\left\{|y_0|,|y_1|,|y_2|,\sup\frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\},$$

$$n=0,1,2,\ldots.$$ □

Пример. Рассмотрим задачу Коши (7)–(8), $x_0=0$, $y(x_0)=y_0=0{,}5$, $y'(x_0)=y_1=$ $=1$, $y''(x_0)=y_2=1$, $r(x)=0$. По исходным данным $M=1$, в структуре приближенного решения $N=5$, радиус $\rho_2=0{,}50876$, $x_1=1{,}4$; $x_1\in|x-x_0|<\rho_2$. Числовые характеристики аналитического приближенного решения рассматриваемого примера представлены в табл. 1, где $y_5(x_1)$ — приближенное решение; $\Delta y_5(x_1)$ — апостериорная оценка; Δ_1 — априорная оценка. Для $\Delta_1=0{,}005$ по теореме 2 определяем $N=16$.

x_1	$y_5(x_1)$	$\Delta y_5(x_1)$	Δ_1
1,4	0,980	0,069895	0,005

Таблица 1. Числовые характеристики аналитического приближенного решения

Слагаемые с $N=6$ по 16 в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon=5\cdot10^{-3}$, следовательно, приближенное решение $y_5(x_1)$ имеет погрешность $\varepsilon=0{,}005$.

Заключение. В настоящей работе дается развитие метода аналитического приближенного решения для рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений. Проведенный численный эксперимент подтверждает теоретические результаты. Апостериорная оценка погрешности аналитического приближенного решения позволяет оптимизировать априорную оценку погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Москва, Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 470 с.

[2] Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. Москва: Изд-во “НАУКА”. Гл. редакция физ.-мат. лит., 1970.

[3] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: пер. с нем. Г. А. Вольперта / под ред. В. С. Авдуевского, В. Я. Лихушина. Москва: Изд-во иностр. лит., 1956. 528 с.

[4] Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Суков А. И. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 7. С. 1158–1178.
[5] Привалов В. А., Самсонов В. А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58, № 2. С. 37–48.
[6] Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 9–10.
[7] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514.
[8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 456 (2018) 012122 IOP Publishing. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
[9] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012129 IOP Publishing. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
[10] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 365. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
[11] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области (WoS) // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. DOI: 10.14498/vsgtu1727 (http:mi.mathnet.ru/vsgtu1727).

V. N. Orlov, R. V. Razakova

AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE ONE CLASS THIRD ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE ANALYTICITY DOMAIN

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. There is a class of third-order nonlinear differential equations with polynomial right part of the sixth degree considered in the paper. The existence and uniqueness theorem of a solution in the domain of analyticity is proved by authors. There is an analytical approximate solution which was constructed by V. Orlov and R. Razakova. A variant of optimization of a priori estimates using posterior ones is proposed by authors. A numerical experiment is carried out too.

Keywords: nonlinear differential equation, domain of analytic, a priori estimates, approximate analytical solution, moving singular point.

REFERENCES

[1] Lyapunov A. M. The general task of the movement stability. Moscow, Leningrad: Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. 470 p. (in Russian).

[2] Barbashin E. A. Lyapunov functions. Moscow: Izdatel'stvo "NAUKA". Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1970. (in Russian).

[3] Schlichting G. Theory of the boundary layer: per. s nem. G. A. Vol'perta / Ed. by V. S. Avduyevskij, V. Y. Likhushin. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1956. 528 p. (in Russian).

[4] Dyshko A. L., Konyukhova N. B., Sukov A. I. About the singular problem for a nonlinear ordinary differential equation of the third order arising in hydrodynamics // Zhurnal vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. 2007. Vol. 47, no. 7. P. 1158–1178. (in Russian).

[5] Privalov V. A., Samsonov V. A. Comparison of stability properties of two autorotation modes // Izv. RAN. PMM. 1994. Vol. 58, no. 2. P. 37–48. (in Russian).

[6] Samodurov A. A. An ordinary method for determining the delay time of a supersonic bosonic avalanche // Dokl. AN BSSR. 1985. Vol. 29, no. 1. P. 9–10. (in Russian).

[7] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 456 (2018) 012122 IOP Publishing. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.

[8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). 2019. Vol. 97, 03031. DOI: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031.

[9] Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). 2019. Vol. 97, 03036. DOI: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703036.

[10] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012127 IOP Publishing. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012127.

[11] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Razakova Rio-Rita Vadimovna, magister, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012129 IOP Publishing. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.

[12] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. no. 13. P. 93–104.

[13] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York: 1978. P. 129–145.

[14] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in rector core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee: 1974. P. 1–14.

[15] Axford R. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA-4514, UC-34).

[16] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514.

[17] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 365. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.

[18] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.

[19] Orlov V. N., Iv B. B. The existence theorem for the solution of one class of fourth-order nonlinear differential equations with polynomial right-hand side of the second degree in the neighborhood of a movable singular point // Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 980–986. (in Russian).

[20] Matveev N. M. Ordinary differential equations. SPb.: Spetsial'naya literatura, 1996. 37 p. (in Russian).

[21] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Investigation of the approximate solution of the second Penleve equation // Differentsial'nyye uravneniya. 1989. Vol. 25, no. 10. P. 1829–1832. (in Russian).

[22] Orlov V. N. Exact boundaries for the approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of the approximate value of a moving singular point in the complex domain // Vestnik Chuvashskogo gos. ped. un-ta im. I. YA. Yakovleva. Ser.: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. no. 2(8). P. 399–405. (in Russian).

[23] Orlov V. N., Leont'yeva T. Y. On the expansion of the domain for an approximate analytical solution of a class of second-order nonlinear differential equations in the complex domain (WoS) // Vestn. Sam. Gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2020. Vol. 24, no. 1. (in Russian) DOI: 10.14498/vsgtu1727 (http:mi.mathnet.ru/vsgtu1727).